ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Содержание

Date: 22 апреля 2021.

Введение

Этот спецкурс посвящен одному из интереснейших и интенсивно развивающихся разделов физики твердого тела — теории топологических диэлектриков.

Почему мы выбрали именно эту тему для спецкурса? Помимо ее значимости для теоретической физики нас привлекли многочисленные связи этой науки с различными разделами современной математики. К таким разделам можно отнести топологию (в особенности, теорию гомотопий), теорию клиффордовых алгебр, K-теорию и некоммутативную геометрию.

Роль топологии в теории твердого тела проявилась, по-видимому впервые, при исследовании квантового эффекта Холла. Вскоре после его открытия фон Клитцингом в 1980 году появились работы Лафлина [20] и Таулесса с соавторами [27], предложившие топологическое объяснение этого эффекта. (Подробнее об этом см. обзор [25].)

С физической точки зрения топологическая инвариантность эквивалентна адиабатической устойчивости. Топологические диэлектрики характеризуются наличием энергетической щели, устойчивой к малым деформациям, что и служит основанием для использования топологических методов для их изучения.

Ключевую роль при исследовании топологических объектов в теории твердого тела играют их группы симметрий. Эти группы будут подробно рассмотрены в курсе, здесь отметим только, что имеются три основных типа таких симметрий. Это симметрия относительно обращения времени (которой мы уделяем особое внимание), симметрия сохранения числа частиц (или зарядовая симметрия) и PH-симметрия (симметрия между частицами и дырками). Исходя из описания возможных групп симметрий, Китаев [19] предложил классификацию топологических диэлектриков и сверхпроводников, которую мы также подробно рассмотрим в нашем курсе.

Коротко остановимся на содержании курса. Он состоит из 7 лекций, которые отвечают скорее семи разным темам, чем формальным лекциям.

В первой части курса рассматриваются общие вопросы теории твердого тела, связанные с диэлектриками и сверхпроводниками.

Курс открывается лекцией 1, посвященной теории Блоха, описывающей свойства твердых тел, обладающих кристаллической решеткой. Вначале рассматривается одночастичный оператор Шредингера с периодическим потенциалом и вводится блоховский (эффективный) гамильтониан на импульсном пространстве. Далее рассматривается многочастичный оператор Шредингера. Для его описания вводится фермионное фоковское пространство и дается интерпретация основных операторов (включая операторы рождения и уничтожения), действующих в этом пространстве. Здесь же рассматривается гамильтониан Боголюбова–де Жена для сверхпроводников и дается его интерпретация в терминах фоковского пространства.

Следующая лекция 2 посвящена исследованию групп симметрий, возникающих в теории твердого тела. Она открывается кратким изложением теории алгебр Клиффорда, которая служит мотивировкой для описания симметрий и псевдосимметрий, отвечающих топологическим диэлектрикам и сверхпроводникам. Итогом этого описания является классификация Китаева указанных объектов в теории твердого тела. Вводятся классифицирующие пространства, с помощью которых удается применить к описанию топологических объектов методы теории гомотопий.

В лекции 3 дается математическая интерпретация классификации Китаева, основанная на гомотопической классификации гамильтонианов, квадратичных по операторам рождения и уничтожения. Главную роль играет исследование свойств пространства Намбу и связанных с ним изотипных разложений.

Вторая часть курса посвящена топологическим диэлектрикам, инвариантным относительно обращения времени.

В лекции 4 рассматриваются двумерные диэлектрики. Для них вводится связность Берри, с помощью которой строится инвариант Черна, тесно связанный с проводимостью Холла. Затем рассматривается общая задача о построении топологических инвариантов диэлектриков. Эти инварианты допускают описание в терминах гомотопических классов отображений тора в грассмановы многообразия. Благодаря наличию вырождения Крамерса в двумерных диэлектриках удается определить для них топологический $\mathbb{Z}_2$-индекс.

В лекции 5 дается математическая интерпретация объектов, введенных в предыдущей лекции. Вначале мы напоминаем основные понятия из K-теории. Топологические диэлектрики, инвариантные относительно обращения времени, описываются математически в терминах инволютивных пространств и кватернионных векторных расслоений над этими пространствами. Обсуждается связь теории топологических диэлектриков с некоммутативной геометрией. Ключевую роль играют центральные для этой геометрии понятия спектральной тройки и KR-цикла.

Наличие симметрии во времени неизбежно приводит к исследованию нулевых мод Майорана, которым посвящена лекция 6. В их терминах для трехмерных диэлектриков, инвариантных относительно обращения времени, определяется аналитический $\mathbb{Z}_2$-индекс, равный четности числа нулевых мод Майорана в неподвижных точках инволюции. Здесь же строится KQ-цикл, ассоциированный с квазичастицей Майорана.

В заключительной лекции 7 вводится топологический $\mathbb{Z}_2$-индекс, который в силу подходящей версии теоремы Атьи–Зингера об индексе совпадает с ранее определенным аналитическим $\mathbb{Z}_2$-индексом. Этот инвариант также тесно связан с KM-инвариантом, предложенным Кейном и Милом.

За лекцией 7 следуют библиографические комментарии, где можно найти ссылки на литературу, касающуюся рассматриваемых вопросов.

При подготовке статьи мы пользовались частичной финансовой поддержкой со стороны грантов РФФИ 19-01-00474, 20-51-05006 и гранта РНФ 19-11-00316.

1. Теория Блоха

1.1. **Одночастичный оператор Шредингера.** Теория Блоха (см. [2], [22]) описывает свойства твердых тел, обладающих кристаллической решеткой, называемой *решеткой Браве*. С математической точки зрения это дискретная абелева группа Γ в пространстве $\mathbb{R}^d$ с $d = 2$ или 3, изоморфная $\mathbb{Z}^d$. Группа Γ действует на $\mathbb{R}^d$ трансляциями T_γ на векторы $\gamma \in \Gamma$.

Поведение свободных электронов в твердом теле определяется *одночастичным уравнением Шредингера*

$$H\psi := (-\Delta + V)\psi = E\psi \tag{1}$$

с потенциалом V, периодическим относительно действия Γ. В дальнейшем предполагается, что V есть ограниченная измеримая функция. Введенный оператор H коммутирует со всеми операторами T_γ.

Обозначим через Γ' двойственную решетку в импульсном пространстве $(\mathbb{R}^d)'$, которая определяется следующим образом:

$$\Gamma' = \{k \in (\mathbb{R}^d)' : k \cdot \gamma \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{для любых } \gamma \in \Gamma\}.$$

Фундаментальная область (единичная клетка) $M_{\Gamma'}$ решетки Γ' называется *зоной Бриллюэна* Br_d.

Функции, инвариантные относительно Γ, можно рассматривать как функции на торе $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}/\Gamma$. Обозначим через $\mathcal{H}_0$ гильбертово пространство

$$\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbb{T}^d) = L^2(\mathbb{R}^d/\Gamma) \tag{2}$$

относительно меры на $\mathbb{R}^d/\Gamma$, индуцированной лебеговой мерой dx на $\mathbb{R}^d$. Экспонента $e_k := e^{ik\cdot x}$ принадлежит $\mathcal{H}_0$, если $k \in \Gamma'$. Более того, такие функции образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_0$.

Гладкие функции вида

$$\psi(x) = e^{ik\cdot x}\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^d,$$

с вектором k, принадлежащим зоне Бриллюэна Br_d, и функцией $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d/\Gamma)$, называются *блоховскими*, а вектор k – *квазиимпульсом.* Пространство блоховских функций с квазиимпульсом k обозначается через L_k. Эквивалентно, можно определить пространство L_k блоховских функций как

$$L_k = \{\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) :\ \psi \circ T_\gamma = e^{ik\cdot\gamma}\psi \text{ для любого } \gamma \in \Gamma\}.$$

Оператор Шредингера (1) действует на блоховские функции по правилу

$$H\left(e^{ik\cdot x}\varphi(x)\right) = e^{ik\cdot x}H_k\varphi(x). \tag{3}$$

Оператор H_k, называемый *эффективным* или *блоховским гамильтонианом*, имеет вид

$$H_k\varphi = (\frac{1}{i}\nabla + k)^2\varphi + V\varphi.$$

Он отображает пространство $C^\infty(\mathbb{R}^d/\Gamma)$ в себя, поэтому из формулы (3) следует, что исходный оператор Шредингера $H = H_0$ отображает пространство блоховских функций с квазиимпульсом k в себя. Если обозначить через I_k оператор умножения на $e^{ik\cdot x}$, то формулу (3) можно будет переписать в виде

$$I_k^{-1}HI_k = H_k$$

откуда

$$H|_{L_k} = I_k \circ H_k|_{L_0} \circ I_k^{-1},$$

так что исследование оператора $H|_{L_k}$ сводится к изучению оператора $H_k|_{L_0}$.

Обозначим через $H(k)$ замыкание оператора $H_k|_{L_0}$ в пространстве $\mathcal{H}_0$. Область определения этого оператора совпадает с подпространством

$$D = \left\{ \varphi : \varphi(x) = \sum_{\gamma' \in \Gamma'} \varphi_{\gamma'} e^{i(\gamma' \cdot x)}, \ \sum_{\gamma' \in \Gamma'} (1 + |\gamma'|^2)^2 |\varphi_{\gamma'}|^2 < \infty \right\}.$$

Это подпространство можно отождествить с соболевским пространством $H^2(\mathbb{R}^d/\Gamma)$ и задать скалярное произведение на нем посредством

$$\|\varphi\|_2^2 = V_\Gamma \sum_{\gamma' \in \Gamma'} (1 + |\gamma'|^2)^2 |\varphi_{\gamma'}|^2,$$

где V_Γ есть объем фундаментальной области M_Γ решетки Γ.

Спектр оператора $H(k)$ является дискретным, а собственные функции $\varphi_m(k)$ этого оператора, являющиеся решениями уравнения

$$H(k)\varphi_m(k) = E_m(k)\varphi_m(k), \tag{4}$$

образуют полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$.

Совокупность всех электронных уровней, отвечающих функции $E_m(k)$ с фиксированным m, называется *энергетической зоной*. Таким образом, собственные функции $E_m(k)$ определяют *зонную структуру* твердого тела.

Основное состояние системы из n блоховских электронов имеет следующую структуру. Имеется некоторое число p полностью заполненных одно-электронных уровней с энергией, не превосходящей величины E_F, называемой *энергией Ферми*. Выше лежат $n - p$ пустых (не заполненных) уровней. Зазор между верхним заполненным и нижним пустым уровнем называется *энергетической щелью* или *запрещенной зоной*. Твердые тела, обладающие широкой энергетической щелью, устойчивой относительно малых деформаций, называются *диэлектриками* или *изоляторами*.

Блоховские функции

$$\psi_{m,k}(x) = e^{ik \cdot x} \varphi_{m,k}(x), \tag{5}$$

являются собственными функциями исходного оператора Шредингера H.

Построим ортогональное разложение исходного пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$ по блоховским функциям. Обозначим через $\tilde{f}$ преобразование Фурье функции $f \in S(\mathbb{R}^d)$, где $S(\mathbb{R}^d)$ – пространство Шварца быстро убывающих функций на $\mathbb{R}^d$. Тогда

$$\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi\cdot x} f(x)dx,$$

так что

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{(\mathbb{R}^d)'} e^{i\xi\cdot x} \tilde{f}(\xi)d\xi.$$

Разложим интеграл в правой части по клеткам, являющимся сдвигами зоны Бриллюэна:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{\gamma'\in\Gamma'} \int_{\gamma'+\mathrm{Br}_d} e^{i\xi\cdot x}\tilde{f}(\xi)d\xi = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{\gamma'\in\Gamma'} \int_{\mathrm{Br}_d} e^{i(k+\gamma')\cdot x}\tilde{f}(k+\gamma')dk = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathrm{Br}_d} \left[\sum_{\gamma'\in\Gamma'} e^{i(k+\gamma')\cdot x}\tilde{f}(k+\gamma')\right] dk. \end{aligned}$$

Введем функцию

$$f_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{\gamma'\in\Gamma'} e^{i(k+\gamma')\cdot x}\tilde{f}(k+\gamma').$$

Она принадлежит L_k и

$$f(x) = \int_{\mathrm{Br}_d} f_k(x)dk.$$

Полученное разложение в интеграл по блоховским функциям является ортогональным, т.е. выполняется равенство Парсеваля. Действительно

$$\begin{aligned} (6) \quad \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2dx = \int_{(\mathbb{R}^d)'} |\tilde{f}(\xi)|^2d\xi = \sum_{\gamma'\in\Gamma'} \int_{\mathrm{Br}_d} |\tilde{f}(k+\gamma')|^2dk = \\ = \int_{\mathrm{Br}_d} \left[\sum_{\gamma'\in\Gamma'} |\tilde{f}(k+\gamma')|^2\right] dk. \end{aligned}$$

Заметим, что функции $\{V_\Gamma^{-1/2} e^{i\gamma'\cdot x}\}_{\gamma'\in\Gamma'}$, где V_Γ есть объем M_Γ, образуют полную ортонормированную систему на $M_\Gamma = \mathbb{R}^d/\Gamma$.

Применяя формулу Парсеваля к ортогональному разложению

$$e^{-ik\cdot x} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{\gamma'\in\Gamma'} e^{i\gamma'\cdot x}\tilde{f}(k+\gamma'),$$

получим

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{\gamma'\in\Gamma'}|\tilde{f}(k+\gamma')|^2=\frac{1}{V_\Gamma}\int_{M_\Gamma}|f_k(x)|^2dx. \tag{7}$$

Подставляя это выражение в формулу (6), получим искомую формулу Парсеваля

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2dx=\frac{(2\pi)^d}{V_\Gamma}\int_{M_\Gamma}\int_{\mathrm{Br}_d}|f_k(x)|^2dxdk.$$

Последнюю формулу можно переписать, пользуясь соотношением $V_\Gamma\cdot V_{\Gamma'}=(2\pi)^d$, в виде

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2dx=V_{\Gamma'}\int_{M_\Gamma}\int_{\mathrm{Br}_d}|f_k(x)|^2dxdk.$$

Явное выражение для функции $f_k(x)$ в терминах решетки Γ имеет вид

$$f_k(x)=\frac{1}{V_{\Gamma'}}\sum_{\gamma\in\Gamma}e^{-ik\cdot\gamma}f(x+\gamma). \tag{8}$$

Продолжим теперь построенное представление функций $f\in S(\mathbb{R}^d)$ на произвольные функции из $L^2(\mathbb{R}^d)$. Для этого введем пространство $\mathcal{H}_k$, являющееся пополнением пространства L_k по норме, определяемой изоморфизмом $I_k:L_0\to L_k$, так что I_k продолжается до изометрии $I_k:\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_k$.

Рассмотрим гильбертово векторное расслоение $\pi:\mathfrak{H}\to\mathrm{Br}_d$, слоем которого над точкой $k\in\mathrm{Br}_d$ является гильбертово пространство $\mathcal{H}_k$. Обозначим через $\mathcal{H}=L^2(\mathfrak{H})$ гильбертово пространство его квадратично интегрируемых сечений со скалярным произведением

$$(s_1,s_2)=\int_{\mathrm{Br}_d}(s_1(k),s_2(k))dk,$$

где $(s_1(k),s_2(k))$ – скалярное произведение в $\mathcal{H}_k$. Пространство $\mathcal{H}$ является *прямым интегралом* гильбертовых пространств $\mathcal{H}_k$ по пространству Br_d с мерой dk. Заметим, что в физических работах гильбертово расслоение $\mathfrak{H}$ часто отождествляется с гильбертовым пространством $\mathcal{H}$ квадратично интегрируемых сечений $\mathfrak{H}$.

Определяемое формулой (8) отображение

$$f\longmapsto\{\frac{1}{\sqrt{V_{\Gamma'}}}\sum_{\gamma\in\Gamma}e^{-ik\cdot\gamma}f(x+\gamma)\}_{k\in\mathrm{Br}_d}$$

продолжается до унитарного оператора

$$U:L^2(\mathbb{R}^d)\longrightarrow\mathcal{H}.$$

Обратное отображение задается формулой

$$\{f_k(x)\}_{k\in \mathrm{Br}_d} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{V_{\Gamma'}}}\int_{\mathrm{Br}_d} f_k(x)dk.$$

1.2. **Многочастичный случай. Фермионное фоковское пространство.** Многочастичный случай описывается в терминах *фермионного фоковского пространства* над гильбертовым пространством F. Оно определяется как пополнение

$$\mathcal{F} = \overline{\Lambda(F)} = \overline{\bigoplus_p \Lambda^p(F)},$$

где $\Lambda^p(F)$ – подпространство p-частичных состояний вида

$$\Lambda^p(F) = \mathrm{span}\{v_1 \wedge \ldots \wedge v_p,\ v_j \in F\}.$$

Скалярное произведение $(\cdot\,,\cdot)$ в F продолжается естественным образом до скалярного произведения на $\Lambda(F)$. А именно, на мономах $v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$ одинаковой степени оно задается формулой

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p, v_1' \wedge \ldots \wedge v_p') := \sum_\sigma (-1)^{\mathrm{sgn}\,\sigma}(v_1, v_{i_1}') \cdot \ldots \cdot (v_p, v_{i_p}'),$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\sigma = \{i_1, \ldots, i_p\}$ множества $\{1, \ldots, p\}$, а $\mathrm{sgn}\,\sigma$ обозначает четность перестановки σ (скалярное произведение мономов разных степеней полагается равным нулю). Указанное скалярное произведение на мономах продолжается затем по линейности на всю алгебру $\Lambda(F)$. Фермионное фоковское пространство является пополнением алгебры $\Lambda(F)$ по введенной норме. Впрочем, в дальнейшем предполагается, что общее число состояний конечно, поэтому необходимости в пополнении возникать не будет.

Ортонормированный базис пространства $\Lambda^p(F)$ задается элементами вида

$$\frac{1}{p!}\{f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_p}\}, i_1 < \ldots < i_p,$$

где $\{f_i\}$ – ортонормированный базис F. Объединение этих базисов по всем p дает ортонормированный базис $\Lambda(F)$ и, тем самым, всего пространства $\mathcal{F}$.

1.3. **Операторы в фоковском пространстве.** Введем *оператор* $a_i^\dagger$ *рождения* частицы в состоянии f_i, задаваемый внешним умножением на вектор f_i. Эрмитово сопряженный к нему *оператор* a_i *уничтожения* частицы в состоянии f_i задается внутренним умножением на двойственный вектор $f_i' \in F'$ (определения внутреннего и внешнего умножения приводятся в п. [?]). Эти операторы удовлетворяют стандартным антикоммутационным соотношениям

$$a_i^\dagger a_j^\dagger + a_j^\dagger a_i^\dagger = 0, \quad a_i a_j + a_j a_i = 0$$

и

$$a_i^\dagger a_j + a_j a_i^\dagger = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j\,, \\ 0 \text{ при } i \neq j\,. \end{cases}$$

Любой одночастичный линейный оператор $O : F \to F$ продолжается до линейного оператора $\hat{O} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ по формуле

$$\hat{O}\left(v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_p}\right) = (Ov_{i_1}) \wedge \ldots \wedge (Ov_{i_p})$$

на мономах, а затем продолжается по линейности на всю алгебру $\Lambda(F)$ (напомним, что число состояний здесь и далее мы считаем конечным). В терминах операторов рождения и уничтожения этот оператор можно записать в виде

$$\hat{O} = \sum_{i,j} O_{ij} a_i^\dagger a_j.$$

Применим теперь описанную конструкцию к интересующему нас гамильтониану H. Рассмотрим ортонормированный базис $\{\varphi_m(k)\}$ собственных функций оператора $H(k)$, являющихся решениями уравнения

$$H(k)\varphi_m(k) = E_m(k)\varphi_m(k).$$

Обозначим через $a_m^\dagger(k)$, $a_m(k)$ операторы рождения и уничтожения в пространстве $\mathcal{H}_k$, построенные по этому базису. Оператор $a_m^\dagger(k)$ (соотв. $a_m(k)$) отвечает рождению (соотв. уничтожению) частицы с энергией $E_m(k)$ в собственном состоянии $\varphi_m(k)$. Оператор $\hat{H}$ в этом базисе записывается в виде

$$\hat{H} = \sum_m \int_{\mathrm{Br}_d} H(k) a_m^\dagger(k) a_m(k) dk. \tag{9}$$

Предположим, что общее число уровней энергии равно $n \gg 1$, а сами уровни упорядочены по возрастанию, т.е. $E_l(k) \leq E_m(k)$ при $l < m$. Тогда *основное состояние* $\Phi \in \mathcal{F}$ описывается следующим образом: все уровни от 1-го до p-го, расположенные ниже энергетической щели, заполнены, а уровни от $(p+1)$-го до n-го, расположенные выше энергетической щели, пусты. В терминах фоковского пространства основное состояние $\Phi = \Phi(k) \in \mathcal{F}$ оператора $\hat{H}$ задается формулой

$$\Phi(k) = a_1^\dagger(k) \ldots a_p^\dagger(k)\varphi_0,$$

где $\varphi_0 \in \Lambda^0(\mathcal{H}_0) = \mathbb{C}$ – вакуум.

Основное состояние можно также описать в терминах *обобщенных операторов уничтожения*

$$c_m(k) = \begin{cases} a_m(k), & \text{при } m > p \\ a_m^\dagger(-k), & \text{при } m \le p \end{cases}$$

и сопряженных к ним *обобщенных операторов рождения* $c_m^\dagger(k)$. Операторы $c_m(k)$ аннигилируют основное состояние и вместе с операторами $c_m^\dagger(k)$ удовлетворяют антикоммутационным соотношениям вида

$$\begin{cases} c_m^\dagger(k)c_l^\dagger(k') + c_l^\dagger(k')c_m^\dagger(k) = 0, \\ c_m(k)c_l(k') + c_l(k')c_m(k) = 0, \\ c_m^\dagger(k)c_l(k') + c_l(k')c_m^\dagger(k) = \delta_{ml}\delta_{kk'}. \end{cases}$$

Предположим теперь, что энергия Ферми E_F находится на уровне 0, так что $E_m(k) < 0$ при $m \le p$ и $E_m(k) > 0$ при $m > p$. Тогда в терминах введенных операторов $c_m^\dagger(k)$, $c_m(k)$ гамильтониан $\hat{H}$ запишется в виде

$$\hat{H} = \sum_m \int_{\mathrm{Br}_d} |E_m(k)|\, c_m^\dagger(k)c_m(k)dk.$$

Отсюда ясно, что состояние в $\mathcal{F}$ является основным для $\hat{H}$, если оно аннигилируется всеми операторами $c_m(k)$. *Квазичастичные возбуждения* задаются композициями операторов вида $c_m^\dagger(k)\Phi(k)$, отвечающими рождению частиц при $m > p$ или дырок при $m \le p$.

Обозначим через $\mathcal{W}_k$ $(2n)$-мерное векторное подпространство линейных операторов, порождаемое введенными операторами $c_m^\dagger(k)$, $c_m(k)$.

$$\mathcal{W}_k = \mathrm{span}\{c_1(k), \dots, c_n(k), c_1^\dagger(-k), \dots, c_n^\dagger(-k)\}.$$

Указанное пространство изоморфно прямой сумме $\mathcal{H}_k \oplus \mathcal{H}_{-k}$, так что все *пространство Намбу* $\mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H}$ является прямым интегралом пространств $\mathcal{H}_k \oplus \mathcal{H}_{-k}$.

Рассмотрим пространство Намбу $\mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H}$ более подробно. Имеется канонический изоморфизм $\mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$, сопоставляющий вектору $v \in \mathcal{H}$ двойственный вектор $v' \in \mathcal{H}^*$. Пользуясь этим изоморфизмом на подпространстве $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H}$ и обратным к нему отображением на подпространстве $\mathcal{H}^* \subset \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$, построим анти-линейное отображение

$$\gamma : \mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H},$$

квадрат которого равен 1: $\gamma^2 = 1$. Сужение этого отображения на $\mathcal{W}_k$ является отображением $\gamma : \mathcal{W}_k \to \mathcal{W}_{-k}$, которое задается формулой

$$\sum_m \left[\alpha_m c_m(k) + \beta_m c_m^\dagger(-k)\right] \longmapsto \sum_m \left[\bar{\alpha}_m c_m^\dagger(k) + \bar{\beta}_m c_m(-k)\right].$$

Антикоммутатор $\{\cdot\,,\cdot\}$ на $\mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H}$ задает спаривание

$$\{\cdot\,,\cdot\} : (\mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H}) \otimes (\mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{C},$$

которое спускается до спаривания

$$\{\cdot\,,\cdot\} : \mathcal{W}_k \otimes \mathcal{W}_{-k} \to \mathbb{C}.$$

Композиция этого спаривания с отображением γ задает естественное скалярное произведение на $\mathcal{W}_k$:

$$\langle w, w' \rangle := \{\gamma w, w'\}.$$

Отображение γ относительно этого скалярного произведения является анти-унитарным.

Вернемся к аннигиляторам основного состояния и рассмотрим подпространство

$$V(k) = \operatorname{span}\{c_1(k), \dots, c_n(k)\} \subset \mathcal{W}_k.$$

Тогда выполняется соотношение

$$\{V(k), V(-k)\} = 0.$$

Относительно введенного скалярного произведения

$$V(k) = V^{\mathrm{pol}}(k) \oplus V^{\mathrm{hol}}(k),$$

где

$$V^{\mathrm{pol}}(k) = \operatorname{span}\{c_{p+1}(k), \dots, c_n(k)\} \quad V^{\mathrm{hol}}(k) = \operatorname{span}\{c_1(k), \dots, c_p(k)\}.$$

Тем самым, операторы из $V^{\mathrm{pol}}p(k) \subset \mathcal{H}_k^*$ уничтожают частицы, а операторы из $V^{\mathrm{hol}}(k) \subset \mathcal{H}_{-k}$ уничтожают дырки (т.е. рождают частицы).

Для того, чтобы учесть внутренние степени свободы (такие как спин), заменим пространство $\mathcal{H}_0$ на пространство

$$\mathcal{H}_0^N = L^2(\mathbb{T}^d) \otimes \mathbb{C}^N = L^2(\mathbb{R}^d/\Gamma) \otimes \mathbb{C}^N. \tag{10}$$

Тогда гильбертово пространство $\mathcal{H} = L^2(\mathfrak{H})$ заменится пространством $\mathcal{H} = L^2(\mathfrak{H}) \otimes \mathbb{C}^N$, состоящим из квадратично интегрируемых сечений $s(k) = (s^1(k), \dots, s^N(k))$ расслоения $\mathfrak{H} \otimes \mathbb{C}^N$. Оно описывает частицы с N внутренними степенями свободы.

Все сказанное выше непосредственно переносится на этот случай. А именно, фиксируем ортонормированный базис пространства

$\mathbb{C}^N$, образованный векторами $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^N$, и рассмотрим ортонормированный базис собственных функций $\{\varphi_m^\alpha\}$ оператора $H(k)$, действующего в пространстве $\mathcal{H}_k^N$. Оператор рождения $a_{\alpha,m}^\dagger(k)$ будет отвечать рождению частицы в состоянии φ_m^α, а оператор уничтожения $a_{\alpha,m}(k)$ уничтожению частицы в состоянии φ_m^α.

1.4. **Сверхпроводники.** Известно, что при низких температурах, близких к абсолютному нулю, многие металлы ведут себя как *сверхпроводники*. Иными словами, электрический ток течет по ним, не испытывая сопротивления. Согласно современной теории происходит это из-за того, что при таких температурах свободным электронам становится энергетически выгодным объединяться попарно, образуя так называемые *куперовские пары*. В отличие от фермионных электронов, эти квазичастицы являются бозонами с нулевым спином и удвоенным электрическим зарядом. Именно ток этих квазичастиц является сверхпроводящим.

Для описания возникающей ситуации введем гамильтониан $\hat{H}$, обобщающий гамильтониан (9) из предыдущего параграфа

$$\hat{H} = \int_{\mathrm{Br}_d} \sum_{i,j} \Big\{ H_{ij}(k) a_i^\dagger(k) a_j(k) + + \Delta_{ij}(k) a_i^\dagger(k) a_j^\dagger(-k) + \\ + \overline{\Delta_{ij}(k)} a_j(-k) a_i(k) \Big\}\, dk. \tag{11}$$

Этот гамильтониан по-прежнему коммутирует с трансляциями $\hat{T}_\gamma$. Наличие в нем дополнительных членов позволяет описывать сверхпроводники в терминах операторов рождения и уничтожения куперовских пар.

Так же, как в предыдущем параграфе, оператор $\hat{H}$ можно записать в терминах операторов $c_m^\dagger(k)$, $c_m(k)$ и ввести аннигиляторное подпространство $V(k)$.

Будем называть *квазичастичным расслоением* комплексное векторное расслоение $\rho : \mathcal{V} \to \mathrm{Br}_d$, слоями которого являются аннигиляторные подпространства

$$\rho^{-1}(k) = V(k) \subset \mathcal{W}_k.$$

Напомним, что для них выполняются соотношения: $\{V(k), V(-k)\} = 0$.

Указанное расслоение можно также определить в терминах грассманиана $\mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^{2n})$. Для этого введем на нем инволюцию τ_0, сопоставляющую подпространству $V \in \mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^{2n})$ его ортогональное дополнение:

$$V^\perp = \{v \in \mathbb{C}^{2n} : \{v, v'\} = 0 \text{ для всех } v' \in V\}.$$

В этих терминах квазичастичное расслоение можно определить как непрерывное соответствие

$$\nu : \mathrm{Br}_d \longrightarrow \mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^{2n}), \quad k \longmapsto V(k),$$

удовлетворяющее условию: $V(-k) = \tau_0(V(k))$. Если обозначить через τ инволюцию на Br_d, задаваемую формулой: $\tau(k) = -k$, то последнее соотношение можно переписать в виде: $\nu \circ \tau = \tau_0 \circ \nu$.

По аналогии с блоховским гамильтонианом $H(k) : \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_k$ можно ввести *гамильтониан Боголюбова–де Жена.* Для этого запишем гамильтониан $\hat{H}$ в виде

$$\hat{H} = \int_{\mathrm{Br}_d} (a^\dagger(k), a(-k)) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}H(k) & \Delta(k) \\ \Delta^\dagger(k) & -\frac{1}{2}H(-k)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(k) \\ a^\dagger(-k) \end{pmatrix} dk, \tag{12}$$

где $(a^\dagger(k), a(-k)) = (a_1^\dagger(k), \ldots, a_n^\dagger(k), a_1(-k), \ldots, a_n(-k))$, а индекс t означает транспонирование. Матричный гамильтониан в середине этой формулы называется гамильтонианом Боголюбова–де Жена $H_{\mathrm{BdG}}(k)$. Он задает эндоморфизм пространства $\mathcal{W}_k$, подчиненный условию: $\Delta(k) = -\Delta(-k)^t$.

Для того чтобы найти аннигиляторы $c_m(k)$ основного состояния достаточно диагонализовать гамильтониан Боголюбова–де Жена, после чего гамильтониан $\hat{H}$ запишется в виде

$$\hat{H} =$$
$$\frac{1}{2}\int_{\mathrm{Br}_d} (c^\dagger(k), c(-k)) \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(|E_m(k)|) & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}(-|E_m(-k)|) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(k) \\ c^\dagger(-k) \end{pmatrix} dk.$$

1.5. **Вопросы и упражнения к Лекции 1.**

(1) Покажите, что система экспонент $\{e^{ik\cdot x}\}_{k\in\Gamma'}$ образует ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}_0$.

(2) Докажите, что оператор $H_k|_{L_0}$ существенно самосопряжен и ограничен снизу в $\mathcal{H}_0$, а его область определения совпадает с D.

(3) Докажите, что спектр оператора $H(k)$ является дискретным, откуда следует, что существует полная ортогональная система собственных функций $\varphi_m(k)$ этого оператора в $\mathcal{H}_0$ с собственными значениями $E_m(k)$ такими, что $E_m(k) \to \infty$ при $m \to \infty$.

(4) Докажите, что собственные функции $\psi_{m,k}(x) = e^{ik\cdot x}\varphi_{m,k}(x)$ оператора Шредингера образуют полную ортогональную систему в пространстве $\mathcal{H}_k$.

(5) Проверьте, что гамильтониан $\hat{H}$ из формулы (11) коммутирует с операторами трансляции $\hat{T}_\gamma$.

2. Симметрии

2.1. **Отступление: алгебры Клиффорда.** В этом параграфе собраны необходимые сведения из теории клиффордовых алгебр. (Более подробно с этой теорией можно познакомиться по монографии [21].)

Пусть V есть n-мерное вещественное векторное пространство с невырожденной симметричной билинейной формой g. Его внешняя алгебра ΛV порождается мономами вида $u_1\wedge\ldots\wedge u_p$, где $u_j \in V$. На этой алгебре имеются два вида умножений: внешнее, действующее по формуле

$$\epsilon(v)(u_1 \wedge \ldots \wedge u_p) = v \wedge u_1 \wedge \ldots \wedge u_p, \text{ где } v \in V,$$

и внутреннее, действующее по формуле

$$\iota(v)(u_1 \wedge \ldots \wedge u_p) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} g(v, u_j) u_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{u_j} \wedge \ldots \wedge u_p.$$

Эти операторы удовлетворяют равенству $\epsilon(v)^2 = \iota(v)^2 = 0$ и антикоммутационному соотношению

$$\epsilon(u)\iota(v) + \iota(u)\epsilon(v) = g(u, v).$$

Если обозначить через $c(v) = \epsilon(v) + \iota(v)$ оператор *клиффордова умножения*, то будем иметь

$$c(v)c(u) + c(u)c(v) = 2g(u, v),$$

откуда $c^2(v) = g(v, v)$.

Определение 1. *Вещественная клиффордова алгебра* $\mathrm{Cl}(V, g)$ есть подалгебра алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\Lambda V)$, порождаемая операторами клиффордова умножения $c(v)$, $v \in V$.

Если выбрать ортогональный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства (V, g) такой, что $g(e_i, e_i) = \pm 1$, то операторы $c(e_i)$ будут антикоммутировать друг с другом, а алгебра $\mathrm{Cl}(V, g)$ будет порождаться единицей 1 и упорядоченными произведениями вида $c(e_{i_1})c(e_{i_2})\ldots c(e_{i_p})$, где $i_1 < \ldots < i_p$ и $\{i_1, \ldots, i_p\} \subset \{1, \ldots, n\}$.

Определение 2. *Комплексная клиффордова алгебра* $\mathbb{C}l(V)$ есть подалгебра алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}(\Lambda V^{\mathbb{C}})$, порождаемая операторами $c(v)$, $v \in V^{\mathbb{C}}$. Здесь, $V^{\mathbb{C}}$ обозначает комплексификацию пространства V.

Алгебра $\mathbb{C}l(V)$ как комплексное векторное пространство изоморфна алгебре $\Lambda V^{\mathbb{C}}$, изоморфизм задается отображением

$$\sigma : \mathbb{C}l(V) \longrightarrow \Lambda V^{\mathbb{C}}, \quad \sigma(a) = c(a)1.$$

Обратное к σ отображение $\mathrm{Alt} : \Lambda V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}l(V)$ задается формулой

$$\mathrm{Alt}(u_1 \wedge \ldots \wedge u_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\tau} (-1)^{\operatorname{sgn}\tau} c(u_{\tau(1)}) \cdot \ldots \cdot c(u_{\tau(p)}),$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\tau = (\tau(1), \ldots, \tau(p))$ множества $\{1, \ldots, p\}$, а $\operatorname{sgn}\tau$ обозначает четность перестановки τ. В частности,

$$\mathrm{Alt}(u \wedge v) = \frac{1}{2}(uv - vu).$$

Алгебру $\mathbb{C}l(V)$ можно также определить с помощью универсального свойства: это единственная ассоциативная комплексная алгебра с единицей такая, что для любой ассоциативной комплексной алгебры A с единицей 1_A и произвольного вещественно-линейного отображения $f : V \to A$, удовлетворяющего условию: $f(v)^2 = g(v,v)1_A$ для всех $v \in V$, существует единственный гомоморфизм алгебр $\tilde{f} : \mathbb{C}l(V) \to A$ такой, что $f = \tilde{f}|V$.

Так как алгебра $\mathbb{C}l(V)$ порождается произведениями вида $c(e_{i_1}) \cdot \ldots \cdot c(e_{i_p})$, то в ней выделяются подалгебры $\mathbb{C}l^{\mathrm{ev}}(V)$ и $\mathbb{C}l^{\mathrm{od}}(V)$, порождаемые произведениями вида $c(e_{i_1}) \cdot \ldots \cdot c(e_{i_p})$ с четным (соотв. нечетным) числом элементов. Обозначим через χ *оператор градуировки*, равный $+1$ (соотв. -1) на $\mathbb{C}l^{\mathrm{ev}}(V)$ (соотв. $\mathbb{C}l^{\mathrm{od}}(V)$). Тогда на $\mathbb{C}l(V)$ можно ввести *оператор зарядового сопряжения*, задаваемый антилинейным отображением $C : a \mapsto \chi(\bar{a})$.

Рассмотрим более подробно вещественные алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}(V,g)$. Такая алгебра определяется с точностью до изоморфизма сигнатурой формы g. Будем записывать эту форму в следующем стандартном виде

$$(u,v) = u_1v_1 + \ldots + u_pv_p - u_{p+1}v_{p+1} - \ldots - u_{p+q}v_{p+q}, \text{ где } p+q=n,$$

и обозначать получающуюся алгебру Клиффорда через $\mathrm{Cl}_{p,q}$. Примеры:

$$\mathrm{Cl}_{1,0} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R},\ \mathrm{Cl}_{0,1} = \mathbb{C},\ \mathrm{Cl}_{2,0} = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}),$$
$$\mathrm{Cl}_{3,0} = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}),\ \mathrm{Cl}_{1,1} = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{Cl}_{0,2} = \mathbb{H}.$$

Более общим образом:

$$\mathrm{Cl}_{p+1,q+1} \cong \mathrm{Cl}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}),$$
$$\mathrm{Cl}_{p+4,q} \cong \mathrm{Cl}_{p,q+4} \cong \mathrm{Cl}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{H}),$$
$$\mathrm{Cl}_{p+8,q} \cong \mathrm{Cl}_{p,q+8} \cong \mathrm{Cl}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_{16}(\mathbb{H}).$$

Полное описание конечномерных вещественных клиффордовых алгебр получается с помощью т.н. "спинорных часов" по следующему правилу:

(1) вычисляем $j = (p - q) \bmod 8$;
(2) находим на спинорных часах стрелку $A \xrightarrow{j} B$;
(3) находим N, для которого $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_N(B) = 2^{p+q}$;
(4) полагаем $\mathrm{Cl}_{p,q} = \mathrm{Mat}_N(B)$.

В случае комплексной алгебры Клиффорда положим $N = 2^m$. Тогда

$$\mathbb{C}l(\mathbb{R}^{2m}) = \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}), \quad \mathbb{C}l(\mathbb{R}^{2m+1}) = \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}).$$

Перейдем теперь к описанию групп, связанных с алгебрами Клиффорда и будем предполагать для упрощения изложения, что векторное пространство V евклидово, т.е. форма g положительно определена.

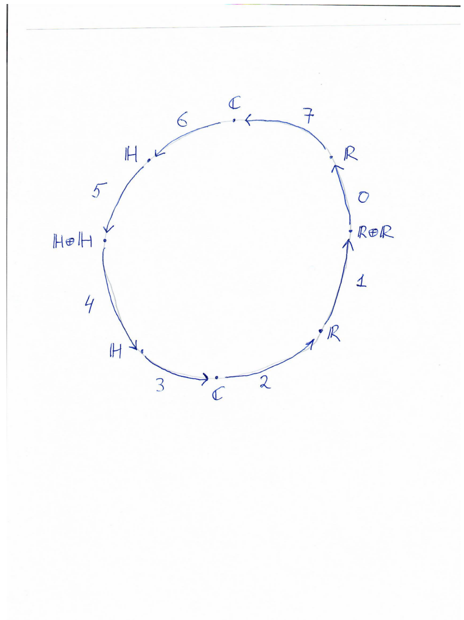

Рис. 1

Обозначим через $\mathrm{Cl}^\times(V)$ *группу обратимых элементов* клиффордовой алгебры $\mathrm{Cl}(V)$. Это группа Ли, которая содержит $V\setminus\{0\}$, поскольку для любого элемента $v \in V \setminus \{0\}$ обратный к нему элемент v^{-1} задается формулой

$$v^{-1} = \frac{v}{g(v,v)}\,.$$

Группа $\mathrm{Cl}^\times(V)$ действует на алгебре $\mathrm{Cl}(V)$ посредством присоединенного представления

$$w \longmapsto \mathrm{Ad}_w x := wxw^{-1}, \quad w \in \mathrm{Cl}^\times(V).$$

Для любого $u \in V \setminus \{0\}$ отображение

$$-\mathrm{Ad}_u v = v - 2\frac{g(u,v)}{g(u,u)}\,, \quad v \in V,$$

является *отражением* относительно гиперплоскости $u^\perp$, ортогональной u. Для того, чтобы избавиться от знака минус в левой части последнего равенства, принято использовать вместо присоединенного представления Ad действие группы $\mathrm{Cl}^\times(V)$ на алгебре $\mathrm{Cl}(V)$, задаваемое *подкрученным присоединенным представлением* вида

$$w \longmapsto \pi_w(x) := \chi(w)xw^{-1}, \quad x \in \mathrm{Cl}(V),\ w \in \mathrm{Cl}^\times(V),$$

где χ – *отображение градуировки*, задаваемое на однородных элементах степени k из группы $\mathrm{Cl}^{\times}(V)$ формулой

$$\chi(w) := (-1)^{\deg w} w = (-1)^k w.$$

Тогда отображение $\pi_u : V \to V$, определяемое элементом $u \in V \setminus \{0\}$, будет задавать отражение относительно гиперплоскости $u^{\perp}$.

С учетом этих замечаний можно рассмотреть подгруппу мультипликативной группы $\mathrm{Cl}^{\times}(V)$, состоящую из элементов $x \in \mathrm{Cl}^{\times}(V)$, обладающих свойством: $\pi_x(V) = V$. Как указано выше, этим свойством обладают все элементы $v \in V \setminus \{0\}$, поэтому уместно ввести следующую группу.

Определение 3. *Группой Клиффорда* $\Gamma(V) \equiv \Gamma(n)$ называется подгруппа мультипликативной группы $\mathrm{Cl}^{\times}(V)$, порожденная элементами $v \in V \setminus \{0\}$.

Каждый элемент группы $\Gamma(V)$ порождает невырожденное линейное преобразование пространства V, поэтому имеется гомоморфизм

$$\pi : \Gamma(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(V).$$

Этот гомоморфизм принимает значения в ортогональной группе $\mathrm{O}(V)$. Действительно, поскольку любой элемент $x \in \Gamma(V)$ представляется произведением вида $x = v_1 \cdot \ldots v_k$, где $v_i \in V \setminus \{0\}$, то отвечающее ему преобразование π_x является композицией отражений, отвечающих элементам v_i, т.е. принадлежит $\mathrm{O}(V)$. Кроме того, гомоморфизм $\pi : \Gamma(V) \to \mathrm{O}(V)$ является эпиморфизмом, поскольку любое ортогональное преобразование является композицией отражений.

Гомоморфизм $\pi : \Gamma(V) \to \mathrm{O}(V)$ можно включить в точную последовательность гомоморфизмов групп вида

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}^{\times} \longrightarrow \Gamma(V) \xrightarrow{\pi} \mathrm{O}(V) \longrightarrow 1.$$

Положим также

$$S\Gamma(V) := \Gamma(V) \cap \mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(V).$$

Определение 4. *Группа* $\mathrm{Pin}(V)$ определяется как подгруппа группы Клиффорда $\Gamma(V)$, порожденная единичными векторами из V, т.е. векторами $v \in V$ с $|v| = 1$.

Также, как в случае группы Клиффорда, имеется гомоморфизм

$$\pi : \mathrm{Pin}(V) \longrightarrow \mathrm{O}(V),$$

который включается в точную последовательность гомоморфизмов групп

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Pin}(V) \xrightarrow{\pi} \mathrm{O}(V) \longrightarrow 1.$$

Определение 5. *Группа* $\mathrm{Spin}(V)$ есть связная компонента единицы в группе $\mathrm{Pin}(V)$. По-другому, ее можно определить как

$$\mathrm{Spin}(V) = \mathrm{Pin}(V) \cap \mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(V).$$

Как и в случае группы $\mathrm{Pin}(V)$, имеется точная последовательность гомоморфизмов групп

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(V) \xrightarrow{\pi} \mathrm{SO}(V) \longrightarrow 1.$$

При $n > 2$ группа $\mathrm{Spin}(n)$ является односвязной накрывающей группы $\mathrm{SO}(V)$.

Примеры Spin-групп:

(1) $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{U}(1) = \mathrm{SO}(2)$.
(2) $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^3) = \mathrm{SU}(2)$.
(3) $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^4) = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$.

2.2. **Симметрии и псевдосимметрии.** Обозначим через G группу симметрии топологического диэлектрика. Мы будем рассматривать ее унитарные и анти-унитарные представления в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Такие представления продолжаются естественным образом на пространство $\mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H}$, если сопоставить оператору $g : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ преобразование

$$(g^{-1})^t \oplus g : \mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H}.$$

Будем предполагать, что группа G содержит подгруппу трансляций Γ и все другие симметрии коммутируют с элементами Γ. Если $\varphi \in \mathcal{H}_k$, т.е. удовлетворяет соотношению $T_\gamma\varphi = e^{-ik\cdot\gamma}\varphi$, то применение T_γ, $g \in G$, к этому вектору дает:

$$(T_\gamma g)\varphi = g(T_\gamma\varphi) = g(e^{-ik\cdot\gamma}\varphi) = \begin{cases} e^{-ik\cdot\gamma}g\varphi & \text{для унитарных } g; \\ e^{ik\cdot\gamma}g\varphi & \text{для анти-унитарных } g. \end{cases}$$

Поэтому унитарные преобразования $g \in G$ порождают отображения $g|_{\mathcal{W}_k} : \mathcal{W}_k \to \mathcal{W}_k$, а анти-унитарные g дают отображения $g|_{\mathcal{W}_k} : \mathcal{W}_k \to \mathcal{W}_{-k}$.

Определение 6. Будем говорить, что квазичастичное расслоение $\rho : \mathcal{V} \to \mathrm{Br}_d$, слоем которого над точкой $k \in \mathrm{Br}_d$ является пространство $V(k)$, допускает *группу симметрии* G, если для любого $k \in \mathrm{Br}_d$

$$\begin{cases} gV(k) = V(k) & \text{для всех унитарных } g \in G/\Gamma; \\ gV(k) = V(-k) & \text{для всех анти-унитарных } g \in G/\Gamma. \end{cases}$$

Мы ограничились в этом определении преобразованиями из G/Γ, поскольку трансляции действуют на $V(k)$ как

$$T_\gamma V(k) = e^{-ik\gamma} V(k) = V(k).$$

Если $G/\Gamma = \mathrm{U}(1)$, то это означает в физических терминах, что сохраняется число частиц. Это условие выполняется, если все $\Delta(k)$ в гамильтониане Боголюбова–де Жена равны нулю. Представления из группы $\mathrm{U}(1)$ удобно записывать в виде $e^{i\theta Q}$, где $\theta \in [0, 2\pi)$, а генератор Q равен -1 на $\mathcal{H}_k^*$ и $+1$ на $\mathcal{H}_{-k}$. Тогда $QV(k) = V(k)$.

Помимо симметрий мы будем рассматривать также псевдосимметрии.

Определение 7. Квазичастичное расслоение $\rho : \mathcal{V} \to \mathrm{Br}_d$ допускает s *псевдосимметрий*, если найдется набор из s унитарных ортогональных операторов $J_1, \dots, J_s : \mathcal{W}_k \to \mathcal{W}_k$, не зависящих от k, удовлетворяющих соотношениям алгебры Клиффорда

$$J_l J_m + J_m J_l = -2\delta_{lm}$$

и соотношениям ортогональности

$$\langle V(k), J_1 V(k) \rangle = \ldots = \langle V(k), J_s V(k) \rangle = 0.$$

При этом оператор J на $\mathcal{W}_k$ называется *унитарным ортогональным*, если он $\mathbb{C}$-линеен и, кроме того,

$$\langle Jw, Jw' \rangle = \langle w, w' \rangle \quad \text{и} \quad \{Jw, Jw'\} = \{w, w'\}.$$

Условие $\langle V(k), JV(k) \rangle = 0$ можно переписать в виде $JV(k) = V(k)^c$, где $V(k)^c$ есть ортогональное дополнение к $V(k)$ в пространстве $\mathcal{W}_k$. В этом состоит главное отличие псевдосимметрии от настоящей симметрии: пространство $V(k)$ не сохраняется, а переводится в его ортогональное дополнение $V(k)^c$.

2.3. **Классификация Китаева.**

Определение 8. *Квазичастичное расслоение комплексного класса* s есть квазичастичное расслоение с группой симметрии G такой, что $G/\Gamma = \mathrm{U}(1)$, обладающее s псевдосимметриями.

Имеется всего два класса комплексных квазичастичных расслоений. Случай $s = 0$ отвечает отсутствию псевдосимметрий, случай $s = 1$ отличается от него добавлением *PH-симметрии* (симметрии частиц–дырок), задаваемой оператором

$$C = \gamma S = S\gamma : \mathcal{W}_k \to W_{-k}.$$

Если $S = 1$, то $C = \gamma$ есть эрмитово сопряжение, однако в общем случае S есть унитарный ортогональный оператор $S : \mathcal{W}_k \to \mathcal{W}_k$, не зависящий от k, который задается блочно-диагональной матрицей в разложении $\mathcal{W}_k = \mathcal{H}_k^* \oplus \mathcal{H}_{-k}$ и удовлетворяет соотношению $S^2 = 1$. Сам оператор C является анти-унитарным и $CV(k) = V(-k)$. Единственная псевдосимметрия задается в этом случае оператором

$$J_1 = i\gamma CQ = iSQ = iQS.$$

Оператор J_1 является унитарным ортогональным, а его квадрат равен $J_1^2 = -1$. Действие J_1 на аннигиляторном подпространстве задается формулой

$$J_1V(k) = \gamma CQV(k) = \gamma CV(k) = \gamma V(-k) = \gamma V(k)^{\perp} = V(k)^c.$$

Иными словами, оператор J_1 действительно задает псевдосимметрию, которая часто называется *киральной симметрией*. Добавление дополнительных псевдосимметрий не приводит в этом случае к новым эффектам.

Имеется также три вида вещественных симметрий, а именно, T(обращение времени), Q(сохранение заряда), C(PH-симметрия). К ним можно добавлять три оператора вращения спина S_1, S_2, S_3, а также $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ псевдосимметрий (дальнейшее добавление псевдосимметрий не дает новых эффектов).

Определение 9. *Квазичастичное расслоение вещественного класса s* есть квазичастичное расслоение с группой симметрии G, обладающее s псевдосимметриями.

Заметим, что в отличие от комплексного случая мы не предполагаем, что $G/\Gamma = \mathrm{U}(1)$.

В случае $s = 0$, т.е. в отсутствие псевдосимметрий, группа $G = \Gamma$. В случае $s = 1$ имеется T-симметрия, задаваемая на $\mathcal{H}$ анти-унитарным оператором T с квадратом $T^2 = -1$. Этот оператор коммутирует с трансляциями и отображает $\mathcal{W}_k$ в $\mathcal{W}_{-k}$. В разложении $\mathcal{W}_k = \mathcal{H}_k^* \oplus \mathcal{H}_{-k}$ он задается блочно-диагональной матрицей. В его терминах единственная пседосимметрия J_1 задается формулой

$$J_1 = \gamma T = T\gamma.$$

Оператор J_1 является унитарным и $J_1^2 = -1$. Он также ортогонален и действует на аннигиляторном пространстве по формуле

$$J_1V(k) = \gamma TV(k) = \gamma V(-k) = \gamma V(k)^{\perp} = V(k)^c,$$

т.е. J_1 действительно является псевдосимметрией.

В случае $s = 2$ имеются две симметрии: T-симметрия и Q-симметрия, а также две псевдосимметрии. Помимо псевдосимметрии $J_1 = \gamma T$ есть еще псевдосимметрия J_2, равная

$$J_2 = iJ_1Q.$$

Наконец, в случае $s = 3$ имеются три симметрии T, Q, C и три псевдосимметрии. К введенным выше псевдосимметриям J_1, J_2 добавляется псевдосимметрия J_3 вида

$$J_3 = i\gamma CQ = iSQ = iQS.$$

.

Классы $s = 4, 5, 6, 7$ аналогичны рассмотренным классам $s = 0, 1, 2, 3$ с той разницей, что к симметриям T,Q,C в этих случаях добавляются симметрии S_1, S_2, S_3, задаваемые операторами вращения спина.

2.4. **Классифицирующие пространства.** Переходя к математической интерпретации приведенных выше результатов, рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}$, наделенное квазичастичным расслоением с s пседосимметриями $J_1, \dots, J_s$. Рассмотрим многообразие

$$C_s(n) = \{V \subset \mathbb{C}^{2n} : J_1 V = \ldots = J_s V = V^c\}.$$

Инволюция $\tau_0 : C_0(n) \to C_0(n)$ сопоставляет подпространству V его ортогональное дополнение: $V \to V^\perp$. Так как $J_i V^\perp = (V^\perp)^c$, то отображение τ_0 допускает сужение до отображения

$$\tau_s = \tau_0|_{C_s(n)} : C_s(n) \longrightarrow C_s(n).$$

Множество его неподвижных точек обозначим через

$$R_s(n) = \{V \in C_s(n) : \tau_s(V) = V\}.$$

Квазичастичное расслоение отождествляется с эквивариантным отображением $\psi : \mathrm{Br}_d \to C_s(n)$, удовлетворяющим условию эквивариантности: $\psi \circ \tau = \tau_s \circ \psi$.

По-другому, многообразия $C_s(n)$ и $R_s(n)$ можно определить следующим образом. Сопоставим каждому $V \in C_0(n)$ оператор

$$J(V) = i(P_V - P_{V^c}),$$

где P_V (соотв. P_{V^c}) есть ортогональный проектор на V (соотв. V^c). Это унитарный оператор с квадратом $J(V)^2 = -1$.

Обозначим через g^T оператор, транспонированный к g относительно скобки $\{\cdot\,,\cdot\}$, определяемый соотношением

$$\{w, gw'\} = \{g^T w, w'\},$$

выполняющимся для всех $w, w' \in \mathcal{W} = \mathcal{W}_k$. Тогда получим соотношение $P_{\tau_0(V)} = (P_{V^c})^T$, откуда следует, что

$$(J \circ \tau_0)(V) = -J(V)^T = (J(V)^{-1})^T.$$

Тем самым, инволюция τ_0 на уровне подпространств $V \subset \mathcal{W} \cong \mathbb{C}^{2n}$ совпадает с инволюцией унитарных операторов, задаваемой отображением

$$\tau_1 : \mathrm{U}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathrm{U}(\mathcal{W}),\ g \longmapsto (g^{-1})^T.$$

Неподвижные точки этой инволюции являются ортогональными операторами из группы $\mathrm{O}(\mathcal{W}) \subset \mathrm{U}(\mathcal{W})$.

В присутствии псевдосимметрий $J_1, \dots, J_s$ оператор $J(V)$ будет удовлетворять соотношениям

$$J_i J(V) = -J(V) J_i,\ i = 1, \dots, s,$$

поскольку $J_i V = V^c$. Теперь определение введенных ранее подпространств $C_s(n)$ и $R_s(n)$ можно переписать в терминах унитарных операторов следующим образом:

$$C_s(n) = \{J \in \mathrm{U}(\mathcal{W}) : J^2 = -1, J_i J = -J J_i, i = 1, \dots, s\},$$
$$R_s(n) = \{J \in C_s(n) : \tau_1(J) = J\}.$$

В силу известных изоморфизмов для алгебр Клиффорда получаем, что

$$C_{s+2}(2n) = C_s(n) \quad \text{и} \quad R_{s+8}(16n) = R_s(n).$$

Это объясняет, почему при описании классов комплексных симметрий мы ограничились двумя псевдосимметриями, а при описании классов вещественных псевдосимметрий остановились на $s = 7$.

Пространство $C_s(n)$ можно отождествить с объединением орбит группы

$$G_s^{\mathbb{C}}(n) = \{g \in \mathrm{U}(\mathcal{W}) : J_i g = g J_i, i = 1, \dots, s\}$$

на пространстве $C_s(n)$. Например, $C_0(n)$ совпадает с объединением орбит вида gJg^{-1}, $g \in \mathrm{U}(n)$, задаваемых действием $G_s^{\mathbb{C}}(n)$ на $2n + 1$ элементах $J \in C_0(n)$, имеющих p собственных значений $+i$ и q собственных значений -1 для всех значений p и q таких, что $p + q = 2n$. Стабилизаторы таких орбит совпадают с $\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q)$ и мы получаем отождествление $C_0(n)$ с

$$\mathrm{U}(2n)/\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q) \cong \mathrm{Gr}_p(\mathbb{C}^{2n}).$$

Следующее пространство $C_1(n)$ совпадает с орбитой группы $G_1^{\mathbb{C}}(n) = \mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n)$ элемента $J_2 \in C_1(n)$, стабилизатором которого является диагональная подгруппа $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n)$. Все остальные пространства $C_s(n)$ получаются из $C_0(n)$ и $C_1(n)$ с учетом периодичности $C_{s+2}(2n) = C_s(n)$.

Аналогичным образом рассматриваются пространства $R_s(n)$, которые реализуются при всех s, за исключением случаев $s = 2$ и

$s = 6$, в виде единственной орбиты группы

$$G_s(n) = \{g \in G_c^{\mathbb{C}}(n) : \tau_1(g) = g\}.$$

В случаях $s = 2$ и $s = 6$ пространство $R_s(n)$ совпадает с объединением кватернионных и вещественных грассмановых многообразий соответственно.

Как было указано выше, квазичастичное расслоение $\rho : \mathcal{V} \to \mathrm{Br}_d$, слоем которого над точкой $k \in \mathrm{Br}_d$ является пространство $V(k)$, можно отождествить с отображением $\psi : \mathrm{Br}_d \to C_s(n)$, удовлетворяющим условию эквивариантности: $\psi \circ \tau = \tau_s \circ \psi$. Пользуясь теорией гомотопий, можно полностью описать структуру гомотопических классов $[\mathrm{Br}_d, C_s(n)]$ и трактовать отображение ψ как классифицирующее отображение. Этот подход к топологической классификации диэлектриков и сверхпроводников реализован в работе [18]. Здесь мы предпочитаем другой путь, предложенный в статье [1], изложенный в следующем параграфе.

2.5. **Вопросы и упражнения к Лекции 2.**

(1) Проверьте справедливость изоморфизмов

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}_{p+1,q+1} &\cong \mathrm{Cl}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}),\\ \mathrm{Cl}_{p+4,q} &\cong \mathrm{Cl}_{p,q+4} \cong \mathrm{Cl}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{H}),\\ \mathrm{Cl}_{p+8,q} &\cong \mathrm{Cl}_{p,q+8} \cong \mathrm{Cl}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_{16}(\mathbb{H}).\end{aligned}$$

(2) Проверьте, что отображение γ на пространстве $\mathcal{W}_k$ является анти-унитарным относительно скалярного произведенбия $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$. Почему выполняются соотношения $\{V(k), V(-k)\}$ для аннигиляторных подпространств $V(k)$?

(3) Проверьте, что операторы J_2 и J_3 действительно задают псевдосимметрии.

3. Классификация гамильтонианов

Нашей целью является классификация гамильтонианов вида

$$\sum_{i,j}(A_{ij}a_i^\dagger a_j + B_{ij}a_i a_j + B_{ij}^* a_j^\dagger a_i^\dagger), \tag{13}$$

где $a_i^\dagger, a_j$ – фермионные операторы рождения и уничтожения, а матричные коэффициенты удовлетворяют соотношениями: $A_{ij} = A_{ji}^*$, $B_{ij} = -B_{ji}$. Предположим, что они обладают широкой энергетической целью. Спрашивается, когда можно продеформировать один из гамильтонианов указанного вида в другой с сохранением щели?

Прежде, чем мы перейдем к решению этой задачи, остановимся более подробно на представлении Намбу, которое будет играть важную роль в решении поставленной задачи.

3.1. **Представление Намбу.** Пусть V есть N-мерное комплексное гильбертово пространство, наделенное эрмитовым скалярным произведением $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$. Обозначим через $\mathcal{F} = \Lambda(V)$ 2^N-мерное фоковское фермионное пространство над V. Рассмотрим пространство $\mathcal{Q}$ бесследовых квадратичных гамильтонианов вида (13). Это пространство замкнуто относительно операции скобки вида: $[X,Y]_i = i(XY - YX)$.

Обозначим через $W = V \oplus V^*$ комплексное линейное векторное пространство Намбу и рассмотрим представление α этого пространства в фоковском пространстве $\mathcal{F}$, задаваемое формулой

$$\alpha(v_1 + \langle v_2, \cdot\rangle) = \alpha^\dagger_{v_1} + \alpha_{v_2}, \tag{14}$$

где $\alpha^\dagger_v$ есть внешнее умножение на $v \in V$, а α_v – внутреннее умножение на $\langle v, \cdot\rangle$.

Если $X \in \mathcal{Q}$, то для любого $w \in W$ найдется $w' \in W$ такое, что

$$[X, \alpha(w)]_i = \alpha(w').$$

Отображение $w \mapsto w'$ является $\mathbb{C}$-линейным, поэтому оно задается некоторым комплексным линейным оператором $X_N : W \to W$ таким, что $X_N(w) = w'$ (обозначение X_N означает здесь и далее, что оператор X_N действует в пространстве Намбу W). Отображение $X \mapsto X_N$ является представлением алгебры Ли $\mathcal{Q}$ в W.

Представление Намбу является полезным при квантовании систем с несохранением числа частиц, таких как сверхпроводники. Эволюция подобных систем задается уравнением вида

$$\dot{w} = iH_N w$$

и его продолжением на фоковское пространство $\mathcal{F}$, где H_N есть представление гамильтониана H в пространстве Намбу. При этом состояние $w = v_1 + \langle v_2, \cdot\rangle$ можно интерпретировать как суперпозицию частицы в состоянии v_1 и дырки в состоянии v_2.

Опишем групповую структуру пространства Намбу. Пусть G есть группа симметрий, действующая на $\mathcal{F}$ унитарными или антиунитарными операторами. Будем говорить, что такой оператор A является *$\mathcal{Q}$-совместимым*, если $A\mathcal{Q}A^{-1} = \mathcal{Q}$. Обозначим через G_0 подгруппу G, действующую на $\mathcal{F}$ унитарными операторами.

Введем далее подгруппу $\mathcal{K}$ унитарной группы $\mathrm{U}(\mathcal{F})$, состоящую из экспоненциальных образов операторов из $\mathcal{Q}$, т.е.

$$\mathcal{K} = \{\exp(iX_F) : \ X_F \in \mathcal{Q}\}, \tag{15}$$

где обозначение X_F означает, что оператор X_F действует в фоковском пространстве $\mathcal{F}$. Тогда множество $\mathcal{Q}$-совместимых унитарных операторов будет совпадать с нормализатором $\mathcal{K}$ в группе $\mathrm{U}(\mathcal{F})$.

Кроме того, рассмотрим подгруппу $\mathcal{K}_c$ в $\mathrm{U}(\mathcal{F})$, состоящую из элементов вида

$$\mathcal{K}_c = \{\exp(iX_F + ic) : \ X_F \in \mathcal{Q}, c \in \mathbb{R}\}. \tag{16}$$

Ее можно отождествить с группой внутренних автоморфизмов $\mathcal{K}$ в группе $\mathrm{U}(\mathcal{F})$. Можно показать, что множество внешних автоморфизмов при $N > 4$ совпадает с $\mathbb{Z}_2$. Таким образом, существует единственный нетривиальный внешний автоморфизм $\mathcal{K}$, который можно построить явным образом (см. [1]).

Опишем теперь вещественную структуру на пространстве Намбу W. Она задается антилинейной инволюцией $C : W \to W$, которая действует на V по формуле

$$C(v) = \langle v, \cdot \rangle \in V^*,$$

а ее действие на V^* определяется соотношением $C^2 = 1$. В терминах оператора $\alpha(w)$ оператор C можно определить соотношением

$$\{\alpha(w_1), \alpha(w_2)\} = 2\langle C(w_1), w_2\rangle,$$

из которого следует инвариантность C относительно симметрий.

Обозначим через $W_{\mathbb{R}}$ подпространство W вида

$$W_{\mathbb{R}} = \{w \in W : C(w) = w\}.$$

Это $2N$-мерное вещественное векторное подпространство в W с нормой, индуцируемой полуторалинейной формой на W. Тогда $\mathcal{Q}$-совместимые унитарные операторы будут отвечать изометриям $W_{\mathbb{R}}$.

3.2. **Изотипное разложение пространства Намбу.** Стандартные определения, относящихся к изотипным разложениям, можно найти в книге [12].

Комплексные унитарные представления компактной группы допускают единственное *изотипное разложение*. В случае группы G_0, действующей в пространстве Намбу W, оно имеет вид

$$W = \bigoplus_{\lambda} W_{\lambda}^{\mathbb{C}}, \tag{17}$$

где суммирование ведется по элементам λ множества $\widehat{G_0}$ классов неприводимых унитарных представлений группы G_0. Это множество состоит из счетного числа изолированных точек. Будем говорить, что представление имеет тип λ, если оно принадлежит классу эквивалентности $\lambda \in \widehat{G_0}$. В каждом блоке можно выбрать представителя $R_\lambda^{\mathbb{C}}$, являющегося неприводимым унитарным представлением типа λ.

Блок $W_\lambda^{\mathbb{C}}$ представляется в виде

$$W_\lambda^{\mathbb{C}} = R_\lambda^{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{G_0}(R_\lambda^{\mathbb{C}}, W), \tag{18}$$

где пространство $\mathrm{Hom}_{G_0}(R_\lambda^{\mathbb{C}}, W)$, состоящее из G_0-эквивариантных гомоморфизмов, называется *пространством кратностей* представления $R_\lambda^{\mathbb{C}}$, а его размерность – кратностью $R_\lambda^{\mathbb{C}}$.

Аналогом пространства $\widehat{G}_0$ в вещественном случае является множество $\hat{G}_0^{\mathbb{R}}$ классов эквивалентности вещественных неприводимых представлений группы G_0, являющееся фактором $\widehat{G}_0$ по действию комплексного сопряжения.

Изотипное разложение пространства $W_{\mathbb{R}}$ в этом случае имеет вид

$$W_{\mathbb{R}} = \bigoplus_\lambda W_\lambda,$$

где суммирование ведется по элементам λ множества $\hat{G}_0^{\mathbb{R}}$, а блоки W_λ имеют вид

$$W_\lambda = R_\lambda \otimes_{F_\lambda} E_\lambda,$$

где $E_\lambda = \mathrm{Hom}_{G_0}(R_\lambda, W_{\mathbb{R}})$ есть пространство кратностей вещественного неприводимого представления R_λ типа λ, а F_λ – множество сплетающих операторов R_λ, т.е. $F_\lambda = \mathrm{Hom}_{G_0}(R_\lambda, R_\lambda)$. По лемме Шура F_λ совпадает либо с $\mathbb{R}$, либо с $\mathbb{C}$, либо с $\mathbb{H}$.

Действие оператора iH_N задается формулой

$$iH_N = \bigoplus_\lambda 1 \otimes_{F_\lambda} h_\lambda, \tag{19}$$

где $\lambda \in \hat{G}_0^{\mathbb{R}}$, h_λ – гомоморфизм $E_\lambda \to E_\lambda$.

3.3. **Классификация гамильтонианов.** В предыдущем параграфе мы описали изотипные разложения пространства Намбу для группы унитарных симметрий G_0. Имеется параллельная конструкция изотипных разложений для анти-унитарных симметрий, изложенная в [1].

Перейдем к задаче классификации гамильтонианов на $W_{\mathbb{R}}$. При этом будем рассматривать ситуацию, охватывающую оба типа симметрий. А именно будем предполагать, что у нас имеется компактная группа K, действующая в $W_{\mathbb{R}}$. В ней выделена подгруппа K_0, которая либо совпадает с K, либо является в ней подгруппой индекса 2. В последнем случае обозначим через K_1 дополнение к K_0 в K.

Обозначим через S пространство операторов вида iH_N, действующих в $W_{\mathbb{R}}$, которые коммутируют с действием K_0 и антикоммутируют с действием K_1. Мы также предполагаем, что точка 0 не принадлежит спектру iH_N, т.е. операторы из S имеют энергетическую щель на нулевом уровне энергии.

Для того, чтобы установить гомотопический тип оператора iH_N, рассмотрим его непрерывную деформацию в пределах S, "уплощающую" спектр, сводя его к двум точкам $\{+i, -i\}$.

Более конкретно, рассмотрим гомотопию $y(z,t) : \mathbb{C} \times [0,1] \to \mathbb{C}$ вида

$$y(z,t) = (1-t)z + it\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\, z).$$

Так как оператор iH_N является нормальным, то корректно определена операторно-значная функцию $O(t) := y(iH_N, t)$, которая совпадает при $t = 0$ с iH_N. Обозначим через $\tilde{H}_N$ оператор $O(1)$, спектр которого состоит из точек $\pm i$, а через $\tilde{S}$ пространство операторов вида $i\tilde{H}_N$. Это пространство является деформационным ретрактом S.

Оператор $i\tilde{H}_N$ допускает изотипное разложение вида

$$i\tilde{H}_N = \bigoplus_{\lambda} 1 \otimes_{F_\lambda} \tilde{h}_\lambda, \tag{20}$$

аналогичное (19). Операторы $\tilde{h}_\lambda : E_\lambda \to E_\lambda$ обладают следующими тремя свойствами:

(1) $\tilde{h}_\lambda^2 = -1$;
(2) операторы $\tilde{h}_\lambda$ коммутируют со скалярами $f \in F_\lambda$;
(3) операторы $\tilde{h}_\lambda$ антикоммутируют с элементами группы K_1.

В соответствии с разложением (20) будем иметь

$$\tilde{S} = \prod_{\lambda} \tilde{S}_\lambda,$$

где $\tilde{S}_\lambda$ – пространство операторов $\tilde{h}_\lambda$, удовлетворяющих выписанным выше условиям.

Тем самым, исследование гамильтонианов iH_N сводится к описанию гамильтонианов $i\tilde{H}_N$, действующих в пространствах $\tilde{S}_\lambda$. Наложенные выше условия на изотипные разложения этих гамильтонианов, полностью определяют структуру пространств кратностей E_λ и отвечающих им пространств $\tilde{S}_\lambda$. Все возникающие ситуации связаны с 10 различными алгебрами Клиффорда и их продолжениями с помощью гомоморфизмов $\tilde{h}_\lambda$. Их явное описание можно найти в статье [1]. Укажем только, что имеется три класса, для которых пространства $\tilde{S}_\lambda$ и отвечающие им пространства E_λ выглядят следующим образом:

(1) $\tilde{S}_\lambda$ совпадает с одной из групп $\mathrm{O}(k)$, $\mathrm{U}(k)$, $\mathrm{Sp}(k)$, которым отвечают пространства E_λ, равные $\mathbb{R}^{2k}$, $\mathbb{C}^{2k}$, $\mathbb{H}^{2k}$ соответственно;

(2) $\tilde{S}_\lambda$ совпадает с одним из грассманианов

$$\bigcup_{m=0}^{k} \mathrm{O}(k)/\left(\mathrm{O}(m)\times\mathrm{O}(k-m)\right),$$
$$\bigcup_{m=0}^{k} \mathrm{U}(k)/\left(\mathrm{U}(m)\times\mathrm{U}(k-m)\right),$$
$$\bigcup_{m=0}^{k} \mathrm{Sp}(k)/\left(\mathrm{Sp}(m)\times\mathrm{Sp}(k-m)\right);$$

которым отвечают пространства E_λ, равные $\mathbb{C}^k$, $\mathbb{C}^k$, $\mathbb{C}^{2k}$ соответственно;

(3) $\tilde{S}_\lambda$ совпадает с одним из однородных пространств

$$\mathrm{O}(2k)/\mathrm{U}(k),\ \mathrm{Sp}(k)/\mathrm{U}(k),\ \mathrm{U}(k)/\mathrm{O}(k),\ \mathrm{U}(2k)/\mathrm{Sp}(k),$$

которым отвечают пространства E_λ, равные $\mathbb{R}^{2k}$, $\mathbb{H}^k$, $\mathbb{H}^k$, $\mathbb{R}^{4k}$ соответственно.

Это завершает гомотопическую классификацию гамильтонианов.

3.4. **Вопросы и упражнения к Лекции 3.**

(1) Постройте оператор X_N, для которого $X_N(w)=w'$ при $w\in W$, и проверьте, что отображение $X\mapsto X_N$ является представлением алгебры $\mathcal{Q}$ в пространстве W.

(2) Почему множество внешних автоморфизмов группы $\mathcal{K}$ в $(U)(\mathcal{F})$ совпадает с $\mathbb{Z}_2$ при $N>4$?

(3) Почему множество сплетающих операторов представления R_λ совпадает с $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$?

(4) Разберите конструкцию изотипных разложений для антиунитарных симметрий, изложенную в статье [1].
(5) Как определяются функции от нормального оператора?

4. Топологические диэлектрики, инвариантные относительно обращения времени

В следующих лекциях мы рассматриваем для простоты одночастичные гамильтонианы.

4.1. Связность Берри. Начнем с двумерного случая. Рассмотрим блоховский гамильтониан $H(k)$, собственные значения которого задаются уравнением

$$H(k)\varphi_n(k) = E_n(k)\varphi_n(k). \tag{21}$$

Связность Берри, отвечающая за изменение $\varphi_n(k)$ по k, определяется равенством

$$A_n(k) = i(\varphi_n(k), \partial_k \varphi_n(k)). \tag{22}$$

Уравнение (21) инвариантно относительно калибровочных преобразований вида

$$\varphi_n(k) \longmapsto e^{i\theta_n(k)}\varphi_n(k),$$

где $\theta_n(k)$ – калибровочная функция, т.е. гладкая вещественнозначная функция от k. Эти преобразования индуцируют калибровочные преобразования связности вида

$$A_n(k) \longmapsto A_n(k) - \partial_k \theta_n(k).$$

Кривизна связности Берри равна

$$F_{xy,n}(k) = \partial_{k_x} A_{k_y,n}(k) - \partial_{k_y} A_{k_[,n}(k),$$

где $k = (k_x, k_y)$.

4.2. Инвариант Черна. Пользуясь связностью Берри, можно ввести топологический инвариант, называемый *числом Черна.* В двумерном случае это число для n-й зоны равно

$$\mathrm{Ch}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Br}_2} F_{xy,n}(k)\,dk_x dk_y,$$

а суммарное число Черна двумерного диэлектрика равно

$$\mathrm{Ch} = \sum_{E_n < E_F} \mathrm{Ch}_n,$$

где E_F – энергия Ферми. Введенное число Черна связано с проводимостью *Холла* (см. [25]) соотношением

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{h}\,\mathrm{Ch}.$$

При обращении времени суммарная связность Берри и ее кривизна преобразуются следующим образом

$$\sum_{E_n<E_F} A_n(k) \longmapsto \sum_{E_n<E_F} A_n(-k)$$

и

$$\sum_{E_n<E_F} F_{xy,n}(k) \longmapsto -\sum_{E_n<E_F} F_{xy,n}(-k).$$

Поэтому если система инвариантна относительно преобразования обращения времени T, то число Черна преобразуется как

$$\mathrm{Ch} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Br}_2} \sum_{E_n<E_F} F_{xy,n}(k)dk_xdk_y \longmapsto -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Br}_2} \sum_{E_n<E_F} F_{xy,n}(-k)dk_xdk_y = -\mathrm{Ch},$$

откуда следует, что $\mathrm{Ch} = 0$. Следовательно, топологически нетривиальное состояние системы с ненулевым Ch возможно только при нарушении T-симметрии. Ниже мы вернемся к этой проблеме и объясним, каким образом можно определить топологически нетривиальные инварианты для T-симметричных диэлектриков.

4.3. **Топологические инварианты и грассманианы.** Пусть задан блоховский гамильтониан $H(k)$, описывающий зонный диэлектрик с запретной зоной на уровне энергии Ферми E_F. Приведем его к диагональному виду с помощью унитарного сопряжения:

$$U^*(k)H(k)U(k) = \mathrm{diag}(E_1(k), \dots, E_n(k)).$$

Предположим, что первые m уровней $E_i(k) > E_F$, $i = 1, \dots, m$, не заняты, а заполненные уровни отвечают энергиям $E_i(k) < E_F$ с $i = m+1, \dots, n$, где мы предполагаем, что $n \gg 1$.

Рассмотрим адиабатическую деформацию этого гамильтониана. В отсутствие условий симметрии возможна любая деформация, не затрагивающая запретной зоны. В частности, можно добиться того, что энергии всех занятых (соотв. свободных) уровней будут равны -1 (соотв. +1), так что

$$U^*(k)H(k)U(k) = \mathrm{diag}\left(\mathbf{1}_{m\times m}, -\mathbf{1}_{(n-m)\times(n-m)}\right). \tag{23}$$

Заметим, что матрица $U(k)$ в этом равенстве определена с точностью до преобразований вида

$$U(k) \longmapsto U(k)\mathrm{diag}\left(\mathrm{U}_{m\times m}, \mathrm{U}_{(n-m)\times(n-m)}\right).$$

Следовательно, матрица $U(k)$, задающая решение уравнения (23), определяет отображение из зоны Бриллюэна $\mathrm{Br}_d = \mathbb{T}^d$ в грассманиан

$$\mathrm{Gr}_{m,n} = \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(m) \times \mathrm{U}(n-m).$$

Тем самым, мы приходим к задаче об описании гомотопических классов $[\mathbb{T}^d, \mathrm{Gr}_{m,n}]$ отображений тора $\mathbb{T}^d$ в грассмановы многообразия.

Общая задача об описании пространств $[\mathbb{T}^d, X]$ и торических гомотопических групп топологических пространств X была исследована в статье Фокса [10].

Структура пространства $[\mathbb{T}^d, X]$ определяется наборами отображений

$$\Omega^r_I : \pi_r(X) \to [\mathbb{T}^d, X]$$

с $n \leq d$. Эти отображения параметризуются упорядоченными подмножествами $I = \{i_1 < \ldots < i_r\}$ в множестве индексов $\{1, \ldots, d\}$. Соответственно, элементы $[\mathbb{T}^d, X]$ параметризуются наборами из d элементов группы $\pi_1(X)$, $\frac{d(d-1)}{2}$ элементов из $\pi_2(X), \ldots$, $\binom{d}{j}$ элементов из $\pi_j(X)$ и т.д..

Вернемся к поставленной ранее задаче об описании гомотопических классов $[\mathbb{T}^d, \mathrm{Gr}_{m,n}]$ отображений тора $\mathbb{T}^d$ в грассмановы многообразия.

Применяя конструкцию Фокса к грассманиану $\mathrm{Gr}_{m,n}$, получаем что при $d = 1$: $[\mathbb{T}^1, \mathrm{Gr}_{m,n}] = \pi_1(\mathrm{Gr}_{m,n}) = 0$, при $d = 2$ гомотопические классы отображений $\mathbb{T}^2 \to \mathrm{Gr}_{m,n}$ характеризуются единственным инвариантом, так как $\pi_2(\mathrm{Gr}_{m,n}) = \mathbb{Z}$, а при $d = 3$ гомотопические классы отображений $\mathbb{T}^3 \to \mathrm{Gr}_{m,n}$ классифицируются тремя элементами из группы $\pi_2(\mathrm{Gr}_{m,n}) = \mathbb{Z}$, так как $\pi_1(\mathrm{Gr}_{m,n}) = \pi_3(\mathrm{Gr}_{m,n}) = 0$.

Нетривиальные классы в размерностях $d = 2, 3$ описываются следующим образом. Пространство $[\mathbb{T}^d, \mathrm{Gr}_{m,n}]$ можно рассматривать как классифицирующее пространство для расслоений над $\mathbb{T}^d$. В размерности $d = 2$ имеется нетривиальное расслоение над $\mathbb{T}^2$, являющееся аналогом хопфовского расслоения над $\mathbb{S}^2$. С физической точки зрения этот случай отвечает квантовому спиновому состоянию Холла. В размерности $d = 3$ имеются три расслоения над $\mathbb{T}^3$, являющихся поднятиями хопфовского расслоения относительно трех различных проекций $\mathbb{T}^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

4.4. **Топологические инварианты диэлектриков, симметричных относительно обращения времени.** *Обращение времени* или T*-преобразование* задается оператором T, который удовлетворяет условию $T^2 = -\mathrm{id}$ и является анти-унитарным оператором, т.е.

$$(T\varphi, T\psi) = (\psi, \varphi)$$

для любых состояний φ, ψ. Отсюда следует, в частности, что состояние φ и его T-партнер $T\varphi$ ортогональны друг другу: $(T\varphi, \varphi) = 0$. Действительно

$$(T\varphi, \varphi) = -(T\varphi, T^2\varphi) = -(T\varphi, \varphi),$$

где последнее равенство вытекает из анти-унитарности T. Следовательно, $(T\varphi, \varphi) = 0$.

Так как состояния φ и $T\varphi$ имеют одинаковую энергию, это означает, что любое собственное состояние энергии двукратно вырождено. Подобный эффект называется *вырождением Крамерса.*

Симметрия относительно T-преобразования означает для блоховского гамильтониана $H(k)$, что

$$TH(k)T^{-1} = H(-k).$$

Поэтому для каждого собственного значения энергии имеются два состояния $\varphi'_n(k)$ и $\varphi''_n(k)$, удовлетворяющие условию

$$\varphi''_n(k) = e^{i\theta_n(k)}T\varphi'_n(k),$$

где $\theta_n(k)$ – калибровочная функция. Соответственно, исходное гильбертово пространство разбивается в сумму двух подпространств $\mathcal{H}'$ и $\mathcal{H}''$, для каждого из которых можно ввести числа Черна Ch' и Ch'', сумма которых равна нулю. По действием T они меняются местами и меняют знак:

$$T : \mathrm{Ch}' \longmapsto \mathrm{Ch}'' = -\mathrm{Ch}' \ , \quad T : \mathrm{Ch}'' \longmapsto \mathrm{Ch}' = -\mathrm{Ch}''.$$

Однако их четности, т.е. значения $(-1)^{\mathrm{Ch}'}$ и $(-1)^{\mathrm{Ch}''}$, при этом не изменяются, т.е. корректно определен $\mathbb{Z}_2$-индекс ν, задаваемый равенством

$$(-1)^{\nu} = (-1)^{\mathrm{Ch}'} = (-1)^{\mathrm{Ch}''}.$$

Диэлектрик с $(-1)^{\nu} = -1$ топологически отличается от обычного диэлектрика и называется *квантовым спиновым диэлектриком Холла.*

5. К-теория и инволютивные пространства

5.1. **Отступление: K-теория.** Напомним конструкцию Гротендика, позволяющую построить каноническим образом по любой абелевой полугруппе S группу K, называемую *группой Гротендика* полугруппы S. Это абелева группа, заданная вместе с полугрупповым гомоморфизмом $\vartheta : S \to K$, обладающая следующим универсальным свойством: если R –другая абелева группа, заданная вместе с полугрупповым гомоморфизмом $\gamma : S \to R$, то существует единственный гомоморфизм $\kappa : K \to R$ такой, что следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, dashed, "\kappa"] & R \\ S \arrow[u, "\vartheta"] \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. $\gamma = \kappa \circ \vartheta$. При этом группа K определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

Построить группу Гротендика можно следующим образом. Рассмотрим на множестве $S \times S$ следующее отношение эквивалентности:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff$$
$$\text{если существует } z \in S \text{ такое, что } x + y' + z = x' + y + z.$$

Тогда группа K есть $K = S \times S/ \sim$, а гомоморфизм ϑ задается формулой: $\vartheta(x) := [x, 0]$, так что $[x, y] = \vartheta(x) - \vartheta(y)$ в группе K.

Обозначим через $\mathrm{Vect}(X)$ полугруппу векторных расслоений конечного ранга над топологическим пространством X с прямой суммой в качестве полугрупповой операции. Будем считать, что топологическое пространство X компактно и имеет отмеченную (базисную) точку x_0. Группа $K(X)$ есть по определению группа Гротендика полугруппы $\mathrm{Vect}(X)$. Если E, F – два расслоения над X таких, что $[E] = [F]$, т.е. их классы в группе Гротендика совпадают, это означает, что найдется расслоение $G \to X$ такое, что $E \oplus G \cong F \oplus G$. Выберем тогда расслоение G' такое, что прямая сумма $G \oplus G'$ является тривиальным расслоением $R \to X$. Тогда $E \oplus G \oplus G' \cong F \oplus G \oplus G'$, т.е. $E \oplus R \cong F \oplus R$. Иными словами, группа $K(X)$ описывает классы стабильно эквивалентных расслоений над X.

Определим $\tilde{K}(X)$ как ядро отображения $i^* : K(X) \to K(x_0)$, где $i : x_0 \hookrightarrow X$ – вложение отмеченной точки. Если обозначить через $\pi : X \to x_0$ естественную проекцию, то π^* будет индуцировать расщепление

$$K(X) \cong \tilde{K}(X) \oplus K(x_0).$$

Пусть X, Y – пара топологических пространств, где Y – замкнутое подпространство X. Определим группу $K(X, Y)$ равенством

$$K(X, Y) = \tilde{K}(X/Y).$$

В частности, $K(X, \emptyset) = K(X)$.

Введем операцию надстройки в категории топологических пространств с отмеченными точками. Положим

$$X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y),$$

где $X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$, а x_0, y_0 – отмеченные точки в пространствах X, Y соответственно. Моделью окружности $\mathbb{S}^1$ для нас будет служить факторпространство $I/\partial I$, где $I = [0,1]$. Аналогично, моделью сферы $\mathbb{S}^n$ будет служить факторпространство $I^n/\partial I^n$, где I^n – единичный куб в $\mathbb{R}^n$, так что $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{S}^1 (n$ раз). Пространство $\mathbb{S}^1 \wedge X$ называется (приведенной) *надстройкой* над X и обозначается через SX. При этом n-кратно итерированная надстройка $S \ldots SX(n$ раз) гомеоморфна пространству $\mathbb{S}^n \wedge X$ и обозначается через $S^n X$.

Введем при $n \geq 0$ относительную K-группу пары топологических пространств

$$K^{-n}(X, Y) = \tilde{K}^{-n}(X/Y) = \tilde{K}(S^n(X/Y)),$$

где $\tilde{K}^{-n}(X) = \tilde{K}(S^n X)$. В частности, $K^{-n}(X) = K^{-n}(X, \emptyset)$. Эти группы включаются в точную последовательность

$$\begin{aligned} \ldots K^{-2}(Y) \to K^{-1}(X, Y) \to K^{-1}(X) \to K^{-1}(Y) \to \\ \to K^0(X, Y) \to K^0(X) \to K^0(Y) \end{aligned}$$

Одним из основных фактов K-теории является *периодичность Ботта*: для любого $n \geq 0$ имеет место изоморфизм

$$K^{-n}(X) \cong K^{-n-2}(X).$$

5.2. **KR-теория и инволютивные пространства.**

Определение 10. *Инволютивное пространство* (X, τ) есть топологическое пространство X, наделенное *инволюцией*, т.е. гомеоморфизмом $\tau : X \to X$, квадрат которого τ^2 есть тождественное отображение id_X.

Такое пространство в KR-теории принято также называть *R-пространством*. Примером может служить пространство

$$\mathbb{R}^{p,q} := \mathbb{R}^q + i\mathbb{R}^p$$

с координатами $y+ix=(y,x)$. Инволюция на нем задается отображением $\tau:(y,x)\mapsto(y,-x)$. Для дальнейшего обозначим через $\mathbb{B}^{p,q}$ единичный шар в пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$, а через $\mathbb{S}^{p,q}$ единичную сферу в $\mathbb{R}^{p,q}$, так что $\mathbb{R}^{p,p}\cong\mathbb{C}^p$.

Симметрия обращения времени, т.е. Т-симметрия, в инволютивном пространстве X задается обращением знака локальных координат. Например, если сфера $\mathbb{S}^d$ реализована в виде единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$ с координатами $(x_0,x_1,\ldots,x_d)$, удовлетворяющими соотношению $x_0^2+x_1^2+\ldots+x_d^2=1$, то в качестве Т-симметрии на ней естественно взять отображение $(x_0,x_1,\ldots,x_d)\mapsto(x_0,-x_1,\ldots,-x_d)$, так что сфера $\mathbb{S}^d$ отождествляется при этом со сферой $\mathbb{S}^{1,d}\subset\mathbb{R}^{1,d}$. Для тора $\mathbb{T}^d=\mathbb{S}^1\times\ldots\times\mathbb{S}^1$ с координатами $(e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_d})$ Т-симметрия задается отображением: $(e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_d})\mapsto(e^{-i\theta_1},\ldots,e^{-i\theta_d})$.

Множество неподвижных точек инволюции τ на X есть множество

$$X^\tau=\{x\in X:\tau(x)=x\}.$$

Предполагается, что оно состоит из конечного числа точек. В рассмотренном выше примере сферы $\mathbb{S}^{1,d}$ у инволюции τ имеется две неподвижных точки $(\pm1,0,\ldots,0)$, а у тора $\mathbb{T}^d$ есть 2^d неподвижных точек, задаваемых наборами $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d)$ из чисел $\varepsilon_i=\pm1$.

Определение 11. *Кватернионным векторным расслоением* (E,ρ) или *Q-расслоением* над инволютивным пространством (X,τ) называется комплексное векторное расслоение $E\to X$, наделенное *анти-инволюцией* ρ, совместимой с τ.

Анти-инволюция ρ задается антилинейным изоморфизмом расслоений $\rho:E\to E$ таким, что $\rho^2=-\mathrm{id}_E$. Его совместимость с инволюцией τ означает, что $\pi\circ\rho=\tau\circ\pi$. В неподвижных точках $x\in X^\tau$ отображение $\rho_x:E_x\to E_x$ есть антилинейное отображение с $\rho_x^2=-\mathrm{id}_{E_x}$. Тем самым, ρ_x задает кватернионную структуру (действие кватернионов) на E_x.

Если в приведенном определении заменить анти-инволюцию ρ на инволюцию σ такую, что $\sigma^2=\mathrm{id}_E$, мы придем к определению *векторного R-расслоения* (E,σ) над (X,τ).

Определение 12. *Кватернионной K-группой* $KQ(X,\tau)$ инволютивного пространства (X,τ) называется группа Гротендика полугруппы векторных Q-расслоений (E,ρ) конечного ранга над (X,τ).

Аналогичным образом определяется *вещественная K-группа* $KR(X,\tau)$, являющаяся группой Гротендика полугруппы векторных R-расслоений (E,σ) над (X,τ).

Относительная группа $KR(X,Y)$ определяется как $\widetilde{KR}(X/Y)$. С учетом этого определения можно ввести высшие KR-группы

$$KR^{p,q}(X,Y) := KR(X \times \mathbb{B}^{p,q}, X \times \mathbb{S}^{p,q} \cup Y \times \mathbb{B}^{p,q})$$

и $KR^{-q}(X,Y) := KR^{0,q}(X,Y)$.

Введенные KR-группы связаны точными последовательностями

$$\ldots KR^{-1}(X) \to KR^{-1}(Y) \to KR(X,Y) \to KR(X) \to KR(Y), \tag{24}$$

$$\ldots KR^{p,1}(X) \to KR^{p,1}(Y) \to KR^{p,0}(X,Y) \to KR^{p,0}(X) \to KR^{p,0}(Y),$$

где $p \geq 0$ – произвольное целое неотрицательное число.

Имеет место следующая *теорема периодичности* (см. [3])

$$KR^{p+1,q+1}(X,Y) \cong KR^{p,q}(X,Y), \tag{25}$$

откуда следует, что

$$KR^{p-q}(X,Y) \cong KR^{p,q}(X,Y), \tag{26}$$

так что $KR^{p}(X,Y) = KR^{p,0}(X,Y)$ при $p \geq 0$.

Пользуясь соотношением (26), точную последовательность (24) можно продолжить вправо до бесконечности.

Помимо (1,1)-периодичности (25), имеется еще *периодичность Ботта*

$$KR^{n+8}(X) \cong KR^{n}(X).$$

Зная KR-группы, можно вычислить и кватернионные KQ-группы, пользуясь изоморфизмом

$$KQ^{n}(X) \cong KR^{n-4}(X).$$

В случае, когда инволюция τ тривиальна, KR-теория сводится к обычной K-теории вещественных векторных расслоений, обозначаемой через KO:

$$KO^{n}(X) \cong KR^{n}(X)|_{\tau=\mathrm{id}}.$$

В силу приведенного выше изоморфизма (26) группы $KR^{p,q}(X)$ зависят только от разности $p-q$, а ввиду периодичности Ботта от числа

$$j := (p-q) \bmod 8.$$

5.3. **Гильбертово расслоение топологического диэлектрика.** Топологические диэлектрики, обладающие симметрией относительно обращения времени, описываются математически в терминах KR-теории.

Напомним, что через $\pi : \mathfrak{H} \to X$ обозначается *гильбертово расслоение топологического диэлектрика* над импульсным пространством $X = \mathrm{Br}_d$. Слоем этого расслоения над точкой $x \in X$ является гильбертово пространство $\mathcal{H}_x$, а через $\mathcal{H} = L^2(\mathfrak{H})$ обозначается гильбертово пространство его квадратично интегрируемых сечений. Эти сечения отождествляются с физическими состояниями, отвечающими собственным значениям $E(x)$.

Преобразование обращения времени на пространстве $\mathcal{H}$ задается оператором Θ, который является анти-унитарным оператором, удовлетворяющим условиям: $\Theta^2 = -1$ и $\Theta^* = -\Theta$.

Гильбертово расслоение $\pi : \mathfrak{H} \to X$, наделенное оператором Θ, становится векторным Q-расслоением $\pi : (\mathfrak{H}, \Theta) \to (X, \tau)$. Иными словами, действие инволюции τ поднимается до анти-инволюции Θ на гильбертовом расслоении $\pi : \mathfrak{H} \to X$.

Гамильтониан $H(x)$, инвариантный относительно обращения времени, должен удовлетворять условию

$$\Theta H(x)\Theta^* = H(\tau(x)),\ x \in X.$$

Поэтому если φ – собственное состояние для H, т.е. $H(x)\varphi(x) = E(x)\varphi(x)$, то $\Theta\varphi$ – собственное состояние для $\Theta H \Theta^*$ с той же энергией E:

$$[\Theta H \Theta^*]\Theta\varphi(x) = E(\tau(x))\Theta\varphi(x).$$

Иными словами, состояния φ и $\Theta\varphi$ принадлежат одной и той же зоне с энергией E. Тем самым, каждая зона при наличии T-симметрии является дважды вырожденной, а $(\varphi, \Theta\varphi)$ составляют пару Крамерса. Ранг гильбертова расслоения $\mathfrak{H}$ является при этом четным, т.е. равным $2N$, где N – натуральное число. Если T есть единственная симметрия $\mathfrak{H}$, т.е. каждая зона в точности дважды вырождена, то $\mathfrak{H}$ представляется в виде

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathfrak{H}_i,$$

где $\mathfrak{H}_i$ – подрасслоения $\mathfrak{H}$, пространство сечений $\Gamma(X, \mathfrak{H}_i)$ которых порождается парой глобальных сечений Крамерса $(\varphi_i, \Theta\varphi_i)$. Обозначим через $w^i : X \to \mathrm{U}(2)$ функцию перехода расслоения $\mathfrak{H}_i$, которая в физической литературе называется калибровочным T-преобразованием. Преобразование T-симметрии на $\mathfrak{H}_i$ меняет w^i на $w^i \circ C$, где C – эрмитово сопряжение. В терминах локальных координат (x, v) на $\mathfrak{H}_i$ оператор Θ действует по формуле: $(x, v) \mapsto (\tau(x), w^i(x)\bar{v})$. Если применить Θ к правой части последней формулы и воспользоваться соотношением $\Theta^2 = -\mathrm{id}_{\mathfrak{H}_i}$, то придем к равенству

$$w^i(\tau(x))\bar{w}^i(x) = -\mathrm{id}_{\mathcal{H}_i}, \text{ т.е. } (w^i)^t(\tau(x)) = -w^i(x).$$

В частности, в неподвижных точках $x \in X^\tau$ матрица $w^i(x)$ кососимметрична.

В случае, когда

$$X = \mathbb{S}^3 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\},$$

T-симметрия задается формулой: $\tau(\alpha, \beta) = (\bar{\alpha}, -\beta)$. Ее неподвижными точками являются $(\pm 1, 0)$, а функция перехода $w : \mathcal{S}^3 \to \mathrm{U}(2)$ задается формулой

$$w(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\bar{\alpha} & \beta \end{pmatrix}$$

5.4. **Отступление: связь с некоммутативной геометрией.** Пусть задана алгебра A и ее представление r в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ ограниченными линейными операторами.

Определение 13. *Спектральной тройкой* для алгебры A называется тройка $(A, \mathcal{H}, D)$, где D – самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, обладающий компактной резольвентой и удовлетворяющий следующему условию: коммутатор $[D, r(a)]$ является ограниченным линейным оператором для любого $a \in A$ (в дальнейшем мы опускаем знак r и обозначаем $r(a)$ просто через a).

В случае, когда (A, τ) есть алгебра с инволюцией τ, мы можем уточнить это определение с учетом действия клиффордовых алгебр. А именно, введем понятие KR^j-цикла над алгеброй A, где

$$j = (p - q) \bmod 8.$$

Определение 14. *KR^j-циклом* над алгеброй A с $j \in \mathbb{Z}_8$ называется пятерка $(A, \mathcal{H}, D, C, \chi)$ при четном j или четверка $(A, \mathcal{H}, D, C)$ при нечетном j, где

(1) $(A, \mathcal{H}, D)$ есть спектральная тройка для алгебры A;
(2) C – оператор зарядового сопряжения, т.е. анти-унитарный оператор на $\mathcal{H}$, согласованный с τ в том смысле, что

$$CaC^{-1} = \tau(a) \text{ для всех, } a \in A;$$

(3) χ – *оператор градуировки* на $\mathcal{H}$, т.е. $\chi^* = \chi$, $\chi^2 = \mathrm{id}$, который обладает следующими свойствами коммутирования:

$$D\chi = -\chi D \text{ и } \chi a = a\chi \text{ для любого } a \in A;$$

(4) операторы C, D и χ удовлетворяют следующим условиям коммутирования:

$$C^2 = \pm 1, CD = \pm DC, C\chi = \pm\chi C,$$

где знаки $\pm$ выбираются из следующих таблиц:

$j \bmod 8$	0	2	4	6
$C^2 = \pm 1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$CD = \pm DC$	$+$	$+$	$+$	$+$
$C\chi = \pm\chi C$	$+$	$-$	$+$	$-$

и

$j \bmod 8$	1	3	5	7
$C^2 = \pm 1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$CD = \pm DC$	$-$	$+$	$-$	$+$

(5) задано представление ρ алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}_{p,q}$ ограниченными операторами, действующими в пространстве $\mathcal{H}$, которые коммутируют с действием алгебры A и оператором C и антикоммутируют с операторами D и χ.

В соответствии с приведенным определением следует различать случаи четного и нечетного $j \bmod 8$. В первом случае мы будем обозначать KR^j-цикл через KR^j_{ev}, во втором — через KR^j_{od}.

Рассмотрим важный пример KR^j-циклов, относящийся к спинорной геометрии. Пусть M – компактное спинорное многообразие размерности n с оператором Дирака $\mathcal{D}$, действующим в гильбертовом пространстве спиноров $\mathcal{H} = L^2(M, \mathcal{S})$ (за определениями, относящимися к спинорной геометрии отсылаем к книге [21] и статье [24]). Обозначим через $A = C^\infty(M)$ алгебру гладких функций на M. Тогда тройка $(A, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ является спектральной тройкой для алгебры A. Положим $j \equiv n \bmod 8$. Введем оператор градуировки $\chi = c(\gamma)$ также, как для четномерных клиффордовых алгебр (см. [21],[24]) и обозначим через C оператор зарядового сопряжения. Тогда при четном j пятерка $(A, \mathcal{H}, \mathcal{D}, C, \chi)$ является KR^j_{ev}-циклом.

5.5. **Вопросы и упражнения к Лекции 5.**

(1) Покажите, что $KR(X \times \mathbb{S}^{1,0}) \cong K(X)$.
(2) Почему набор из $A = C^\infty(M)$, $\mathcal{H} = L^2(M, S)$, $\mathcal{D}$, где M – компактное спинорное многообразие, наделенное спинорным расслоением S и оператором Дирака $\mathcal{D}$, действующим на гладких сечениях этого расслоения, образует спектральную тройку?

6. Состояния Майорана

6.1. **Нулевые моды Майорана.** Пусть $H(x)$ есть одночастичный гамильтониан на импульсном пространстве X. Напомним, что он является T-инвариантным, если

$$\Theta H(x)\Theta^* = H(\tau(x)),\ x \in X.$$

Рассмотрим случай, когда гильбертово расслоение $\pi : \mathfrak{H} \to X$ имеет ранг 2, а его пространство сечений порождается глобальными сечениями Крамерса φ и $\Theta\varphi$. Эту пару сечений, имеющих одинаковую энергию, можно рассматривать как квазичастицу, составленную из φ и $\Theta\varphi$. Ее эффективный гамильтониан имеет вид

$$\tilde{H}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \Theta H(x)\Theta^* \\ H(x) & 0 \end{pmatrix} .$$

Гамильтониан $\tilde{H}$ является инвариантным относительно обращения времени, а уравнение на собственный вектор φ гамильтониана H с собственным значением E принимает в терминах $\tilde{H}$ следующую матричную форму

$$\begin{pmatrix} 0 & \Theta H(x)\Theta^* \\ H(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \Theta\varphi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(\tau(x))\Theta\varphi(x) \\ E(x)\varphi(x) \end{pmatrix} .$$

Напомним, что гамильтониан H самосопряжен, т.е. $H^*(x) = H(x)$, поэтому $\tilde{H}$ удовлетворяет соотношению

$$\tilde{H}^*(x) = \begin{pmatrix} 0 & H(\tau x) \\ H(x) & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & H(x) \\ H(\tau x) & 0 \end{pmatrix} = \tilde{H}(\tau(x)).$$

Иначе говоря, $\tilde{H}$ не является ни самосопряженным, ни кососимметричным оператором.

Предположим, что на пространстве $\mathcal{H}$ задана вещественная структура I, удовлетворяющая условиям: $I^2 = \mathrm{id}$, $I^* = I$.

Определение 15. Состояние ψ называется *состоянием Майорана* относительно вещественной структуры I, если оно удовлетворяет условию вещественности $I\psi = \psi$.

Пользуясь оператором обращения времени Θ, можно построить вещественную структуру на $\mathcal{H}$ полагая

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & \Theta^* \\ \Theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\mathcal{I}^* = \mathcal{I}$ и $\mathcal{I}^2 = 1$. Вещественная структура $\mathcal{I}$ действует на крамерсовскую пару $\Phi = (\varphi, \Theta\varphi)$ по формуле

$$\begin{pmatrix} 0 & \Theta^* \\ \Theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \Theta\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \Theta\varphi \end{pmatrix} .$$

Иначе говоря, $\mathcal{I}\Phi = \Phi$, т.е. квазичастица $\Phi = (\varphi, \Theta\varphi)$ является состоянием Майорана относительно вещественной структуры $\mathcal{I}$.

Напомним, что в крамерсовской паре $\Phi = (\varphi, \Theta\varphi)$ состояния φ и $\Theta\varphi$ ортогональны друг другу и потому линейно независимы, если только их энергия отлична от нуля. Однако в неподвижных точках $x \in X^\tau$ мы имеем равенство $\Theta\varphi(x) = \varphi(x)$. В частности локализованная мода Майорана должна иметь нулевую энергию в этой точке. Это рассуждение мотивирует следующее определение.

Определение 16. *Нулевой модой Майорана* называется состояние Майорана $\Phi_0 = (\varphi_0, \Theta\varphi_0)$, заданное в малой окрестности неподвижной точки $x_0 \in X^\tau$, которое удовлетворяет условию: $\varphi_0(x_0) = \Theta\varphi_0(x_0) = 0$ и меняет знак в этой точке.

6.2. **Аналитический $\mathbb{Z}_2$-индекс.** Предположим, что оператор H, а следовательно и $\tilde{H}$, является фредгольмовым. Оператор $H(x)$ вблизи неподвижной точки x_0 является суммой оператора Дирака D и квадратичной поправки, которая не меняет гомотопического класса (см. [26]). Поэтому индекс топологического диэлектрика определяется суммой индексов оператора Дирака в неподвижных точках.

Оператор $\tilde{H}$ вблизи неподвижной точки x_0 можно аппроксимировать оператором Дирака, которому отвечает матричный оператор

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{pmatrix} .$$

Тем самым, оператор $\tilde{H}$ вблизи неподвижной точки x_0 представляется в виде суммы кососимметрического оператора $\mathcal{D}$ и квадратичной поправки, не влияющей на индекс оператора $\tilde{H}$ в этой точке.

Для вещественных кососимметрических эллиптических операторов P Атья и Зингер (см. [5], [4]) определили их аналитический $\mathbb{Z}_2$-индекс как

$$\mathrm{ind}_a P = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\, P \bmod 2.$$

Поэтому естественно определить $\mathbb{Z}_2$-инвариант ν топологического диэлектрика как сумму

$$\nu = \sum_{x \in X^\tau} \mathrm{ind}_a \tilde{H}(x) = \sum_{x \in X^\tau} \dim\, \mathrm{Ker}\, \tilde{H}(x) \bmod 2$$

как сумму локальных индексов в неподвижных точках.

Физический смысл $\mathbb{Z}_2$-инварианта ν состоит в том, что он совпадает с четностью числа нулевых мод Майорана по всем неподвижным точкам $x \in X^\tau$.

6.3. **KQ-цикл, ассоциированный с квазичастицей Майорана.** Построим KQ-цикл, ассоциированный с квазичастицей Майорана.

В качестве оператора градуировки χ возьмем оператор

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Указанный оператор порождает естественную $\mathbb{Z}_2$-градуировку в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. А именно, рассмотрим для крамерсовской пары $\Phi = (\varphi, \Theta\varphi)$ разложение вида

$$\frac{1+\chi}{2}\,\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \frac{1-\chi}{2}\,\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \Theta\varphi \end{pmatrix} .$$

По определению, KQ-цикл крамерсовской пары есть пятерка $(C^\infty(X), \mathcal{H}, \tilde{H}, \mathcal{I}, \chi)$, где

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & \Theta H \Theta^* \\ H & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & \Theta^* \\ \Theta & 0 \end{pmatrix} .$$

6.4. **Вопросы и упражнения к Лекции 6.**

(1) Почему вблизи неподвижной точки $x_0 \in X^\tau$ оператор $H(x)$ является суммой оператора Дирака и квадратичной поправки?

7. Топологический $\mathbb{Z}_2$-индекс диэлектрика

7.1. **Топологический $\mathbb{Z}_2$-индекс Черна.** Рассмотрим конструкцию топологического $\mathbb{Z}_2$-индекса для 3-мерного инволютивного пространства (X, τ). Предположим, что гильбертово расслоение $\pi : \mathfrak{H} \to X$ имеет ранг 2, а калибровочная группа совпадает с $\mathrm{U}(2)$. Анти-инволюция Θ на гильбертовом расслоении $(\mathfrak{H}, \Theta) \to (X, \tau)$ совместима с естественной инволюцией ϑ на $\mathrm{U}(2)$, задаваемой формулой: $\vartheta(g) = -g^t$, в том смысле, что $w \circ \tau = \vartheta \circ w$, где w – функция перехода. Иными словами, w задает эквивариантное отображение $w : (X, \tau) \to (\mathrm{U}(2), \vartheta)$.

Нечетный характер Черна гладкого отображения $g : X \to \mathrm{U}(n)$ из нечетномерного многоообразия X^d в группу $\mathrm{U}(n)$ определяется формулой (см. [11])

$$\mathrm{Ch}(g) = \sum_{k=0}^{(d-1)/2} \mathrm{Ch}_{2k+1}(g) = \sum_{k=0}^{(d-1)/2} (-1)^k \frac{k!}{(2k+1)!} \mathrm{tr}\left[(g^{-1}dg)^{2k+1}\right].$$

Пользуясь этой формулой в 3-мерном случае, можно ввести *топологический индекс*

$$\mathrm{ind}_t g = \frac{1}{4\pi^2}\int_X \mathrm{Ch}_3(g) = -\frac{1}{24\pi^2}\int_X \mathrm{tr}(g^{-1}dg)^3.$$

Это число называется также *числом вращения* отображения g. Ввиду T-симметрии топологический индекс $\mathrm{ind}_t w$ функции переходя w определен по модулю $\mathbb{Z}_2$ (см. [17]).

Утверждение о том, что топологический $\mathbb{Z}_2$-индекс для 3-мерных диэлектриков совпадает с введенным ранее аналитическим $\mathbb{Z}_2$-индексом, т.е.

$$\nu = \mathrm{ind}_t w, 4$$

можно рассматривать как аналог теоремы Атьи–Зингера об индексе в рассматриваемой ситуации.

7.2. **Инвариант Кейна–Мила.** Другое определение топологического $\mathbb{Z}_2$-индекса было предложено в работе [16]. Этот инвариант, называемый *KM-инвариантом*, задается формулой

$$\mathrm{KM}(X) = \prod_{x\in X^\tau} \frac{\mathrm{pf}[w(x)]}{\sqrt{\det[w(x)]}}\ .$$

Как отмечалось выше, в неподвижных точках $x \in X^\tau$ функция перехода $w(x)$ является кососимметрической матрицей, пфаффиан которой обозначается через $\mathrm{pf}[w(x)]$.

Напомним его определение. Пусть $A = (a_{ij})$ есть $(2n)\times(2n)$-кососимметрическая матрица. Сопоставим ей бивектор

$$\Omega = \sum_{i<j} a_{ij} e_i \wedge e_j,$$

где $\{e_i\}$ – стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда пфаффиан $\mathrm{pf}(A)$ матрицы A определяется уравнением

$$\frac{1}{n!}\Omega^n = \mathrm{pf}(A) e_1 \wedge \ldots \wedge e_{2n}.$$

Пфаффиан $\mathrm{pf}(A)$ обладает следующими свойствами:

(1) $\mathrm{pf}(A)^2 = \det(A),\ \mathrm{pf}(\lambda A) = \lambda^n \mathrm{pf}(A)$;
(2) $\mathrm{pf}(BAB^t) = \det(B)\mathrm{pf}(A),\ \mathrm{pf}(A^t)(-1)^n\mathrm{pf}(A)$.

Как известно, квадратная матрица A удовлетворяет тождеству

$$\ln\,\det(A) = \operatorname{tr}\ln(A).$$

В том случае, когда матрица A кососимметрична, это соотношение превращается в

$$2\ln \operatorname{pf}(A) = \operatorname{tr}\ln(A).$$

Связь KM-инварианта с топологическим $\mathbb{Z}_2$-индексом устанавливается с помощью формулы (см. [17]):

$$\sum_{x\in X^\tau} \ln \operatorname{pf}[w(x)] = \frac{1}{2}\,\mathrm{ind}_t w.$$

Экспоненцируя это равенство, получим уравнение, связывающее произведение пфаффианов с топологическим $\mathbb{Z}_2$-индексом

$$\prod_{x\in X^\tau} \operatorname{pf}[w(x)] = \exp\{2\pi i\frac{\mathrm{ind}_t w}{2}\} = (-1)^{\mathrm{ind}_t w}.$$

Полагая детерминант $det[w(x)]$ в неподвижных точках $x \in X^\tau$ равным 1, получим, что $\operatorname{pf}[w(x)]$ в таких точках равен 1 или -1. Поэтому произведение в левой части равно $\mathrm{KM}(X)$ и оно не изменится, если заменить в нем пфаффианы их знаками. Тем самым, получаем

$$\mathrm{KM}(X) = \prod_{x\in X^\tau} \operatorname{sgn}\left(\operatorname{pf}[w(x)]\right) = (-1)^{\mathrm{ind}_t w}.$$

7.3. **Вопросы и упражнения к Лекции 7.**

(1) Почему топологический $\mathbb{Z}_2$-индекс $\mathrm{ind}_t w$ определен по модулю 2?
(2) Докажите формулу

$$\sum_{x\in X^\tau} \ln \operatorname{pf}[w(x)] = \frac{1}{2}\,\mathrm{ind}_t w.$$

Библиографические комментарии

Первая часть курса посвящена общим вопросам теории твердого тела, относящимся к диэлектрикам и сверхпроводникам.

В лекции 1 излагаются основы классической теории Блоха. Более подробно с этой теорией можно познакомиться по известным монографиям [2] и [22]. В параграфе 1.1 рассматривается одночастичный оператор Шредингера с периодическим потенциалом, которому сопоставляется блоховский гамильтониан на импульсном пространстве. Доказывается формула Парсеваля, связывающая функции на координатном и импульсном пространствах. Более подробное изложение этих вопросов можно найти в книге [8]. Многочастичный случай рассматривается в параграфе 1.2, где вводится фермионное фоковское пространство. В следующем параграфе 1.3 вводятся основные операторы, включая операторы рождения и уничтожения, на фоковском пространстве. Здесь же появляется пространство Намбу, играющее важную роль в последующем. Более подробное изложение этих вопросов можно найти в диссертации [18]. В параграфе 1.4 вводится гамильтониан Боголюбова–де Жена для сверхпроводников и приводится его интерпретация в терминах фоковского пространства.

Следующая лекция 2 посвящена исследованию групп симметрий, возникающих в теории твердого тела. Она открывается параграфом 2.1, в котором кратко излагаются основы теории алгебр Клиффорда, лежащей в основе теории симметрий, отвечающих топологическим диэлектрикам и сверхпроводникам. Более подробно с алгебрами Клиффорда можно познакомиться по монографиям [13], [21] и статье [24]. В следующих параграфах 2.2 и 2.3 дается описание указанных симметрий и приводится классификация Китаева, изложенная в его статье [19]. В заключительном параграфе 2.4 этой лекции вводятся классифицирующие пространства, пользуясь которыми удается применить методы теории гомотопий к исследованию топологических объектов, как это сделано в диссертации [18].

Математическая интерпретация классификации Китаева дана в лекции 3, в изложении которой мы следуем статье [1]. Фактически речь идет о топологической классификации гамильтонианов, квадратичных по операторам рождения и уничтожения. Главную роль здесь играет переформулировка исходной задачи в терминах пространства Намбу (параграф 3.1) и связанных с ним изотипных разложений (параграф 3.2). Более подробно с изотипными разложениями унитарных представлений компактных групп Ли можно по книге [12]. Полученная на основе этих результатов гомотопическая классификация гамильтотнианов представлена в параграфе 3.3. Отметим, что другая математическая интерпретация классификации Китаева была дана ранее в статье [14].

Вторая часть курса посвящена топологическим диэлектрикам, инвариантным относительно обращения времени.

В лекции 4 рассматриваются двумерные диэлектрики. В параграфе 4.1 вводится связность Берри, с помощью которой в параграфе 4.2 строится инвариант Черна. Общая задача о топологических инвариантах диэлектриков, рассматриваемая в параграфе 4.3, сводится к гомотопической классификации отображений тора $\mathbb{T}^d$ в топологические пространства. Эта задача была рассмотрена в работе [10], а ее приложения к теории твердого тела описаны в статье [6]. Благодаря наличию вырождения Крамерса для двумерных диэлектриков удается определить топологический $\mathbb{Z}_2$-индекс (параграф 4.4).

В лекции 5 дается математическая интерпретация построений из предыдущей лекции. Вначале (параграф 5.1) мы напоминаем основные понятия K-теории. Топологические диэлектрики, инвариантные относительно обращения времени, описываются в терминах вещественных и кватернионных K-групп или, иными словами, в терминах инволютивных пространств и векторных расслоений над ними. Эти понятия объясняются в параграфе 5.2, а в параграфе 5.3 устанавливается их связь с топологическими диэлектриками. В следующем параграфе 5.4 дается интерпретация введенных понятий в терминах некоммутативной геометрии. Более подробно с некоммутативной геометрией можно познакомиться по монографиям [9], [13] и статье [24].

Наличие симметрии во времени приводит к исследованию нулевых мод Майорана, которым посвящена лекция 6. Эти моды вводятся в параграфе 6.1 В параграфе 6.2 определяется аналитический $\mathbb{Z}_2$-индекс 3-мерных диэлектриков, равный четности числа нулевых мод Майорана в неподвижных точках инволюции. С квазичастицей Майорана связан K-цикл, который вводится в параграфе 6.3.

В заключительной лекции 7 определяется топологический $\mathbb{Z}_2$-индекс (параграф 7.1), тесно связанный с нечетным характером Черна. Утверждение о том, что он совпадает с введенным в параграфе 6.2 аналитическим $\mathbb{Z}_2$-индексом, можно рассматривать как вариант теоремы Атьи–Зингера об индексе в рассматриваемой ситуации. Наконец, в параграфе 7.2 определяется KM-инвариант, введенный Кейном и Милом в [16], и устанавливается его связь с топологическим $\mathbb{Z}_2$-индексом. В изложении этого параграфа мы следовали обзору [17].

Список литературы

[1] G.Abramovici, P.Kalugin, Clifford modules and symmetries of topological insulators, Int. J. Geom. Methods in Phys. **9**(2012), N 3, 1250023, 1-31.

[2] Н.Ашкрофт, Н.Мермин, *Физика твердого тела*, Мир, Москва, 1979.

[3] М.Атья, *Лекции по K-теории*, Мир, Москва, 1967.

[4] M.F.Atiyah, I.M.Singer, Index theory for skew-adjoint Fredholm operators, Publ. Math. Inst. Haut. Etud. Sci. **37**(1969), 5-26.

[5] M.F.Atiyah, I.M.Singer, The index of elliptic operators, V, Ann. Math. **93**(1971), 139-149.

[6] J.E.Avron, R.Seiler, B.Simon, Homotopy and quantization in condensed matter physics, Phys. Rev. Lett. **51**(1990), N 1, 2185.

[7] M.Berry, Quantum phase factors accompanying adiabatic changes, Proc. R. Soc. London **A392**(1984), 45.

[8] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[9] A.Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London–San Diego, 1994.

[10] R.Fox, Homotopy groups and torus homotopy groups, Ann. Math. **49**(1948), N 2, 471-510.

[11] E. Getzler, The odd Chern character in cyclic homology and spectral flow, Topology, **32(3)**(1993),489–507.

[12] R.Goodman, N.R.Wallach, *Symmetry, Representations and Invariants*, Springer, 2009.

[13] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

[14] P.Heinzner, A.Huckleberry, M.Zirnbauer, Symmetry classes of disordered fermions, Communs. Math. Phys. **257**(2005), 725-771.

[15] C.L.Kane, E.J.Mele, Quantum spin Hall effect in graphene, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:226801.

[16] C.L.Kane, E.J.Mele, $\mathbb{Z}_2$ topological order and the quantum spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:146802.

[17] R.M.Kaufmann, Dan Li, B.Wehefritz-Kaufmann, Topological insulators and K-theory, ArXiv: 1510.08001.

[18] R.Kennedy, Homotopy theory of topological insulators, Dissertation, Köln, 2014.

[19] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, Adv. Theor. Phys., AIP Conf. Proc. **1134**(2009), 22-30.

[20] B.Laughlin, Quantized Hall conductance in two dimensions, Phes Rev. **B23**(1981), 5232.

[21] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[22] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.

[23] M.Sato, Y.Ando, Topological superconductors: a review, Rep. Progress Phys. **80**(2017), 076501.

[24] А.Г.Сергеев, Спинорная геометрия Дирака и некоммутативная геометрия Конна, Труды МИАН **298**(2017), 276-314.

[25] А.Г.Сергеев, Применения некоммутативной геометрии в анализе и математической физике, Труды ММО **81**(2020), вып. 2, 1-59.

[26] S.Q.Shen, *Topological Insulators: Dirac Operators in Condensed Matters*, Berlin, Springer, 2013.

[27] D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405-408.