МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ФИЗИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

А.Г.Сергеев

ВВЕДЕНИЕ

В развитии математических методов физики твердого тела можно выделить два периода. Первый относится к построению классической теории Блоха, описывающей свойства твердых тел, обладающих кристаллической решеткой. Основными математическими инструментами на этом этапе являлись традиционные и для других разделов теоретической физики функциональный анализ и дифференциальные уравнения в частных производных. Второй период наступил с внедрением иных математических методов, в частности топологии. Роль топологии в теории твердого тела проявилась в полной мере при исследовании квантового эффекта Холла. Вскоре после его открытия фон Клитцингом в 1980 году появились публикации Лафлина [13] и Таулесса с соавторами [19], в которых предлагалось топологическое объяснение этого эффекта.

Ключевую роль в исследовании топологических свойств твердых тел играет изучение их групп симметрий. Описание возможных типов симметрий восходит к Китаеву [12], который предложил классификацию топологических объектов, основанную на теории представлений клиффордовых алгебр. Вслед за алгебрами Клиффорда последовали теория C^*-алгебр и некоммутативная геометрия, которая была с успехом применена Белиссаром и его коллегами [**?**] для объяснения квантового эффекта Холла в сверхпроводниках при наличии примесей. Для их учета использовались методы теории вероятностей. И наконец, пришло время K-теории, которая стала тем языком, на котором естественно формулировать и изучать топологические свойства твердых тел.

В этом тексте мы попытались, не претендуя на полноту, представить перечисленные приложения современных математических методов в физике твердого тела. При его подготовке автор пользовался финансовой поддержкой со стороны Центра МЦМУ МИАН.

Список литературы

[1] A.Alldridge, C.Max, M.R.Zirnbauer, Bulk-boundary correspondence for disordered free-fermion topological phases, Comm. Math. Phys., **377**(2020), 1761-1821.

[2] N.W.Ashcroft, N.D.Mermin, *Solid State Physics*, Saunders, New York, 1976 [Русский перевод: Н.Ашкрофт, Н.Мермин, Физика твердого тела, М.: Мир, 1979]

[3] M.F.Atiyah, *K-theory*, Benjamin, New York, 1967 [Русский перевод: М.Атья, Лекции по K-теории, М.: Мир, 1967]

[4] S.Baaj, P.Julg, Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C*-modules Hilbertiens, C. R. Acad. Sci., Ser. I, Math, **296(21)**(1983), 875–878.

[5] J.Bellissard, A. van Elst, H.Schulz-Baldes, The noncommutative geometry of the quantum Hall effect, J. Math. Phys. **35**(1994), 5373–5451.

[6] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[7] C.Bourne, J.Kellendonk, A.Rennie, The K-theoretic bulk-edge correspondence for topological insulators, Ann. Inst. Poincare, **18**(2017), 1833–1866.

[8] C.L.Kane, E.J.Mele, Quantum spin Hall effect in graphene, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:226801.

[9] C.L.Kane, E.J.Mele, $\mathbb{Z}_2$ topological order and the quantum spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:146802.

[10] Г.Г.Каспаров, Операторный K-функтор и расширения C*-алгебр, Изв. АН СССР, Серия матем., **44**(1980), 571-636.

[11] R.Kennedy, M.R.Zirnbauer, Bott periodicity for Z2 symmetric ground states of gapped free-fermion systems. Commun. Math. Phys. **342**(2016), 909–963.

[12] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, Adv. Theor. Phys., AIP Conf. Proc. **1134**(2009), 22-30.

[13] B.Laughlin, Quantized Hall conductance in two dimensions, Phes Rev. **B23**(1981), 5232.

[14] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[15] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.

[16] E.Prodan, H.Schulz-Baldes, *Bulk and Boundary Invariants for Complex Topological Insulators*, Mathematical Physics Studies. Springer, 2016.

[17] J.Roe, Paschke duality for real and graded C?-algebras, Oxford Quat. J. Math., **55(3)**(2004), 325–331.

[18] L.B.Schweitzer, A short proof that Mn(A) is local if A is local and Fr?echet, Int. J. Math., **03(04)**(1992),581–589.

[19] D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405-408.

[20] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. I. Quat. J. Math. Oxford, Ser.(2), **39**(1988), 185–199.

[21] A.Van Daele, K-theory for graded Banach algebras. II. Pacific J. Math., **134**(1988), 377-392.