ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

№ 9 1948

В. А. ФЛОРИН

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЕЙШИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ ВОДОНАСЫЩЕННОЙ ЗЕМЛЯНОЙ СРЕДЫ[1]

Представлено академиком *Л. С. Лейбензоном*

Рассмотрим сначала одноразмерную задачу консолидации двухфазной земляной среды. Полагая материал скелета грунта и заполняющую его поры жидкость (воду) несжимаемыми, имеем уравнения неразрывности для каждой из фаз

$$\frac{\partial m}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}=0\,, \tag{2}$$

где m и n — содержание жидкой и твердой фаз в единице объема земляной среды, а u и v — „скорости фильтрации" соответствующих фаз.

Вследствие подвижности скелета грунта принимаем зависимость Дарси-Герсеванова в виде

$$u-\varepsilon v=-k\,\frac{\partial H}{\partial x}\,, \tag{3}$$

где ε — коэффициент пористости, k — коэффициент фильтрации жидкости и H — гидродинамический напор.

Учитывая известные зависимости

$$m=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \text{ и } n=\frac{1}{1+\varepsilon}\,,$$

из уравнений (1) и (2) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}(u+v)=0,$$

откуда

$$u=u_0-v, \tag{4}$$

где u_0 — некоторая постоянная для всех точек среды скорость фильтрации жидкости, определяемая из условий каждой частной задачи.

[1] Доложено в семинаре Института механики АН СССР в мае 1948 г.

Тогда уравнение (3) можно представить в виде

$$-u_0+(1+\varepsilon)v=k\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{5}$$

Дифференцируя, находим

$$v\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+(1+\varepsilon)\frac{\partial v}{\partial x}=k\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{6}$$

Обозначим через σ и p напряжения в скелете грунта и давления в заполняющей его поры жидкости, соответствующие некоторому произвольному моменту времени t в точке, определяемой координатой x. Внешнюю нагрузку на верхней граничной плоскости обозначим через q и внешнее давление жидкости на эту плоскость через w. Объемный вес жидкости — через γ и объемный вес материала скелета грунта — через γ_c. Толщину уплотняемого слоя грунта обозначим через h. Ось x направим вертикально вверх, совмещая для определенности начало координат с нижней граничной плоскостью.

Из условия равновесия призмы, ограниченной верхней граничной плоскостью, двумя вертикальными плоскостями и произвольно расположенной на расстоянии x от начала координат нижней плоскостью, имеем

$$q+w+\gamma_c(h-x)+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(h-x)\gamma-\sigma-p=0,$$

или, обозначая вес взвешенного в жидкости скелета грунта через $\gamma_в$, получаем

$$q+w+\gamma_в(h-x)+\gamma(h-x)-\sigma-p=0. \tag{7}$$

Отсюда, учитывая известную зависимость

$$H=\frac{p}{\gamma}+x,$$

имеем

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}=-\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\gamma+\gamma_в\right)=-\left(\gamma\frac{\partial H}{\partial x}+\gamma_в\right),$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=-\gamma\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{dq}{dt}+\frac{dw}{dt}. \tag{8}$$

Имея в виду, что $\varepsilon=\varepsilon(\sigma)$ и $k=k(\varepsilon)$, находим

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}=\frac{d\varepsilon}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}=-\frac{d\varepsilon}{d\sigma}\left(\gamma\frac{\partial H}{\partial x}+\gamma_в\right), \tag{9}$$

$$\frac{\partial k}{\partial x}=\frac{dk}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}=-\frac{dk}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\sigma}\left(\gamma\frac{\partial H}{\partial x}+\gamma_в\right). \tag{10}$$

Учитывая уравнение (2), имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial n}{\partial t}=\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\frac{d\varepsilon}{d\sigma}\left(-\gamma\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{dq}{dt}+\frac{dw}{dt}\right). \tag{11}$$

Тогда, учитывая зависимости (5), (8); (9), (10) и (11), можно представить уравнение (6) в следующем виде:

$$\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}(q+w)+\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2\left[(k-(1+\varepsilon)\frac{dk}{d\varepsilon}\right]+$$

$$+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\gamma_в}{\gamma}\left[k+u_0\frac{\gamma}{\gamma_в}-(1+\varepsilon)\frac{dk}{d\varepsilon}\right]+\frac{k(1+\varepsilon)}{\gamma\frac{d\varepsilon}{d\sigma}}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\gamma_в}{\gamma}u_0=0\ . \quad (12)$$

Если обозначить через σ^* и p^* напряжения в скелете грунта и давления в заполняющей его поры жидкости, соответствующие моменту времени t и координате x, но только в предположении „мгновенной" консолидации грунта при соответствующих этому моменту времени внешних нагрузках q и w, то из зависимости (7) для состояния „мгновенной консолидации" имеем

$$q+w+\gamma_в(h-x)+\gamma(h-x)-\sigma^*-p^*=0\ . \quad (13)$$

Сопоставляя выражения (7) и (13), получаем

$$\sigma+p=\sigma^*+p^* \text{ или } \sigma+\gamma H=\sigma^*+\gamma H^*. \quad (14)$$

Дифференцируя выражение (13), находим

$$\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}(q+w)=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^*+p^*)=\frac{\partial H^*}{\partial t}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\sigma^*}{\partial t}\ .$$

В результате в уравнении (12) величины q и w могут быть заменены величинами H^* и σ^*.

Учитывая зависимости (13) и (14), можно также представить уравнение (12) в следующем виде:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\frac{1}{\gamma}\left[k-(1+\varepsilon)\frac{dk}{d\varepsilon}\right]\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2-\frac{\gamma_в}{\gamma}\left[k-u_0\frac{\gamma}{\gamma_в}-(1+\varepsilon)\frac{dk}{d\varepsilon}\right]\frac{\partial\sigma}{\partial x}+$$

$$+\frac{k(1+\varepsilon)}{\gamma\frac{d\varepsilon}{d\sigma}}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}=0. \quad (15)$$

Уравнение (12), равно как и уравнение (15), принадлежат к виду

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\alpha\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\beta\frac{\partial H}{\partial x}+\delta\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial F}{\partial t}=0, \quad (16)$$

где применительно к уравнению (12)

$$\alpha=k-(1+\varepsilon)\frac{dk}{d\varepsilon}=-(1+\varepsilon)^2\frac{d}{d\varepsilon}\frac{k}{1+\varepsilon},$$

$$\beta=\frac{\gamma_в}{\gamma}\alpha+u_0,$$

$$\delta=\frac{k(1+\varepsilon)}{\gamma\frac{d\varepsilon}{d\sigma}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=-\frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt}(q+w)+\frac{\gamma_в}{\gamma}u_0.$$

Уравнение (16) имеет большое значение при рассмотрении вопросов консолидации земляной среды и при исследовании неустановившегося фильтрационного режима в условиях деформируемого скелета грунта. Для случая пространственной задачи аналогичное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\alpha(\operatorname{grad} H)^2+\beta(\operatorname{grad} H, \operatorname{grad}\psi)+\delta\nabla^2 H+\frac{\partial F}{\partial t}=0, \tag{17}$$

где α, β, δ, ψ и $\frac{\partial F}{\partial t}$ — некоторые заданные функции от координат и времени.

Нетрудно показать, что при $\frac{\alpha}{\delta}=\mathrm{const}$ это уравнение, полагая

$$H=\frac{\delta}{\alpha}\ln(\varphi+C)+D, \tag{18}$$

где C и D — некоторые произвольные постоянные, может быть приведено к линейному

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\beta(\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)+\delta\nabla^2\varphi+\frac{\alpha}{\delta}(\varphi+C)\frac{\partial F}{\partial t}=0. \tag{19}$$

Если же, кроме того, функция F, как, например, в случае одноразмерной задачи консолидации, не зависит от координат, а только от времени, то, принимая

$$H=\frac{\delta}{\alpha}\ln(\varphi+C)-F+D, \tag{20}$$

можно привести уравнение (17) к такому виду:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\beta(\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)+\delta\nabla^2\varphi=0. \tag{21}$$

Если в соответствии с обычными условиями плоской или пространственной задачи консолидации земляной среды считать функции $\psi(x, y, z, t)$ и $F(x, y, z, t)$ известными, а отношения $\frac{\alpha}{\delta}=\mathrm{const}$ и $\frac{\alpha}{\beta}=\mathrm{const}$, то, полагая

$$H=\frac{\delta}{\alpha}\ln(\varphi+C)-\frac{\beta}{2\alpha}\psi+D, \tag{22}$$

можно привести уравнение (17) к виду

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\delta\nabla^2\varphi+(\varphi+C)\left\{\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\beta^2}{4\delta}(\operatorname{grad}\psi)^2-\frac{\beta}{2\delta}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\beta}{2}\nabla^2\psi\right\}=0,$$

где выражение в фигурных скобках представляет собой некоторую известную функцию от координат и времени, причем обычно функция ψ — гармоническая, вследствие чего $\nabla^2\psi=0$.

В частном случае при $\alpha=\mathrm{const}$, $\beta=\mathrm{const}$, $\delta=\mathrm{const}$, $F=F(t)$ и $\psi=ax+by+cz$, уравнение (17), принимая

$$H=\frac{\delta}{\alpha}\ln(\varphi+C)-F-\frac{\beta}{2\alpha}(ax+by=cz)\frac{(a^2+b^2+c^2)\beta^2}{4\alpha}t+D, \tag{23}$$

может быть приведено к простейшему виду:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\delta\nabla^2\varphi=0.$$

Входящие в приведенные выше выражения величины C и D принимаются из соображений удобства.

Применяя в соответствии с условиями рассматриваемой частной задачи для замены зависимой переменной одну из зависимостей (18), (20), (22) или (23) имеем следующие выражения для функции φ:

$$\begin{aligned}
&\varphi+C=\exp\left\{\frac{\alpha}{\delta}(H-D)\right\},\\
&\varphi+C=\exp\left\{\frac{\alpha}{\delta}(H+F-D)\right\},\\
&\varphi+C=\exp\left\{\frac{\alpha}{\delta}\left(H+\frac{\beta}{2\alpha}\psi-D\right)\right\},\\
&\varphi+C=\exp\left\{\frac{\alpha}{\delta}\left[H+F+\frac{\beta}{2\alpha}(ax+by+cz)-\frac{(a^2+b^2+c)\beta^2}{4\alpha}t-D\right]\right\}.
\end{aligned}\qquad(24)$$

Возвращаясь к рассмотрению одноразмерной задачи, отметим, что уравнение (16) является частным случаем уравнения (17).

Начальное условие для одноразмерной задачи при любом из рассмотренных случаев замены зависимой переменной может быть получено, полагая в соответствующей из зависимостей (24) $\varphi=\varphi_0$, $H=H_0$ и $t=0$.

Граничные условия в случае одноразмерной задачи для проницаемых граничных плоскостей принимаются, как обычно, $H=H'$ или $H=H''$ и могут быть выражены без затруднений через функцию φ.

Для непроницаемых граничных плоскостей из условия $\frac{\partial H}{\partial x}=0$ применительно к зависимости (18) и (20) получаем $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$, а применительно к зависимости (22) получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\beta}{2\delta}(\varphi+C)\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

После определения функции φ определение функции H может быть произведено по одному из выражений (18), (20), (22) или (23) без затруднений.

В качестве примера рассмотрим простейший частный случай в предположении, что

$$u_0=\frac{dq}{dt}=\frac{dw}{dt}=\frac{dk}{d\varepsilon}=\gamma_в=0\ ,$$

$$1+\varepsilon=1+\varepsilon_{ср}=\mathrm{const}\ ,$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma}=-a=\mathrm{const},\ k=\mathrm{const}.$$

Этот случай соответствует обычной постановке задачи Терцаги — Герсеванова без пренебрежения, однако, в уравнении (6) членом $v\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}$.

Уравнение (16) в данном случае имеет следующий вид:

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\alpha\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\delta\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=0\ ,$$

где

$$\alpha=k,$$

$$\delta=-\frac{k(1+\varepsilon)}{\gamma a}\ ,$$

$$\frac{\alpha}{\delta}=-\frac{\gamma a}{1+\varepsilon_{cp}}\ .$$

Принимая

$$H=\frac{\delta}{\alpha}\ln(\varphi+1)\ ,$$

находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\delta\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0\ .$$

Принимая начальные и граничные условия:

$$\text{при } t=0\ H=H_0 \quad \text{или} \quad \varphi=e^{\frac{\alpha}{\delta}H_0}-1,$$

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=h \quad H=0 \text{ или } \varphi=0,$$

можно представить решение этой задачи в известном виде:

$$\varphi=(e^{\frac{\alpha}{\delta}H_0}-1)\frac{4}{\pi}\sum_{i=1,3\ldots}^{\infty}\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi x}{h}\exp\left\{\frac{i^2\pi^2\delta}{h^2}t\right\}.$$

Отсюда получаем

$$H=\frac{\delta}{\alpha}\ln\left[1+\mu\left(e^{\frac{\alpha}{\delta}H_0}-1\right)\right], \qquad (25)$$

где

$$\mu=\frac{4}{\pi}\sum_{i=1,3\ldots}^{\infty}\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi x}{h}\exp\left\{\frac{i^2\pi^2\delta}{h^2}t\right\},$$

причем $0\leqslant\mu\leqslant 1$.

Нетрудно убедиться, что в случае стремления величины α к нулю это решение принимает общеизвестный вид:

$$H_{\alpha=0}=\mu H_0. \qquad (26)$$

Также нетрудно убедиться, что для предельных случаев, соответствующих $t=0$ и $t=\infty$, величины μ соответственно равны $\mu=1$ и $\mu=0$; отсюда соответственно $H=H_{\alpha=0}=H_0$ и $H=H_{\alpha=0}=0$, т. е. для этих предельных случаев решения (25) и (26), естественно, совпадают.

Для промежуточных моментов времени $0<t<\infty$ отношение значений искомых функций H и $H_{\alpha=0}$ для любого момента времени t и координаты x определяется выражением

$$r=\frac{H}{H_{\alpha=0}}=\frac{\delta}{\alpha}\frac{1}{\mu H_0}\ln\left[1+\mu\left(e^{\frac{\alpha}{\delta}H_0}-1\right)\right].$$

Принимая в качестве численного примера достаточно большие значения $H_0=30$ м и $a=0{,}05\frac{\text{см}^2}{\text{кг}}$, а также $\varepsilon_{\text{ср}}=1$ и $\gamma=1\frac{\text{т}}{\text{м}^3}$, находим

$$\frac{\alpha}{\delta}=-\frac{\gamma a}{1+\varepsilon_{\text{ср}}}=-\frac{1\times 0{,}005}{2}=-0{,}0025\frac{1}{\text{м}},$$

$$\frac{\alpha}{\delta}H_0=-0{,}0025\times 30=-0{,}075.$$

Отсюда

$$r=-\frac{1}{0{,}075\mu}\ln\left[1+\mu\left(e^{-0{,}075}-1\right)\right].$$

Значения r для различных μ приведены в табл. 1, из которой следует, что эти значения достаточно мало отклоняются от единицы; это наглядно иллюстрирует практическую обоснованность пренебрежения в основном уравнении консолидации, в рассмотренном случае одноразмерной задачи в уравнении (6), членами, содержащими множителями „скорости фильтрации". Поэтому такое допущение может с достаточным основанием приниматься при рассмотрении как плоской, так и пространственной задач консолидации земляной среды.

Таблица 1

μ	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
r	1	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	1

В качестве второго примера приведем решение одноразмерной задачи консолидации в предположении, что фильтрационные свойства земляной среды изменяются по мере изменения напряженного состояния и пористости скелета грунта. Пренебрегая в соответствии с указанным выше в уравнении (6) членом $v\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}$ и полагая, например, $u_0=0$, мы применительно к уравнению (16) получаем

$$\alpha=-(1+\varepsilon)\frac{dk}{d\varepsilon},$$

$$\beta=\frac{\gamma_{\text{в}}}{\gamma}\alpha,$$

$$\delta=\frac{k(1+\varepsilon)}{\gamma\frac{d\varepsilon}{d\sigma}}.$$

Обозначим значения величин, соответствующих начальному напряженному состоянию земляной среды, индексом в виде одного штриха, а конечному — индексом в виде двух штрихов. Учитывая, что на основании экспериментальных исследований зависимость между коэффициентом фильтрации k и коэффициентом пористости ε может быть достаточно удовлетворительно представлена линейной функцией, принимаем

$$k=k'-\frac{k'-k''}{\varepsilon'-\varepsilon''}(\varepsilon'-\varepsilon). \tag{27}$$

Если при широком диапазоне изменения пористости эта зависимость и не имеет места, то при достаточно небольшом диапазоне практически любая зависимость может быть заменена линейной, как, например, принимается при замене криволинейного очертания компрессионной кривой прямолинейным. Учитывая, что очертание компрессионной кривой может быть безусловно лучше представлено показательной функцией, чем линейной, мы принимаем

$$\varepsilon=\varepsilon'-\frac{\varepsilon'-\varepsilon''}{k'-k''}\left[k'-\exp\left\{-\frac{\ln k'-\ln k''}{\sigma''-\sigma'}\sigma+\frac{\sigma''\ln k'-\sigma'\ln k''}{\sigma''-\sigma'}\right\}\right]. \tag{28}$$

Сопоставляя выражения (27) и (28), можно представить выражение (27) в виде

$$k=\exp\{\ \}. \tag{29}$$

Дифференцируя выражение (27), находим

$$\frac{dk}{d\varepsilon}=\frac{k'-k''}{\varepsilon'-\varepsilon''},$$

откуда

$$\alpha=-(1+\varepsilon)\frac{k'-k''}{\varepsilon'-\varepsilon''},$$

$$\beta=-(1+\varepsilon)\frac{\gamma_в}{\gamma}\frac{k-k''}{\varepsilon'-\varepsilon''}.$$

Дифференцируя выражение (28) и сопоставляя результат с выражением (29), имеем

$$\delta=\frac{k(1+\varepsilon)}{\gamma\frac{d\varepsilon}{d\sigma}}=-\frac{1+\varepsilon}{\gamma}\frac{k'-k''}{\varepsilon'-\varepsilon''}\frac{\sigma''-\sigma'}{\ln\frac{k'}{k''}},$$

откуда

$$\frac{\alpha}{\delta}=\gamma\frac{\ln\frac{k'}{k''}}{\sigma''-\sigma'}=\text{const}.$$

Вследствие того, что в случае одноразмерной задачи $F=F(t)$, мы можем исходное уравнение консолидации (16) посредством замены переменной (20) свести к виду (21).

Однако для дальнейшего упрощения примера мы предварительно примем обычное допущение, принимаемое даже при рассмотрении задач с постоянным коэффициентом фильтрации, а именно: $1+\varepsilon\approx1+\varepsilon_{ср}$.

Влияние этого допущения на получаемые результаты, как было отмечено еще Герсевановым, достаточно мало. Вследствие принятия этого допущения в рассматриваемом нами случае величины α, β и δ становятся постоянными.

Предположим для определенности, что в момент времени $t=0$ к верхней граничной плоскости слоя грунта, находящегося в стабилизированном состоянии, мгновенно приложена неизменная во времени нагрузка q и давления в воде w.

Учитывая, что в рассматриваемом случае $\frac{\partial F}{\partial t}=\beta=0$, и принимая

$$H=\frac{\delta}{\alpha}\ln(\varphi+C)+D\,, \tag{30}$$

получим уравнение консолидации в следующем виде:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\delta\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0.$$

В соответствии с зависимостью (30) имеем

$$\varphi+C=\exp\left\{(H-D)\frac{\alpha}{\delta}\right\};$$

отсюда, учитывая начальное условие[1] для функции H:

$$\text{при } t=0 \text{ и } 0\leqslant x\leqslant h \qquad H=\frac{1}{\gamma}(q+w)+h=H_0\,,$$

имеем начальное условие для функции φ, полагая $D=0$ и $C=1$,

$$\text{при } t=0 \text{ и } 0\leqslant x\leqslant h \qquad \varphi=\exp\left\{\frac{\alpha}{\delta}H_0\right\}-1=\varphi_0\,.$$

Граничные значения[1] для функций H и φ при $0<t<\infty$:

$$\text{при } x=0 \qquad H=0 \text{ и } \varphi=0,$$

$$\text{при } x=h \qquad H=\frac{w}{\gamma}+h=H_h \qquad \text{и} \qquad \varphi=\exp\left\{\frac{\alpha}{\delta}H_h\right\}-1=\varphi_h\,.$$

Решение этой задачи можно, как известно, представить в таком виде:

$$\varphi=\frac{x}{h}\varphi_h+\sum_{i=1,2\ldots}^{\infty}\exp\left\{\frac{i^2\pi^2\delta}{h^2}t\right\}\sin\frac{i\pi x}{h}\,\frac{2}{h}\int_0^h\left(\varphi_0-\frac{x}{h}\varphi_h\right)\sin\frac{i\pi x}{h}dx=$$

$$=\frac{x}{h}\varphi_h+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1,2\ldots}^{\infty}\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi x}{h}\left\{\varphi_h(-1)^i-\varphi_0[(-1)^i-1]\right\}\exp\left\{\frac{i^2\pi^2\delta}{h^2}t\right\}.$$

Отсюда

$$H=\frac{\delta}{\alpha}\ln\Big[1+\frac{x}{h}\Big[\exp\left\{\frac{\alpha}{\delta}H_h\right\}-1\Big]+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1,2\ldots}^{\infty}\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi x}{h}\times$$

$$\times\left\{(-1)^i\Big[\exp\left\{\frac{\alpha}{\delta}H_h\right\}-1\Big]-[(-1)^i-1]\Big[\exp\left\{\frac{\alpha}{\delta}H_0\right\}-1\Big]\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{i^2\pi^2\delta}{h^2}t\right\}\Big].$$

---

[1] В случаях пренебрежения весом воды в порах скелета грунта в выражениях для H_0 и H_h следует отбросить слагаемое h.

Полученное решение при $\alpha = 0$, естественно, совпадает с обычным решением для постоянных характеристик грунта.

Таким же образом может быть получено решение для любого случая одноразмерной задачи с учетом переменности характеристик земляной среды и, в частности, при учете уплотнения под действием собственного веса, переменных во времени граничных условиях и т. п.

Аналогичная методика решения может быть применена и при решении плоской или пространственной задач консолидации. Представляется целесообразным применение ее и в случае численного решения, например, методом конечных разностей.

Ранее нами было показано [1], что в случае плоской или пространственной задачи консолидации земляной среды при переменных характеристиках грунта, принимаемого в виде двухфазной системы, и пренебрежении членами, в которые входят множителями скорости фильтрации, основное уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2\gamma}\frac{\partial \theta^*}{\partial t} + \frac{\partial H^*}{\partial t} - (1+\varepsilon)\frac{dk}{d\varepsilon}\left\{\frac{1}{2\gamma}(\operatorname{grad}\theta^*, \operatorname{grad} H) + \right.$$
$$\left. + (\operatorname{grad} H, \operatorname{grad} H^*) - (\operatorname{grad} H)^2\right\} - \frac{(1+\varepsilon)k}{2\gamma\frac{d\varepsilon}{d\theta}}\nabla^2 H, \tag{31}$$

где θ обозначает сумму главных напряжений в скелете грунта. Обозначая

$$\psi = H^* + \frac{1}{2\gamma}\theta^*$$

и учитывая, что

$$\frac{1}{2\gamma}(\operatorname{grad}\theta^*, \operatorname{grad} H) + (\operatorname{grad} H^*, \operatorname{grad} H) = (\operatorname{grad} H, \operatorname{grad}\psi),$$

можно представить уравнение (31) в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} - (1+\varepsilon)\frac{dk}{d\varepsilon}(\operatorname{grad} H)^2 + (1+\varepsilon)\frac{dk}{d\varepsilon}(\operatorname{grad} H, \operatorname{grad}\psi) +$$
$$+ \frac{(1+\varepsilon)k}{2\gamma\frac{d\varepsilon}{d\theta}}\nabla^2 H - \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0,$$

или

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \alpha(\operatorname{grad} H)^2 + \beta(\operatorname{grad} H, \operatorname{grad}\psi) + \delta\nabla^2 H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{32}$$

Учитывая, что входящее в уравнение компрессионной кривой $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ напряжение σ связано с суммой главных напряжений зависимостью $\sigma = \frac{\theta}{1+\xi}$, где ξ обозначает коэффициент бокового давления, находим

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = \frac{d\varepsilon}{d\sigma}\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{1}{1+\xi}\frac{d\varepsilon}{d\sigma}.$$

Тогда в соответствии с изложенным выше, применительно к уравнению (32), имеем

$$\alpha = -(1+\varepsilon)\frac{dk}{d\varepsilon} = -(1+\varepsilon)\frac{k'-k''}{\varepsilon'-\varepsilon''},$$

$$\beta = (1+\varepsilon)\frac{dk}{d\varepsilon} = (1+\varepsilon)\frac{k'-k''}{\varepsilon'-\varepsilon''},$$

$$\delta = \frac{(1+\varepsilon)k}{2\gamma\frac{d\varepsilon}{d\theta}} = -(1+\xi)\frac{1+\varepsilon}{2\gamma}\,\frac{k'-k''}{\varepsilon'-\varepsilon''}\,\frac{\sigma''-\sigma'}{\ln\frac{k'}{k''}},$$

$$F = -\psi$$

и, следовательно,

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{2\gamma}{1+\xi}\cdot\frac{\ln\frac{k'}{k''}}{\sigma''-\sigma'} = \mathrm{const},$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = -1.$$

Принимая, как обычно, $1+\varepsilon = 1+\varepsilon_{\text{ср}}$, получаем, что не только их отношения, но и сами величины α, β и δ — постоянные.

Вводя новую зависимую переменную, определяемую выражением

$$H = \frac{\delta}{\alpha}\ln(\varphi + C) + \frac{1}{2}\psi + D, \tag{33}$$

получаем уравнение (32) в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \delta\nabla^2\varphi - (\varphi + C)\frac{\alpha}{2\delta}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\alpha}{2}(\operatorname{grad}\psi)^2\right] = 0. \tag{34}$$

В соответствии с выражением (33) имеем

$$\varphi + C = \exp\left\{\frac{\alpha}{\delta}\left(H - \frac{1}{2}\psi - D\right)\right\}.$$

Тогда, исходя из начального условия для функции H, что при $t = 0$ $H = H_0 = H_0^* + \frac{1}{2\gamma}\theta_0^* = \psi_0$, и принимая $C = D = 0$, можно представить начальное условие для функции φ:

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi = \exp\left\{\frac{\alpha}{2\delta}\psi_0\right\}.$$

Обычные граничные условия следующие:

а) на проницаемых участках граничной поверхности должны быть заданы граничные значения $H = H_s$, откуда

$$\varphi_s = \exp\left\{\frac{\alpha}{\delta}\left(H_s - \frac{1}{2}\psi_s\right)\right\};$$

б) на непроницаемых участках

$$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_s = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_s = -\varphi_s\frac{\alpha}{2\delta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_s.$$

Решение поставленной таким образом задачи при любом виде уплотняемой области земляной среды, обусловливаемом соответствующей практической задачей, представляется целесообразным приводить, применяя метод конечных разностей. Принимая, например, в случае плоской задачи квадратную сетку с расстояниями между узлами, равными Δh, и полагая расчетные моменты времени равностоящими с промежутками Δt можно, переходя к конечным приращениям, представить уравнение (34) в виде

$$\frac{1}{\Delta t}(\varphi_{t+1\, i,\, k}-\varphi_{t,\, i,\, k})+\frac{\delta}{\Delta h^2}(\Lambda_t-4\varphi_{t,\, i,\, k})-$$
$$-\varphi_{t,\, i,\, k}\frac{\alpha}{2\delta}\left[\frac{1}{\Delta t}\Delta\psi_{t+1\, t,\, i,\, k}+\frac{\alpha}{2}(\mathrm{grad}\,\psi)^2_{t,\, i,\, k}\right]=0,$$

где

$$\Lambda_t=\varphi_{t,\, i+1,\, k}+\varphi_{t,\, i-1,\, k}+\varphi_{t,\, i,\, k+1}+\varphi_{t,\, i,\, k-1},$$
$$\Delta\psi_{t+1,\, t,\, i,\, k}=\psi_{t+1,\, i,\, k}-\psi_{t,\, i,\, k}.$$

Отсюда

$$\varphi_{t+1,\, i,\, k}=\varphi_{t,\, i,\, k}\left[1-4\eta+\frac{\alpha}{2\delta}\Delta\psi_{t+1,\, t,\, i,\, k}-\frac{\eta\alpha^2\Delta h^2}{4\delta^2}(\mathrm{grad}\,\psi)^2_{t,\, i,\, k}\right]+\eta\Lambda_t, \quad (35)$$

где

$$\eta=-\delta\frac{\Delta t}{\Delta h^2}.$$

Если принять $\eta=0{,}25$, то

$$\varphi_{t+1,\, i,\, k}=\varphi_{t,\, i,\, k}\left[\frac{\alpha}{2\delta}\Delta\psi_{t+1,\, t,\, i,\, k}-\frac{\alpha^2\Delta h^2}{16\delta^2}(\mathrm{grad}\,\psi)^2_{t,\, i,\, k}\right]+\frac{1}{4}\Lambda_t.$$

Значение $\eta=0{,}25$ может быть принято, если:

при

$$\varphi_{t,\, i,\, k}>\frac{1}{4}\Lambda_t \qquad \varphi_{t+1,i,k}\geqslant\frac{1}{4}\Lambda_t,$$

при

$$\varphi_{t,\, i,k}<\frac{1}{4}\Lambda_t \qquad \varphi_{t+1,\, i,\, k}\leqslant\frac{1}{4}\Lambda_t.$$

В противном случае значение η должно быть принято меньшим с тем, чтобы одно из указанных неравенств было соблюдено.

Если граничные условия не зависят от времени и уплотняющая нагрузка постоянна, то

$$\psi=\psi_0,$$
$$\Delta\psi_{t+1,\, t,\, k}=0$$

и выражение (35) имеет вид

$$\varphi_{t+1,\, i,\, k}=\varphi_{t,\, i,\, k}\left[1-4\eta-\frac{\eta\alpha^2\Delta h^2}{4\delta^2}(\mathrm{grad}\,\psi_0)^2_{i,\, k}\right]+\eta\Lambda_t=$$
$$=\varphi_{t,\, i,\, k}A_{i,\, k}+\eta\Lambda_t.$$

В таком случае, составляя заранее отдельную таблицу значения $A_{i,\, k}$, значения функции φ находятся особенно просто.

После определения значений функции φ для всех узлов сетки в пределах рассматриваемой области уплотнения последовательно для всех расчетных моментов времени, начиная от $t=0$ и до некоторого произвольно выбранного момента времени t, дальнейшее определение значений искомой функции H производится без затруднений по выражению (33).

Рассмотрим теперь случай изменения во времени внешней уплотняющей нагрузки $q(x)$ и предположим, например, что это изменение может быть представлено линейной функцией

$$q(x) = v(x)\,t = (v\Delta t)\frac{t}{\Delta t} = q_{\Delta t}(x)\,m\,,$$

где $v(x)$ обозначает скорость изменения ординат эпюры нагрузки, $q_{\Delta t}$ представляет собой эпюру приращения ординат внешней нагрузки в течение расчетного промежутка времени Δt, а m — число промежутков времени к моменту времени t.

Тогда, полагая, например, $H^* = \text{const}$, имеем

$$\Delta\psi_{t+1,\,t,\,i,\,k} = \frac{1}{2\gamma}\Delta\theta^*_{t+1,\,t,\,i,\,k} = \frac{1}{2\gamma}\,\theta_{i,\,k}\;(q_{\Delta t})\,,$$

$$(\operatorname{grad}\psi)^2_{t,\,i,\,k} = \frac{1}{4\gamma^2}(\operatorname{grad}\theta^*)^2_{t,\,i,\,k} = \frac{m^2}{4\gamma^2}\,[\operatorname{grad}\theta^*_{i,\,k}(q_{\Delta t})]^2\,,$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$

В результате выражение (35) может быть представлено в виде

$$\varphi_{t+1,\,i,\,k} = \varphi_{t,\,i,\,k}[1 - 4\eta + A_{i,\,k} - B_{i,\,k}m^2] + \eta\Lambda_t\,,$$

где

$$A_{i,\,k} = \frac{\alpha}{4\delta\gamma}\,\theta^*_{i,\,k}(q_{\Delta t})$$

и

$$B_{i,\,k} = \frac{\eta\varkappa^2\Delta h^2}{16\delta^2\gamma^2}\,[\operatorname{grad}\theta^*_{i,k}(q_{\Delta t})]^2\,,$$

причем эти величины для каждого узла $(i,\,k)$ постоянны.

В частном случае нагрузки, равномерно распределенной по краю полуплоскости на полосе $(-a,\,+a)$:

$$\theta^*_{i,\,k}(q_{\Delta t}) = \frac{2}{\pi}\,q_{\Delta t}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\frac{z}{a}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1}\,,$$

$$[\operatorname{grad}\theta^*_{i,\,k}(q_{\Delta t})]^2 = \frac{16}{\pi^2 a^2}\,q^2_{\Delta t}\,\frac{1}{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 + 1\right]^2 - 4\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,,$$

где x и z обозначают горизонтальную и вертикальную координаты узла $(i,\,k)$.

Для случаев постепенного увеличения уплотняющей нагрузки при $t = 0$ она равна нулю и начальное условие имеет вид: при $t = 0$, полагая $H^* = 0$, $\theta^* = 0$, имеем $\varphi = 1$.

На проницаемых участках ограничивающей полуплоскость оси $z = 0$ для узлов $(i, 0)$, принимая $H_{i,\,0} = 0$, находим

$$\varphi_{i,\,0} = \exp\left\{-\frac{\alpha}{4\gamma\delta}\,\theta^*_{i,0}\right\}.$$

На непроницаемых участках оси $z = 0$ имеем

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{i,\,0} = -\varphi_{i,\,0}\,\frac{\alpha}{2\delta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_{i,\,0} = -\varphi_{i,\,0}\,\frac{\alpha}{4\delta\gamma}\left(\frac{\partial\theta^*}{\partial z}\right)_{i,\,0}$$

или, переходя к конечным разностям,

$$\frac{\varphi_{i,0}-\varphi_{i,1}}{\Delta h}=-\varphi_{i,0}\frac{\alpha}{4\delta\gamma}\frac{\theta^{*}_{i,0}-\theta_{i,1}}{\Delta h},$$

откуда

$$\varphi_{i,0}=\frac{\varphi_{i,1}}{1+\frac{\alpha}{4\delta\gamma}(\theta^{*}_{i,0}-\theta^{*}_{i,1})}.$$

Порядок численного решения такого рода задач очевиден и дальнейших пояснений не требует.

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Статья поступила в редакцию 13 июня 1948 г.

ЛИТЕРАТУРА

В. А. Флорин. Задача консолидации земляной среды. ДАН СССР, LIX, № 2, 1948.

DS. 41550-1. 269.30. 6/30.C.L.