

**Задачи к курсу**  
**«Структурная теория доказательств и алгебраическая логика»**  
**Часть 2**

МИАН / МФТИ, весна 2021 г., лектор С. Л. Кузнецов

1. Существует ли конечная гейтингова алгебра, не являющаяся булевой?
2. Приведите пример недистрибутивной решётки с делениями.
3. Существует ли конечная универсальная алгебра в классе гейтинговых алгебр, т.е. такая алгебра, что в ней общезначимы в точности все теоремы Int?
4. Докажите, что в решётках с делениями выполняются свойства монотонности делений: если  $a \preceq b$ , то  $a/c \preceq b/c$ ,  $c/b \preceq c/a$ ,  $c \setminus a \preceq c \setminus b$  и  $b \setminus c \preceq a \setminus c$ .
5. Рассмотрим исчисление Ламбека с единицей — фрагмент MALC в языке  $\cdot, \setminus, /$ , **1**. Выполняется ли для него следующее свойство равномерной интерполяции (существования предынтерполянта): для любой формулы  $B$  и множества переменных  $\mathcal{V}$  существует формула  $E$ , такая что выводима секвенция  $E \Rightarrow B$  и для любой формулы  $A$ , использующей только переменные из  $\mathcal{V}$ , выводимость  $A \Rightarrow B$  влечёт выводимость  $A \Rightarrow E$ ?
6. Решётка называется *полной*, если у любого (не обязательно конечного) множества её элементов найдётся точная верхняя грань и точная нижняя грань. Докажите, что на любой полной решётке можно ввести структуру гейтинговой алгебры.
7. Существуют ли а) решётки с делениями; б) гейтинговы алгебры, не являющиеся полными решётками?