

**Задачи к курсу «λ-исчисление», часть 3**  
осень 2021 г., лектор С. Л. Кузнецов

**13.** Пусть  $\mathbf{K} = \lambda x.\lambda y.x$  и  $\mathbf{S} = \lambda x.\lambda y.\lambda z.(xz(yz))$ . Выведите наиболее общий тип терма  $\mathbf{SS}(\mathbf{K}(\mathbf{SKK}))$  в системе  $\lambda \rightarrow$  и найдите его нормальную форму.

**14.** Пусть  $\top = \lambda t.\lambda f.t$  и  $\perp = \lambda t.\lambda f.f$  представляют истину и ложь соответственно. Постройте λ-термы **and**, **or** и **neg**, реализующие на  $\top$  и  $\perp$  булевы операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания (например,  $\text{or}\top\perp \rightarrow_{\beta}^* \top$ ).

**15.** Пусть  $\text{Nat} = (p \rightarrow p) \rightarrow p \rightarrow p$ , а натуральные числа задаются нумералами Чёрча:  $\underline{n} = \lambda s.\lambda o.s^n o$ . Представима ли функция

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ чётно} \\ n-1, & n \text{ нечётно} \end{cases}$$

термом типа  $\text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$ ?

**16\*.** Представима ли функция  $n \mapsto 2^n$  термом типа  $\text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$ ?

**17.** Является ли терм  $(\lambda x.xxx)\mathbf{S}$  типизируемым в системе  $\lambda \rightarrow_{\cap}$ ? Если да, то найдите какой-нибудь тип для этого терма.

**18. а)** Докажите, что если терм  $\lambda x.M$  типизуем в системе  $\lambda \rightarrow_{\cap}$  в некотором контексте  $\Gamma$ , то существуют такие типы  $\sigma$  и  $\tau$ , что  $\Gamma, x : \sigma \vdash_{\lambda \rightarrow_{\cap}} M : \tau$ . **б)** Докажите, что если терм  $MN$  типизуем в системе  $\lambda \rightarrow_{\cap}$  в некотором контексте  $\Gamma$ , то существуют такие типы  $\sigma$  и  $\tau$ , что  $\Gamma \vdash_{\lambda \rightarrow_{\cap}} M : (\sigma \rightarrow \tau)$  и  $\Gamma \vdash_{\lambda \rightarrow_{\cap}} N : \sigma$ .

**19.** Назовём систему типов разумной, если она обладает следующими свойствами: (1) если  $M$  типизуем и  $M \rightarrow_{\beta} M'$ , то  $M'$  тоже типизуем; (2) всякий подтерм типизируемого терма типизуем. Может ли существовать разумная система типов, в которой типизируемы в точности все слабо нормализуемые термы?

**20.** Будем считать тип  $\sigma_1$  системы  $\lambda \rightarrow_{\cap}$  более общим, чем тип  $\sigma_2$ , если второй может быть получен из первого последовательностью следующих операций: (1) подстановка типов вместо переменных; (2) сужение с помощью пересечения:  $\sigma \mapsto \sigma \cap \nu$  для произвольного  $\nu$ . Существует ли терм, не имеющий наиболее общего типа в смысле данного определения?

**21\*.** Верно ли свойство Чёрча – Россера для  $\beta\eta$ -редукций?

**22.** Пусть  $\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ . Докажите, что  $\Omega \neq_{\beta\eta} \Omega\Omega$ .

**23\*.** Для λ-терма  $M$  положим

$$\text{ord}(M) = \max\{n \mid \exists N \in \Lambda, \exists x_1, \dots, x_n \in \text{Var}, M \rightarrow_{\beta}^* \lambda x_1. \dots \lambda x_n. N\}$$

( $N$  — не обязательно нормальная форма). Если максимума нет, то  $\text{ord}(M)$  не определено. Вычислима ли частичная функция  $\text{ord}: \Lambda \rightarrow \mathbb{N}$ ?

**24\*.** Докажите, что если  $\vdash_{\lambda \rightarrow} M : \sigma$ , то существует такой терм  $M'$ , что  $M' \rightarrow_{\beta\eta}^* M$  и  $\sigma$  — наиболее общий тип терма  $M'$ .