VII. НАБЛЮДАЕМЫЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ТЕРМИНАХ К-ТЕОРИИ

В этой главе строится алгебры наблюдаемых твердого тела на основе варианта К-теории градуированных C^*-алгебр, предложенного в [21, 22]. Основные определения относящиеся к этому варианту приводятся в параграфе 1. Затем в параграфе 2 вводятся, следуя [1], топологические инварианты твердого тела.

1. К-теория градуированных C^*-алгебр

Приведем основные определения, относящиеся к К-теории C^*-алгебр (см. [21, 22]).

Определение 1. Пусть A – градуированная унитальная вещественная C^*-алгебра. Обозначим через $\mathcal{F}(A)$ множество нечетных вещественных эрмитовых унитарных элементов в A. Пусть $F(A) = \pi_0(\mathcal{F}(A))$ есть множество связных компонент в $\mathcal{F}(A)$, наделенное равномерной топологией, индуцированной нормой.

Рассмотрим при $n \geq 1$ на $\mathrm{Mat}_n(A) = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \otimes A$ покомпонентную градуировку и положим

$$\mathcal{F}_n(A) = \mathcal{F}(\mathrm{Mat}_n(A)),\ F_n(A) = F(\mathrm{Mat}_n(A)).$$

Определим прямую сумму элементов $x \in \mathcal{F}_m(A)$ и $y \in \mathcal{F}_n(A)$ как

$$x \oplus y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in \mathcal{F}_{m+n}(A)$$

и положим $[x] \oplus [y] = [x \oplus y]$ в $F_{m+n}(A)$.

Предположим, что $\mathcal{F}(A) \neq 0$ и зафиксируем ненулевой элемент $e \in \mathcal{F}(A)$. Множества $F_n(A)$ образуют систему вложенных подпространств с включением, задаваемым отображением

$$F_n(A) \hookrightarrow F_{n+1}(A),\ [x] \longmapsto [x] \oplus [e].$$

Обозначим через $F_\infty(A)$ индуктивный предел последовательности $\{F_n(A)\}$. Множество $F_\infty(A)$ является абелевым моноидом относительно операции прямой суммы, наделенным нейтральным элементом $[e]$. Обозначим через $DKR(A)$ группу Гротендива этого моноида. Приведенное определение сохраняет смысл для произвольных градуированных унитальных C^*-алгебр, если отбросить условие вещественности. Получающаяся в этом случае группа обозначается через $DK(A)$. Можно показать, что с точностью до канонического изоморфизма группа $DKR(A)$ не зависит от выбора нейтрального элемента e.

Следующая теорема устанавливает связь между DK- и K-группами.

Теорема 1. *Пусть A – унитальная градуированная вещественная C^*-алгебра (соотв. унитальная градуированная C^*-алгебра). Тогда*

$$DKR(A\widehat{\otimes}Cl_{r,s}) \cong KR_{s-r+1}(A)$$

(соотв. $DK(A\widehat{\otimes}\mathbb{C}l_{r,s}) \cong K_{s-r+1}(A)$).

Тем самым, введенная DKR-теория сводится к обычной вещественной KR-теории. Отсюда следует, в частности, что группа $DKR(A\widehat{\otimes}Cl_{r,s})$ зависит только от числа $(s-r) \bmod 8$, а группа $DK(A\widehat{\otimes}\mathbb{C}l_{r,s})$ – только от $(s-r) \bmod 2$.

Доказательство теоремы 1 можно найти в статье [18].

2. Топологические инварианты твердого тела

Пусть B есть вещественная унитальная C^*-алгебра. Обозначим через $\phi : Cl_{r,s} \to B$ вещественный унитальный $*$-морфизм, задаваемый набором (K_a, J_α).

Определение 2. Рассмотрим семейство коммутирующих проекторов $Q_a, P_\alpha \in B \otimes Cl_{r,s+1}$ вида

$$\begin{cases} 2Q_a - 1 = (-1)^s K_a \otimes k_a j_1, \\ 2P_\alpha - 1 = J_\alpha \otimes j_1 j_{\alpha+1}, \end{cases}$$

где $a = 1, \dots, r, \alpha = 1, \dots, s$. Обозначим через $P^{r,s}$ проектор, задаваемый произведением

$$P^{r,s} = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_r \cdot P_1 \cdot \ldots \cdot P_s.$$

Пусть $\mathcal{J}_{r,s}(B)$ есть множество всех $J \in B$, удовлетворяющих соотношениям

$$\bar{J} = J = -J^*,\ J^2 = -1,\ JK_a + K_a J = JJ_\alpha + J_\alpha J = 0,$$

где $a = 1, \dots, r, \alpha = 1, \dots, s$.

Это определение переносится на C^*-алгебры B, не являющиеся вещественными, нужно только отбросить условия вещественности на J, K_a, J_α.

Предложение 1. *Отображение*

$$J \longmapsto (J \otimes j_1)P^{r,s}$$

устанавливает биективное соответствие

$$\mathcal{J}_{r,s}(B) \longrightarrow \mathcal{F}(P^{r,s}(B \otimes Cl_{r,s+1})P^{r,s}).$$

В отсутствие условий вещественности получаем биективное соответствие

$$\mathcal{J}_{r,s}(B) \longrightarrow \mathcal{F}(P^{r,s}(B \otimes \mathbb{C}l_{r,s+1})P^{r,s}).$$

Доказательство предложения 1 можно найти в статье [1].

Определение 3. Предположим, что $\mathcal{J}_{r,s}(B) \neq \emptyset$ и фиксируем $J_{\mathrm{ref}} \in \mathcal{J}_{r,s}(B)$. Обозначим через $e^{r,s} = (J_{\mathrm{ref}} \otimes j_1)P^{r,s}$ элемент, отвечающий J_{ref} в силу Предложения 1. Сопоставим произвольному элементу $J \in \mathcal{J}_{r,s}(B)$ класс

$$[(J,\phi)] := [(J \otimes j_1)P^{r,s}] - [e^{r,s}] \in DKR(P^{r,s}(B \otimes Cl_{r,s+1})P^{r,s}),$$

где в качестве нейтрального элемента справа берется $e^{r,s}$. Пользуясь теоремой 1, введенный класс можно рассматривать также как класс в $DKR(B \otimes Cl_{r,s+1}) = KR_{s-r+2}(B)$.

В случае, когда $B = A^W = \mathrm{Loc}(\Lambda, W)$ (соотв. $B = A^V = \mathrm{Loc}(\Lambda, V)$), а K_a, J_α – операторы на W (соотв. на V), будем говорить, что

$$[(J,\phi)] = [(J, K_a, J_\alpha)]$$

есть *топологический класс твердого тела, отвечающий* $J \in \mathcal{J}_{r,s}(A^W)$ (соотв. $J \in \mathcal{J}_{r,s}(A^V)$) *индекса* (r, s).

Задача 1. Покажите, что класс в $DKR(B \otimes Cl_{r,s+1})$, отвечающий $[(J,\phi)]$, равен

$$[(J \otimes j_1)P^{r,s} + (J_{\mathrm{ref}} \otimes j_1)(1 - P^{r,s})] - [(J_{\mathrm{ref}} \otimes j_1)].$$

Список литературы

[1] A.Alldridge, C.Max, M.R.Zirnbauer, Bulk-boundary correspondence for disordered free-fermion topological phases, Comm. Math. Phys., **377**(2020), 1761-1821.

[2] N.W.Ashcroft, N.D.Mermin, *Solid State Physics*, Saunders, New York, 1976 [Русский перевод: Н.Ашкрофт, Н.Мермин, Физика твердого тела, М.: Мир, 1979]

[3] M.F.Atiyah, *K-theory*, Benjamin, New York, 1967 [Русский перевод: М.Атья, Лекции по К-теории, М.: Мир, 1967]

[4] S.Baaj, P.Julg, Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C*-modules Hilbertiens, C. R. Acad. Sci., Ser. I, Math, **296(21)**(1983), 875–878.

[5] J.Bellissard, A. van Elst, H.Schulz-Baldes, The noncommutative geometry of the quantum Hall effect, J. Math. Phys. **35**(1994), 5373–5451.

[6] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[7] C.Bourne, J.Kellendonk, A.Rennie, The K-theoretic bulk-edge correspondence for topological insulators, Ann. Inst. Poincare, **18**(2017), 1833–1866.

[8] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

[9] C.L.Kane, E.J.Mele, Quantum spin Hall effect in graphene, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:226801.

[10] C.L.Kane, E.J.Mele, $\mathbb{Z}_2$ topological order and the quantum spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:146802.

[11] Г.Г.Каспаров, Операторный К-функтор и расширения С*-алгебр, Изв. АН СССР, Серия матем., **44**(1980), 571-636.

[12] R.Kennedy, M.R.Zirnbauer, Bott periodicity for Z2 symmetric ground states of gapped free-fermion systems. Commun. Math. Phys. **342**(2016), 909–963.

[13] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, Adv. Theor. Phys., AIP Conf. Proc. **1134**(2009), 22-30.

[14] B.Laughlin, Quantized Hall conductance in two dimensions, Phes Rev. **B23**(1981), 5232.

[15] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.
[16] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.
[17] E.Prodan, H.Schulz-Baldes, *Bulk and Boundary Invariants for Complex Topological Insulators*, Mathematical Physics Studies. Springer, 2016.
[18] J.Roe, Paschke duality for real and graded C?-algebras, Oxford Quat. J. Math., **55(3)**(2004), 325–331.
[19] L.B.Schweitzer, A short proof that Mn(A) is local if A is local and Fr?echet, Int. J. Math., **03(04)**(1992),581–589.
[20] D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405-408.
[21] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. I. Quat. J. Math. Oxford, Ser.(2), **39**(1988), 185–199.
[22] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. II. Pacific J. Math., **134**(1988), 377-392.