ЛЕКЦИЯ 4

1. Топологические диэлектрики, инвариантные относительно обращения времени

В следующих лекциях мы рассматриваем для простоты одночастичные гамильтонианы.

1.1. **Связность Берри.** Начнем с двумерного случая. Рассмотрим блоховский гамильтониан $H(k)$, собственные значения которого задаются уравнением

$$H(k)\varphi_n(k) = E_n(k)\varphi_n(k). \tag{1}$$

Связность Берри, отвечающая за изменение $\varphi_n(k)$ по k, определяется равенством

$$A_n(k) = i(\varphi_n(k), \partial_k \varphi_n(k)). \tag{2}$$

Уравнение (1) инвариантно относительно калибровочных преобразований вида

$$\varphi_n(k) \longmapsto e^{i\theta_n(k)}\varphi_n(k),$$

где $\theta_n(k)$ – калибровочная функция, т.е. гладкая вещественнозначная функция от k. Эти преобразования индуцируют калибровочные преобразования связности вида

$$A_n(k) \longmapsto A_n(k) - \partial_k \theta_n(k).$$

Кривизна связности Берри равна

$$F_{xy,n}(k) = \partial_{k_x} A_{k_y,n}(k) - \partial_{k_y} A_{k_[,n}(k),$$

где $k = (k_x, k_y)$.

1.2. **Инвариант Черна.** Пользуясь связностью Берри, можно ввести топологический инвариант, называемый *числом Черна.* В двумерном случае это число для n-й зоны равно

$$\mathrm{Ch}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Br}_2} F_{xy,n}(k)\,dk_x dk_y,$$

а суммарное число Черна двумерного диэлектрика равно

$$\mathrm{Ch} = \sum_{E_n < E_F} \mathrm{Ch}_n,$$

где E_F – энергия Ферми. Введенное число Черна связано с проводимостью *Холла* (см. [23]) соотношением

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{h}\,\mathrm{Ch}.$$

При обращении времени суммарная связность Берри и ее кривизна преобразуются следующим образом

$$\sum_{E_n<E_F} A_n(k) \longmapsto \sum_{E_n<E_F} A_n(-k)$$

и

$$\sum_{E_n<E_F} F_{xy,n}(k) \longmapsto -\sum_{E_n<E_F} F_{xy,n}(-k).$$

Поэтому если система инвариантна относительно преобразования обращения времени T, то число Черна преобразуется как

$$\mathrm{Ch} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Br}_2} \sum_{E_n<E_F} F_{xy,n}(k)dk_x dk_y \longmapsto$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Br}_2} \sum_{E_n<E_F} F_{xy,n}(-k)dk_x dk_y = -\mathrm{Ch},$$

откуда следует, что $\mathrm{Ch} = 0$. Следовательно, топологически нетривиальное состояние системы с ненулевым Ch возможно только при нарушении T-симметрии. Ниже мы вернемся к этой проблеме и объясним, каким образом можно определить топологически нетривиальные инварианты для T-симметричных топологических диэлектриков.

1.3. **Топологические инварианты и грассманианы.** Пусть задан блоховский гамильтониан $H(k)$, описывающий зонный диэлектрик с запретной зоной на уровне энергии Ферми E_F. Приведем его к диагональному виду с помощью унитарного сопряжения:

$$U^*(k)H(k)U(k) = \mathrm{diag}(E_1(k),\ldots,E_n(k)).$$

Предположим, что первые m уровней $E_i(k) > E_F$, $i = 1,\ldots,p$, не заняты, а заполненные уровни отвечают энергиям $E_i(k) < E_F$ с $i = m+1,\ldots,n$, где мы предполагаем, что $n \gg 1$.

Рассмотрим адиабатическую деформацию этого гамильтониана. В отсутствие условий симметрии возможна любая деформация, не затрагивающая запретной зоны. В частности, можно добиться того, что энергии всех занятых (соотв. свободных) уровней будут равны -1 (соотв. +1), так что

$$U^*(k)H(k)U(k) = \mathrm{diag}\left(\mathbf{1}_{m\times m}, -\mathbf{1}_{(n-m)\times(n-m)}\right). \tag{3}$$

Заметим, что матрица $U(k)$ в этом равенстве определена с точностью до преобразований вида

$$U(k) \longmapsto U(k)\mathrm{diag}\left(\mathrm{U}_{m\times m}, \mathrm{U}_{(n-m)\times(n-m)}\right).$$

Следовательно, матрица $U(k)$, задающая решение уравнения (3), определяет отображение из зоны Бриллюэна $\mathrm{Br}_d = \mathbb{T}^d$ в грассманиан

$$\mathrm{Gr}_{m,n} = \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(m) \times \mathrm{U}(n-m).$$

Тем самым, мы приходим к задаче об описании гомотопических классов $[\mathbb{T}^d, \mathrm{Gr}_{m,n}]$ отображений тора $\mathbb{T}^d$ в грассмановы многообразия.

Общая задача об описании пространств $[\mathbb{T}^d, X]$ и торических гомотопических групп топологических пространств X была исследована в статье Фокса [9].

Структура пространства $[\mathbb{T}^d, X]$ определяется наборами отображений

$$\Omega_I^n : \pi_n(X) \to [\mathbb{T}^d, X]$$

с $n \le d$. Эти отображения параметризуются упорядоченными подмножествами $I = \{i_1 < \ldots < i_n\}$ в множестве индексов $\{1, \ldots, d\}$. Соответственно, элементы $[\mathbb{T}^d, X]$ параметризуются наборами из d элементов группы $\pi_1(X)$, $\frac{d(d-1)}{2}$ элементов из $\pi_2(X), \ldots, \binom{d}{j}$ элементов из $\pi_j(X)$.

Вернемся к поставленной ранее задаче об описании гомотопических классов $[\mathbb{T}^d, \mathrm{Gr}_{m,n}]$ отображений тора $\mathbb{T}^d$ в грассмановы многообразия.

Применяя конструкцию Фокса к грассманиану $\mathrm{Gr}_{m,n}$, получаем что при $d = 1$: $[\mathbb{T}^1, \mathrm{Gr}_{m,n}] = \pi_1(\mathrm{Gr}_{m,n}) = 0$, при $d = 2$ гомотопические классы отображений $\mathbb{T}^2 \to \mathrm{Gr}_{m,n}$ характеризуются единственным инвариантом, так как $\pi_2(\mathrm{Gr}_{m,n}) = \mathbb{Z}$, а при $d = 3$ гомотопические классы отображений $\mathbb{T}^3 \to \mathrm{Gr}_{m,n}$ классифицируются тремя элементами из группы $\pi_2(\mathrm{Gr}_{m,n}) = \mathbb{Z}$, так как $\pi_1(\mathrm{Gr}_{m,n}) = \pi_3(\mathrm{Gr}_{m,n}) = 0$.

Нетривиальные классы в размерностях $d = 2, 3$ описываются следующим образом. Пространство $[\mathbb{T}^d, \mathrm{Gr}_{m,n}]$ можно рассматривать как классифицирующее пространство для расслоений над $\mathbb{T}^d$. В размерности $d = 2$ имеется нетривиальное расслоение над $\mathbb{T}^2$, являющееся аналогом хопфовского расслоения над $\mathbb{S}^2$. С физической точки зрения этот случай отвечает квантовому спиновому состоянию Холла. В размерности $d = 3$ имеются три расслоения над $\mathbb{T}^3$, являющихся поднятиями хопфовского расслоения относительно трех различных проекций $\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

1.4. **Топологические инварианты диэлектриков, симметричных относительно обращения времени.** *Обращение времени* или *T-преобразование* задается оператором T, который удовлетворяет условию $T^2 = -\mathrm{id}$ и является анти-унитарным оператором, т.е.

$$(T\varphi, T\psi) = (\psi, \varphi)$$

для любых состояний φ, ψ. Отсюда следует, в частности, что состояние φ и его T-партнер $T\varphi$ ортогональны друг другу: $(T\varphi, \varphi) = 0$. Действительно

$$(T\varphi, \varphi) = -(T\varphi, T^2\varphi) = -(T\varphi, \varphi),$$

где последнее равенство вытекает из анти-унитарности T. Следовательно, $(T\varphi, \varphi) = 0$.

Так как состояния φ и $T\varphi$ имеют одинаковую энергию, это означает, что любое собственное состояние энергии двукратно вырождено. Подобный эффект называется *вырождением Крамерса*.

Симметрия относительно T-преобразования означает для блоховского гамильтониана $H(k)$, что

$$TH(k)T^{-1} = H(-k).$$

Поэтому для каждого собственного значения энергии имеются два состояния $\varphi_n'(k)$ и $\varphi_n''(k)$, удовлетворяющие условию

$$\varphi_n''(k) = e^{i\theta_n(k)} T\varphi_n'(k),$$

где $\theta_n(k)$ – калибровочная функция. Соответственно, исходное гильбертово пространство разбивается в сумму двух подпространств $\mathcal{H}'$ и $\mathcal{H}''$, для каждого из которых можно ввести числа Черна Ch' и Ch'', сумма которых равна нулю. По действием T они меняются местами и меняют знак:

$$T : \mathrm{Ch}' \longmapsto \mathrm{Ch}'' = -\mathrm{Ch}' \ , \quad T : \mathrm{Ch}'' \longmapsto \mathrm{Ch}' = -\mathrm{Ch}''.$$

Однако их четности, т.е. значения $(-1)^{\mathrm{Ch}'}$ и $(-1)^{\mathrm{Ch}''}$, при этом не изменяются, т.е. корректно определен $\mathbb{Z}_2$-индекс ν, задаваемый равенством

$$(-1)^{\nu} = (-1)^{\mathrm{Ch}'} = (-1)^{\mathrm{Ch}''}.$$

Диэлектрик с $(-1)^{\nu} = -1$ топологически отличается от обычного диэлектрика и называется *квантовым спиновым диэлектриком Холла*.

Список литературы

[1] G.Abramovich, P.Kalugin, Clifford modules and symmetries of topological insulators, Int. J. Geom. Methods in Phys. **9**(2012), N 3, 1250023, 1-31. ,

[2] Н.Ашкрофт, Н.Мермин, *Физика твердого тела*, Мир, Москва, 1979.

[3] M.F.Atiyah, I.M.Singer, Index theory for skew-adjoint Fredholm operators, Publ. Math. Inst. Haut. Etud. Sci. **37**(1969), 5-26.

[4] M.F.Atiyah, I.M.Singer, The index of elliptic operators, V, Ann. Math. **93**(1971), 139-149.

[5] J.E.Avron, R.Seiler, B.Simon, Homotopy and quantization in condensed matter physics, Phys. Rev. Lett. **51**(1990), N 1, 2185.

[6] M.Berry, Quantum phase factors accompanying adiabatic changes, Proc. R. Soc. London **A392**(1984), 45.

[7] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[8] A.Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London–San Diego, 1994.

[9] R.Fox, Homotopy groups and torus homotopy groups, Ann. Math. **49**(1948), N 2, 471-510.

[10] R.Goodman, N.R.Wallach, *Symmetry, Representations and Invariants*, Springer, 2009.

[11] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

[12] P.Heinzner, A.Huckleberry, M.Zirnbauer, Symmetry classes of disordered fermions, Communs. Math. Phys. **257**(2005), 725-771.

[13] C.L.Kane, E.J.Mele, Quantum spin Hall effect in graphene, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:226801.

[14] C.L.Kane, E.J.Mele, $\mathbb{Z}_2$ topological order and the quantum spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:146802.

[15] R.M.Kaufmann, Dan Li, B.Wehefritz-Kaufmann, Topological insulators and K-theory, ArXiv: 1510.08001.

[16] R.Kennedy, Homotopy theory of topological insulators, Dissertation, Köln, 2014.

[17] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, Adv. Theor. Phys., AIP Conf. Proc. **1134**(2009), 22-30.

[18] B.Laughlin, Quantized Hall conductance in two dimensions, Phes Rev. **B23**(1981), 5232.

[19] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[20] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.

[21] M.Sato, Y.Ando, Topological superconductors: a review, Rep. Progress Phys. **80**(2017), 076501.

[22] А.Г.Сергеев, Спинорная геометрия Дирака и некоммутативная геометрия Конна, Труды МИАН **298**(2017), 276-314.

[23] А.Г.Сергеев, Применения некоммутативной геометрии в анализе и математической физике, Труды ММО **81**(2020), вып. 2, 1-59.

[24] S.Q.Shen, *Topological Insulators: Dirac Operators in Condensed Matters*, Berlin, Springer, 2013.

[25] D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405-408.