# V. АЛГЕБРА НАБЛЮДАЕМЫХ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В этой главе строится алгебра наблюдаемых топологического диэлектрика. Ключевую роль в этом построении играют понятия вещественных и градуированных $C^*$-алгебр. Вещественные $C^*$-алгебры вводятся в параграфе 1, а градуированные $C^*$-алгебры в параграфе 2. В параграфе 4 строится алгебра наблюдаемых твердого тела. Предварительно в параграфе 3 определяются локальные наблюдаемые. В качестве дополнения к теории $C^*$-алгебр в параграфе **??** вводятся скрещенные произведения алгебр с действующими на них группами – понятие, часто возникающее в приложениях $C^*$-алгебр к теории твердого тела.

## 1. Вещественные $C^*$-алгебры

**Определение 1.** *Вещественной $C^*$-алгеброй* называется пара $(A, \bar{\cdot})$, состоящая из (комплексной) $C^*$-алгебры $A$ и антилинейной $*$-инволюции $\bar{\cdot}$, называемой *сопряжением*, обладающим следующими свойствами:

$$\overline{xy} = \bar{x}\bar{y},\ \overline{x^*} = (\bar{x})^*,\ \overline{\lambda x + y} = \bar{\lambda}\bar{x} + \bar{y},$$

где $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Элемент $x \in A$ называется *вещественным*, если $\bar{x} = x$ и *мнимым*, если $\bar{x} = -x$, а $*$-морфизм $\phi : (A_1, \bar{\cdot}) \to (A_2, \bar{\cdot})$ вещественных $C^*$-алгебр называется *вещественным*, если $\phi(\bar{x}) = \overline{\phi(x)}$, $x \in A_1$.

Эквивалентно, вещественную $C^*$-алгебру можно определить как $C^*$-алгебру $A$, заданную вместе с линейной анти-инволюцией $t$, называемой *транспонированием.* Иначе говоря, транспонирование $x \mapsto x^t$ является комплексно-линейным отображением и

$$(xy)^t = y^t x^t,\ (x^*)^t = (x^t)^*,\ (x^t)^t = x, \quad x, y \in A.$$

Связь между двумя приведенными определениями устанавливается соотношением

$$x^t = (\bar{x})^*,\ x \in A.$$

Тензорное произведение $A_1 \otimes A_2$ вещественных $C^*$-алгебр становится вещественной $C^*$-алгеброй, если наделить его сопряжением

$$\overline{x_1 \otimes x_2} = \overline{x_1} \otimes \overline{x_2},\ x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2.$$

**Определение 2.** Пусть $\mathcal{H}$ есть (комплексное) гильбертово пространство. Антиунитарный оператор $T$ на $\mathcal{H}$ задает *кватернионную структуру* на $\mathcal{H}$, если $T^2 = -1$. Иначе говоря, оператор $T$ является антилинейным и

$$\langle Tv_1 | Tv_2 \rangle = \langle v_2 | v_1 \rangle,\ \langle Tv_1 | v_2 \rangle = -\langle Tv_2 | v_1 \rangle$$

для всех $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$. Пара $(\mathcal{H}, T)$, состоящая из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ и кватернионной структуры $T$, называется *кватернионным гильбертовым пространством*. Комплексно-линейное отображение $\phi : (\mathcal{H}_1, T_1) \to (\mathcal{H}_2, T_2)$ кватернионных гильбертовых пространств называется *кватернионным*, если $\phi \circ T_1 = T_2 \circ \phi$.

Если $(\mathcal{H}, T)$ есть кватернионное гильбертово пространство, то алгебра $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ является вещественной $C^*$-алгеброй с сопряжением, задаваемым формулой

$$\bar{L} = T^* L T = -TLT, \ L \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

В случае, когда $\mathcal{H} = \ell^2(\Lambda) \otimes V$, кватернионная структура задается как $C \otimes T$, где $C$ – комплексное сопряжение на $\ell^2(\Lambda)$, а $T$ – кватернионная структура на $V$, задаваемая оператором обращения времени (о котором речь пойдет ниже).

**Пример 1.** Примером кватернионной структуры на $\ell^2(\Lambda) \otimes \mathbb{C}^2$ может служить оператор

$$\begin{pmatrix} 0 & C \\ -C & 0 \end{pmatrix},$$

где $C$ – комплексное сопряжение на $\mathbb{C}$. Это сопряжение индуцирует на $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{End}\,\mathbb{C}^2$ сопряжение вида

$$\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Для вещественной $C^*$-алгебры $(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}), \bar{\cdot})$ подалгебра вещественных элементов порождается единичной матрицей и матрицами Паули

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тем самым, эта алгебра (как алгебра нал $\mathbb{R}$) изоморфна алгебре кватернионов $\mathbb{H}$. Поэтому мы обозначаем вещественную $C^*$-алгебру $(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}), \bar{\cdot})$ через $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$.

## 2. Градуированные $C^*$-алгебры

**Определение 3.** *Градуировкой* на $*$-алгебре $A$ называется разложение $A = A_0 \oplus A_1$ в прямую сумму замкнутых подпространств, такую что

$$A_i \cdot A_j \subset A_{(i+j) \bmod 2}, \ *A_i \subset A_i, \quad i, j \in \mathbb{Z}_2.$$

Алгебра $A$ с указанной градуировкой называется *градуированной $*$-алгеброй*.

Элементы $A_0$ называются *четными*, а элементы $A_1$ – *нечетными*. Ненулевые элементы $a$, принадлежащие одному из слагаемых, называются *однородными* и в этом случае $|a|$ обозначает их четность. Отображение градуированных $*$-алгебр называется *четным*, если оно сохраняет градуировку и *нечетным* в противоположном случае. Если $(A, \bar{\cdot})$ является вещественной $*$-алгеброй, наделенной градуировкой, то она называется *градуированной вещественной $*$-алгеброй*, если сопряжение четно.

Если $A$ и $B$ – градуированные (вещественные) $C^*$-алгебры, то алгебраическое тензорное произведение $A \odot B$ наделяется градуировкой вида

$$(A \odot B)_k = \bigoplus_{i+j=k} A_i \odot B_j, \quad k \in \mathbb{Z}_2.$$

Эта градуировка продолжается на тензорное произведение $A \otimes B$, превращая его в градуированную (вещественную) $C^*$-алгебру.

Можно однако определить и другое, градуированное тензорное произведение. Наделим $A \odot B$ новой алгебраической структурой и новой инволюцией, определяемыми соотношениями

$$(a \odot b)(a' \odot b') = (-1)^{|a'||b'|} aa' \odot bb', \ (a \odot b)^* = (-1)^{|a||b|} a^* \odot b^*$$

для однородных элементов $a, a' \in A$, $b, b' \in B$. Они порождают другое алгебраическое тензорное произведение $A \widehat{\odot} B$, вообще говоря, не изоморфное $A \odot B$. Это тензорное произведение является вещественным, если $A$ и $B$ были таковыми.

Если $A$ и $B$ – градуированные (вещественные) $C^*$-алгебры, то на $A \widehat{\odot} B$ существует естественная перекрестная $C^*$-норма (опишите ее!). Пополнение $A \widehat{\odot} B$ по этой норме дает градуированную (вещественную) $C^*$-алгебру $A \widehat{\otimes} B$, называемую *градуированным тензорным произведением* $C^*$-алгебр $A$ и $B$.

Любую (вещественную) $C^*$-алгебру можно рассматривать как градуированную (вещественную) $C^*$-алгебру, наделяя ее тривиальной градуировкой, в которой каждый элемент является четным. В частности, алгебру матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ мы будем наделять тривиальной градуировкой с покомпонентным сопряжением. При этом вещественную $C^*$-алгебру $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{End}\,\mathbb{C}^2$ будем рассматривать как неградуированную.

## 3. Локальные наблюдаемые

Будем понимать под локальными гамильтоновыми операторами $H$ операторы, которые обладают следующим свойством: величина $(H\psi)(x)$ зависит только от значений $\psi(y)$ с $y$, принадлежащими окрестности $x$, размер которой ограничен равномерно по $x$.

**Определение 4.** Пусть $U$ есть конечномерное гильбертово пространство, а $D \subseteq \Lambda$ – подмножество решетки $\Lambda$. Пусть $O$ есть ограниченный линейный оператор на $\ell^2(D) \otimes U$ и $O(x, y) \in \mathrm{End}\,U$, $x, y \in D$, его ядро. Будем говорить, что оператор $O$ является *локальным*, если существует константа $R > 0$ такая, что

$$O(x, y) = 0 \quad \text{при } \|x - y\| > R.$$

Напомним определение ядра $O(x, y)$. Это операторно-значная функция на $\ell^2(D) \times \ell^2(D)$ со значениями в $U$, задаваемая следующим образом. Если $\varphi, \psi$ – функции из $\ell^2(D) \otimes U$, то

$$\langle O\varphi, \psi \rangle = \sum_{x,y \in D} \langle O(x, y)\varphi(x), \psi(y) \rangle.$$

Замыкание множества локальных операторов по норме обозначим через $\mathrm{Loc}(D, U)$.

**Предложение 1.** *Множество $Loc(D, U)$ является замкнутой $*$-подалгеброй в алгебре $\mathcal{L}(\ell^2(D) \otimes U)$ и потому $C^*$-алгеброй. Если $U$ обладает вещественной или кватернионной структурой, то $Loc(D, U)$ будет алгеброй, инвариантной относительно сопряжения на $\mathcal{L}(\ell^2(D) \otimes U)$, т.е. вещественной $C^*$-алгеброй.*

Доказательство предложения мы предоставляем читателю, заметим только, что сопряжение ядра задается формулой

$$\overline{O}(x, y) = \overline{O(x, y)}.$$

## 4. Алгебра наблюдаемых твердого тела

Обозначим через $A^U = \mathrm{Loc}(\Lambda, U)$ $C^*$-алгебру локальных операторов со значениями в конечномерном гильбертовом пространстве $U$.

Нас будут особенно интересовать случаи пространств $A^W$ и $A^V$. Будем называть $C^*$-алгебру $A^W = \mathrm{Loc}(\Lambda, W)$ *алгеброй наблюдаемых твердого тела*. Соответственно, $C^*$-алгебра $A^V = \mathrm{Loc}(\Lambda, V)$ называется *алгеброй наблюдаемых твердого тела, сохраняющих заряд*. Если $V$ обладает кватернионной структурой, то алгебра $A^V$ является вещественной $C^*$-алгеброй.

Напомним, что выше мы определили $\mathcal{W}$-совместимую комплексную структуру как кососимметричную вещественную унитарную комплексную структуру $J$ на $\mathcal{W}$. Будем называть *$W$-совместимой комплексной структурой* вещественную унитарную комплексную структуру $J \in A^W$. Аналогично, *$V$-совместимой комплексной структурой, сохраняющей заряд*, называется унитарная комплексная структура $J \in A^V$. Пространство $W$-совместимых комплексных структур обозначим через $\mathcal{J}(A^W)$, а пространство $V$-совместимых комплексных структур, сохраняющих заряд, через $\mathcal{J}(A^V)$.

Заметим, что оператор $J \in \mathcal{J}(A^W)$ сохраняет заряд, если он коммутирует с оператором $Q$, т.е. $[Q, J] = 0$.

## Список литературы


[1] A.Alldridge, C.Max, M.R.Zirnbauer, Bulk-boundary correspondence for disordered free-fermion topological phases, Comm. Math. Phys., **377**(2020), 1761-1821.

[2] N.W.Ashcroft, N.D.Mermin, *Solid State Physics*, Saunders, New York, 1976 [Русский перевод: Н.Ашкрофт, Н.Мермин, Физика твердого тела, М.: Мир, 1979]

[3] M.F.Atiyah, *K-theory*, Benjamin, New York, 1967 [Русский перевод: М.Атья, Лекции по К-теории, М.: Мир, 1967]

[4] S.Baaj, P.Julg, Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C*-modules Hilbertiens, C. R. Acad. Sci., Ser. I, Math, **296(21)**(1983), 875–878.

[5] J.Bellissard, A. van Elst, H.Schulz-Baldes, The noncommutative geometry of the quantum Hall effect, J. Math. Phys. **35**(1994), 5373–5451.

[6] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[7] C.Bourne, J.Kellendonk, A.Rennie, The K-theoretic bulk-edge correspondence for topological insulators, Ann. Inst. Poincare, **18**(2017), 1833–1866.

[8] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

[9] C.L.Kane, E.J.Mele, Quantum spin Hall effect in graphene, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:226801.

[10] C.L.Kane, E.J.Mele, $\mathbb{Z}_2$ topological order and the quantum spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:146802.

[11] Г.Г.Каспаров, Операторный К-функтор и расширения С*-алгебр, Изв. АН СССР, Серия матем., **44**(1980), 571-636.

[12] R.Kennedy, M.R.Zirnbauer, Bott periodicity for Z2 symmetric ground states of gapped free-fermion systems. Commun. Math. Phys. **342**(2016), 909–963.

[13] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, Adv. Theor. Phys., AIP Conf. Proc. **1134**(2009), 22-30.

[14] B.Laughlin, Quantized Hall conductance in two dimensions, Phes Rev. **B23**(1981), 5232.

[15] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[16] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.

[17] E.Prodan, H.Schulz-Baldes, *Bulk and Boundary Invariants for Complex Topological Insulators*, Mathematical Physics Studies. Springer, 2016.

[18] J.Roe, Paschke duality for real and graded C?-algebras, Oxford Quat. J. Math., **55(3)**(2004), 325–331.

[19] L.B.Schweitzer, A short proof that Mn(A) is local if A is local and Fr?echet, Int. J. Math., **03(04)**(1992),581–589.

[20] D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405-408.

[21] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. I. Quat. J. Math. Oxford, Ser.(2), **39**(1988), 185–199.

[22] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. II. Pacific J. Math., **134**(1988), 377-392.