VI. СИММЕТРИИ

Глава VI посвящена симметриям. Она начинается с напоминания основных фактов из теории клиффордовых алгебр в параграфе 1. В параграфе 2 описываются классы симметрий, возникающих в теории твердого тела. В следующем параграфе 3 вводится важное для дальнейшего понятие псевдосимметрий (см. [12]).

1. Клиффордовы алгебры

Определение 1. Обозначим через $\mathbb{C}l_{r,s}$ комплексную клиффордову алгебру с r положительными и s отрицательными образующими. Это означает, что $\mathbb{C}l_{r,s}$ – это C^*-алгебра с унитарными образующими $k_1, \dots, k_r, j_1, \dots, j_s$, удовлетворяющими соотношениям

$$k_a k_b + k_b k_a = 2\delta_{ab},\ j_\alpha j_\beta + j_\beta j_\alpha = -2\delta_{\alpha\beta},\ k_a j_\alpha + j_\alpha k_a = 0,$$

где $a, b = 1, \dots, r$, $\alpha, \beta = 1, \dots, s$.

Зададим на этой алгебре антилинейную инволюцию $\bar{\cdot}$, определяемую условием, что все образующие k_a, j_α инвариантны относительно нее. Получающаяся вещественная C^*-алгебра $(\mathbb{C}l_{r,s}, \bar{\cdot})$ обозначается через $Cl_{r,s}$.

Любой набор вещественных унитарных операторов $K_1, \dots, K_r, J_1, \dots, J_s$, действующих на пространстве W, таких что

$$K_a K_b + K_b K_a = 2\delta_{ab},\ J_\alpha J_\beta + J_\beta J_\alpha = -2\delta_{\alpha\beta},\ K_a J_\alpha + J_\alpha K_a = 0,$$

где $a, b = 1, \dots, r$, $\alpha, \beta = 1, \dots, s$, задает единственное вещественное $*$-представление $Cl_{r,s} \to \operatorname{End} W$, определяемое соответствием $k_a \mapsto K_a, j_\alpha \mapsto J_\alpha$. Аналогичным образом, набор унитарных операторов, действующих в пространстве V и удовлетворяющих выписанным выше соотношениям, задает единственный $*$-морфизм $\mathbb{C}l_{r,s} \to \operatorname{End} V$.

Приведем основные соотношения для введенных клиффордовых алгебр. (Подробнее о теории клиффордовых алгебр см., например, [15]). Справедлив изоморфизм вещественных C^*-алгебр

$$Cl_{p+r,q+s} \cong Cl_{p,q} \widehat{\otimes} Cl_{r,s}.$$

Предложение 1. *Имеет место изомлрфизм вещественных C^*-алгебр $Cl_{1,1} \to Mat_2(\mathbb{C})$, опредеяемый на образующих посредством*

$$k_1 \mapsto \sigma_x,\ j_1 \mapsto -i\sigma_y.$$

Если ввести на $Mat_2(\mathbb{C})$ *градуировку, полагая*

$$Mat_2(\mathbb{C})_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\} \; , Mat_2(\mathbb{C})_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \right\} \; ,$$

то указанный изоморфизм будет четным. В частности, имеет место $(1,1)$-*периодичность*

$$Cl_{r+1,s+1} \cong Cl_{r,s} \widehat{\otimes} Mat_2(\mathbb{C}).$$

Предложение 2. *Имеются следующие изоморфизмы вещественных* C^*-*алгебр*

$$Cl_{0,r+2} \cong Cl_{0,2} \otimes Cl_{r,0}, \;\; Cl_{r+2,0} \cong Cl_{2,0} \otimes Cl_{0,r},$$

порождаемые отображениями

$$j_\alpha \mapsto k_a \otimes 1, \;\; \textit{если } \alpha = 1,2, \quad j_\alpha \mapsto j_1 j_2 \otimes k_{\alpha-2}, \;\; \textit{если } \alpha = 3, \dots, r+2$$

и

$$k_a \mapsto k_a \otimes 1, \;\; \textit{если } a = 1,2, \quad k_a \mapsto k_1 k_2 \otimes j_{a-2}, \;\; \textit{если } a = 3, \dots, r+2.$$

Пользуясь представлением $Cl_{0,2}$ через матрицы Паули, можно показать, что $Cl_{0,2} \cong \mathbb{H}_\mathbb{C}$ как вещественные C^*-алгебры. Аналогично, $Cl_{2,0} \cong \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ как вещественные C^*-алгебры, при этом указанный изоморфизм задается соответствием $k_1 \mapsto \sigma_z, k_2 \mapsto \sigma_x$. Отсюда вытекают следующие изоморфизмы вещественных C^*-алгебр

$$Cl_{0,8} \cong Cl_{0,2} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \otimes Cl_{2,0} \cong \mathbb{H}_\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}_\mathbb{C} \otimes \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C}),$$

и

$$\mathbb{H}_\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}_\mathbb{C} \cong \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$$

как вещественные C^*-алгебры. В частности

$$Cl_{0,8} \cong \mathrm{Mat}_{16}(\mathbb{C})$$

как вещественные C^*-алгебры.

Из приведенных изоморфизмов вытекает известная периодичность по модулю 8 клиффордовых алгебр.

Если забыть о вещественной структуре, получим, что $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{H}_\mathbb{C}$, откуда следует изоморфизм C^*-алгебр

$$\mathbb{C}l_{0,2} \cong \mathbb{C}l_{2,0} \cong \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}).$$

Это утверждение известно как периодичность комплексных клиффордовых алгебр по модулю 2. Суммируя сказанное, получаем, что имеется 8 вещественных классов симметрии и 2 комплексных класса симметрии. Эта закономерность известна под названием 10-ричного закона в теории клиффордовых алгебр.

В комплексном случае имеются также изоморфизмы

$$\mathbb{C}l_{0,s+4} \cong \mathbb{C}l_{0,2} \otimes \mathbb{C}l_{s+2,0} \cong \mathbb{C}l_{0,2} \otimes \mathbb{C}l_{2,0} \otimes \mathbb{C}l_{0,s} \cong \mathbb{H}_\mathbb{C} \otimes \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}l_{0,s} \cong \mathrm{Mat}_2(\mathbb{H}_\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}l_{0,s},$$

отражающие симметрию между классами симметрий с индексом $0 \le s \le 3$ и индексом $4 \le s \le 7$.

Пользуясь указанными периодическими соотношениями, можно найти клиффордовы алгебры $Cl_{0,s}$ для всех s.

Предложение 3. *Если $s \not\equiv 3 \, mod 4$, то $Cl_{0,s}$ является простой вещественной C^*-алгеброй. При этом любые два неприводимых конечномерных вещественных $*$-представления этой алгебры одной и той же размерности унитарно эквивалентны.*

В случае, когда $s \equiv 3 \bmod 4$ имеется центральный элемент $\omega = j_1 \cdot \ldots \cdot j_s$ с $\omega^2 = +1$ и потому справедливо

Предложение 4. *При $s \equiv 3 \, mod 4$ имеется в точности два (с точностью до унитарной эквивалентности) неприводимых вещественных $*$-представления ϕ алгебры $Cl_{0,s}$, которые различаются знаком $\phi(\omega) = 1$ и $\phi(\omega) = -1$ соответственно.*

Задача 1. Найти все алгебры $\mathrm{Cl}_{0,s}$ с $s = 0, 1, \ldots, 7$.

2. Классы симметрий твердого тела

Рассмотрим подробнее симметрии, которыми обладают твердые тела.

Начнем с симметрии обращения времени. *Обращение времени* задается антиунитарным оператором T, действующим на пространстве V, который удовлетворяет условию $T^2 = -1$. Иными словами, T задает кватернионную структуру на V в представлении

$$\mathcal{V} = \ell^2(\Lambda) \otimes V.$$

Этот оператор можно продолжить до вещественного антилинейного эндоморфизма пространства W в представлении

$$\mathcal{W} = \ell^2(\Lambda) \otimes W,$$

полагая $T|_{V^*} = hTh^{-1}$, где h – изоморфизм Рисса.

Другой класс симметрий, действующих на V, задается образующими S_1, S_2, S_3 *алгебры вращения спина.* Эти образующие удовлетворяют соотношениям

$$S_1 S_2 = -S_2 S_1 = iS_3, \; S_\mu^2 = 1, \; \mu = 1, 2, 3.$$

Они антикоммутируют с T. а *оператор вращения спина g* получается экспоненцированием:

$$g = \exp(i \sum \omega_\mu S_\mu) \in \mathrm{SU}(2) = \mathrm{Spin}(3), \; \omega_\mu \in \mathbb{R}.$$

Образующими группы вращения спина $\mathrm{SU}(2)$ являются операторы $j_\mu = iS_\mu$, так что

$$j_1 j_2 = -j_2 j_1 = -j_3, \; j_\mu^2 = 1, \; \mu = 1, 2, 3.$$

Операторы j_μ продолжаются на пространство W при помощи равенства $j_\mu|_{V^*} = hj_\mu h^{-1}$. Заметим, что j_μ коммутируют с T.

Еще одна симметрия задается *оператором заряда* iQ (введенный в п. "Теория Блоха. Приближение сильной связи"). Оператор iQ является вещественным (относительно γ) и порождает группу симметрии $\mathrm{U}(1)$, отвечающую за сохранение заряда. Оператор iQ антикоммутирует с T и коммутирует со всеми j_μ, $\mu = 1, 2, 3$.

Наконец, имеется еще *PH(particle-hole)-симметрия* C. Напомним, что фермионное фоковское пространство строилось по гильбертову пространству $\mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_-^*$, где пространство $\mathcal{V}_+ = \ell^2(\Lambda) \otimes V_+$ порождается уровнями проводимости, а пространство $\mathcal{V}_- = \ell^2(\Lambda) \otimes V_-$ – уровнями валентности. Особый случай отвечает ситуации, в которой пространства проводимости и валентности можно отождествить друг с другом с помощью биективного оператора

$$S : \mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_- \longrightarrow \mathcal{V}_- \oplus \mathcal{V}_+,$$

меняющего местами состояния проводимости и валентности, который антикоммутирует с гамильтонианом H. Этот оператор может быть как линейным, так и антилинейным. Мы будем предполагать, что оператор S действует на $V = V_+ \oplus V_-$, так что

$$S \in \mathrm{U}(V),\ S^2 = 1,\ [S, T] = 0,\ [S, j_\mu] = 0,\ \mu = 1, 2, 3.$$

Оператор S можно продолжить до вещественного линейного эндоморфизма W, полагая, как и ранее, $S|_{V^*} = hSh^{-1}$. В частности, для этого продолжения выполняется равенство $[S, Q] = 0$. Оператор PH-симметрии C определяется как $C = \gamma S$. Если гамильтониан H антикоммутирует с S, то C коммутирует с H, т.е. является настоящей физической симметрией.

Будем говорить, что эрмитов и мнимый (относительно γ) гамильтониан $H \in \mathcal{L}(W)$ принадлежит (вещественному) классу симметрии s, где $s = 0, 1, \ldots, 7$, если он коммутирует с симметриями, указанными в таблице 1.

Таблица 1. Вещественные классы симметрий

s	Группа симметрии	Образующие
0	трив.	—
1	$\mathbb{Z}_4$	T
2	$\mathbb{Z}_4 \ltimes \mathrm{U}(1)$	T, iQ
3	$\mathbb{Z}_4 \ltimes \mathrm{U}(1) \times \mathbb{Z}_2$	T, iQ, C
4	$\mathrm{SU}(2)$	j_μ
5	$\mathrm{SU}(2) \times \mathbb{Z}_4$	j_μ, T
6	$\mathrm{SU}(2) \times (\mathbb{Z}_4 \ltimes \mathrm{U}(1))$	j_μ, T, iQ
7	$\mathrm{SU}(2) \times \mathbb{Z}_4 \ltimes \mathrm{U}(1) \times \mathbb{Z}_2$	j_μ, T, iQ, C

Гамильтониан H принадлежит комплексному классу симметрии s, где $s = 0, 1$, если он коммутирует с симметриями, указанными в таблице 2.

Таблица 2. Комплексные классы симметрий

s	Группа симметрии	Образующие
0	U(1)	iQ
1	$\mathrm{U}(1) \times \mathbb{Z}_2$	iQ, C

3. Псевдосимметрии

При $0 \leq s \leq 3$ введем семейство $J_1, \dots, J_s$ антикоммутирующих вещественных унитарных операторов на пространстве W, полагая

$$J_1 \equiv J_T = \gamma T, \;\; J_2 \equiv J_Q = i\gamma QT, \;\; J_3 \equiv J_C = i\gamma QC.$$

При $4 \leq s \leq 7$ расширим пространство W до $W \otimes \mathbb{C}^2$, наделяя $\mathbb{C}^2$ канонической вещественной структурой, индуцируемой вложением $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ и положим

$$\begin{cases} J_\mu = j_\mu \otimes \sigma_z, \;\; \mu = 1, 2, 3, \\ J_4 = 1 \otimes i\sigma_y, \;\; J_5 = J_T \otimes \sigma_x, \;\; J_6 = J_Q \otimes \sigma_x, \;\; J_7 = J_C \otimes \sigma_x. \end{cases}$$

В частности, это дает новое определение J_1, J_2, J_3. Введенные операторы $J_1, \dots, J_s$ образуют семейство из s антикоммутирующих вещественных унитарных операторов на $W \otimes \mathbb{C}^2$.

Пусть $J \in \mathcal{J}(A^W)$ есть W-совместимая комплексная структура, задаваемая вещественным унитарным оператором $J \in A^W = \mathrm{Loc}(\Lambda, W)$. При $0 \leq s \leq 3$ гамильтониан H коммутирует с симметриями из таблицы 1 тогда и только тогда, когда J антикоммутирует с $J_1, \dots J_s$. При $4 \leq s \leq 7$ гамильтониан H коммутирует с этими симметриями тогда и только тогда, когда $J \otimes \sigma_x$ антикоммутирует с $J_1, \dots J_s$.

Определение 2. *W-совместимой комплексной структурой индекса симметрии* (r, s) или *псевдосимметрией индекса симметрии* (r, s) называется набор $(J; K_1, \dots, K_r; J_1, \dots, J_s) = (J, K_a, J_\alpha)$, где $J \in \mathcal{J}(A^W)$ есть W-совместимая комплексная структура, а (K_a, J_α) задают вещественное $*$-представление $\phi : Cl_{r,s} \to \mathrm{End}\, W$ такое, что

$$JK_a + K_a J = JJ_\alpha + J_\alpha J = 0, \;\; a = 1, \dots, r, \;\; \alpha = 1, \dots, s. \tag{1}$$

Аналогично, *V-совместимой комплексной структурой с комплексным индексом симметрии* (r, s) или *комплексной псевдосимметрией индекса симметрии* (r, s) будем называть набор (J, K_a, J_α), где $J \in \mathcal{J}(A^V)$ есть V-совместимая комплексная структура, а семейство (K_a, J_α) задает $*$-представление алгебры $\mathbb{C}l_{r,s}$, удовлетворяющее соотношениям (1).

Очевидно, что комплексная псевдосимметрия индекса (r, s) есть не что иное, как псевдосимметрия индекса (r, s), удовлетворяющая дополнительному свойству, что все операторы J, K_a, J_α коммутируют с оператором Q.

Список литературы

[1] A.Alldridge, C.Max, M.R.Zirnbauer, Bulk-boundary correspondence for disordered free-fermion topological phases, Comm. Math. Phys., **377**(2020), 1761-1821.

[2] N.W.Ashcroft, N.D.Mermin, *Solid State Physics*, Saunders, New York, 1976 [Русский перевод: Н.Ашкрофт, Н.Мермин, Физика твердого тела, М.: Мир, 1979]

[3] M.F.Atiyah, *K-theory*, Benjamin, New York, 1967 [Русский перевод: М.Атья, Лекции по K-теории, М.: Мир, 1967]

[4] S.Baaj, P.Julg, Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C*-modules Hilbertiens, C. R. Acad. Sci., Ser. I, Math, **296(21)**(1983), 875–878.

[5] J.Bellissard, A. van Elst, H.Schulz-Baldes, The noncommutative geometry of the quantum Hall effect, J. Math. Phys. **35**(1994), 5373–5451.

[6] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[7] C.Bourne, J.Kellendonk, A.Rennie, The K-theoretic bulk-edge correspondence for topological insulators, Ann. Inst. Poincare, **18**(2017), 1833–1866.

[8] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

[9] C.L.Kane, E.J.Mele, Quantum spin Hall effect in graphene, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:226801.

[10] C.L.Kane, E.J.Mele, $\mathbb{Z}_2$ topological order and the quantum spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:146802.

[11] Г.Г.Каспаров, Операторный K-функтор и расширения C*-алгебр, Изв. АН СССР, Серия матем., **44**(1980), 571-636.

[12] R.Kennedy, M.R.Zirnbauer, Bott periodicity for Z2 symmetric ground states of gapped free-fermion systems. Commun. Math. Phys. **342**(2016), 909–963.

[13] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, Adv. Theor. Phys., AIP Conf. Proc. **1134**(2009), 22-30.

[14] B.Laughlin, Quantized Hall conductance in two dimensions, Phes Rev. **B23**(1981), 5232.

[15] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[16] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.

[17] E.Prodan, H.Schulz-Baldes, *Bulk and Boundary Invariants for Complex Topological Insulators*, Mathematical Physics Studies. Springer, 2016.

[18] J.Roe, Paschke duality for real and graded C?-algebras, Oxford Quat. J. Math., **55(3)**(2004), 325–331.

[19] L.B.Schweitzer, A short proof that Mn(A) is local if A is local and Fr?echet, Int. J. Math., **03(04)**(1992),581–589.

[20] D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405-408.

[21] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. I. Quat. J. Math. Oxford, Ser.(2), **39**(1988), 185–199.

[22] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. II. Pacific J. Math., **134**(1988), 377-392.