IV. ТЕОРИЯ БЛОХА

В этой главе излагаются основы классической теории Блоха, описывающей свойства твердых тел, обладающих кристаллической решеткой. В параграфе 1 вводится одночастичный оператор Шредингера с периодическим потенциалом. Определяются зона Бриллюэна Br_d в импульсном пространстве и блоховский гамильтониан. Строится гильбертово расслоение над Br_d, слоями которого являются гильбертовы пространства функций с квазиимпульсом $k \in \mathrm{Br}_d$. В параграфе 2 вводится фермионное фоковское пространство, позволяющее описывать многочастичные системы. В следующем параграфе 3 абстрактные построения предыдущего параграфа конкретизируются применительно к случаю твердого тела. Здесь вводится пространство полевых операторов Намбу и определяются имеющиеся на нем структуры. Глава завершается параграфом 4, в котором описывается приближение сильной связи, принятое во многих физических работах.

1. Одночастичный оператор Шредингера

Теория Блоха (см. [2], [16]) описывает свойства твердых тел, обладающих кристаллической решеткой, называемой *решеткой Бравэ*. С математической точки зрения это дискретная абелева группа Λ в пространстве $\mathbb{R}^d$, изоморфная $\mathbb{Z}^d$ и действующая в $\mathbb{R}^d$ трансляциями T_λ на векторы $\lambda \in \Lambda$.

Поведение свободного электрона в твердом теле определяется *одночастичным оператором Шредингера*, собственные функции которого удовлетворяют уравнению

$$H\psi := (-\Delta + V)\psi = E\psi, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа, а V – потенциал, инвариантный относительно действия Λ. Оператор H коммутирует со всеми трансляциями T_λ, $\lambda \in \Lambda$.

Обозначим через Λ' *двойственную решетку* в двойственном пространстве $(\mathbb{R}^d)'$, называемом также *импульсным*, которая определяется следующим образом:

$$\Lambda' = \{k \in (\mathbb{R}^d)' : (k \cdot \lambda) \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{для любых } \lambda \in \Lambda\}.$$

Фундаментальная область (единичная клетка) $M_{\Lambda'}$ решетки Λ' называется *зоной Бриллюэна* Br_d.

Функции, инвариантные относительно Λ, можно рассматривать как функции на торе $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\Lambda$. Обозначим через $\mathcal{H}_0$ гильбертово пространство

$$\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbb{R}^d/\Lambda)$$

относительно меры на $\mathbb{R}^d/\Lambda$, индуцированной лебеговой мерой dx на $\mathbb{R}^d$. Экспонента $e_k := e^{ik\cdot x}$ принадлежит $\mathcal{H}_0$, если $k \in \Lambda'$. Более того, такие функции образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_0$.

Гладкие функции вида

$$\psi(x) = e^{ik\cdot x}\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^d,$$

где вектор k принадлежит зоне Бриллюэна Br_d, а функция φ является C^∞-гладкой Λ-периодической функцией на $\mathbb{R}^d$, называются *блоховскими*, а вектор k – *квазиимпульсом*. Пространство блоховских функций с квазиимпульсом k обозначается через L_k. Эквивалентно, его можно определить как

$$L_k = \{\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \psi \circ T_\lambda = e^{ik\cdot\lambda}\psi \text{ для всех } \lambda \in \Lambda\}.$$

Оператор Шредингера (1) действует на блоховские функции по правилу

$$H\left(e^{ik\cdot x}\varphi(x)\right) = e^{ik\cdot x}H_k\varphi(x). \tag{2}$$

Оператор H_k, называемый *эффективным* или *блоховским гамильтонианом*, имеет вид

$$H_k\varphi = (\frac{1}{i}\nabla - ik)^2\varphi + V\varphi,$$

где ∇ – вектор-градиент.

Рассмотрим пространство C^∞-гладких Λ-периодических функций на $\mathbb{R}^d$, которое мы будем также обозначать через $C^\infty(\mathbb{R}^d/\Lambda)$. Оператор H_k отображает это пространство в себя, а из формулы (2) следует, что исходный оператор Шредингера $H = H_0$ отображает пространство блоховских функций с квазиимпульсом k в себя. Если обозначить через I_k оператор умножения на $e^{ik\cdot x}$, то формулу (2) можно будет переписать в виде

$$I_k^{-1} \circ H \circ I_k = H_k.$$

Отсюда следует, что

$$H|_{L_k} = I_k \circ H_k|_{L_0} \circ I_k^{-1},$$

т.е. исследование оператора $H|_{L_k}$ сводится к изучению оператора $H_k|_{L_0}$.

Обозначим через $H(k)$ замыкание оператора $H_k|_{L_0}$ в пространстве $\mathcal{H}_0$. Область определения этого оператора совпадает с подпространством

$$D = \left\{\varphi : \varphi(x) = \sum_{\lambda'\in\Lambda'} \varphi_{\lambda'}e^{i\lambda'\cdot x)},\ \sum_{\lambda'\in\Lambda'}(1+|\lambda'|^2)^2|\varphi_{\lambda'}|^2 < \infty\right\}$$

со скалярным произведением

$$\|\varphi\|_2^2 = V_\Lambda \sum_{\lambda'\in\Lambda'}(1+|\lambda'|^2)^2|\varphi_{\lambda'}|^2,$$

где V_Λ есть объем фундаментальной области M_Λ решетки Λ. Указанное подпространство можно отождествить с соболевским пространством $H^2(\mathbb{R}^d/\Lambda)$.

Спектр оператора $H(k)$ является дискретным, а его собственные функции $\varphi_m(k)$ являются решениями уравнения

$$H(k)\varphi_m(k) = E_m(k)\varphi_m(k). \tag{3}$$

Подчеркнем, что функции $\varphi_m(k)$ являются функциями от x, зависящими от двух параметров — дискретного параметра $m \in \mathbb{N}$ и непрерывного параметра $k \in \mathrm{Br}_d$. При каждом фиксированном k эти функции образуют полную ортогональную систему в пространстве $\mathcal{H}_0$.

Блоховские функции

$$\psi_m(k) = e^{ik\cdot x}\varphi_m(k) \tag{4}$$

являются собственными функциями исходного оператора Шредингера H.

Обратимся теперь к физической интерпретации рассмотренной нами математической картины. В приближении сильной связи, о которой мы поговорим подробнее позже, можно считать, что имеется только конечное число n активных одноэлектронных уровней, отвечающих собственным функциям $E_m(k)$. Совокупность всех электронных уровней, отвечающих функциям $E_m(k)$ с фиксированным m, называется *энергетической зоной*. Тем самым, функции $E_m(k)$ определяют *зонную структуру* твердого тела.

Основное состояние (состояние с наименьшей энергией) системы с n электронными уровнями устроено следующим образом. Имеется некоторое число p заполненных одноэлектронных уровней с энергией, не превосходящей величины E_F, называемой *энергией Ферми*, выше которой лежит $n-p$ пустых (не заполненных) уровней. Заполненные уровни называются иначе *валентными* а пустые уровни — уровнями *проводимости*. Интервал энергий между самым высоким заполненным уровнем и самым низким пустым уровнем называется *энергетической щелью* или *запрещенной зоной*. Твердые тела, обладающие широкой энергетической щелью, называются *диэлектриками* или изоляторами.

Вернемся к математике. Для функций $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ имеет место разложение по блоховским функциям вида (см. [6]):

$$f(x) = \int_{\mathrm{Br}_d} f_k(x)dk, \tag{5}$$

где функции $f_k \in L_k$ и задаются формулой

$$f_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{\lambda' \in \Lambda'} e^{i(k+\lambda')\cdot x} \tilde{f}(k+\lambda'),$$

где $\tilde{f}(k)$ – преобразование Фурье функции f. Для разложения (5) справедливо равенство Парсеваля, имеющее вид

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = \frac{(2\pi)^d}{V_\Lambda} \int_{M_\Lambda} \int_{\mathrm{Br}_d} |f_k(x)|^2 dx dk.$$

Обозначим через $\mathcal{H}_k$ пополнение пространства L_k по норме, определяемой изоморфизмом $I_k : L_0 \to L_k$. При этом отображение I_k будет продолжаться до изометрии $I_k : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_k$.

Рассмотрим гильбертово векторное расслоение $\pi : \mathfrak{H} \to \mathrm{Br}_d$, слоем которого над точкой $k \in \mathrm{Br}_d$ является гильбертово пространство $\mathcal{H}_k$. Обозначим через $\mathcal{H} = L^2(\mathfrak{H})$ гильбертово пространство его квадратично интегрируемых сечений со скалярным произведением

$$(s_1, s_2) = \int_{\mathrm{Br}_d} (s_1(k), s_2(k)) dk,$$

где $(s_1(k), s_2(k))$ – скалярное произведение в $\mathcal{H}_k$.

Для того, чтобы учесть внутренние степени свободы (такие как спин), нужно заменить пространство $\mathcal{H}_0$ на пространство

$$L^2(\mathbb{R}^d/\Lambda) \otimes V,$$

где $V = \mathbb{C}^N$ – N-мерное комплексное векторное пространство. Тогда гильбертово пространство $\mathcal{H} = L^2(\mathfrak{H})$ заменится на пространство $\mathcal{H} = L^2(\mathfrak{H}) \otimes V$, состоящее из квадратично интегрируемых сечений $s(k) = (s^1(k), \dots, s^N(k))$ расслоения $\mathfrak{H} \otimes V$, описывающее системы с N внутренними степенями свободы.

2. Фермионное фоковское пространство

Многочастичный случай описывается в терминах фермионного фоковского пространства. Пусть F есть комплексное гильбертово пространство. Тогда *фермионное фоковское пространство* $\mathcal{F}$ над гильбертовым пространством F определяется как пополнение

$$\mathcal{F} = \overline{\Lambda(F)} = \overline{\bigoplus_p \Lambda^p(F)},$$

где $\Lambda(F)$ есть внешняя алгебра пространства F, являющаяся прямой суммой подпространств $\Lambda^p(F)$ p-частичных состояний вида

$$\Lambda^p(F) = \mathrm{span}\{v_1 \wedge \ldots \wedge v_p,\ v_j \in F\}.$$

Скалярное произведение $(\cdot\,,\cdot)$ в F продолжается естественным образом до скалярного произведения на $\Lambda(F)$. А именно, на мономах $v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$ одинаковой степени оно полагается равным

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p, v'_1 \wedge \ldots \wedge v'_p) := \sum_\sigma (-1)^{\mathrm{sgn}\,\sigma} (v_1, v'_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (v_p, v'_{i_p}),$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\sigma = \{i_1, \dots, i_p\}$ множества $\{1, \dots, p\}$, а $\mathrm{sgn}\,\sigma$ обозначает четность перестановки σ (скалярное произведение мономов разной степени полагается равным нулю). Скалярное произведение на мономах продолжается по линейности на всю внешнюю алгебру $\Lambda(F)$. Фермионное фоковское пространство $\mathcal{F}$ является пополнением алгебры $\Lambda(F)$ по норме, определяемой введенным скалярным произведением.

Ортонормированный базис пространства $\Lambda^p(F)$ задается элементами вида $\frac{1}{p!}\{f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_p}\}$, где $\{f_i\}$ – ортонормированный базис пространства F. Объединение указанных базисов по всем p дает ортонормированный базис всего пространства $\mathcal{F}$.

Аналогичным образом определяется *бозонное фоковское пространство* $\mathcal{B}(F)$ над гильбертовым пространством F, нужно только заменить внешнюю алгебру $\Lambda(F)$ на симметрическую алгебру $S(F)$, так что

$$\mathcal{B}(F) = \overline{S(F)} = \overline{\bigoplus_p S^p(F)},$$

где $S^p(F)$ – алгебра симметрических полиномов степени p по переменных $v_j \in F$.

Вернемся к фермионному фоковскому пространству. Введем *оператор* $a_i^\dagger$ *рождения* частицы в состоянии f_i, задаваемый внешним умножением на вектор f_i. Эрмитово сопряженный к нему *оператор* a_i *уничтожения* частицы в состоянии f_i задается внутренним умножением на двойственный вектор $f_i' \in F'$. Эти операторы удовлетворяют стандартным антикоммутационным соотношениям

$$a_i^\dagger a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i^\dagger = 0, \quad a_i a_j + a_j a_i = 0$$

и

$$a_i^\dagger a_j + a_j a_i^\dagger = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases}$$

Любой одночастичный линейный оператор $O : F \to F$ продолжается до линейного оператора $\widehat{O} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ по формуле

$$\widehat{O}\left(v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_p}\right) = (Ov_{i_1}) \wedge \ldots \wedge (Ov_{i_p})$$

на мономах с последующим продолжением по линейности на всю алгебру $\Lambda(F)$ с последующим замыканием до оператора на $\mathcal{F} = \overline{\Lambda(F)}$.

3. Фермионное фоковское пространство твердого тела

Конкретизируем теперь приведенную конструкцию фермионного фоковского пространства в рассматриваемом нами случае электронов в твердом теле.

Напомним, что основное состояние в этой модели характеризуется наличием заполненных одноэлектронных уровней с энергиями ниже уровня энергии Ферми E_F и пустых электронных уровней с энергиями выше E_F. Обозначим через $\mathcal{V}_-$ гильбертово пространство, порожденное состояниями с энергиями ниже E_F, а через $\mathcal{V}_+$ гильбертово пространство, порожденное состояниями с энергиями выше E_F. Напомним, что одноэлектронные уровни с энергиями выше E_F называются *уровнями проводимости*, а одноэлектронные уровни с энергиями ниже E_F называются *уровнями валентности.*

Рассмотрим теперь в качестве гильбертова пространства F из предыдущего параграфа пространство $\mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_-^*$ со скалярным произведением $\langle \cdot | \cdot \rangle$, индуцированным скалярными произведениями на $\mathcal{V}_+$ и пространстве $\mathcal{V}_-^*$, двойственном к $\mathcal{V}_-$. Внешняя алгебра $\Lambda(F) = \Lambda(\mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_-^*)$ пополняется затем до фермионного фоковского пространства $\mathcal{F}$. Вакуум совпадает с комплексной прямой $\Lambda^0 = \Lambda^0(\mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_-^*) \cong \mathbb{C}$.

В рассматриваемом случае внешняя алгебра $\Lambda(F)$ имеет двойную градуировку

$$\Lambda(\mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_-^*) = \bigoplus_{p,q \geq 0} \Lambda^{p,q},$$

где

$$\Lambda^{p,q} = \Lambda^p(\mathcal{V}_+) \otimes \Lambda^q(\mathcal{V}_-^*).$$

С физической точки зрения p есть число одночастичных возбуждений основного состояния, т.е. число заполненных уровней проводимости. Тогда как q есть число однодырочных возбуждений основного состояния, т.е. число освобожденных уровней валентности.

Введем полевые операторы $\psi : \Lambda(\mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_-^*) \to \Lambda(\mathcal{V}_+ \oplus \mathcal{V}_-^*)$, задаваемые линейными комбинациями

$$\psi = \varepsilon(v_+) + \iota(\varphi_+) + \iota(v_-) + \varepsilon(\varphi_-),$$

где $v_\pm \in \mathcal{V}_\pm$, $\varphi_\pm \in \mathcal{V}_\pm^*$. Здесь, $\varepsilon(v_+) : \Lambda^{p,q} \to \Lambda^{p+1,q}$ есть оператор рождения частицы, задаваемый внешним умножением на v_+, который увеличивает число частиц на единицу. Оператор $\varepsilon(\varphi_-) : \Lambda^{p,q} \to \Lambda^{p,q+1}$ увеличивает число дырок на единицу. Аналогично, операторы $\iota(\varphi_+) : \Lambda^{p,q} \to \Lambda^{p-1,q}$ и $\iota(v_-) : \Lambda^{p,q} \to \Lambda^{p,q-1}$ уменьшают число частиц (соотв. дырок) на единицу с помощью внутреннего умножения.

Полевые операторы ψ порождают комплексное векторное пространство, называемое *пространством Намбу* $\mathcal{W}$. Это пространство обладает двумя основными структурами. Первая из них — это симметричная билинейная форма $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \to \mathbb{C}$, которая определяется равенством

$$\psi\psi' + \psi'\psi = \{\psi, \psi'\}\mathrm{id}.$$

Она называется иначе CAR-*формой* (т.е. канонической антикоммутационной формой). В явном виде

$$\{\psi, \psi'\} = \varphi_+(v'_+) + \varphi_-(v'_-) + \varphi'_+(v_+) + \varphi'_-(v_-).$$

Вторая структура — это вещественная структура $\gamma : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$. Обозначим через $h : \mathcal{V}_\pm \to \mathcal{V}_\pm^*$ канонический изоморфизм Рисса и определим γ как антилинейную инволюцию

$$\gamma : \varepsilon(v_+) + \iota(\varphi_+) + \iota(v_-) + \varepsilon(\varphi_-) \longmapsto \iota(hv_+) + \varepsilon(h^{-1}\varphi_+) + \varepsilon(hv_-) + \iota(h^{-1}\varphi_-).$$

Вещественное подпространство $\mathcal{W}_\mathbb{R}$ относительно γ называется иначе *пространством Майорана*. Заметим, что ограничение CAR-формы на $\mathcal{W}_\mathbb{R}$ задает на нем евклидову метрику.

Вещественная структура γ и CAR-форма на $\mathcal{W}$ порождают соответствующие операции на линейных (и антилинейных) операторах T, действующих в $\mathcal{W}$. Например, γ порождает антилинейную инволюцию

$$T \mapsto \bar{T} = \gamma \circ T \circ \gamma.$$

Оператор называется *вещественным*, если $T = \bar{T}$ (и мнимым, если $\bar{T} = -T$). В случае CAR-формы индуцированная операция совпадает с линейной инволюцией $T \mapsto T^t$, называемой *транспонированием*, которая определяется равенством

$$\{\psi.T^t\psi'\} = \{T\psi, \psi'\} \ , \quad \psi, \psi' \in \mathcal{W}.$$

Оператор $T \in \operatorname{End}\mathcal{W}$ называется *симметричным*, если $T^t = T$ и *кососимметричным*, если $T^t = -T$.

CAR-форма $\{\cdot,\cdot\}$ вместе с вещественной структурой γ определяют скалярное произведение на $\mathcal{W}$, задаваемое формулой

$$\langle\psi|\psi'\rangle_\mathcal{W} = \{\gamma\psi, \psi'\} \ , \quad \psi, \psi' \in \mathcal{W}.$$

Тем самым, $\mathcal{W}$ приобретает структуру комплексного гильбертова пространства.

Наличие скалярного произведения позволяет ввести операцию *эрмитова сопряжения*

$$\operatorname{End}\mathcal{W} \ni T \longmapsto T^* = (\bar{T})^t,$$

где "черта" означает сопряжение относительно γ.

Определение 1. Пусть J есть комплексная структура на $\mathcal{W}_\mathbb{R}$, сохраняющая CAR-форму. Это означает, что $J \in \mathcal{L}(\mathcal{W}_\mathbb{R})$ и удовлетворяет условиям

$$J = -J^{-1} = -J^t,$$

а $\mathcal{L}$ означает пространство ограниченных линейных операторов. В дальнейшем мы будем называть оператор J, удовлетворяющий этим условиям, $\mathcal{W}_\mathbb{R}$-*совместимой комплексной структурой*. Иначе говоря, это кососимметричная комплексная структура на $\mathcal{W}_\mathbb{R}$.

Так как $\mathcal{W}_\mathbb{R}$-совместимая комплексная структура является кососимметричной, ее комплексно-линейное продолжение до оператора $J \in \mathcal{L}(\mathcal{W})$ является косоэрмитовым оператором, т.е. $J^* = -J$. Поскольку оператор J является комплексной структурой на $\mathcal{W}_\mathbb{R}$, т.е. $J = -J^{-1}$, его комплексно-линейное продолжение на $\mathcal{W}$ является унитарным оператором, т.е. $J = (J^{-1})^*$ на $\mathcal{W}$. Тем самым, комплексно-линейное продолжение J до оператора в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{W}$, является косоэрмитовым унитарным оператором, т.е. $J^* = -J = J^{-1}$. Более того, этот оператор является еще и вещественным, т.е. $\bar{J} = J$. Такие операторы будем называть $\mathcal{W}$-*совместимыми комплексными структурами.*

Определение 2. Пусть $\mathcal{H}$ есть комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot|\cdot\rangle$. *Вещественной структурой* на $\mathcal{H}$ называется антиунитарная инволюция γ, удовлетворяющая условиям $\gamma^2 = 1$ и

$$\langle\gamma\psi|\gamma\psi'\rangle = \langle\psi'|\psi\rangle\ ,\quad \psi,\psi' \in \mathcal{H}.$$

Вещественное гильбертово пространство — это пара $(\mathcal{H},\gamma)$, состоящая из комплексного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ и вещественной структуры γ. Комплексно-линейное (или антилинейное) отображение $\phi : (\mathcal{H}_1,\gamma_1) \to (\mathcal{H}_2,\gamma_2)$ называется *вещественным*, если оно удовлетворяет условию: $\phi\circ\gamma_1 = \gamma_2\circ\phi$.

Согласно этому определению, пространство Намбу $\mathcal{W}$ является вещественным гильбертовым пространством.

4. Приближение сильной связи

В многочастичной фермионной системе при низких температурах активные степени свободы концентрируются вблизи энергии Ферми E_F. Поэтому для описания топологические свойства системы в такой ситуации можно ограничиться низко-энергетическим сектором гильбертова пространства, порожденным состояниями, находящимися вблизи E_F. При этом исходное пространство $L^2(\mathbb{R}^d)\otimes V$ заменяется на пространство $\ell^2(\Lambda)\otimes V$, где Λ – решетка в $\mathbb{R}^d$, изоморфная $\mathbb{Z}^d$, а V – конечномерное гильбертово пространство. В качестве гильбертовых пространств $\mathcal{V}_+$ и $\mathcal{V}_-$ из предыдущего параграфа будем рассматривать пространства

$$\mathcal{V}_\pm = \ell^2(\Lambda)\otimes V_\pm,$$

где $V = V_+\oplus V_-$. Эта модель называется *моделью сильной связи*, в которой узлы решетки отвечают атомам кристалла. Сомножители $V_\pm$ отвечают за внутренние степени свободы, активные в зонах проводимости $(\mathcal{V}_+)$ и валентности $(\mathcal{V}_-)$ вблизи от энергии Ферми.

С учетом приведенных соображений пространство Намбу принимает вид

$$\mathcal{W} = \mathcal{V}_+\oplus\mathcal{V}_-^*\oplus(\mathcal{V}_+\oplus\mathcal{V}_-^*)^* = \mathcal{V}\oplus\mathcal{V}^*,$$

где

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_+\oplus\mathcal{V}_-,\quad \mathcal{V} = \ell^2(\Lambda)\otimes V.$$

Пространство $\mathcal{W}$, имеющее структуру вещественного гильбертова пространства, отождествляется с

$$\mathcal{W} = \ell^2(\Lambda) \otimes W,$$

где $W = V \oplus V^*$.

Разложение $\mathcal{W}$ в прямую сумму $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^*$ контролируется оператором

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : \mathcal{W} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathcal{W}.$$

Линейный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{W}$, оставляет подпространства $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}^*$ инвариантными тогда и только тогда, когда он коммутирует с Q. Оператор iQ порождает группу симметрии $\mathrm{U}(1)$, отвечающую за сохранение заряда. Поэтому операторы, коммутирующие с Q, называются *операторами, сохраняющими заряд.* Если такие операторы O являются к тому же вещественными, то они представляются в виде

$$O = \begin{pmatrix} O|_{\mathcal{V}} & 0 \\ 0 & h(O|_{\mathcal{V}})h^{-1} \end{pmatrix},$$

где $h = \gamma|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ – канонический изоморфизм Рисса. Тем самым, эти операторы полностью определяются своими сужениями на $\mathcal{V}$.

Список литературы

[1] A.Alldridge, C.Max, M.R.Zirnbauer, Bulk-boundary correspondence for disordered free-fermion topological phases, Comm. Math. Phys., **377**(2020), 1761-1821.

[2] N.W.Ashcroft, N.D.Mermin, *Solid State Physics*, Saunders, New York, 1976 [Русский перевод: Н.Ашкрофт, Н.Мермин, Физика твердого тела, М.: Мир, 1979]

[3] M.F.Atiyah, *K-theory*, Benjamin, New York, 1967 [Русский перевод: М.Атья, Лекции по К-теории, М.: Мир, 1967]

[4] S.Baaj, P.Julg, Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C*-modules Hilbertiens, C. R. Acad. Sci., Ser. I, Math, **296(21)**(1983), 875–878.

[5] J.Bellissard, A. van Elst, H.Schulz-Baldes, The noncommutative geometry of the quantum Hall effect, J. Math. Phys. **35**(1994), 5373–5451.

[6] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[7] C.Bourne, J.Kellendonk, A.Rennie, The K-theoretic bulk-edge correspondence for topological insulators, Ann. Inst. Poincare, **18**(2017), 1833–1866.

[8] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

[9] C.L.Kane, E.J.Mele, Quantum spin Hall effect in graphene, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:226801.

[10] C.L.Kane, E.J.Mele, $\mathbb{Z}_2$ topological order and the quantum spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:146802.

[11] Г.Г.Каспаров, Операторный К-функтор и расширения С*-алгебр, Изв. АН СССР, Серия матем., **44**(1980), 571-636.

[12] R.Kennedy, M.R.Zirnbauer, Bott periodicity for Z2 symmetric ground states of gapped free-fermion systems. Commun. Math. Phys. **342**(2016), 909–963.

[13] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, Adv. Theor. Phys., AIP Conf. Proc. **1134**(2009), 22-30.
[14] B.Laughlin, Quantized Hall conductance in two dimensions, Phes Rev. **B23**(1981), 5232.
[15] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.
[16] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.
[17] E.Prodan, H.Schulz-Baldes, *Bulk and Boundary Invariants for Complex Topological Insulators*, Mathematical Physics Studies. Springer, 2016.
[18] J.Roe, Paschke duality for real and graded C?-algebras, Oxford Quat. J. Math., **55(3)**(2004), 325–331.
[19] L.B.Schweitzer, A short proof that Mn(A) is local if A is local and Fr?echet, Int. J. Math., **03(04)**(1992),581–589.
[20] D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405-408.
[21] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. I. Quat. J. Math. Oxford, Ser.(2), **39**(1988), 185–199.
[22] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. II. Pacific J. Math., **134**(1988), 377-392.