ЛЕКЦИЯ 7

1. Топологический $\mathbb{Z}_2$-индекс диэлектрика

1.1. **Топологический $\mathbb{Z}_2$-индекс Черна.** Рассмотрим конструкцию топологического $\mathbb{Z}_2$-индекса для 3-мерного инволютивного пространства (X, τ). Предположим, что гильбертово расслоение $\pi : \mathfrak{H} \to X$ имеет ранг 2, а калибровочная группа совпадает с $\mathrm{U}(2)$. Анти-инволюция Θ на гильбертовом расслоении $(\mathfrak{H}, \Theta) \to (X, \tau)$ совместима с естественной инволюцией ϑ на $\mathrm{U}(2)$, задаваемой формулой: $\vartheta(g) = -g^t$, в том смысле, что $w \circ \tau = \vartheta \circ w$, где w – функция перехода. Иными словами, w задает эквивариантное отображение $w : (X, \tau) \to (\mathrm{U}(2), \vartheta)$.

Нечетный характер Черна гладкого отображения $g : X \to \mathrm{U}(n)$ из нечетномерного многообразия X^d в группу $\mathrm{U}(n)$ определяется формулой (см. [11])

$$\mathrm{Ch}(g) = \sum_{k=0}^{(d-1)/2} \mathrm{Ch}_{2k+1}(g) = \sum_{k=0}^{(d-1)/2} (-1)^k \frac{k!}{(2k+1)!} \mathrm{tr}\left[(g^{-1}dg)^{2k+1}\right].$$

Пользуясь этой формулой в 3-мерном случае, можно ввести *топологический индекс*

$$\mathrm{ind}_t g = \frac{1}{4\pi^2} \int_X \mathrm{Ch}_3(g) = -\frac{1}{24\pi^2} \int_X \mathrm{tr}(g^{-1}dg)^3.$$

Это число называется также *числом вращения* отображения g. Ввиду T-симметрии топологический индекс $\mathrm{ind}_t w$ функции перехода w определен по модулю $\mathbb{Z}_2$ (см. [17]).

Утверждение о том, что топологический $\mathbb{Z}_2$-индекс для 3-мерных диэлектриков совпадает с введенным ранее аналитическим $\mathbb{Z}_2$-индексом, т.е.

$$\nu = \mathrm{ind}_t w,$$

можно рассматривать как аналог теоремы Атьи–Зингера об индексе в рассматриваемой ситуации.

1.2. **Инвариант Кейна–Мила.** Другое определение топологического $\mathbb{Z}_2$-индекса было предложено в работе [16]. Этот инвариант, называемый *КМ-инвариантом*, задается формулой

$$\mathrm{KM}(X) = \prod_{x\in X^\tau} \frac{\mathrm{pf}[w(x)]}{\sqrt{\det[w(x)]}} \ .$$

Как отмечалось выше, в неподвижных точках $x \in X^\tau$ функция перехода $w(x)$ является кососимметрической матрицей, пфаффиан которой обозначается через $\mathrm{pf}[w(x)]$.

Напомним его определение. Пусть $A = (a_{ij})$ есть $(2n) \times (2n)$-кососимметрическая матрица. Сопоставим ей бивектор

$$\Omega = \sum_{i<j} a_{ij} e_i \wedge e_j,$$

где $\{e_i\}$ – стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда пфаффиан $\mathrm{pf}(A)$ матрицы A определяется уравнением

$$\frac{1}{n!}\Omega^n = \mathrm{pf}(A) e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2n}.$$

Пфаффиан $\mathrm{pf}(A)$ обладает следующими свойствами:

(1) $\mathrm{pf}(A)^2 = \det(A),\ \mathrm{pf}(\lambda A) = \lambda^n \mathrm{pf}(A)$;
(2) $\mathrm{pf}(BAB^t) = \det(B)\mathrm{pf}(A),\ \mathrm{pf}(A^t) = (-1)^n \mathrm{pf}(A)$.

Как известно, квадратная матрица A удовлетворяет тождеству

$$\ln\, \det(A) = \mathrm{tr} \ln(A).$$

В том случае, когда матрица A кососимметрична, это соотношение превращается в

$$2\ln \mathrm{pf}(A) = \mathrm{tr} \ln(A).$$

Связь КМ-инварианта с топологическим $\mathbb{Z}_2$-индексом устанавливается с помощью формулы (см. [17]):

$$\sum_{x\in X^\tau} \ln \mathrm{pf}[w(x)] = \frac{1}{2}\, \mathrm{ind}_t w.$$

Экспоненцируя это равенство, получим уравнение, связывающее произведение пфаффианов с топологическим $\mathbb{Z}_2$-индексом

$$\prod_{x\in X^\tau} \mathrm{pf}[w(x)] = \exp\{2\pi i \frac{\mathrm{ind}_t w}{2}\} = (-1)^{\mathrm{ind}_t w}.$$

Полагая детерминант $\det[w(x)]$ в неподвижных точках $x \in X^\tau$ равным 1, получим, что $\mathrm{pf}[w(x)]$ в таких точках равен 1 или -1. Поэтому произведение в левой части равно $\mathrm{KM}(X)$ и оно не изменится, если заменить в нем пфаффианы их знаками. Тем самым, получаем

$$\mathrm{KM}(X) = \prod_{x\in X^\tau} \mathrm{sgn}\,(\mathrm{pf}[w(x)]) = (-1)^{\mathrm{ind}_t w}.$$

Список литературы

[1] G.Abramovich, P.Kalugin, Clifford modules and symmetries of topological insulators, Int. J. Geom. Methods in Phys. **9**(2012), N 3, 1250023, 1-31. ,

[2] Н.Ашкрофт, Н.Мермин, *Физика твердого тела*, Мир, Москва, 1979.

[3] М.Атья, *Лекции по К-теории*, Мир, Москва, 1967.

[4] M.F.Atiyah, I.M.Singer, Index theory for skew-adjoint Fredholm operators, Publ. Math. Inst. Haut. Etud. Sci. **37**(1969), 5-26.

[5] M.F.Atiyah, I.M.Singer, The index of elliptic operators, V, Ann. Math. **93**(1971), 139-149.

[6] J.E.Avron, R.Seiler, B.Simon, Homotopy and quantization in condensed matter physics, Phys. Rev. Lett. **51**(1990), N 1, 2185.

[7] M.Berry, Quantum phase factors accompanying adiabatic changes, Proc. R. Soc. London **A392**(1984), 45.

[8] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[9] A.Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London–San Diego, 1994.

[10] R.Fox, Homotopy groups and torus homotopy groups, Ann. Math. **49**(1948), N 2, 471-510.

[11] E. Getzler, The odd Chern character in cyclic homology and spectral flow, Topology, **32(3)**(1993),489–507.

[12] R.Goodman, N.R.Wallach, *Symmetry, Representations and Invariants*, Springer, 2009.

[13] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

[14] P.Heinzner, A.Huckleberry, M.Zirnbauer, Symmetry classes of disordered fermions, Communs. Math. Phys. **257**(2005), 725-771.

[15] C.L.Kane, E.J.Mele, Quantum spin Hall effect in graphene, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:226801.

[16] C.L.Kane, E.J.Mele, $\mathbb{Z}_2$ topological order and the quantum spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:146802.

[17] R.M.Kaufmann, Dan Li, B.Wehefritz-Kaufmann, Topological insulators and K-theory, ArXiv: 1510.08001.

[18] R.Kennedy, Homotopy theory of topological insulators, Dissertation, Köln, 2014.

[19] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, Adv. Theor. Phys., AIP Conf. Proc. **1134**(2009), 22-30.

[20] B.Laughlin, Quantized Hall conductance in two dimensions, Phes Rev. **B23**(1981), 5232.

[21] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[22] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.

[23] M.Sato, Y.Ando, Topological superconductors: a review, Rep. Progress Phys. **80**(2017), 076501.

[24] А.Г.Сергеев, Спинорная геометрия Дирака и некоммутативная геометрия Конна, Труды МИАН **298**(2017), 276-314.

[25] А.Г.Сергеев, Применения некоммутативной геометрии в анализе и математической физике, Труды ММО **81**(2020), вып. 2, 1-59.

[26] S.Q.Shen, *Topological Insulators: Dirac Operators in Condensed Matters*, Berlin, Springer, 2013.

[27] D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405-408.