VIII. АЛГЕБРА ГРАНИЧНЫХ НАБЛЮДАЕМЫХ

В этой главе строится алгебра наблюдаемых на границе, которая вводится в параграфе 1. Для того, чтобы построить топологические инварианты, отвечающие этой алгебре, также как для алгебр наблюдаемых в области, используются методы K-теории. Однако в случае алгебр наблюдаемых на границе приходится использовать другой вариант этой теории, предложенный Каспаровым [11]. Указанный вариант K-теории вводится в параграфе 2. В терминах этого варианта K-теории в параграфе 3 строятся, следуя [1], граничные классы.

1. Граничные наблюдаемые

Построенная в предыдущем параграфе вещественная K-теория, позволяющая определить топологические инварианты твердого тела, к сожалению не работает на границе. Причина в том, что энергетическая щель, наличие которой требуется в теле диэлектрика, может закрываться (и даже обязана закрываться в топологически нетривиальном случае) при выходе на границу. Тем самым, на границе возникает бесщелевая система, для которой конструкция, приведенная для тела диэлектрика, не применима. Поэтому для построения граничных топологических классов приходится использовать другой вариант K-теории, предложенный Каспаровым [11].

Начнем с определения алгебры наблюдаемых на границе. Для этого введем в рассмотренную ранее систему с сильной связью границу с помощью полурешетки $\widehat{\Lambda}$. А именно, рассмотрим систему на полурешетке

$$\widehat{\Lambda} = \Lambda_0 \times \mathbb{N},$$

где $\Lambda_0 = \mathbb{Z}^{d-1}$, в которой трансляционная инвариантность нарушается вдоль d-й координаты.

Нашей целью является построение точной последовательности морфизмов C^*-алгебр, связывающей твердое тело с его границей, следующего вида

$$0 \longrightarrow A_o^W \otimes \mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N})) \xrightarrow{i} \widehat{A}^W \xrightarrow{\rho} A^W \longrightarrow 0, \tag{1}$$

где алгебра A_0^W определяется также, как $A^W = \mathrm{Loc}(\Lambda, W)$ с заменой Λ на Λ_0, а $\widehat{A}^W$ есть так называемая *полупространственная алгебра*, которая определяется следующим образом.

Введем гильбертовы пространства над $\widehat{\Lambda}$, полагая

$$\widehat{\mathcal{V}} = \ell^2(\widehat{\Lambda}) \otimes V, \quad \widehat{\mathcal{W}} = \ell^2(\widehat{\Lambda}) \otimes W = \widehat{\mathcal{V}} \oplus \widehat{\mathcal{V}}^*$$

и обозначим через $q : \ell^2(\Lambda) \to \ell^2(\widehat{\Lambda}) \subseteq \ell^2(\Lambda)$ ортогональный проектор. При этом мы отождествляем $\ell^2(\widehat{\Lambda})$ с множеством последовательностей из $\ell^2(\Lambda)$, зануляющихся вне $\widehat{\Lambda}$.

Обозначим через $\widehat{A}^U = \mathrm{Loc}(\widehat{\Lambda}, U)$ C^*-алгебру локальных операторов на $\widehat{\Lambda}$ со значениями в конечномерном гильбертовом пространстве U. Алгебра $\widehat{A}^U$ является вещественной, если U обладает вещественной или кватернионной структурой.

2. Фредгольмова K-теория

Напомним вначале определение *алгебры мультипликаторов* $M(A)$ для C^*-алгебры A. Это унитальная C^*-алгебра, являющаяся наибольшей унитальной C^*-алгеброй, содержащей A в качестве нетривиального идеала. Например, если A есть C^*-алгебра компактных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то $M(A)$ есть C^*-алгебра $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$. Для унитальной C^*-алгебры A всегда $M(A) = A$. Более формально, $M(A)$ можно определить как C^*-алгебру, обладающую следующим универсальным свойством: для любой унитальной C^*-алгебры B, содержащей A в качестве идеала, существует единственный $*$-морфизм $\varphi : B \to M(A)$ такой, что $\varphi = \mathrm{id}_A$ на A и $\varphi = \{0\}$ на дополнении к A.

Определение 1. Пусть A есть вещественная C^*-алгебра. Обозначим через $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ вещественную C^*-алгебру компактных операторов в вещественном гильбертовом пространстве и через $M^s(A) = M(A) \otimes \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ алгебру *стабильных мультипликаторов*. Рассмотрим пару (F, ψ), состоящую из вещественного $*$-морфизма $\psi : Cl_{p,q-1} \to M^s(A)$ и вещественного оператора $F \in M^s(A)$, таких что все выражения вида

$$\psi(k_a)F + F\psi(k_a),\ \psi(j_\alpha)F + F\psi(j_\alpha),\ F^* + F,\ 1 + F^2$$

принадлежат $A \otimes \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$. Такая пара называется *$KR_{p,q}$-циклом.* Указанный цикл называется *вырожденным*, если все эти выражения равны нулю.

Обозначим через $\mathcal{E}_{p,q}(A)$ множество всех $KR_{p,q}$-циклов и через $\mathcal{D}_{p,q}(A)$ подмножество вырожденных $KR_{p,q}$-циклов. Будем говорить, что два $KR_{p,q}$-цикла (F_0, ψ_0) и (F_1, ψ_1) *гомотопически эквивалентны*, если существует $KR_{p,q}$-цикл $(F, \psi) = (F_t, \psi_t) \in \mathcal{E}_{p,q}(\mathcal{C}([0, 1], A))$ такой, что

$$(F, \psi)|_{t=o} = (F_0, \psi_0),\ (F, \psi)|_{t=1} = (F_1, \psi_1).$$

Эти циклы называются *унитарно эквивалентными*, если существует четный вещественный унитарный оператор $u \in M^s(A)$ такой, что

$$\psi_0 = u^*\psi_1 u,\ F_0 = u^* F_1 u.$$

Множество классов $\mathcal{E}_{p,q}(A)$ относительно отношений гомотопической и унитарной эквивалентности обозначим через $E_{p,q}(A)$. Это множество является абелевым моноидом относительно операции прямой суммы. (Эта операция корректно определена, поскольку $M^s(A) \oplus M^s(A) \cong M^S(A)$ по теореме Каспарова о стабилизации.) Обозначим также через $D_{p,q}(A)$ подполугруппу, порождаемую образом $\mathcal{D}_{p,q}(A)$ в $E_{p,q}(A)$.

Определение 2. *$KR_{p,q}$-группа* есть по определению абелев моноид

$$KR_{p,q}(A) = E_{p,q}(A)/D_{p.q}(A)$$

и является на самом деле абелевой группой. Если опустить условие вещественности, получим определение группы $K_{p,q}(A)$.

Связь $KR_{p,q}$-групп с вещественной KR-теорией устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1 ([11])**.** *Пусть A есть вещественная C^*-алгебра (соотв. C^*-алгебра). Тогда*

$$KR_{p,q}(A) \cong KR_{p-q}(A) (\textit{соотв.}\, K_{p,q}(A) \cong K_{p-q}(A)).$$

Доказательство можно найти в статье [11].

3. Построение граничных классов

Определение 3. Назовем *граничной W-совместимой комплексной структурой* вещественный косоэрмитов оператор $\widehat{J} \in \widehat{A}^W$, т.е. оператор $\widehat{J}$, удовлетворяющий соотношениям

$$\widehat{J}^* = -\widehat{J} = \widehat{J}^t,$$

так, что $J = \rho(\widehat{J}) \in A^W$ есть W-совместимая комплексная структура. Пользуясь теоремой 1, можно показать, что $\widehat{J}^2 = -1$ по модулю $A_o^W \otimes \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(\ell^2(\mathbb{N}))$.

Семейство $(\widehat{J}, \phi) = (\widehat{J}, K_a, J_\alpha)$ называется *граничной W-совместимой комплексной структурой индекса симметрии* (r, s), если $\widehat{J}$ сеть граничная W-совместимая комплексная структура, а набор $(J, \phi) = (J, K_a, J_\alpha)$ является W-совместимой комплексной структурой индекса симметрии (r, s), где $J = \rho(\widehat{J})$. Множество граничных W-совместимых комплексных структур с индексом симметрии (r, s) будем обозначать через $\mathcal{J}_{r,s}(\widehat{A}^W)$. Тогда введенное семейство $(\widehat{J}, \phi) \in \mathcal{J}_{r,s}(\widehat{A}^W)$, а $(J, \phi) \in \mathcal{J}_{r,s}(A^W)$.

Более подробно, данное определение означает, что $\widehat{J} \in \widehat{A}^W$ есть вещественный косоэрмитов оператор, а набор (K_a, J_α) задает вещественный $*$-морфизм $\phi : Cl_{r,s} \to \operatorname{End} W$. При этом величины

$$\widehat{J}K_a + K_a\widehat{J},\ \widehat{J}J_\alpha + J_\alpha\widehat{J},\ \widehat{J}^2 + 1$$

принадлежат $A_o^W \otimes \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(\ell^2(\mathbb{N}))$.

Аналогично определяются *граничные V-совместимые комплексные структуры с комплексным индексом симметрии* (r,s) с заменой $\widehat{A}^W$ на $\widehat{A}^V$.

С учетом Теоремы 1 справедливо

Предложение 1. *Любая граничная W-совместимая комплексная структура (соотв. граничная V-совместимая комплексная структура) с индексом симметрии (r,s) (соотв. с комплексным индексом симметрии (r,s)) представляет класс в $KR_{s-r+1}(A_0^W)$ (соотв. в $K_{s-r+1}(A_0^V)$.*

Определение 4. Фиксируем $(J_{\text{ref}},\phi)\in\mathcal{J}_{r,s}(A^W)$. Для любого элемента $(J,\phi)\in\mathcal{J}_{r,s}(A^W)$ определим его *граничный класс* посредством

$$[(J,\phi)]_0:=[(\widehat{J},\phi)]-[(\widehat{J}_{\text{ref}},\phi)]\in KR_{s-r+1}(A_0^W),$$

где $[(\widehat{J},\phi)]$ и $[(\widehat{J}_{\text{ref}},\phi)]$ – классы, представляющие граничные W-совместимые комплексные структуры с индексом симметрии (r,s)

Аналогично определяются граничные классы, отвечающие элементам $(J,\phi)\in\mathcal{J}_{r,s}(A^V)$.

Список литературы

[1] A.Alldridge, C.Max, M.R.Zirnbauer, Bulk-boundary correspondence for disordered free-fermion topological phases, Comm. Math. Phys., **377**(2020), 1761-1821.

[2] N.W.Ashcroft, N.D.Mermin, *Solid State Physics*, Saunders, New York, 1976 [Русский перевод: Н.Ашкрофт, Н.Мермин, Физика твердого тела, М.: Мир, 1979]

[3] M.F.Atiyah, *K-theory*, Benjamin, New York, 1967 [Русский перевод: М.Атья, Лекции по К-теории, М.: Мир, 1967]

[4] S.Baaj, P.Julg, Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C*-modules Hilbertiens, C. R. Acad. Sci., Ser. I, Math, **296(21)**(1983), 875–878.

[5] J.Bellissard, A. van Elst, H.Schulz-Baldes, The noncommutative geometry of the quantum Hall effect, J. Math. Phys. **35**(1994), 5373–5451.

[6] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[7] C.Bourne, J.Kellendonk, A.Rennie, The K-theoretic bulk-edge correspondence for topological insulators, Ann. Inst. Poincare, **18**(2017), 1833–1866.

[8] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

[9] C.L.Kane, E.J.Mele, Quantum spin Hall effect in graphene, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:226801.

[10] C.L.Kane, E.J.Mele, $\mathbb{Z}_2$ topological order and the quantum spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:146802.

[11] Г.Г.Каспаров, Операторный К-функтор и расширения С*-алгебр, Изв. АН СССР, Серия матем., **44**(1980), 571-636.

[12] R.Kennedy, M.R.Zirnbauer, Bott periodicity for Z2 symmetric ground states of gapped free-fermion systems. Commun. Math. Phys. **342**(2016), 909–963.

[13] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, Adv. Theor. Phys., AIP Conf. Proc. **1134**(2009), 22-30.

[14] B.Laughlin, Quantized Hall conductance in two dimensions, Phes Rev. **B23**(1981), 5232.

[15] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[16] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.

[17] E.Prodan, H.Schulz-Baldes, *Bulk and Boundary Invariants for Complex Topological Insulators*, Mathematical Physics Studies. Springer, 2016.

[18] J.Roe, Paschke duality for real and graded C?-algebras, Oxford Quat. J. Math., **55(3)**(2004), 325–331.

[19] L.B.Schweitzer, A short proof that Mn(A) is local if A is local and Fr?echet, Int. J. Math., **03(04)**(1992),581–589.

[20] D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405-408.

[21] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. I. Quat. J. Math. Oxford, Ser.(2), **39**(1988), 185–199.

[22] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. II. Pacific J. Math., **134**(1988), 377-392.