НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ. ПРИЛОЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ

А.Г.Сергеев

3 апреля 2020

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одной из задач некоммутативной геометрии является перевод основных понятий анализа на язык банаховых алгебр. В нашем курсе мы приведем целый ряд примеров подобного перевода и применим полученные результаты к задаче квантования универсального пространства Тейхмюллера и математической интерпретации квантового эффекта Холла.

Остановимся более подробно на содержании курса. В первом разделе мы напоминаем основные сведения о банаховых алгебрах. Главное внимание уделяется здесь коммутативным банаховым алгебрам, поскольку именно работы И.М.Гельфанда, М.А.Наймарка и Г.Е.Шилова по связям этих алгебр с компактными топологическими пространствами легли в основу некоммутативной геометрии.

Второй раздел посвящен некоммутативному интегралу на C^*-алгебрах, роль которого играет след Диксмье. Он определен на идеале $\mathcal{L}^{1,\infty}$ в алгебре $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ компактных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. В отличие от обычного следа след Диксмье зануляется на идеале $\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^{1,\infty}$ ядерных операторов, но принимает конечные значения на всем идеале $\mathcal{L}^{1,\infty}$. Со следом Диксмье связано первое применение некоммутативной геометрии, рассматриваемое в нашем курсе. А именно, теорема Конна устанавливает связь этого следа с вычетом Водзицки классических псевдодифференциальных операторов.

В третьем разделе излагается некоммутативное дифференциальное исчисление на алгебрах. Для каждой алгебры с единицей строится универсальная дифференциальная алгебра (кратко: DG-алгебра) над ней, являющаяся универсальным объектом в категории DG-алгебр. Наиболее важным примером DG-алгебр служат для нас циклы, т.е. DG-алгебры с интегралом. В терминах универсальной DG-алгебры вводятся понятия связности и кривизны, а также характер Черна. Для его определения естественно использовать язык когомологий Хохшильда, который представлен в заключительной части лекции.

Четвертый раздел посвящен квантовым дифференциалам и квантовому соответствию. Это соответствие между пространствами функций вещественных переменных и банаховыми алгебрами устанавливается с помощью процедулы квантования. Возникающее при этом операторное исчисление называется квантовым. Приводится целый ряд утверждений из указанного исчисления, в том числе касающихся интерпретации идеалов Шэттена в духе некоммутативной геометрии. Основное внимание уделяется операторам Гильберта–Шмидта.

Пятый раздел посвящен универсальному пространству Тейхмюллера $\mathcal{T}$ и его квантованию. Это пространство, возникшее в работах Альфорса и Берса по квазиконформным отображениям, определяется как фактор пространства квазисимметричных гомеоморфизмов единичной окружности S^1 по подгруппе Мебиуса $\text{Möb}(S^1)$ дробно-линейных автоморфизмов единичного круга Δ. Квазисимметричные гомеоморфизмы S^1 – это граничные значения квазиконформных гомеоморфизмов круга Δ. Название универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ объясняется тем, что оно содержит в себе в качестве комплексных подмногообразий все классические пространства Тейхмюллера. Помимо этого, $\mathcal{T}$ содержит пространство $\mathcal{S}$ нормализованных диффеоморфизмов окружности S^1, т.е. диффеоморфизмов S^1, рассматриваемых по модулю группы Мебиуса $\text{Möb}(S^1)$. Это пространство можно рассматривать как регулярную часть $\mathcal{T}$ (в смысле, который уточняется ниже). Пространство $\mathcal{T}$ допускает грассманову реализацию в виде бесконечномерного диска Зигеля.

Переходя к задаче квантования пространства $\mathcal{T}$, рассматриваемой в пятом разделе, мы излагаем вначале решение этой задачи для пространства $\mathcal{S}$ нормализованных диффеоморфизмов окружности S^1. Его удается получить с помощью классических методов дираковского квантования. Однако указанные методы не работают применительно ко всему пространству $\mathcal{T}$. В этом случае приходится применять другой подход, основанный на идеях некоммутативной геометрии.

В шестом разделе мы занимаемся применениями некоммутативной геометрии к математическому обоснованию квантового эффекта Хола. Вначале излагаются основы классической теории Блоха и ее некоммутативного варианта в присутствии магнитного поля. Для того, чтобы воспользоваться аппаратом некоммутативной геометрии строится C^*-алгебра наблюдаемых, связанная с магнитным оператором Шредингера. Коцикл Холла, отвечающий за квантовый эффект Холла, является циклическим коциклом на этой алгебре наблюдаемых.

Глава 1

БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ

1.1 C^*-алгебры

Определение 1. *Банаховой алгеброй* называется ассоциативная алгебра A над полем $\mathbb{C}$, являющаяся одновременно полным нормированным пространством, в котором выполняются соотношения

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

для всех $a, b \in A$. Если алгебра A *унитальна*, т.е. содержит единицу 1_A, то предполагается, что $\|1_A\| = 1$.

Определение 2. *Инволюцией* в алгебре A называется изометрическое антилинейное отображение $a \mapsto a^*$, обладающее свойствами:

$$(a^*)* = a, \quad (ab)^* = b^* a^*$$

для любых $a, b \in A$. Банахова алгебра с инволюцией называется иначе *банаховой *-алгеброй. C^*-алгебра* — это банахова *-алгебра A, обладающая дополнительным свойством

$$\|a^2\| = \|a^* a\|$$

для всех $a \in A$.

Стандартным примером такой алгебры является алгебра непрерывных функций на компакте. Более подробно, пусть X – хаусдорфово компактное топологическое пространство. Обозначим через $C(X)$ алгебру непрерывных функций $f : X \to \mathbb{C}$, наделенную нормой

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Единицей в алгебре $C(X)$ служит функция $f \equiv 1$, а роль инволюции играет отображение: $f \mapsto f^*$, где $f^*(x) := \overline{f(x)}$. Алгебра $C(X)$ является коммутативной унитальной C^*-алгеброй.

Заметим, что всякую неунитальную банахову алгебру A можно сделать унитальной, формально добавляя к ней единицу 1_A. Более подробно, расширим алгебру A до алгебры $A^+ := A \times \mathbb{C}$. Произведение в A^+ вводится по правилу:

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu),$$

при этом 1_A отождествляется с элементом $(0, 1)$. Норма элемента (a, λ) определяется как

$$\|(a, \lambda)\| := \sup_{\|b\| \le 1} \{\|ab + \lambda b\|\}.$$

Построенная алгебра A^+ является унитальной C^*-алгеброй, если A есть C^*-алгебра.

Рассмотрим в качестве примера алгебру $C_0(Y)$ непрерывных функций на локально компактном топологическом пространстве Y, стремящихся к нулю на "бесконечности". Эта алгебра состоит из функций f, непрерывных на Y, для которых множество $\{y \in Y : \ |f(y)| \ge \varepsilon\}$ компактно для любого $\varepsilon > 0$. Алгебра $C_0(Y)$ не унитальна, а ее унитализация $C_0(Y)^+$ совпадает с алгеброй $C(Y^+)$ функций, непрерывных на одноточечной компактификации $Y^+ := Y \cup \{\infty\}$ пространства Y. Обратно, если удалить из компактного топологического пространства X неизолированную точку $x_0 \in X$, то полученное пространство $Y := X \setminus x_0\}$ будет локально компактно, причем $Y^+ = X$, а $C_0(Y) = \{f \in C(X) : f(x_0) = 0\}$.

Таким образом, процедура унитализации банаховых алгебр отвечает на языке топологических пространств одноточечной компактификации.

1.2 Характеры и спектр

Определение 3. *Характером* банаховой алгебры A называется гомоморфизм алгебр $\mu : A \to \mathbb{C}$. Иначе говоря, это ненулевой линейный функционал $\mu : A \to \mathbb{C}$ на алгебре A, обладающий свойством мультипликативности, т.е. $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$ для всех $a, b \in A$. Если алгебра A унитальна, то $\mu(1_A) = 1$. Множество характеров алгебры A обозначается через $M(A)$ и называется иначе *спектром алгебры* A.

Примером характера алгебры $A = C(X)$ непрерывных функций на компактном топологическом пространстве может служить отображение *эвалюации*

= "значение в точке" $x \in X$:

$$\varepsilon_x : f \longmapsto f(x), \quad f \in A.$$

В случае, если A – неунитальная алгебра, любой характер $\mu \in M(A)$ можно продолжить на ее унитализацию A^+, полагая: $\mu(0,1) = 1$. При этом нулевой функционал на A продолжится до ненулевого характера на A^+, задаваемого формулой: $\mu_0(a, \lambda) = \lambda$. Тем самым, пространство $M(A^+)$ можно отождествить с $M(A) \cup \{\mu_0\}$.

Определение 4. *Спектром* $\mathrm{sp}(a)$ *элемента* a унитальной банаховой алгебры A называется множество комплексных чисел λ таких, что элемент $a - \lambda 1_A$ не обратим в A. Если алгебра A не унитальна, то спектр a состоит из комплексных чисел λ таких, что элемент $a - \lambda 1_{A^+}$ не обратим в A^+.

Также, как для спектра ограниченного линейного оператора в гильбертовом пространстве, доказываются следующие два свойств спектра:

1) спектр $\mathrm{sp}(a)$ произвольного элемента $a \in A$ замкнут; кроме того, он ограничен, а именно, содержится в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} \ |\lambda| \le \|a\|\}$, а потому компактен;

2) спектр $\mathrm{sp}(a)$ произвольного элемента $a \in A$ непуст.

Заметим, что значение $\mu(a)$ любого характера μ унитальной алгебры A на произвольном элементе $a \in A$ принадлежит $\mathrm{sp}(a)$. Действительно, в противном случае элемент $a - \mu(a)1_A$ был бы обратим в A вместе с элементом $\mu(a - \mu(a)1_A) = 0$.

Так как $\mathrm{sp}(a)$ лежит в круге $\{\lambda : \ |\lambda| \le \|a\|\}$, то отсюда следует, что $|\mu(a)| \le \|a\|$, т.е. $\|\mu\| \le 1$, где

$$\|\mu\| = \sup_{a \in A \setminus \{0\}} \frac{|\mu(a)\|}{\|a\|} \,. \tag{1.1}$$

На самом деле, $\|\mu\| = 1$, поскольку $\mu(1_A) = 1$.

Определение 5. Элемент $a \in A$ банаховой *-алгебры A называется *самосопряженным*, если $a^* = a$.

Произвольный элемент a банаховой алгебры A можно записать в виде суммы $a = \alpha + i\beta$ самосопряженных элементов алгебры A, равных

$$\alpha = \frac{a + a^*}{2} \,, \ \beta = \frac{a - a^*}{2i} \,. \tag{1.2}$$

В этих терминах $a^* = \alpha - i\beta$.

Приведем еще одно важное свойство характеров C^*-алгебры A, доказательство которого оставляем читателю.

3) если a – самосопряженный элемент C^*-алгебры A, то значение $\mu(a)$ любого характера $\mu \in M(A)$ на этом элементе вещественно.

Определение 6. *Спектральным радиусом* элемента $a \in A$ называется число

$$r(a) = \max\{|\lambda| : \ \lambda \in \mathrm{sp}(a)\}.$$

В частности, $r(a) \leq \|a\|$.

Спектральный радиус можно вычислить по *формуле Коши–Адамара*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Из нее следует, что спектральный радиус самосопряженного элемента a C^*-алгебры A совпадает с его нормой: $r(a) = \|a\|$ (почему?).

1.3 Спектр коммутативной банаховой алгебры. Преобразование Гельфанда

Обозначим через A^* банахово пространство непрерывных линейных функционалов $\varphi : A \to \mathbb{C}$ на алгебре A с нормой (1.1). Рассмотрим на A^* $*$-слабую топологию, т.е. топологию поточечной сходимости на элементах из A. В случае, когда $A = C(X)$ есть алгебра непрерывных функций на компакте X, пространство A^* состоит из комплексных мер на X с обычной топологией. По теореме Банаха–Алаоглу единичный шар A^*_1 в пространстве A^* компактен в $*$-слабой топологии. Поскольку спектр $M(A)$ унитальной алгебры A содержится в A^*_1, мы можем наделить его индуцированной топологией. В этой топологии спектр коммутативной банаховой алгебры является локально компактным топологическим пространством.

Определение 7. Пусть A – коммутативная банахова алгебра. Ее *преобразованием Гельфанда* называется отображение

$$\mathcal{G} : A \longrightarrow C_0(M(A)),$$

задаваемое формулой

$$A \ni a \longmapsto \hat{a} : M(A) \to \mathbb{C}, \quad \text{где } \hat{a}(\mu) := \mu(a).$$

Заметим, что преобразование Гельфанда $A \to C_0(M(A))$ непрерывно. Посмотрим, как оно действует на инволюцию в алгебре A. Если A есть C^*-алгебра и $\mu \in M(A)$, то в соответствии с разложением (1.2)

$$\mu(a^*) = \mu(\alpha - i\beta) = \mu(\alpha) - i\mu(\beta) = \overline{\mu(a)}.$$

Последнее равенство справедливо, поскольку значения характера μ на самосопряженных элементах вещественны.

Следовательно, $\widehat{a^*}(\mu) = \overline{\hat{a}(\mu)}$, т.е.

$$\mathcal{G}(a^*) = \overline{\mathcal{G}(a)}.$$

Иными словами, преобразование Гельфанда коммутирует с инволюциями в A и $C_0(M(A))$, т.е. является *-*гомоморфизмом*.

Приведем еще одно важное свойство характеров коммутативных C^*-алгебр, которое можно рассматривать как аналог теоремы Хана-Банаха.

4) если $\lambda \in \mathrm{sp}(a)$ для элемента a унитальной коммутативной C^*-алгебры A, то найдется характер $\mu \in M(A)$ такой, что $\mu(a) = \lambda$.

1.4 Теорема Гельфанда–Наймарка

Напомним вначале формулировку теоремы Стоуна–Вейерштрасса, используемой в доказательстве теоремы Гельфанда–Наймарка.

Пусть B – подалгебра в алгебре $C_0(Y)$ функций, непрерывных на локально компактном топологическом пространстве Y. Будем говорить, что алгебра B не обращается в нуль в точке $y \in Y$, если найдется функция из B, не равная нулю в этой точке.

Теорема 1 (Стоун–Вейерштрасс)**.** *Пусть Y – локально компактное топологическое пространство, B – замкнутая подалгебра в $C_0(Y)$, которая разделяет точки Y. Предположим, что алгебра B не обращается в нуль ни в одной точке Y и замкнута относительно комплексного сопряжения. Тогда $B = C_0(Y)$.*

Теперь сформулируем теорему Гельфанда–Наймарка.

Теорема 2 (Гельфанд–Наймарк)**.** *Пусть A – коммутативная C^*-алгебра. Тогда преобразование Гельфанда задает изометрический *-изоморфизм $\mathcal{G} : A \to C_0(M(A))$.*

Доказательство. Как мы уже показали, преобразование Гельфанда задает *-гомоморфизм. Его изометричность вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\|\widehat{a}\|^2 = \|\hat{a}^*\hat{a}\| = \|\widehat{a^*a}\| = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2,$$

где равенство $\|\widehat{a^*a}\| = r(a^*a)$ вытекает из свойства 4) характеров коммутативных C^*-алгебр (почему?).

В частности, преобразование Гельфанда инъективно. Поэтому образ $\mathcal{G}(A)$ алгебры A в $C_0(M(A))$ является подалгеброй, которая полна (поскольку полна алгебра A, а $\mathcal{G}$ изометрично) и, следовательно, замкнута. Отображение эвалюации разделяет мультипликативные функционалы на A и алгебра $\mathcal{G}(A)$ не обращается в нуль ни в одной точке $M(A)$. Кроме того, алгебра $\mathcal{G}(A)$ замкнута относительно комплексного сопряжения. Следовательно, по теореме Стоуна–Вейерштрасса подалгебра $\mathcal{G}(A)$ совпадает с $C_0(M(A))$. □

1.5 Соответствие: компактные пространства↔ унитальные коммутативные банаховы алгебры

Непрерывное отображение $f : X \to Y$ компактных топологических пространств порождает гомоморфизм их алгебр непрерывных функций $Cf : C(Y) \to C(X)$ по формуле $\varphi \mapsto \varphi \circ f$. Это унитальный (т.е. сохраняющий единицу) *-гомоморфизм, обладающий следующим функториальным свойством: если задано другое непрерывное отображение $g : Y \to Z$ компактных топологических пространств, то $C(g \circ f) = Cf \circ Cg$.

Следовательно, соответствие

$$F : X \longmapsto C(X), \quad f \longmapsto Cf$$

задает контравариантный функтор из категории компактных топологических пространств (с непрерывными отображениями в качестве морфизмов) в категорию унитальных коммутативных C^*-алгебр (с унитальными *-гомоморфизмами в качестве морфизмов).

Обратный к нему функтор Φ строится следующим образом. Напомним, что *-слабая топология на $M(A)$ является слабейшей из тех, для которых непрерывны все отображения эвалюации $\hat{a} : M(A) \to \mathbb{C}$, $a \in A$. В частности, отображение $f : X \to M(A)$ непрерывно тогда и только тогда, когда все отображения $\hat{a} \circ f : X \to \mathbb{C}$ непрерывны.

Пусть $\varphi : A \to B$ – унитальный *-гомоморфизм унитальных коммутативных C^*-алгебр. Обозначим через $M\varphi : M(B) \to M(A)$ отображение, задаваемое формулой $\mu \mapsto \mu \circ \varphi$. Оно непрерывно, поскольку все функции вида $\hat{a} \circ M\varphi = \widehat{\varphi(a)}$ непрерывны для $a \in A$, и обладает функториальным свойством: если $\psi : B \to C$ – другой унитальный *-гомоморфизм унитальных коммутативных C^*-алгебр, то $M(\psi \circ \varphi) = M\varphi \circ M\psi$.

Построенные функторы задают эквивалентность указанных выше категорий. При этом справедливы следующие два утверждения:

- две унитальные коммутативные C^*-алгебры изоморфны тогда и только тогда, когда их спектры гомеоморфны;
- группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, A$ унитальной коммутативной C^*-алгебры A изоморфна группе гомеоморфизмов $\mathrm{Homeo}(M(A))$ ее спектра.

Построенная эквивалентность категорий устанавливает словарь соответствия между топологией и алгеброй:

<u>топология</u>	$\longleftrightarrow$	<u>алгебра</u>
гомеоморфизм	$\longleftrightarrow$	изоморфизм
компактность	$\longleftrightarrow$	унитальность
компактификация	$\longleftrightarrow$	добавление единицы
открытое подмножество	$\longleftrightarrow$	идеал
замкнутое подмножество	$\longleftrightarrow$	фактор-алгебра
метризуемость	$\longleftrightarrow$	сепарабельность
связность	$\longleftrightarrow$	отсутствие нетривиальных идемпотентов

Глава 2

НЕКОММУТАТИВНЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1 Идеалы в алгебре компактных операторов

Для построения некоммутативной версии анализа на C^*-алгебрах, необходимо, прежде всего ввести, как и в классическом анализе, понятие "бесконечно малых" элементов. Их роль в алгебре ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве будут играть компактные операторы. Порядок их "малости" определяется скоростью убывания сингулярных чисел этих операторов. Напомним их определение.

Пусть T есть компактный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $|T| = \sqrt{T^*T}$ – положительный квадратный корень из T^*T (мы отождествляем понятия "положительный"и "неотрицательный"операторы). Обозначим через $\{\mu_n(T)\}$ последовательность *сингулярных чисел* (s-чисел) оператора T, задаваемых собственными значениями оператора $|T|$, упорядоченными по убыванию:

$$\mu_0(T) \geq \mu_1(T) \geq \dots,$$

так что $\mu_n(T) \to 0$ при $n \to \infty$.

Сингулярные числа оператора T можно найти, пользуясь следующим эквивалентным определением:

$$\mu_n(T) = \inf_E \{\||T|E^\perp\| : \dim E = n\}, \tag{2.1}$$

где нижняя грань берется по всем n-мерным подпространствам $E \subset \mathcal{H}$, а через $E^\perp$ обозначается ортогональное дополнение к пространству E. На самом деле, эта нижняя грань достигается на подпространстве E_n, порожденном первыми n

собственными векторами оператора $|T|$, отвечающими собственным значениям $\mu_0, \dots, \mu_{n-1}$.

По-другому, $\mu_n(T)$ можно определить как расстояние от оператора T до подпространства Fin_n операторов ранга$\leq n$, т.е.

$$\mu_n(T) = \inf_R \{\|T - R\| : \ R \in \mathrm{Fin}_n\}. \tag{2.2}$$

Свойства s-чисел:

1. $|\mu_n(T_1) - \mu_n(T_2)| \leq \|T_1 - T_2\|$, откуда следует, что функционал $\mu_n(T)$ непрерывен по T в равномерной топологии при любом n.
2. $\mu_{n+m}(T_1 + T_2) \leq \mu_n(T_1) + \mu_m(T_2)$, поскольку $\mathrm{Fin}_n + \mathrm{Fin}_m \subset \mathrm{Fin}_{n+m}$.
3. $\mu_{n+m}(T_1 T_2) \leq \mu_n(T_1)\mu_m(T_2)$, откуда следует, что
$$\mu_n(T_1 T_2) \leq \mu_n(T_1)\|T_2\|, \quad \mu_n(T_1 T_2) \leq \|T_1\|\mu_n(T_2),$$
так как $\mu_0(T) = \|T\|$.

Определение 8. Пусть T есть компактный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Будем говорить, что T принадлежит пространству $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$, $1 \leq p < \infty$, если
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T)^p < \infty.$$

Пространство $\mathcal{L}^p$ является идеалом в алгебре $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ компактных операторов и в алгебре $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Наиболее известными примерами указанных идеалов являются класс $\mathcal{L}^1$ *ядерных операторов*, наделенный нормой

$$\|T\|_1 := \mathrm{Tr}|T| = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T),$$

и класс $\mathcal{L}^2$ *операторов Гильберта–Шмидта*, наделенный нормой

$$\|T\|_2^2 := \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T)^2,$$

относительно которой $\mathcal{L}^2$ является гильбертовым пространством.

Введем величину, которая играет важную роль в последующем:

$$\sigma_N(T) := \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T). \tag{2.3}$$

По-другому, ее можно определить как

$$\sigma_N(T) = \sup_E \{\|TP_E\|_1 : \ \dim E = N\}, \tag{2.4}$$

где P_E – ортогональный проектор на N-мерное подпространство E, а верхняя грань достигается снова на подпространстве E_N, порожденном первыми N собственными векторами оператора $|T|$.

Из последнего определения вытекает, что σ_N удовлетворяет неравенству треугольника

$$\sigma_N(T_1 + T_2) \leq \sigma_N(T_1) + \sigma_N(T_2)$$

и, следовательно, задает *полунорму* на $\mathcal{K}$.

Приведем еще одно, необходимое для дальнейшего, определение этой величины:

$$\sigma_N(T) = \inf\{\|R\|_1 + N\|S\| : \ R, S \in \mathcal{K}, R + S = T\}. \tag{2.5}$$

Оно позволяет распространить определение σ_N как функции натурального параметра N на произвольные неотрицательные значения $\lambda \in [0, \infty)$, полагая

$$\sigma_\lambda(T) = \inf\{\|R\|_1 + \lambda\|S\| : \ R, S \in \mathcal{K}, R + S = T\}. \tag{2.6}$$

Можно показать, что функция $\sigma_\lambda(T)$ обладает следующими свойствами:

1. $\sigma_\lambda(T)$ кусочно линейна и выпукла; более того, если $\lambda = N + t$ с $0 \leq t < 1$, так что $N = [\lambda]$, то
$$\sigma_\lambda(T) = (1-t)\sigma_N(T) + t\sigma_{N+1}(T);$$
2. $\sigma_\lambda(S + T) \leq \sigma_\lambda(S) + \sigma_\lambda(T)$;
3. $\sigma_{\lambda+\mu}(S + T) \geq \sigma_\lambda(S) + \sigma_\mu(T)$ для положительных операторов $S.T \in \mathcal{K}$.

Из двух последних свойств вытекает неравенство, выполняющееся для произвольных компактных положительных операторов S, T:

$$\sigma_\lambda(S + T) \leq \sigma_\lambda(S) + \sigma_\lambda(T) \leq \sigma_{2\lambda}(S + T). \tag{2.7}$$

Это свойство субаддитивности функции $\sigma_\lambda(T)$ на конусе положительных компактных операторов сыграет важную роль при определении следа Диксмье.

Помимо идеалов $\mathcal{L}^p$ введем еще интерполяционные идеалы $\mathcal{L}^{p,q}$.

Определение 9. Определим $\mathcal{L}^{p,q} = \mathcal{L}^{p,q}(\mathcal{H})$ при $1 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$, как интерполирующее пространство между $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}^1$. А именно, будем говорить, что оператор $T \in \mathcal{L}^{p,q}$, если

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{(\alpha-1)q-1}\sigma_N(T)^q < \infty\,,$$

где $\alpha = 1/p$. Дополним это определение при $q = \infty$, полагая, что $T \in \mathcal{L}^{p,\infty}$, если последовательность чисел $\{N^{\alpha-1}\sigma_N(T)\}_{N=1}^{\infty}$ ограничена.

Каждое из введенных пространств $\mathcal{L}^{p,q}$ является двусторонним идеалом в алгебре $\mathcal{K}$ компактных операторов. При $p_1 < p_2$ и при $p_1 = p_2$, $q_1 < q_2$ имеются включения

$$\mathcal{L}^{p_1,q_1} \subset \mathcal{L}^{p_2,q_2}.$$

Рассмотрим подробнее некоторые конкретные примеры пространств $\mathcal{L}^{p,q}$.

Пространство $\mathcal{L}^{p,p}$, $1 \le p < \infty$, совпадает с идеалом Шаттена $\mathcal{L}^p$. Пространство $\mathcal{L}^{p,\infty}$, $1 < p < \infty$, состоит из компактных операторов T, для которых $\sigma_N(T) = O(N^{1-\alpha})$, т.е. $\mu_n(T) = O(n^{-\alpha})$. На этом пространстве имеется естественная норма

$$\|T\|_{p,\infty} = \sup_N \frac{1}{N^{1-\alpha}}\sigma_N(T).$$

Пространство $\mathcal{L}^{p,1}$ состоит из компактных операторов T, для которых сходится ряд

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{\alpha-2}\sigma_N(T),$$

что эквивалентно сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1}\mu_{n-1}(T)$.

Между этими пространствами имеются следующие вложения:

$$\mathcal{L}^{p-} \equiv \mathcal{L}^{p,1} \subset \mathcal{L}^p \equiv \mathcal{L}^{p,p} \subset \mathcal{L}^{p,\infty} \equiv \mathcal{L}^{p+}.$$

Дополним их определение пространств $\mathcal{L}^{p,q}$ для при $p = 1$, $q = \infty$, полагая

$$\mathcal{L}^{1,\infty} = \{T \in \mathcal{K} :\ \sigma_N(T) = O(\log N)\}$$

и наделим его нормой

$$\|T\|_{1,\infty} = \sup_{N \ge 2} \frac{\sigma_N(T)}{\log N}. \tag{2.8}$$

Если эта норма конечна, то $\mu_n(T) = O(1/n)$. Пространство $\mathcal{L}^{1,\infty}$ является идеалом, двойственным к идеалу

$$\mathcal{L}^{\infty,1} = \{T \in \mathcal{K} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(T)}{n} < \infty\}.$$

Как было указано выше, для ядерных операторов $T \in \mathcal{L}^1$ определен след, задаваемый суммой s-чисел этого оператора и именно след играет роль некоммутативного интеграла в алгебре компактных операторов. Однако с точки зрения приложений класс ядерных операторов слишком узок, поэтому в следующем пункте мы введем след Диксмье, который определен для более широкого класса операторов $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$.

2.2 След Диксмье

Пусть T есть положительный оператор, принадлежащий идеалу $\mathcal{L}^{1,\infty}$. Нам хотелось бы определить его след по формуле

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T) = \lim_{N\to\infty} \frac{\sigma_N(T)}{\log N}. \tag{2.9}$$

При этом возникают два вопроса:

1) Существует ли предел в формуле (2.9) для всех операторов $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$?

2) Является ли функционал, задаваемый формулой (2.9), линейным?

Заметим, что решение вопроса о линейности указанного функционала тесно связано с ответом на вопрос о существовании предела в формуле (2.9). Действительно, для установления линейности нам необходимо сравнить величину

$$\gamma_N = \frac{\sigma_N(T_1 + T_2)}{\log N}$$

с суммой величин

$$\alpha_N = \frac{\sigma_N(T_1)}{\log N} \quad \text{и} \quad \beta_N = \frac{\sigma_N(T_2)}{\log N}.$$

Из неравенства треугольника для $\sigma_N(T)$ вытекает, что $\gamma_N \le \alpha_N + \beta_N$, а из отмеченного в п.2.1 неравенства $\sigma_N(T_1) + \sigma_N(T_2) \le \sigma_{2N}(T_1 + T_2)$ вытекает, что

$$\alpha_N + \beta_N \le \frac{\log(2N)}{\log N}\,\gamma_{2N}.$$

Так как $\log(2N)/\log N \to 1$ при $N \to \infty$, мы видим, что существование предела в формуле (2.9) обеспечивает нам линейность функционала, задаваемого этой формулой.

Переходя к вопросу о существовании указанного предела, заметим, что для любого $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ последовательность чисел

$$\left\{ \frac{\sigma_N(T)}{\log N} \right\}$$

ограничена.

Это позволяет нам рассмотреть вопрос о существовании предела в формуле (2.9) в следующей, более общей постановке. А именно, будем искать на пространстве $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ограниченных последовательностей $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ линейную форму, обозначаемую через

$$\mathrm{Lim}_\omega,$$

которая обладает следующими свойствами:

1. $\mathrm{Lim}_\omega a \geq 0$, если все $a_n \geq 0$;
2. $\mathrm{Lim}_\omega a = \lim_{n\to\infty} a_n$, если предел справа существует;
3. $\mathrm{Lim}_\omega(a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \ldots) = \mathrm{Lim}_\omega\{a_n\}$.

Единственным нетривиальным условием является последнее, которое трактуется как *асимптотическая масштабная инвариантность*. Для того, чтобы пояснить происхождение данного термина, перейдем от последовательностей $\{a_n\}$ к функциям вещественного параметра, как мы уже делали это в случае функции σ_N. А именно, построим по последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ ограниченную функцию $f_a(\lambda)$ на положительной вещественной полуоси, задаваемую следующим образом: если $\lambda = N + t$ с $0 \leq t < 1$, т.е. $[\lambda] = N$, то положим $f_a(\lambda) = (1-t)a_N + ta_{N+1}$. Тем самым, введенная функция $f_a(\lambda)$ является кусочно линейной.

Заменим теперь функцию $f(\lambda) \equiv f_a(\lambda)$ ее *чезаровским средним*

$$(Mf)(\lambda) = \frac{1}{\log\lambda}\int_3^\lambda \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Это среднее на ограниченных функциях f обладает следующим свойством асимптотической масштабной инвариантности:

$$|M(S_\mu f)(\lambda) - Mf(\lambda| \longrightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \to +\infty,$$

где $(S_\mu f)(\lambda) := f(\mu\lambda)$ для любого $\mu > 0$. Возвращаясь к свойству (3) масштабной инвариантности, заметим, что последовательности $\tilde{a} = (a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \dots)$ отвечает функция $f_{\tilde{a}} = S_{1/2}(f_a)$.

Сформулируем теперь более точно, какого рода предел мы хотели бы получить на пространстве $C_b(\mathbb{R}_+)$ ограниченных непрерывных функций на полуоси $\mathbb{R}_+ := [1, \infty)$. Поскольку нас интересуют только пределы указанных функций на бесконечности, перейдем от пространства $C_b(\mathbb{R}_+)$ к фактору

$$B_+ := C_b(\mathbb{R}_+)/C_0(\mathbb{R}_+)$$

по подпространству $C_0(\mathbb{R}_+)$ непрерывных функций функций, обращающихся в нуль на бесконечности.

Фиксируем положительную линейную форму ω на пространстве $C_b(\mathbb{R}_+)$ такую, что $\omega = 0$ на подпространстве $C_0(\mathbb{R}_+)$ и $\omega(1) = 1$. Такая форма спускается на B_+ и называется *состоянием* на C^*-алгебре B_+. Мы можем рассматривать $\omega(f)$ как "обобщенный предел" функции $f \in C_b(\mathbb{R}_+)$ на бесконечности. По форме ω мы можем определить предел $\mathrm{Lim}_\omega(a)$ последовательности $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ как

$$\mathrm{Lim}_\omega(a) := \omega(Mf_a).$$

Можно рассматривать $\mathrm{Lim}_\omega(a)$ как предел последовательности a по Чезаро.

Определение 10. Для любого состояния ω на C^*-алгебре $B_+ = C_b(\mathbb{R}_+)/C_0(\mathbb{R}_+)$ определим *след Диксмье* положительного оператора $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ по формуле

$$\mathrm{Tr}_\omega(T) = \mathrm{Lim}_\omega \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log \lambda}. \tag{2.10}$$

Свойства следа Диксмье:

1. *Аддитивность:* $\mathrm{Tr}_\omega(T_1 + T_2) = \mathrm{Tr}_\omega(T_1) + \mathrm{Tr}_\omega(T_2)$.

2. *Положительность:* след Диксмье можно продолжить на весь идеал $\mathcal{L}^{1,\infty}$ так, чтобы свойство $\mathrm{Tr}_\omega(T) \geq 0$ выполнялось на положительных операторах $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$.

3. *Унитарная инвариантность:* $\mathrm{Tr}_\omega(UTU^*) = \mathrm{Tr}_\omega(T)$ для любого унитарного оператора U.

4. *Коммутативность:* для любого ограниченного оператора $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и любого $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ справедливо равенство: $\mathrm{Tr}_\omega(ST) = \mathrm{Tr}_\omega(TS)$.

5. След $\mathrm{Tr}_\omega(T)$ равен нулю на подпространстве $\mathcal{L}_0^{1,\infty}$, совпадающем с замыканием по норме $\|\cdot\|_{1,\infty}$ пространства Fin операторов конечного ранга. В частности, этот след зануляется на всех ядерных операторах из пространства $\mathcal{L}^1$.

Пояснения требует только второе свойство. Для того, чтобы продолжить след Диксмье на весь идеал $\mathcal{L}^{1,\infty}$, нужно представить произвольный оператор $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ в виде разности двух положительных операторов из этого класса и, тем самым, продолжить след Диксмье на весь идеал $\mathcal{L}^{1,\infty}$ с сохранением свойства положительности.

В общем случае, след Tr_ω зависит от выбора состояния ω.

Определение 11. Будем называть оператор $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ *измеримым*, если существует предел

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log\lambda} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n(T)}{\log n}.$$

В этом случае след Диксмье $\mathrm{Tr}_\omega(T)$ не зависит от ω, поэтому будем обозначать его через

$$\mathrm{Tr}^+ T = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log\lambda}.$$

Приведем в качестве примера формулу для следа оператора Лапласа-Бельтрами на сфере S^n, наделенной стандартной метрикой. Собственные числа этого оператора равны $l(l+n-1)$, где l – натуральное число, и имеют кратность $m_l = \binom{l+n}{n} - \binom{l+n-2}{n}$. Оператор $\Delta^{-n/2}$ измерим, а его след Диксмье равен

$$\mathrm{Tr}^+ \Delta^{-n/2} = \frac{2}{n!}\,.$$

2.3 Псевдодифференциальные операторы

Псевдодифференциальные операторы являются обобщением обычных дифференциальных операторов. Напомним, что *дифференциальный оператор* порядка d в области $U \subset \mathbb{R}^n$ задается дифференциальным выражением вида

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\le d} a_\alpha(x) D^\alpha$$

с коэффициентами $a_\alpha(x)$, являющимися гладкими функциями в области U. Здесь $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ – мультииндекс $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с неотрицательными целыми компонентами, а $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = -i\partial/\partial x_j$. Пользуясь преобразованием Фурье, этот оператор можно переписать в виде

$$P(x,D)f = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi) f(y)\, dy\, d\xi, \tag{2.11}$$

где

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le d} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

есть *символ* оператора $P(x,D)$.

Для того, чтобы перенести последнее определение на псевдодифференциальные операторы, расширим предварительно класс допустимых символов. А именно, введем класс *символов* $S^d(U)$ порядка d, который состоит из функций $p(x,\xi) \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих на любом компакте $K \subset U$ следующей оценке: для любых мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\left| D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x,\xi) \right| \le C \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{d-|\alpha|}{2}}$$

для всех $x \in K$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ с константой C, зависящей от α, β и K.

Определение 12. *Псевдодифференциальным оператором* порядка d в области $U \subset \mathbb{R}^n$ называется оператор P, задаваемый формулой (2.11) с символом $p \in S^d(U)$. Пространство всех таких операторов обозначается через $\Psi^d(U)$.

Непосредственно из определения следует, что оператор P корректно определен как линейный оператор, действующий непрерывно из пространства $\mathcal{D}(U)$ C^∞-гладких функций с компактными носителями в U в пространство $\mathcal{E}(U) \equiv C^\infty(U)$ C^∞-гладких функций в области U. По двойственности он продолжается до непрерывного линейного оператора $P : \mathcal{E}'(U) \to \mathcal{D}'(U)$, действующего на обобщенных функциях с компактными носителями в области U. Если, в частности, $U = \mathbb{R}^n$, то такой оператор продолжается до непрерывного линейного оператора, действующего в пространстве Шварца $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ медленно растущих обобщенных функций.

Ядром оператора P является обобщенная функция $k \in \mathcal{D}'(U \times U)$, задаваемая интегралом

$$k(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)\, d\xi,$$

понимаемым в смысле обобщенных функций. Заметим, что ядро k является гладким вне диагонали в $U \times U$. Если $k \in C^\infty(U \times U)$, то определяемый им псевдодифференциальный оператор называется *сглаживающим*, а его порядок полагается равным $-\infty$. Такой оператор продолжается до непрерывного линейного отображения из $\mathcal{E}'(U)$ в $\mathcal{E}(U)$.

Символы псевдодифференциальных операторов удобно задавать разложениями в асимптотические ряды. А именно, какова бы ни была последовательность символов $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$, $p_k \in S^{d_k}(U)$, где $\{d_k\}$ – убывающая последовательность вещественных чисел с $d_k \to -\infty$ при $k \to \infty$, существует символ $p \in S^{d_0}(U)$ такой, что

$$p - \sum_{k=0}^{n-1} p_{d_k} \in S^{d_n}(U) \quad \text{для всех } n = 0, 1, \dots,$$

причем этот символ определен однозначно по модулю пространства $S^{-\infty}(U)$ сглаживающих символов. В этом случае принято писать, что $p \sim \sum_{k=0}^{\infty} p_{d_k}$.

Стандартным примером являются т.н. *классические символы*, для которых показатели $d_k = d-k$, а $p_k(x,\xi)$ являются однородными функциями по ξ порядка d_k. Асимптотическое разложение символа принимает в этом случае вид

$$p(x,\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} p_{d-k}(x,\xi).$$

Главный член $p_d(x,\xi)$ в этом разложении называется *главным символом.*

Псевдодифференциальные операторы образуют алгебру, о свойствах которой можно прочесть в книгах [12],[35]. Для нас наибольший интерес представляют эллиптические операторы, которые определяются следующим образом.

Определение 13. Псевдодифференциальный оператор $P \in \Psi^d(U)$ называется *эллиптическим*, если найдутся положительные непрерывные функции c и C в области U, для которых символ оператора P удовлетворяет оценке

$$|p(x,\xi)| \geq c(x)|\xi|^d \quad \text{при } |\xi| \geq C(x), x \in U.$$

Эллиптические псевдодифференциальные операторы обратимы по модулю сглаживающих, точнее, имеет место следующее

Предложение 1. *Псевдодифференциальный оператор $P \in \Psi^d(U)$ является эллиптическим тогда и только тогда, когда существует символ $q \in S^{-d}(U)$ такой, что отвечающий ему оператор $Q \in \Psi^{-d}(U)$ удовлетворяет соотношению*

$$P \circ Q = Q \circ P \equiv 1 \ mod \ \Psi^{-\infty}(U).$$

Для того, чтобы перенести определение псевдодифференциальных операторов на многообразия, необходимо изучить их поведение относительно замен, порождаемых гладкими диффеоморфизмами. Пусть $\varphi : U \to V$ есть диффеоморфизм области $U \subset \mathbb{R}^n$ на другую область $V \subset \mathbb{R}^n$. Если $P \in \Psi^d(U)$ – псевдодифференциальный оператор порядка d в области U, то формула

$$\varphi_* P(f) := P(\varphi^* f) \circ \varphi^{-1}$$

определяет псевдодифференциальный оператор в области V. На самом деле, справедливо следующее

Предложение 2. *Пусть оператор $P \in \Psi^d(U)$ обладает следующим свойством псевдолокальности: как сам оператор P, так и сопряженный к нему оператор P^*, отображают пространство $\mathcal{E}'(U)$ в себя. Тогда для заданного диффеоморфизма $\varphi : U \to V$ оператор $P_\varphi := \varphi_* P$ принадлежит $\Psi^d(V)$ и обладает тем же свойством псевдолокальности. Кроме того, символ p_φ этого оператора имеет асимптотическое разложение вида*

$$p_\varphi(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|\ge 0} \frac{1}{\alpha!} q_\alpha(x,\xi) D_\xi^\alpha(\psi(x), {}^t(\psi'(x)^{-1})\xi),$$

где $\psi := \varphi^{-1}$, $q_0(x,\xi) = 1$, а $q_\alpha(x,\xi)$ – полином по ξ степени$\le \frac{1}{2}|\alpha|$.

Явные выражения для коэффициентов $q_\alpha(x,\xi)$ можно найти в [12], том III, теорема 18.1.17. Отметим только, что для главного символа $p_{\varphi,d}(x,\xi)$ формула замены переменных имеет вид

$$p_{\varphi,d}(\varphi(x),\xi) = p_d(x, {}^t\varphi'(x)\xi).$$

С учетом этого предложения мы можем определить псевдодифференциальные операторы на компактном многообразии (заметим, что эти операторы будут автоматически удовлетворять условию псевдолокальности из предыдущего предложения).

Определение 14. Пусть M есть компактное многообразие. Линейный оператор $P : \mathcal{D}(M) \to C^\infty(M)$ называется *псевдодифференциальным оператором* порядка d, если его ядро является гладким вне диагонали в $M \times M$ и для любой координатной карты (U,φ) оператор $\varphi_* P$, действующий из $\mathcal{D}(\varphi(U))$ в $C^\infty(\varphi(U))$, является псевдодифференциальным оператором из пространства $\Psi^d(\varphi(U))$. Такой оператор называется *классическим*, если все его локальные выражения являются псевдодифференциальными операторами с классическими символами.

Из приведенной выше формулы замены переменных в главном символе следует, что он инвариантно определен как функция на кокасательном расслоении $T^*M \to M$. Эллиптические псевдодифференциальные операторы определяются как операторы, локальные выражения которых являются эллиптическими операторами.

2.4 Вычет Водзицки и теорема Конна о следе

Важность следа Диксмье, введенного в п.2.2, объясняется тем, что он корректно определен для широкого класса псевдодифференциальных операторов и совпадает в этом случае с вычетом Водзицки.

Прежде, чем перейти к определению указанного вычета, приведем несколько вспомогательных фактов об однородных функциях и формах на кокасательном расслоении гладкого многообразия.

Пусть M – гладкое компактное многообразие размерности $n > 1$ и T^*M – его кокасательное расслоение с локальными координатами (x, ξ), где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – локальные координаты на M, а $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ – координаты в слое $T^*_x M$. Обозначим через σ_ξ дифференциальную $(n-1)$-форму на $\mathbb{R}^n \setminus 0$ вида

$$\sigma_\xi := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \xi_j d\xi_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\xi_j} \wedge \ldots \wedge d\xi_n,$$

где "шляпка" над $d\xi_j$ означает, что этот член должен быть пропущен. Форма σ_ξ совпадает с внутренним произведением $\sigma_\xi = E \lrcorner\, d^n\xi$ формы объема $d^n\xi = d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_n$ и эйлерова векторного поля $E = \sum_{j=1}^n \xi_j \partial/\partial \xi_j$. Сужение σ_ξ на $T^*_x M$, $x \in M$, задает плотность (см. ниже) $|\sigma_\xi|$ на единичной сфере $S^{n-1} = \{|\xi| = 1\}$.

Свойство 1: для любой однородной функции $p_{-n}(\xi)$ порядка однородности $-n$ форма $p_{-n}\sigma_\xi$ на пространстве $\mathbb{R}^n \setminus 0$ замкнута.

Из этого свойства следует, что в интеграле вида

$$\int_{S^{n-1}} p_{-n} |\sigma_\xi|$$

можно заменить интегрирование по единичной сфере S^{n-1} интегралом по любому гомологичному циклу и, в частности, по любому сечению расслоения $\mathbb{R}^n \setminus 0 \to S^{n-1}$.

Напомним, что по теореме Эйлера для однородных функций f степени однородности λ имеет место тождество

$$\frac{1}{n+\lambda} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\xi_j f)}{\partial \xi_j} = \frac{1}{n+\lambda}(nf + Ef) = f.$$

При $\lambda = -n$ это утверждение теряет смысл и заменяется следующим свойством.

Свойство 2: интеграл $\int_{S^{n-1}} p_{-n}|\sigma_\xi|$ обращается в нуль в том и только в том случае, когда функция p_{-n} является суммой производных.

Для формулировки теоремы Водзицки нам понадобится еще понятие плотности на многообразии. В случае вещественного векторного пространства V размерности n *плотностью* на V называется непрерывное отображение $\lambda : V^n \to \mathbb{R}$, обладающее свойством:

$$\lambda(Av_1, \dots, Av_n) = |\det A| \lambda(v_1, \dots, v_n)$$

для всех $v_1, \dots, v_n \in V$, $A \in \operatorname{End} V$. Если ω – форма объема на V, то она определяет плотность $|\omega|$ на V по формуле: $|\omega|(v_1, \dots, v_n) := |\omega(v_1, \dots, v_n)|$.

Точно также на произвольном римановом многообразии M с римановой метрикой g существует единственная плотность $|\nu_g|$, принимающая значение 1 на всех ортонормированных базисах касательных пространств T_xM, $x \in M$. Если векторы $v_1, \dots, v_n \in T_xM$, то

$$|\nu_g|(v_1, \dots, v_n) = |\det(g_x(v_i, v_j))|^{1/2}.$$

Такую плотность естественно называть *римановой*.

Пользуясь римановой плотностью, можно ввести понятие интеграла, являющегося линейной формой на пространстве плотностей на M, инвариантной относительно диффеоморфизмов и совпадающей с интегралом Лебега на локальных картах.

Перейдем теперь к определению вычета Водзицки.

Теорема 3 (Водзицки)**.** *Пусть на гладком компактном многообразии M размерности n задан классический псевдодифференциальный оператор P. Тогда на M существует плотность $res_x P$, локальные выражения которой имеют вид*

$$res_x P = \left(\int_{|\xi|=1} p_{-n}(x, \xi) |\sigma_\xi| \right) |d^n x|. \tag{2.12}$$

Интеграл от этой плотности называется вычетом Водзицки оператора P:

$$Res\, P := \int_M res_x P. \tag{2.13}$$

Доказательство. Из формулы замены переменных в псевдодифференциальных операторах мы знаем, что под действием диффеоморфизма $\varphi : U \to V$ из области $U \subset \mathbb{R}^n$ на область $V \subset \mathbb{R}^n$ псевдодифференциальный оператор $P \in \Psi^d(U)$ преобразуется в псевдодифференциальный оператор $\varphi_* P \in \Psi^d(V)$. При этом символ $p(x, \xi)$ оператора P переходит в символ $p_\varphi(x, \xi) =: \tilde{p}(x, \xi)$ оператора $\varphi_* P$, задаваемый формулой

$$\tilde{p}(x, {}^t\psi'(x)\eta) = \sum_\alpha c_\alpha(x, \eta) \partial_\eta^\alpha p(\psi(x), \eta),$$

в которой $\xi = {}^t\psi'(x)\eta$ с $\psi := \varphi^{-1}$, $c_0(x,\eta) = 1$, а другие коэффициенты $c_\alpha(x,\eta)$ являются полиномами по η. Это означает, в частности, что коэффициент $\tilde{p}_{-n}(x, {}^t\psi'(x)\eta)$ отличается от коэффициента $p_{-n}(\psi(x),\eta)$ на сумму членов, являющихся производными по ξ.

Посмотрим теперь, как изменяется интеграл $\int_{|\xi|=1} p_{-n}(x,\xi)|\sigma_\xi|$ под действием невырожденных линейных замен по переменной ξ и фиксированном x. Пусть такая замена задается отображением h. Нетрудно видеть, что $h^*\sigma_\xi = (\det h)\sigma_{h\xi}$.

Заметим, что интеграл по сфере $S = \{\xi : \ |\xi| = 1\}$ от формы $p_{-n}|\sigma_\xi|$ совпадает (с точностью до знака) с интегралом от этой формы по образу $h(S)$:

$$\int_S p_{-n}(x,\xi)|\sigma_\xi| = \pm \int_{h(S)} p_{-n}(x,\xi),$$

поскольку $h(S)$ гомологично S (знак "плюс" отвечает случаю, когда h сохраняет ориентацию, знак "минус" ставится в противоположном случае). Поэтому

$$\int_S p_{-n}(x,\xi)|\sigma_\xi| = \pm \int_S h^*\left(p_{-n}(x,\xi)|\sigma_\xi|\right) = |\det h| \int_S p_{-n}(x,h\xi)|\sigma_{h\xi}|.$$

Полагая $y := \psi(x)$, $\xi = {}^t\psi'(x)\eta$, получим следующую формулу для преобразованного вычета:

$$\int_{|\xi|=1} \tilde{p}(x,\xi)|\sigma_\xi||d^nx| = |\det\psi'(x)| \int_{|\eta|=1} \tilde{p}_{-n}(x, {}^t\psi'(x)\eta)|\sigma_\eta||d^nx| =$$
$$\int_{|\eta|=1} \tilde{p}_{-n}(x, {}^t\psi'(x)\eta)|\sigma_\eta||d^ny| = \int_{|\eta|=1} p_{-n}(y,\eta)|\sigma_\eta||d^ny|,$$

где мы воспользовались тем, что циклы $|\xi| = 1$ и $|\eta| = 1$ гомологичны друг другу при фиксированном x и члены, состоящие из производных, не дают вклада в последний интеграл. Из приведенной выкладки следует, что плотность $\mathrm{res}_x P$ корректно определена, так что интеграл от нее не зависит от выбора локальных координат. $\square$

Вычислим в качестве примера вычет Водзицки для оператора Лапласа-Бельтрами на компактном римановом многообразии.

Пусть $P = \Delta$ есть оператор Лапласа–Бельтрами на компактном римановом n-мерном многообразии (M,g). Тогда

$$\mathrm{Res}\,\Delta^{-n/2} = \Omega_n,$$

где $\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ – площадь поверхности сферы S^{n-1}.

Действительно, так как Δ есть оператор второго порядка, то $\Delta^{-n/2}$ имеет порядок $-n$, а его главный символ имеет вид $(g^{ij}(x)\xi_i\xi_j)^{-n/2}$, где (g_{ij}) – метрический тензор многообразия M, (g^{ij}) – матрица, обратная к (g_{ij}). После замены $y=\psi(x)$, $\xi={}^t\psi'(x)\eta$, в которой $\psi'(x)=(\det g)^{1/2}$, главный символ превратится в $|\eta|^{-n}$, а плотность вычета будет равна

$$\mathrm{res}_x P=\Omega_n|d^ny|=\Omega_n\det\psi'(x)|d^nx|=\Omega_n|\nu_g|,$$

где $|\nu_g|$ – риманова плотность. Отсюда следует, что $\mathrm{Res}\,\Delta^{-n/2}=\Omega_n$.

Обозначим через $\mathcal{P}(M)$ фактор-алгебру классических псевдодифференциальных операторов на многообразии M по идеалу сглаживающих операторов. Еще одна теорема Водзицки (доказательство которой можно найти в [11], теорема 7.6) утверждает, на алгебре $\mathcal{P}(M)$ (при $n>1$) существует единственный след (с точностью до умножения на ненулевую константу), задаваемый вычетом Водзицки. Тем самым, вычет Водзицки должен совпадать (с точностью до константы) с введенным ранее следом Диксмье.

Это утверждение составляет содержание *теоремы Конна о следе.*

Теорема 4. *Пусть P – эллиптический псевдодифференциальный оператор порядка $-n$ на компактном римановом многообразии (M,g). Тогда оператор P принадлежит пространству $\mathcal{L}^{1,\infty}$ и измерим, а его след Диксмье связан с вычетом Водзицки формулой:*

$$Tr^+\,P=\frac{1}{n(2\pi)^n}Res\,P. \tag{2.14}$$

Доказательство этой теоремы можно найти в оригинальной монографии Конна [9] и в книге [11], теорема 7.18.

Из нее вытекает

Следствие 1. *Для произвольной гладкой функции $a\in C^\infty(M)$ имеет место равенство*

$$\int_M a(x)|\nu_g|=\frac{n(2\pi)^n}{\Omega_n}Tr^+(a\Delta_g^{-n/2}).$$

Действительно, $a\Delta^{-n/2}$ есть псевдодифференциальный оператор порядка $-n$ с главным символом $a_{-n}(x,\xi):=a(x)(g^{ij}\xi_i\xi_j)^{-n/2}$, поэтому плотность вычета Водзицки для него имеет вид

$$\mathrm{res}_x(a\Delta^{-n/2})=\Omega_n a(x)|\nu_g|.$$

Следовательно, левая часть доказываемого равенства совпадает с $\Omega_n^{-1}\mathrm{Res}(a\Delta^{-n/2})$. Теперь утверждение вытекает из теоремы о следе.

Глава 3

НЕКОММУТАТИВНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3.1 Универсальная дифференциальная алгебра

Пусть $\mathcal{E}$ есть бимодуль над алгеброй A с единицей 1_A.

Определение 15. *Дифференцированием* алгебры A со значениями в бимодуле $\mathcal{E}$ называется линейное отображение $D : A \to \mathcal{E}$, удовлетворяющее правилу Лейбница

$$D(ab) = (Da)b + a(Db).$$

Из этого определения сразу следует, что $D(1_A) = 0$, поскольку $D(1_A) = 2D(1_A)$.

Обозначим множество всех дифференцирований алгебры A со значениями в $\mathcal{E}$ через $\mathrm{Der}(A, \mathcal{E})$. Пространство $\mathrm{Der}(A) \equiv \mathrm{Der}(A, A)$ дифференцирований алгебры A является алгеброй Ли, поскольку коммутатор двух дифференцирований снова является дифференцированием.

Любой элемент $s \in \mathcal{E}$ определяет дифференцирование $\mathrm{ad}\, s$ из $\mathrm{Der}(A, \mathcal{E})$ по формуле

$$(\mathrm{ad}\, s)a := sa - as.$$

Такое дифференцирование называется *внутренним*.

Построим бимодуль $\Omega^1 A$ вместе с дифференцированием $d : A \to \Omega^1 A$, который обладает следующим универсальным свойством: для любого дифференцирования D алгебры A со значениями в бимодуле $\mathcal{E}$ найдется единственный морфизм бимодулей $i : \Omega^1 A \to \mathcal{E}$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} & \Omega^1 A \arrow[d, dashed, "i"] \\ A \arrow[ur, "d"] \arrow[r, "D"'] & \mathcal{E}. \end{tikzcd}$$

Иначе говоря, линейное отображение $\mathrm{Hom}_A(\Omega^1 A, \mathcal{E}) \to \mathrm{Der}(A, \mathcal{E})$, задаваемое формулой $\varphi \longmapsto \varphi \circ d$, должно быть изоморфизмом.

Пусть $A \otimes A$ есть тензорное произведение алгебры A на себя, рассматриваемое как A-бимодуль с действием элементов из A, задаваемым на простых тензорах формулами:

$$a(b \otimes c) \equiv (a \otimes 1_A)(b \otimes c) = (ab) \otimes c,$$
$$(a \otimes b)c \equiv (a \otimes b)(1_A \otimes c) = a \otimes (bc).$$

Определим дифференцирование $d : A \to A \otimes A$ алгебры A со значениями в $A \otimes A$ по формуле:

$$da := 1_A \otimes a - a \otimes 1_A$$

(далее мы опускаем нижний индекс A в обозначении 1_A там, где это не приводит к недоразумению). Проверим, что d удовлетворяет правилу Лейбница. Для этого вычислим сначала

$$adb = a(1 \otimes b) - a(b \otimes 1) = (a \otimes 1)(1 \otimes b) - (a \otimes 1)(b \otimes 1) = a \otimes b - (ab) \otimes 1,$$
$$(da)b = (1 \otimes a)b - (a \otimes 1)b = (1 \otimes a)(1 \otimes b) - (a \otimes 1)(1 \otimes b) = 1 \otimes (ab) - a \otimes b.$$

Тогда

$$d(ab) = 1 \otimes (ab) - (ab) \otimes 1 = a \otimes b - (ab) \otimes 1 + 1 \otimes (ab) - a \otimes b = adb + (da)b,$$

т.е. d действительно является дифференцированием алгебры A со значениями в $A \otimes A$.

Обозначим через $\Omega^1 A$ подмодуль в $A \otimes A$, порожденный элементами вида adb. Он совпадает с ядром отображения

$$m : A \otimes A \longrightarrow A, \quad a \otimes b \longmapsto ab.$$

Действительно, если элемент $\sum_k a_k \otimes b_k \in A \otimes A$ принадлежит $\mathrm{Ker}\, m$, то есть $\sum_k a_k b_k = 0$, то

$$\sum_k a_k \otimes b_k = \sum_k a_k (1 \otimes b_k - b_k \otimes 1) = \sum_k a_k db_k,$$

откуда и следует указанное утверждение.

Введем на $\Omega^1 A$ структуру A-бимодуля, полагая

$$a(bdc) := (ab)dc, \quad (adb)c := ad(bc) - (ab)dc.$$

Проверим теперь универсальность построенного бимодуля $\Omega^1 A$. Пусть $\mathcal{E}$ – произвольный бимодуль над алгеброй A и $D : A \to \mathcal{E}$ – дифференцирование алгебры A со значениями в $\mathcal{E}$. Определим отображение $i : \Omega^1 A \to \mathcal{E}$, полагая его равным на простых тензорах из $A \otimes A$

$$i(a \otimes b) := a(Db)$$

и сужая затем на $\Omega^1 A \subset A \otimes A$. Указанное отображение является морфизмом A-бимодулей, откуда следует, что бимодуль $\Omega^1 A$ действительно обладает универсальным свойством, отмеченным в начале этого пункта.

Определение 16. *Градуированная дифференциальная алгебра* (кратко: *DG-алгебра*) $(R^\bullet, \delta)$ есть ассоциативная алгебра

$$R^\bullet = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R^n,$$

которая наделена *градуированным произведением*, т.е. произведением, обладающим свойством $R^m \cdot R^n \subseteqq R^{m+n}$, и *дифференциалом* δ, т.е. линейным отображением, удовлетворяющим условиям:

1. δ является отображением степени $+1$, т.е. переводит $R^n \to R^{n+1}$,
2. $\delta^2 = 0$,
3. δ является *нечетным дифференцированием*, т.е. удовлетворяет правилу Лейбница вида
$$\delta(\omega^n \eta) = (\delta\omega^n)\eta + (-1)^n \omega^n \delta\eta,$$
где $\omega^n \in R^n$.

Наша цель состоит в том, чтобы построить DG-алгебру

$$\Omega^\bullet A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega^n A$$

с дифференциалом d, первые два слагаемых которой имеют вид: $\Omega^0 A = A$, $\Omega^1 A$ – бимодуль 1-форм, определенный выше, а дифференциал d продолжает построенное выше дифференцирование из алгебры A в $\Omega^1 A$. Кроме того, мы хотим, чтобы указанная DG-алгебра обладала следующим универсальным свойством: если $(R^\bullet, \delta)$ – другая DG-алгебра, то любой гомоморфизм алгебр $\psi : A \to R^0$ должен продолжаться до гомоморфизма алгебр $\psi : \Omega^\bullet A \to R^\bullet$ степени нуль, сплетающего дифференциалы d и δ.

Обозначим через $\bar{A}$ фактор $\bar{A} := A/\mathbb{C}$ и через $\bar{a}$ образ элемента $a \in A$ при проекции в $\bar{A}$. Введенный ранее бимодуль $\Omega^1 A$ можно отождествить с

$$\Omega^1 A \cong A \otimes \bar{A}$$

посредством отображения: $a \otimes \bar{b} \mapsto adb$. Это отождествление определено корректно, поскольку $d(1_A) = 0$.

Введем на $A \otimes \bar{A}$ структуру A-бимодуля, определяя левое и правое умножение на элементы $c \in A$ по формулам

$$\begin{aligned} &c(a_0 \otimes \bar{a}_1) = (ca_0) \otimes \bar{a}_1, \\ &(a_0 \otimes \bar{a}_1)c = a_0 \otimes \overline{a_1 c} - (a_0 a_1) \otimes \bar{c}. \end{aligned}$$

С учетом этого определения отображение $A \otimes \bar{A} \to \Omega^1 A$ становится изоморфизмом бимодулей, поскольку

$$\begin{aligned} &c(a_0 \otimes \bar{a}_1) = (ca_0) \otimes \bar{a}_1 \longmapsto (ca_0)da_1, \\ &(a_0 \otimes \bar{a}_1)c = a_0 \otimes \overline{a_1 c} - (a_0 a_1) \otimes \bar{c} \longmapsto a_0 da_1 c - (a_0 a_1)dc = (a_0 da_1)c. \end{aligned}$$

Положим теперь по определению

$$\Omega^2 A := \Omega^1 A \otimes_A \Omega^1 A = (A \otimes \bar{A}) \otimes_A (A \otimes \bar{A}) = A \otimes \bar{A} \otimes \bar{A}.$$

Более общим образом, определим

$$\Omega^n A := \Omega^1 A \otimes_A \ldots \otimes_A \Omega^1 A \ (n \text{ раз}),$$

так что

$$\Omega^n A = A \otimes \bar{A}^{\otimes n}.$$

Дифференциал $d : A \otimes \bar{A}^{\otimes n} \to A \otimes \bar{A}^{\otimes (n+1)}$ задается сдвигом

$$d(a_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{a}_n) := 1_A \otimes \bar{a}_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{a}_n.$$

Тогда $d^2 = 0$, поскольку $\bar{1}_A = 0$ в алгебре $\bar{A}$.

Отождествляя, как и выше, $A \otimes \bar{A}^{\otimes n}$ с $(\Omega^1 A)^{\otimes n}$ будем иметь

$$a_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{a}_n = a_0 da_1 \ldots da_n.$$

Введем на $\Omega^\bullet A$ структуру A-бимодуля. Умножение слева задается очевидным образом:

$$c(a_0da_1\dots da_n) = (ca_0)da_1\dots da_n.$$

Чтобы определить умножение справа, воспользуемся правилом Лейбница: $da\cdot b = d(ab) - adb$. Тогда

$$\begin{aligned}(a_0da_1\dots da_n)c &= a_0da_1\dots da_{n-1}d(a_nc) - a_0da_1\dots da_{n-1}a_ndc = \dots\\ \dots &= (-1)^n(a_0a_1)da_2\dots da_ndc + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-j}a_0da_1\dots d(a_ia_{j+1})\dots da_ndc+\\ &\qquad + a_0da_1\dots da_{n-1}d(a_nc).\end{aligned}$$

Наконец, определим произведение в $\Omega^\bullet A$, полагая:

$$(a_0da_1\dots da_n)(b_0db_1\dots db_m) := (a_0da_1\dots da_n\cdot b_0)\,db_1\dots db_m.$$

Тем самым, $\Omega^\bullet A$ становится DG-алгеброй, называемой *универсальной DG-алгеброй* над алгеброй A.

Отметим следующие полезные формулы:

$$d(a_0da_1\dots da_n) = 1_Ada_0da_1\dots da_n = da_0da_1\dots da_n$$

и

$$a_0[d,a_1]\dots[d,a_n]\cdot 1_A = a_0da_1\dots da_n.$$

Первая из них перефразирует определение дифференциала с учетом отождествления $A\otimes\bar{A}^{\otimes n}$ с $(\Omega^1A)^{\otimes n}$, а для доказательства второй заметим, что

$$\begin{gathered}[d,a_n]\cdot 1_A = da_n - a_nd1_A = da_n,\\ [d,a_{n-1}]da_n = d(a_{n-1}da_n) = da_{n-1}da_n\end{gathered}$$

и т.д. по индукции.

Проверим свойство универсальности построенной DG-алгебры $\Omega^\bullet A$. Пусть задана другая DG-алгебра $(R^\bullet,\delta)$ и гомоморфизм алгебр $\psi : A\to R^0$. Тогда его продолжение до морфизма $\psi : \Omega^\bullet A\to R^\bullet$ задается формулой

$$\psi(a_0da_1\dots da_n) := \psi(a_0)\delta\left(\psi(a_1)\right)\dots\delta\left(\psi(a_n)\right).$$

3.2 Циклы и фредгольмовы модули

Определение 17. *Циклом* размерности n называется DG-алгебра

$$\Omega^\bullet = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k,$$

заданная вместе с *интегралом* $\int$, т.е. линейным отображением $\int : \Omega^\bullet \to \mathbb{C}$ таким, что:

1. $\int \omega^k = 0 \quad$ при $k < n$;
2. $\int d\omega^{n-1} = 0$;
3. $\int \omega^k \omega^l = (-1)^{kl} \int \omega^l \omega^k$.

Циклом над алгеброй A называется цикл $(\Omega^\bullet, d, \int)$ вместе с гомоморфизмом $A \to \Omega^0$.

Стандартным примером цикла размерности n может служить комплекс де Рама над n-мерным гладким компактным многообразием. Менее тривиальные примеры строятся с помощью фредгольмовых модулей, к определению которых мы переходим.

Определение 18. *Нечетным фредгольмовым модулем* над C^*-алгеброй A называется инволютивное представление π алгебры A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, наделенное *оператором симметрии*, т.е. линейным оператором S таким, что $S = S^*$ и $S^2 = I$, удовлетворяющим условию

$$[S, \pi(a)] \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \quad \text{для всех } a \in A.$$

Четный фредгольмов модуль задается представлением $\pi = \pi^0 \oplus \pi^1$ алгебры A в $\mathbb{Z}_2$-градуированном гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 \oplus \mathcal{H}^1$ с нечетным оператором симметрии S, удовлетворяющим тем же условиям, что и в нечетном случае.

Фредгольмов модуль $(A, \mathcal{H}, S)$ порождает цикл над алгеброй A с $\Omega^0 = A$, а оператор S задает $\mathbb{Z}_2$-градуировку на алгебре ограниченных линейных операторов $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Действительно, мы можем записать произвольный линейный оператор T в виде

$$T = T_+ + T_-, \quad \text{где } T_\pm = \frac{T \pm STS}{2}\,.$$

В частности,

$$T = T_+ \iff T = STS \quad \text{и} \quad T = T_- \iff T + STS = 0.$$

Кроме того, для любого линейного ограниченного оператора R имеют место соотношения

$$(TR)_+ = T_+R_+ + T_-R_- \quad \text{и} \quad (TR)_- = T_+R_- + T_-R_+.$$

Для того, чтобы определить интеграл, нам придется наложить на рассматриваемые фредгольмовы модули дополнительное *условие суммируемости* порядка n:

$$[S, \pi(a)] \in \mathcal{L}^{n+1}(\mathcal{H}).$$

При этом число n предполагается нечетным для нечетных фредгольмовых модулей и четным для четных фредгольмовых модулей.

Считая условие суммируемости выполненным, введем *дифференциал*, полагая:

$$da = i[S, \pi(a)] = 2iS\pi(a)_-$$

для $a \in A$. Для упрощения формул будем опускать далее знак π, так что последняя формула запишется в виде

$$da = i[S, a] = 2iSa_-.$$

Иначе говоря, дифференциал d выбирает S-нечетную часть элемента a и условие суммируемости можно теперь переписать в виде $da \in \mathcal{L}^{n+1}$.

Множитель i введен для того, чтобы дифференциал d коммутировал с инволюцией: $d(a^*) = (da)^*$, где справа стоит эрмитово сопряжение.

Имея дифференциал d, можно ввести и *дифференциалы высших порядков*. Для этого рассмотрим пространство 1-форм на алгебре ограниченных линейных операторов $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Оно состоит из операторов вида a_0da_1, где $a_0, a_1 \in A$, и их линейных комбинаций. Дифференциал второго порядка задается на 1-формах формулой

$$d(a_0da_1) = da_0da_1 = i[S, a_0]i[S, a_1].$$

Левую часть последней формулы можно переписать в виде

$$d(a_0da_1) = i[S, a_0da_1].$$

(Заметим, что в этой формуле, также как и в последующих, под коммутатором всегда подразумевается суперкоммутатор, так что коммутатор $[S, a_0da_1]$ на самом деле является анти-коммутатором, поскольку a_0da_1 есть 1-форма.)

Из последней формулы следует, что

$$d(a_0 da_1) = i[S, a_0 da_1] = 2iS(a_0 da_1)_+,$$

т.е. дифференциал 2-го порядка, в отличие от дифференциала 1-го порядка, выбирает S-четную часть формы $a_0 da_1$, принадлежащую $\mathcal{L}^{n+1} \cdot \mathcal{L}^{n+1} \subset \mathcal{L}^{(n+1)/2}$. В то же время S-нечетная часть формы $a_0 da_1$, равная $(a_0)_+(da_1)_- + (a_0)_-(da_1)_+$ принадлежит $\mathcal{L}^{n+1}$.

Более общим образом, рассмотрим пространство k-форм Ω^k, порождаемое операторами вида

$$a = a_0 da_1 \dots da_k \quad \text{с } a_0, a_1, \dots, a_k \in A.$$

Если $k = 2r$, т.е. $a \in \Omega^{2r}$, то $a_+ \in \mathcal{L}^{(n+1)/(2r)}$, $a_- \in \mathcal{L}^{(n+1)/(2r+1)}$. В случае, если $k = 2r - 1$, т.е. $a \in \Omega^{2r-1}$, будем иметь: $a_+ \in \mathcal{L}^{(n+1)/(2r)}$, $a_- \in \mathcal{L}^{(n+1)/(2r-1)}$.

Произведение форм задается композицией соответствующих операторов, а дифференциал имеет вид

$$d(a_0 da_1 \dots da_k) = i[S, a_0 da_1 \dots da_k] = i[S, [a_0[iS, a_1] \dots i[S, a_k]] = da_0 da_1 \dots da_k$$

или более общим образом

$$d\omega = i[S, \omega] \quad \text{для } \omega \in \Omega^\bullet.$$

Перейдем теперь к определению интеграла. Введем прежде всего *условный след* оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, полагая

$$\mathrm{Tr}' T := \mathrm{Tr}\, T_+.$$

Заметим, что $\mathrm{Tr}' T = \mathrm{Tr}\, T$, если $T \in \mathcal{L}^1$, благодаря цикличности обычного следа.

Предположим сначала, что n нечетно. Тогда $(\omega^n)_+ \in \mathcal{L}^1$, поэтому определен интеграл

$$\int \omega^n := \mathrm{Tr}' \omega^n.$$

Это определение можно переписать в виде

$$\mathrm{Tr}' \omega^n = -\frac{i}{2} \mathrm{Tr}(S d\omega^n).$$

Действительно,

$$S d\omega^n = iS[S, \omega^n] = iS(S\omega^n + \omega^n S) = i(\omega^n + S\omega^n S) = 2i(\omega^n)_+.$$

Для форм ω^k с $k<n$ положим по определению $\int \omega^k = 0$.

Покажем, что построенный интеграл обладает свойствами, перечисленными в определении 17. Во-первых,

$$\int d\omega^{n-1} = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(Sd^2\omega^{n-1}) = 0.$$

Во-вторых, рассмотрим формы ω^k, ω^l с $k+l=n$. Допустим для определенности, что k нечетное, а l – четное. Тогда

$$\begin{aligned}\int \omega^k\omega^l &= -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(Sd(\omega^k\omega^l)) = \\ &= -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(Sd\omega^k\omega^l - S\omega^k d\omega^l) = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(-d\omega^l S\omega^k + \omega^l Sd\omega^k) = \\ &= -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(Sd\omega^l\omega^k + S\omega^l d\omega^k) = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(Sd(\omega^l\omega^k)) = \int \omega^l\omega^k.\end{aligned}$$

В этой выкладке мы воспользовались дважды свойством цикличности: $\mathrm{Tr}(TR) = \mathrm{Tr}(RT)$ для операторов из классов Шэттена.

Пусть теперь n четно и снова $k+l=n$. Тогда $(\omega^n)_- \in \mathcal{L}^1$. Обозначим через χ оператор градуировки на $\mathcal{H}$, собственные (± 1)-подпространства которого совпадают соответственно с $\mathcal{H}^0$ и $\mathcal{H}^1$. Определим интеграл в этом случае как

$$\int \omega^n := \mathrm{Tr}'(\chi\omega^n) = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(\chi Sd\omega^n)$$

и положим: $\int \omega^k = 0$ для форм ω^k с $k<n$. Свойство замкнутости снова очевидно:

$$\int d\omega^{n-1} = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(\chi Sd^2\omega^{n-1}) = 0,$$

а свойство перестановочности

$$\int \omega^k\omega^l = (-1)^{kl}\int \omega^l\omega^k$$

проверяется также, как и выше, с учетом равенства: $\chi\omega^k = (-1)^k\omega^k\chi$.

Приведем примеры операторов симметрии.

Пример 1 (преобразование Гильберта)**.** *Преобразованием Гильберта* функции $h \in L^2(\mathbb{R})$, заданной на вещественной оси, называется интеграл вида

$$Sh(x) := \frac{i}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{|t|>\varepsilon}\frac{h(x-t)}{t}\,dt =: \frac{i}{\pi}P.V.\int_{\mathbb{R}}\frac{h(x-t)}{t}\,dt.$$

Преобразование Фурье этой функции совпадает с

$$\mathcal{F}(Sh)(\xi) = (\operatorname{sgn}\xi)\mathcal{F}h(\xi).$$

Хорошо известно (см. [33]), что S является оператором симметрии в $L^2(\mathbb{R})$ и обладает следующими свойствами: (1) S коммутирует с трансляциями; (2) S коммутирует с положительными растяжениями; (3) S антикоммутирует с отражениями. Более того, любой линейный ограниченный оператор в $L^2(\mathbb{R})$ с этими свойствами является скалярным кратным оператора Гильберта.

Пример 2 (операторы Рисса)**.** Операторы Рисса являются многомерными аналогами преобразования Гильберта. *Операторы Рисса* R_j, $1 \le j \le n$, действуют в $L^2(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$R_j h(x) := P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t_j h(x-t)}{|t|^{n+1}}\, dt,$$

где $c_n = 2i/\Omega_{n+1}$, а $\Omega_{n+1} = 2\pi^{(n+1)/2}/\Gamma(\frac{n+1}{2})$ – объем единичной сферы S^n. Преобразование Фурье этой функции равно

$$\mathcal{F}(R_j h)(\xi) = \frac{\xi_j}{|\xi|}\mathcal{F}h(\xi).$$

Операторы Рисса также коммутируют со сдвигами и положительными растяжениями. Кроме того, они ведут себя ковариантным образом по отношению к вращениям и семейство операторов Рисса однозначно определяется этими свойствами с точностью до скалярного множителя. Вместо свойства симметрии имеем соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} R_j^2 = 1.$$

Фредгольмов модуль, ассоциированный с операторами Рисса, строится по любому набору $(N \times N)$-матриц $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ таких, что

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2\delta_{ij}.$$

Матрицы γ_j являются *матрицами Дирака*, порождающими спинорное представление алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $\mathbb{C}^N$, где $N = 2^{[n/2]}$. Их можно построить с помощью метода удвоения. Более подробно, при $n = 1$ положим: $\gamma_1^{(1)} = 1$. Далее, при нечетных n определим их по индукции, полагая

$$\gamma_j^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_j^{(n-2)} \\ \gamma_j^{(n-2)} & 0 \end{pmatrix}$$

при $j = 1, \ldots, n-2$ и

$$\gamma_{n-1}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & -iI_{n-2} \\ iI_{n-2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_n^{(n)} = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & -I_{n-2} \end{pmatrix}.$$

При четных n полагаем: $\gamma_j^{(n)} = \gamma_j^{(n+1)}$ при всех $j = 1, \ldots, n$. В частности, при $n = 3$ матрицы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ совпадают с матрицами Паули.

Имея указанный набор матриц γ_j, построим ассоциированный оператор симметрии.

Введем пространство вектор-функций

$$H_N = \left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)^N,$$

на котором операторы Рисса действуют диагонально. Иными словами, если $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_N) \in H_N$, то $R_j\mathbf{h} = (R_j h_1, \ldots, R_j h_N)$, $j = 1, \ldots, n$.

Оператор симметрии S_N, отвечающий набору матриц γ_j, действующий в пространстве H_N, определяется формулой

$$S_N\mathbf{h} := \sum_{j=1}^{n} \gamma_j R_j \mathbf{h}.$$

3.3 Связности и характер Черна

Определение 19. Пусть $\mathcal{E}$ есть правый A-модуль над алгеброй A. Рассмотрим правый A-модуль $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A$. *Связностью* на $\mathcal{E}$ называется линейное отображение

$$\nabla : \ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A,$$

удовлетворяющее правилу Лейбница:

$$\nabla(sa) = (\nabla s)a + s \otimes da,$$

где $s \in \mathcal{E}$, $a \in A$.

Оператор, задаваемый связностью ∇, однозначно продолжается до оператора степени $+1$ на всей градуированной алгебре $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^\bullet A$ по формуле:

$$\nabla(s \otimes \omega) = \nabla s \otimes \omega + s \otimes d\omega,$$

где $s \in \mathcal{E}$, $\omega \in \Omega^\bullet A$ и мы отождествляем $(\mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A) \otimes_A \Omega^n A$ с $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^{n+1} A$.

Рассматривая $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^\bullet A$ как правый $\Omega^\bullet A$-модуль, придем к правилу Лейбница вида

$$\nabla(\sigma\omega) = (\nabla\sigma)\omega + (-1)^k \sigma d\omega,$$

где $\sigma \in \mathcal{E} \otimes_A \Omega^k A$, $\omega \in \Omega^\bullet A$.

Рассмотрим конкретные конструкции связностей.

Пример 3 (связность на тензорном произведении)**.** Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ – два A-модуля над коммутативной алгеброй A, наделенных соответственно связностями $\nabla^{\mathcal{E}}$ и $\nabla^{\mathcal{F}}$. Тогда на тензорном произведении $\mathcal{E} \otimes_A \mathcal{F}$ можно определить связность, являющуюся тензорным произведением связностей $\nabla^{\mathcal{E}}$ и $\nabla^{\mathcal{F}}$. Эта связность определяется формулой

$$\nabla^{\mathcal{E}\otimes_A\mathcal{F}} := \nabla^{\mathcal{E}} \otimes 1_{\mathcal{F}} + 1_{\mathcal{E}} \otimes \nabla^{\mathcal{F}}.$$

Пример 4 (связность в свободном модуле)**.** Обозначим через A^n свободный A-модуль, состоящий из столбцов размера $1 \times n$ с компонентами из A. Тогда $A^n \otimes_A \Omega^1 A$ можно отождествить с $(\Omega^1 A)^n$, при этом

$$d\,{}^t(a_1 \dots a_n) := {}^t(da_1 \dots da_n).$$

Если ∇ – связность на A^n, то $\nabla - d$ является A-линейным отображением из A^n в $(\Omega^1 A)^n$, поэтому ∇ можно записать в виде

$$\nabla = d + \alpha,$$

где α есть $(n \times n)$-матрица с компонентами из $\Omega^1 A$.

Пример 5 (связность Леви-Чивита)**.** Пусть модуль $\mathcal{E}$ имеет вид $\mathcal{E} = eA^n$, где e – идемпотент в алгебре $\mathrm{Mat}_n(A)$, т.е. элемент $e \in \mathrm{Mat}_n(A)$ такой, что $e^2 = e$. Тогда связность ∇ в этом модуле может быть задана композицией

$$\mathcal{E} \xrightarrow{i} A^n \xrightarrow{d} A^n \otimes_A \Omega^1 A \xrightarrow{e} \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A,$$

где $i : \mathcal{E} \hookrightarrow A^n$ – вложение. Отождествляя $\mathcal{E}$ с подмодулем в A^n, запишем введенную связность в виде

$$\nabla s = e\,ds.$$

Построенная связность называется *связностью Леви-Чивита.*

Пример 6 (эрмитовы связности)**.** Если $\mathcal{E}$ является C^*-модулем, наделенным скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$, то естественно пользоваться связностями ∇, совместимыми с этим скалярным произведением. Такие связности, называемые *эрмитовыми*, должны удовлетворять соотношению

$$(\nabla s, t) + (s, \nabla t) = d(s, t)$$

для всех $s, t \in \mathcal{E}$. При этом предполагается, что скалярное произведение $(\cdot\,,\cdot)$ продолжено на $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A$ как полуторалинейное спаривание со значениями в $\Omega^1 A$ по формуле:

$$(s, t \otimes adb) := (s, t)adb.$$

В случае связности Леви-Чивита это означает, что соответствующий идемпотент e должен быть самосопряженным оператором, т.е. проектором.

Разность $\nabla = \nabla_1 - \nabla_2$ двух эрмитовых связностей на $\mathcal{E}$ принадлежит пространству гомоморфизмов $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A)$ и является косоэрмитовым отображением, т.е.

$$(\nabla s, t) + (s, \nabla t) = 0.$$

Если $\mathcal{E} \cong pA^n$, где p – проектор в $\mathrm{Mat}_n(A)$, то

$$pA^n \otimes_A \Omega^1 A \otimes_A {}^n Ap = p\mathrm{Mat}_n(\Omega^1 A)p,$$

где ${}^n A$ свободный A-модуль, состоящий из строк размера $n \times 1$ с компонентами из A.

Инволюция на $\Omega^1 A$ задается формулой $(adb)^* := d(b^*)a^* = d(b^*a^*) - b^*da^*$. Поэтому косоэрмитов оператор $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A)$ можно отождествить с матрицей $\alpha \in \mathrm{Mat}_n(\Omega^1 A)$, составленной из 1-форм, так что

$$\alpha = p\alpha = \alpha p = p\alpha p \text{ и } \alpha^* = -\alpha.$$

Эрмитова связность ∇ будет при этом записываться в виде $\nabla = pd + \alpha$, где α удовлетворяет выписанным выше условиям.

Определение 20. Рассмотрим линейное отображение

$$\nabla^2 : \mathcal{E} \otimes_A \Omega^\bullet A \longrightarrow \mathcal{E} \otimes_A \Omega^{\bullet+2} A.$$

Оно удовлетворяет соотношению

$$\nabla^2(s\omega) = \nabla(\nabla s\, \omega + sd\omega) = (\nabla^2 s)\omega - \nabla s\, d\omega + \nabla s\, d\omega + sd^2\omega = (\nabla^2 s)\omega,$$

которое означает, что ∇^2 является гомоморфизмом $(\Omega^\bullet A)$-модулей и полностью определяется своим сужением на $\mathcal{E}$. Указанный гомоморфизм называется *кривизной* связности ∇ и обозначается через K_∇.

Пример 7 (кривизна связности в свободном модуле)**.** Вычислим кривизну связности $\nabla = d + \alpha$ в свободном модуле A^n. Имеем

$$K_\nabla s = \nabla(ds + \alpha s) = d^2 s + d(\alpha s) + \alpha ds + \alpha^2 s = d\alpha\, s - \alpha ds + \alpha ds + \alpha^2 s = (d\alpha + \alpha^2)s.$$

Пример 8 (кривизна связности на модуле гомоморфизмов)**.** Пусть $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$ – проективные модули над коммутативной алгеброй A, т.е. прямые слагаемые в свободных модулях над A). Предположим, что они наделены связностями ∇_0

и ∇_1 соответственно с кривизнами K_0 и K_1. Тогда на A-модуле $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ имеется ассоциированная связность ∇, задаваемая формулой

$$(\nabla T)s := \nabla_1(Ts) - T(\nabla_0 s)$$

с кривизной

$$\nabla^2 T = K_1 T - T K_0.$$

В частности, любая связность ∇ на $\mathcal{E}$ в случае коммутативной алгебры A порождает связность в $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$, задаваемую формулой

$$\nabla T := \nabla \circ T - T \circ \nabla.$$

Пример 9 (связности в векторном расслоении)**.** Пусть M – гладкое компактное многообразие и $E \to M$ – векторное расслоение над M. Обозначим через $\Gamma^\infty(M, E) \equiv \Gamma^\infty(E)$ модуль гладких сечений этого расслоения. Поскольку это расслоение можно вложить в качестве прямого слагаемого в тривиальное векторное расслоение ранга N над M, то указанный модуль можно представить в виде $p\left[C^\infty(M)\right]^N$, где p – проектор в свободном модуле $\left[C^\infty(M)\right]^N$.

Наделим M римановой метрикой g и обозначим через R кривизну этой метрики. Если $s \in \Gamma^\infty(E)$ – гладкое сечение расслоения $E \to M$, т.е. $ps = s$, то

$$Rs = (\nabla_g)^2 s = (pd)(pd)s = pdpds.$$

Дифференцируя соотношение $p^2 = p$ с учетом равенства $s = ps$ выведем для R следующее соотношение

$$R = dpdp\,p = pdpdp = p(dp)^2.$$

Определение 21. *Характером Черна* проектора $p \in \mathrm{Mat}_n(A)$ над коммутативной алгеброй A называется величина

$$\mathrm{ch}\,p := \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{ch}_{2k}(p) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{tr}\,p(dp)^{2k},$$

где tr – матричный след. В случае, когда алгебра A совпадает с $C^\infty(M)$, мы можем рассматривать dp как матрицу, составленную из 1-форм, т.е. $dp \in \mathrm{Mat}_n(\Omega^1(M))$. Тогда каждый член $\mathrm{ch}_{2k}(p) \in \Omega^{2k}(M)$ и, в частности, сумма в определении характера является конечной. В этом случае характер Черна является классом когомологий де Рама многообразия M.

3.4 Когомологии групп и алгебр

Определение 22. *k-Коцепью* на группе Γ называется отображение $f : \Gamma^{k+1} \to \mathbb{C}$, инвариантное относительно действия группы Γ:

$$f(\gamma\gamma_0, \ldots, \gamma\gamma_k) = f(\gamma_0, \ldots, \gamma_k).$$

Обозначим через $C^k(\Gamma, \mathbb{C})^\Gamma$ пространство всех k-коцепей на Γ и введем кограничное отображение $d_k : C^k(\Gamma, \mathbb{C})^\Gamma \to C^{k+1}(\Gamma, \mathbb{C})^\Gamma$ по формуле:

$$d_k f(\gamma_0, \ldots, \gamma_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i f(\gamma_0, \ldots, \widehat{\gamma_i}, \ldots, \gamma_{k+1}),$$

где обозначение $\widehat{\gamma_i}$ означает, что член γ_i в приведенной формуле должен быть опущен.

Определение 23. k-Коцепь $f \in C^k(\Gamma, \mathbb{C})^\Gamma$ называется *k-коциклом*, если $d_k f = 0$ и *k-кограницей*, если $f = d_{k-1}h$ для некоторой $(k-1)$-коцепи $h \in C^{k-1}(\Gamma, \mathbb{C})^\Gamma$. Когомологии группы Γ определяются как

$$H^k(\Gamma, \mathbb{C}) = \operatorname{Ker} d_k / \operatorname{Im} d_{k-1}.$$

Другой способ введения когомологий группы Γ заключается в том, чтобы использовать вместо инвариантных (или однородных) коцепей $C^k(\Gamma, \mathbb{C})^\Gamma$ неоднородные коцепи $C^k(\Gamma, \mathbb{C})$. Множество $C^k(\Gamma, \mathbb{C})$ состоит из произвольных функций $\varphi : \Gamma^k \to \mathbb{C}$, а кограничное отображение $\tilde{d}_k : C^k(\Gamma, \mathbb{C}) \to C^{k+1}(\Gamma, \mathbb{C})$ задается формулой

$$\tilde{d}_k \varphi(\gamma_0, \ldots, \gamma_k) = \varphi(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \varphi(\gamma_0, \ldots, \gamma_i\gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_k) + \\ + (-1)^k \varphi(\gamma_0, \ldots, \gamma_{k-1}).$$

Соответствие

$$C^k(\Gamma, \mathbb{C})^\Gamma \ni f \longleftrightarrow \varphi \in C^k(\Gamma, \mathbb{C})$$

между двумя типами коцепей устанавливается с помощью формул

$$\varphi(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) = f(e, \gamma_1, \gamma_1\gamma_2, \ldots, \gamma_1 \ldots \gamma_k),$$
$$f(\gamma_0, \ldots, \gamma_k) = \varphi(\gamma_0^{-1}\gamma_1, \ldots, \gamma_0^{-1}\gamma_k).$$

Когомологии группы Γ равны в этом случае

$$H^k(\Gamma, \mathbb{C}) = \operatorname{Ker} \tilde{d}_k / \operatorname{Im} \tilde{d}_{k-1}$$

и совпадают с введенными ранее.

Определение 24. *n-Коцепь Хохшильда* на алгебре A — это $(n+1)$-линейный функционал на алгебре A или n-линейная форма на A со значениями в двойственном пространстве A^*. Заметим, что A^* является A-бимодулем относительно операции

$$\varphi \in A^* \longmapsto (b\varphi c)(a) := \varphi(cab).$$

Кограничный оператор b_n сопоставляет n-коцепи $(n+1)$-коцепь по формуле:

$$b_n\varphi(a_0,\ldots,a_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\varphi(a_0,\ldots,a_ja_{j+1},\ldots,a_{n+1}) + (-1)^{n+1}\varphi(a_{n+1}a_0,\ldots,a_n).$$

Когомологии полученного коцепного комплекса называются *когомологиями Хохшильда* алгебры A и обозначаются через $HH^\bullet(A)$ или $H^\bullet(A,A^*)$.

В частности, 0-коцикл τ на алгебре A совпадает со следом, поскольку $\tau \in A^* = \mathrm{Hom}(A,\mathbb{C})$ и

$$\tau(a_0a_1) - \tau(a_1a_0) = b_0\tau(a_0,a_1) = 0.$$

Более общим образом, можно определить когомологии Хохшильда алгебры A со значениями в произвольном A-бимодуле $\mathcal{E}$. Для этого обозначим через $C^n(A,\mathcal{E})$ векторное пространство n-линейных отображений $\varphi : A^n \to \mathcal{E}$, рассматриваемое как A-бимодуль относительно операции: $(b\varphi c)(a_1,\ldots,a_n) := b\varphi(a_1,\ldots,a_n)c$, где $b,c \in A$. Кограничное отображение в этом случае задается формулой

$$b_n\varphi(a_1,\ldots,a_{n+1}) = a_1\varphi(a_2,\ldots,a_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\varphi(a_1,\ldots,a_ja_{j+1},\ldots,a_{n+1}) + \\ + (-1)^{n+1}\varphi(a_1,\ldots,a_n)a_{n+1}.$$

Определение 25. n-Коцепь φ на алгебре A называется *циклической*, если $\lambda\varphi = \varphi$, где

$$\lambda\varphi(a_0,\ldots,a_n) := (-1)^n\varphi(a_n,a_0,\ldots,a_{n-1}).$$

Например, циклический 1-коцикл φ удовлетворяет соотношениям: $\varphi(a_0,a_1) = -\varphi(a_1,a_0)$ и

$$\varphi(a_0a_1,a_2) - \varphi(a_0,a_1a_2) + \varphi(a_2a_0,a_1) = 0,$$

а циклическая 1-кограница $\varphi = b_1\psi$ определяется равенством

$$\varphi(a_0,a_1) = b_1\psi(a_0,a_1) = \psi([a_0,a_1]),$$

т.е. является линейной функцией от коммутатора.

Определение 26. Предположим, что нам задан n-мерный цикл $(\Omega^\bullet, d, \int)$ над алгеброй A. Его *характером Черна* называется $(n+1)$-линейный функционал на A, задаваемый формулой

$$\tau(a_0, \dots, a_n) := \int a_0 da_1 \dots da_n.$$

Заметим прежде всего, что τ является коциклом, т.е. $b_n\tau = 0$. Действительно,

$$\int \sum_{j=0}^{n} (-1)^j a_0 da_1 \dots d(a_j a_{j+1}) \dots da_{n+1} + (-1)^{n+1} \int a_{n+1} a_0 da_1 \dots da_n =$$
$$= (-1)^n \int (a_0 da_1 \dots da_n) a_{n+1} + (-1)^{n+1} \int (a_{n+1} a_0 da_1 \dots da_n) = 0,$$

поскольку $\int a\omega^n = \int \omega^n a$ для любых $a \in A$, $\omega^n \in \Omega^n$.

Кроме того, коцикл τ является циклическим, поскольку

$$\tau(a_0, a_1, \dots, a_n) = (-1)^{n-1} \int da_n a_0 da_1 \dots da_{n-1} =$$
$$= (-1)^n \int a_n da_0 da_1 \dots da_{n-1} = (-1)^n \tau(a_n, a_0, \dots, a_{n-1}).$$

Еще одно важное свойство введенного коцикла: $\tau(1, a_1, \dots, a_n) = \int da_1 \dots da_n = 0$.

Теорема 5. *$(n+1)$-линейный функционал $\tau : A^{n+1} \to \mathbb{C}$, зануляющийся на $\mathbb{C} \oplus A^n$, является циклическим n-коциклом тогда и только тогда, когда он совпадает с характером Черна некоторого n-мерного цикла над A.*

Доказательство. Мы уже показали, что характер Черна n-мерного цикла над A обладает указанными свойствами. Обратно, если $(n+1)$-линейный функционал $\tau : A^{n+1} \to \mathbb{C}$ является циклическим коциклом, зануляющимся на $\mathbb{C} \oplus A^n$, то мы можем построить n-мерный цикл над A, для которого указанный коцикл будет характером Черна, следующим образом.

Пусть $\Omega^\bullet = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k A$ с универсальным дифференциалом d на $\Omega^k A$ при $k < n$. Дополним это определение при $k = n$, полагая: $d|\Omega^n A = 0$. Определим далее интеграл $\int : \Omega^n A \to \mathbb{C}$ посредством

$$\int a_0 da_1 \dots da_n := \tau(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Покажем, что этот интеграл действительно задает характер Черна. Для этого нужно убедиться в том, что $(\Omega^\bullet, d, \int)$ является n-мерным циклом над A.

Имеем: $\Omega^n A = A \otimes \bar{A}^{\otimes n}$, откуда следует, что форма $a_0 da_1 \dots da_n$ не изменится, если заменить какой-либо из элементов a_j с $1 \le j \le n$ на $a_j + \lambda_j 1_A$ с $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Для того, чтобы показать, что введенный нами интеграл корректно определен, нужно проверить, что $\tau(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$, если один из элементов $a_j = 1$. Но это вытекает из соотношения $\tau(1, a_1, \dots, a_n) = 0$ и цикличности τ. Кроме того, $\int da_1 \dots da_n = 0$ (замкнутость $\int$).

Остается проверить свойство перестановочности:

$$\int \omega^k \omega^{n-k} = (-1)^{k(n-k)} \int \omega^{n-k} \omega^k.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $k = n$, при этом $\omega^0 =: a \in A$. Справедливо соотношение:

$$\omega^n a - a\omega^n = [\omega^n, a] = (-1)^n b(\omega^n da).$$

Так как $b\tau = 0$, то отсюда следует, что $\int \omega^n a = \int a\omega^n$.

Далее, если $\omega^{n-1} \in \Omega^{n-1} A$ и $da \in \Omega^1 A$, то

$$\omega^{n-1} da - (-1)^{n-1} da\omega^{n-1} = [\omega^{n-1}, da] = \\ = (-1)^{n-1} \left(d[\omega^{n-1}, a] - [d\omega^{n-1}, a] \right) = (-1)^{n-1} d[\omega^{n-1}, a] + b(d\omega^{n-1} da).$$

Так как $b\tau = 0$ и интеграл $\int$ замкнут, то

$$\int \omega^{n-1} da = (-1)^{n-1} \int da\omega^{n-1}.$$

Пользуясь последовательно двумя разобранными случаями, покажем, что и в общем случае

$$\int \omega^{n-k} a_0 da_1 \dots da_k = (-1)^{n-1} \int da_k \omega^{n-k} da_1 \dots da_{k-1} = \dots \\ (-1)^{k(n-1)} \int a_0 da_1 \dots da_k \omega^{n-k} = (-1)^{k(n-k)} \int a_0 da_1 \dots da_k \omega^{n-k}.$$

$\square$

Глава 4

КВАНТОВЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И КВАНТОВОЕ СООТВЕТСТВИЕ

В этой главе мы рассмотрим еще одно приложение некоммутативной геометрии, на этот раз к теории функций вещественных переменных.

4.1 Квантовое соответствие

Определение 27. *Алгеброй наблюдаемых* называется ассоциативная алгебра A с единицей и инволюцией, которая наделена дифференциалом

$$d : A \longrightarrow \Omega^1 A.$$

Квантованием такой алгебры называется линейное представление π наблюдаемых из A замкнутыми линейными операторами, действующими в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, называемом *пространством квантования*. Требуется, чтобы под действием π инволюция в A переходила в эрмитово сопряжение операторов, а дифференциал d в коммутатор с *оператором симметрии* S. Напомним, что S есть самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$ с квадратом $S^2 = I$. Иными словами,

$$\pi : df \longmapsto d^q f := [S, \pi(f)], \quad f \in A,$$

где оператор $d^q f := [S, \pi(f)]$ называется *квантовым дифференциалом* наблюдаемой f. Алгебра Ли A^q, порождаемая квантовыми дифференциалами $d^q f$, называется *квантовой алгеброй наблюдаемых*, отвечающей A, а оператор $\pi(f)$ — *квантовой наблюдаемой*, ассоциированной с наблюдаемой f.

Рассмотрим в качестве примера алгебру наблюдаемых

$$A_R := L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}),$$

состоящую из ограниченных функций на вещественной прямой $\mathbb{R}$, с естественной инволюцией, задаваемой комплексным сопряжением. Наряду с алгеброй A_R мы будем рассматривать ее аналог $A_S := L^\infty(S^1, \mathbb{C})$ для единичной окружности S^1. Хотя теории для A_R и A_S формально не эквивалентны, они параллельны друг другу и полезно развивать их одновременно.

Начнем с алгебры A_R. Каждая наблюдаемая $f \in A_R$ задает ограниченный оператор умножения M_f в гильбертовом пространстве $H_R = L^2(\mathbb{R})$, действующий по формуле:

$$M_f : h \in H_R \longmapsto fh \in H_R.$$

Сопоставление $f \mapsto M_f$ определяет линейное представление алгебры A_R в пространстве квантования H_R.

Дифференциал общей наблюдаемой $f \in A_R$ не определен в классическом смысле, поэтому мы не можем снабдить алгебру A_R классическим дифференциалом d и рассматривать ее как классическую алгебру наблюдаемых. Однако, квантовый аналог d^q оператора d допускает, как мы увидим ниже, корректное определение. В этом состоит одно из преимуществ квантового дифференциала перед классическим, которое мотивирует применение некоммутативной геометрии в теории функций вещественных переменных.

Оператор симметрии S_R на пространстве H_R задается, как в п.3.2, *преобразованием Гильберта*

$$(S_R f)(x) = \frac{i}{\pi} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t)}{t} dt, \quad f \in H_R, \tag{4.1}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, т.е.

$$\text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t)}{t} dt := \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|t| \geq \epsilon} \frac{f(x-t)}{t} dt.$$

Хорошо известно (см. [33],[34]), что S_R является оператором симметрии в H_R и обладает следующими свойствами:

1. S_R коммутирует с трансляциями;
2. S_R коммутирует с положительными растяжениями;
3. S_R антикоммутирует с отражениями.

Более того, любой ограниченный оператор в H_R с этими свойствами является скалярным кратным оператора Гильберта.

Квантовый дифференциал

$$d_R^q f := [S_R, M_f]$$

корректно определен как оператор в H_R для функций $f \in A_R$ (и даже для функций из пространства BMO($\mathbb{R}$), см. ниже). Он является интегральным оператором вида

$$(d_R^q f)(h)(x) = \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} k_f(x,t) h(t) dt, \quad h \in H_R, \tag{4.2}$$

где

$$k_f(x,t) = \frac{f(x) - f(t)}{x - t}.$$

Оператор (4.2) можно рассматривать как квантовую версию классического оператора дифференцирования d.

Аналогичные результаты имеют место и в случае единичной окружности. Именно, обозначим через $H_S = L_0^2(S^1, \mathbb{C})$ гильбертово пространство квадратично суммируемых функций на S^1 с нулевым средним по окружности и рассмотрим снова ограниченный оператор умножения M_f, $f \in A_S$, действующий в пространстве H_S. Оператор симметрии S_S на H_S задается снова *преобразованием Гильберта*, действующим по формуле

$$(S_S h)(\phi) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{P.V.} \int_0^{2\pi} K_S(\phi, \psi) h(\psi) d\psi, \quad h \in H_S. \tag{4.3}$$

(Здесь и далее мы отождествляем функции $f(z)$ на окружности S^1 с функциями $f(\phi) := f(e^{i\phi})$ на отрезке $[0, 2\pi]$.) Ядро Гильберта в формуле (4.3) задается выражением

$$K_S(\phi, \psi) = 1 + i \operatorname{ctg} \frac{\phi - \psi}{2}\,.$$

Заметим, что при $\phi \to \psi$ оно ведет себя как $1 + \frac{2i}{\phi - \psi}$.

Квантовый дифференциал

$$d_S^q f := [S_S, M_f]$$

корректно определен как интегральный оператор в H_S для функций $f \in A_S$, задаваемый формулой

$$(d_S^q f)(h)(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_f(\phi, \psi) h(\psi) d\psi, \quad h \in H_S, \tag{4.4}$$

где
$$k_f(\phi,\psi)=K_S(\phi,\psi)(f(\phi)-f(\psi)).$$
При $\phi\to\psi$ это ядро ведет себя как (с точностью до константы)
$$\frac{f(\phi)-f(\psi)}{\phi-\psi}.$$

Таким образом, в рассмотренных примерах квантование сводится по существу к замене производной ее конечно-разностным аналогом. Подобное квантование Конн [9] называет *"квантовым исчислением"*, а возникающее соответствие между функциональными пространствами и квантовыми алгебрами наблюдаемых *квантовым соответствием.*

Приведем несколько утверждений из этого исчисления.

1) Квантовый дифференциал $d^q_R f$ является оператором конечного ранга тогда и только тогда, когда функция f рациональна (теорема Кронекера).

2) Квантовый дифференциал $d^q_R f$ является компактным оператором тогда и только тогда, когда функция f принадлежит классу VMO($\mathbb{R}$).

3) Квантовый дифференциал $d^q_R f$ является ограниченным оператором тогда и только тогда, когда функция f принадлежит классу BMO($\mathbb{R}$).

Аналогичные результаты имеют место для квантового дифференциала d^q_S и могут быть получены из соответствующих утверждений для операторов Ганкеля (см. [25],[26]), пользуясь связью между этими операторами и квантовыми дифференциалами, установленной в п.4.3.

Напомним для полноты определения пространства BMO($\mathbb{R}$) функций ограниченной средней осцилляции и пространства VMO($\mathbb{R}$) функций исчезающей средней осцилляции.

Обозначим через
$$f_I:=\frac{1}{|I|}\int_I f(x)dx$$
среднее функции $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ по отрезку I вещественной оси длины $|I|$. Если
$$M(f):=\sup_I\frac{1}{|I|}\int_I|f(x)-f_I|dx<\infty,$$
будем говорить, что функция f принадлежит пространству BMO($\mathbb{R}$).

Введем еще одно обозначение
$$M_\delta(f):=\sup_{|I|<\delta}\frac{1}{|I|}\int_I|f(x)-f_I|dx,$$

где $\delta > 0$. В терминах этой функции $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда верхняя грань $\sup_{\delta>0} M_\delta(f)$ конечна. Будем говорить, что функция $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ принадлежит пространству $\mathrm{VMO}(\mathbb{R})$, если $M_\delta(f) \to 0$ при $\delta \to 0$.

4.2 Операторы Гильберта–Шмидта

Рассмотрим теперь идеал операторов Гильберта–Шмидта, действующих в пространстве квантования $\mathcal{H}$, и установим, какое функциональное пространство отвечает ему при квантовом соответствии. В этом случае роль пространства квантования $\mathcal{H}$ будет играть соболевское пространство полудифференцируемых функций.

Определение 28. *Соболевское пространство полудифференципуемых функций* есть гильбертово пространство

$$V_S = H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R}),$$

состоящее из функций $f \in L_0^2(S^1, \mathbb{R})$ с нулевым средним по окружности и обобщенной производной порядка $1/2$, принадлежащей $L^2(S^1, \mathbb{R})$. Иными словами, оно состоит из функций $f \in L^2(S^1, \mathbb{R})$, имеющих разложения Фурье вида

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} f_n z^n, \quad \bar{f}_n = f_{-n},\ z = e^{i\theta},$$

с конечной соболевской нормой порядке $1/2$:

$$\|f\|_{1/2}^2 = \sum_{n \neq 0} |n||f_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} n|f_n|^2 < \infty.$$

Скалярное произведение в этом пространстве в терминах коэффициентов Фурье задается формулой

$$(\xi, \eta) = \sum_{n \neq 0} |n|\xi_n \bar{\eta}_n = 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} n\xi_n \bar{\eta}_n,$$

на векторах $\xi, \eta \in V_S$.

Комплексификация $V_S^{\mathbb{C}} = H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{C})$ пространства V_S является комплексным гильбертовым пространством, состоящим из функций $f \in L^2(S^1, \mathbb{C})$, имеющих разложения Фурье вида

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} f_n z^n$$

с конечной соболевской нормой $\|f\|^2_{1/2} = \sum_{n\neq 0} |n||f_n|^2 < \infty$. Это пространство допускает разложение

$$V_S^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$$

в прямую сумму подпространств $W_\pm$, состоящих из функций

$$f(z) = \sum_{n\neq 0} f_n z^n$$

с коэффициентами Фурье f_n, зануляющимися при $\mp n > 0$.

Пространство V_S допускает реализацию в виде *пространства Дирихле* $\mathcal{D}_S$ функций $h \in H^1(\mathbb{D})$ в единичном круге $\mathbb{D}$, гармонических в $\mathbb{D}$ и нормированных условием $h(0) = 0$. Иными словами, функции h являются экстремалями функционала энергии

$$E(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} |\mathrm{grad}\, h(z)|^2 dxdy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \left(\left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right|^2 \right) dxdy < \infty.$$

Хорошо известно, что преобразование Пуассона

$$P_S f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_S(\zeta, z) f(\zeta) d\vartheta, \quad \zeta = e^{i\vartheta},$$

где $P_S(\zeta, z)$ – ядро Пуассона в круге $\mathbb{D}$:

$$P_S(\zeta, z) = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2},$$

устанавливает изометрический изоморфизм

$$P_S : V_S \longrightarrow \mathcal{D}_S$$

между соболевским пространством V_S и пространством Дирихле $\mathcal{D}_S$, наделенным нормой

$$\|h\|^2_{\mathcal{D}_S} := E(h).$$

Аналогичные результаты справедливы в случае вещественной прямой $\mathbb{R}$. Обозначим через $V_R = H^{1/2}(\mathbb{R})$ соболевское пространство функций на $\mathbb{R}$ с показателем $1/2$. Преобразование Пуассона P_R устанавливает изометрический изоморфизм между V_R и пространством $\mathcal{D}_R$ функций $h \in H^1(\mathbb{H})$, гармонических в верхней полуплоскости $\mathbb{H}$.

В случае верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ имеется еще одна полезная интерпретация соболевского пространства $V_R = H^{1/2}(\mathbb{R})$. А именно, справедлива следующая *формула Дугласа*, выражающая энергию отображения $P_R f$, $f \in V_R$, в терминах конечно-разностной производной f:

$$E(P_R f) = \|f\|_{1/2}^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right]^2 dxdy, \tag{4.5}$$

где P_R – преобразование Пуассона в $\mathbb{H}$. Из этой формулы, в частности, следует, что функции $f \in V_R$ имеют L^2-ограниченные конечно-разностные производные.

Похожие результаты справедливы для функций $f \in V_S$, нужно только заменить интеграл в формуле (4.5) интегралом вида

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\phi) - f(\psi)|^2}{\sin^2\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right)} d\phi\, d\psi.$$

Вернемся к задаче квантования, сформулированной выше, и возьмем в качестве алгебры наблюдаемых алгебру $A_S = L^\infty(S^1, \mathbb{C})$. Справедлива следующая интерпретация соболевского пространства $V_S^{\mathbb{C}}$ в терминах квантового соответствия.

Теорема 6. *Функция f принадлежит соболевскому пространству $V_S^{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда ее квантовый дифференциал $d_S^q f$ является оператором Гильберта–Шмидта на $V_S^{\mathbb{C}}$. Более того, норма Гильберта–Шмидта оператора $d_S^q f$ совпадает с соболевской нормой $\|f\|_{1/2}$.*

Напомним, что $d_S^q f := [S_S, M_f]$ является интегральным оператором на $V_S^{\mathbb{C}}$ с ядром, равным

$$k_f(\phi, \psi) = K_S(\phi, \psi)(f(\phi) - f(\psi))$$

Этот оператор есть оператор Гильберта–Шмидта тогда и только тогда, когда его ядро $k_f(\phi, \psi)$ квадратично интегрируемо на $S^1 \times S^1$, что эквивалентно условию

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\phi) - f(\psi)|^2}{\sin^2\left(\frac{\phi-\psi}{2}\right)} d\phi\, d\psi < \infty. \tag{4.6}$$

Последний интеграл совпадает согласно формуле Дугласа с $\|f\|_{1/2}^2$.

Аналогичный результат имеет место и для пространства $V_R^{\mathbb{C}}$, нужно только использовать формулу Дугласа (4.5) для вещественной прямой.

4.3 Интерпретация классов Шэттена

Введенные квантовые дифференциалы тесно связаны с операторами Ганкеля, которые определяются следующим образом.

Пусть функция φ принадлежит пространству $V_S^{\mathbb{C}}$. Обозначим через $P_\pm$ ортогональные проекторы $P_\pm : V_S^{\mathbb{C}} \to W_\pm$. *Оператор Ганкеля* $H_\varphi : W_+ \to W_-$ задается формулой

$$H_\varphi h := P_-(\varphi h).$$

Известно (см. [25]), что этот оператор ограничен в W_+, если $P_-\varphi \in \mathrm{BMO}(S^1)$. Аналогичным образом можно ввести оператор Ганкеля $\widetilde{H_\varphi} : W_- \to W_+$, задаваемый формулой: $\widetilde{H_\varphi} h := P_+(\varphi h)$.

Квантовый дифференциал

$$(d_S^q f)h = [S_S, M_f]h,\ f \in A_S, h \in V_S^{\mathbb{C}},$$

можно переписать, пользуясь хорошо известными соотношениями: $S_S = P_+ - P_-$, $P_+ + P_- = I$ и $P_+P_- = P_-P_+ = 0$, в следующем виде

$$[S_S, M_f]h = -2P_- f P_+ h + 2P_+ f P_- h.$$

Последнее выражение совпадает с $-2P_- fh$ при $h \in W_+$ и с $2P_+ fh$ при $h \in W_-$. Иными словами, оператор $d_S^q f$ с $f \in A_S$ является прямой ортогональной суммой двух операторов Ганкеля и описание идеалов квантовых дифференциалов $d_S^q f$ сводится к описанию соответствующих классов операторов Ганкеля. В случае идеалов Шэттена такое описание получено Пеллером в [25].

Для того, чтобы сформулировать его результат, напомним определение *пространств Бесова* B_p. Пространство B_p, $1 < p < \infty$, есть

$$B_p = \left\{ f \in L^p(S^1) : \quad \int_{S^1} \frac{\|f(\zeta) - f(z)\|_p^p}{|1-\zeta|^2} d\vartheta < \infty \right\},\ \zeta = e^{i\vartheta}.$$

Теорема 7 (Пеллер)**.** *Пусть $f \in A_S$. Оператор Ганкеля H_f принадлежит классу Шэттена $\mathcal{L}^p$ с $1 < p < \infty$ тогда и только тогда, когда $P_- f \in B_p$.*

Из этой теоремы следует, что квантовый дифференциал $d_S^q f$ принадлежит классу $\mathcal{L}^p$ тогда и только тогда, когда $P_\pm f \in B_p$, т.е. имеет место следующая

Теорема 8. *Квантовый дифференциал $d_S^q f$ принадлежит классу Шэттена $\mathcal{L}^p$ с $1 < p < \infty$ тогда и только тогда, когда $f \in B_p$.*

Оставляем формулировку аналогичного результата для квантовых дифференциалов $d_R^q f$ читателю.

4.4 Квантовые дифференциалы в пространствах функций нескольких вещественных переменных

Перейдем теперь к рассмотрению функций от n переменных. Напомним, что в п. 3.2 мы построили по заданному набору матриц Дирака $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ оператор симметрии S_N, действующий в пространстве вектор-функций $\mathbf{h} \in H_N = \left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)^N$ по формуле

$$S_N \mathbf{h} := \sum_{j=1}^{n} \gamma_j R_j \mathbf{h},$$

где R_j, $1 \leq j \leq n$, – операторы Рисса. Ассоциированный квантовый дифференциал $d^q_N f = [S_N, M_f]$ равен

$$(d^q_N f)(\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{n} c_n \gamma_j \int_{\mathbb{R}^n} k^j_f(x,t) \mathbf{h}(t) d^n t, \tag{4.7}$$

где

$$k^j_f(x,t) = \frac{[f(t) - f(x)]\,(t_j - x_j)}{|t - x|^{n+1}}.$$

Введенный квантовый дифференциал можно рассматривать как квантовый аналог *оператора Дирака*

$$D = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \partial_j, \ \ \partial_j := \partial / \partial x_j,$$

ассоциированного со спинорным представлением алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, задаваемым матрицами $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (см. [19]).

Для оператора симметрии S_N имеется следующий результат Янсона–Вольфа [13], который можно рассматривать как n-мерный аналог теоремы Пеллера.

Теорема 9 (Янсон–Вольф)**.** *Пусть $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, где $n \geq 2$. Для того, чтобы квантовый дифференциал $d^q_N f$ принадлежал идеалу Шэттена $\mathcal{L}^p$ с $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

1. *$f \equiv const$ при $p \leq n$;*

2. *$f \in B_p$ при $p < n$.*

Глава 5

КВАНТОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА ТЕЙХМЮЛЛЕРА

5.1 Квазисимметричные гомеоморфизмы

Напомним, что сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $w : \Delta \to \Delta$ единичного круга D на себя с локально интегрируемыми производными называется *квазиконформным*, если существует ограниченная измеримая функция $\mu \in L^\infty(\Delta, \mathbb{C})$, имеющая норму $\|\mu\|_\infty =: k < 1$ такая, что следующее *уравнение Бельтрами*

$$w_{\bar{z}} = \mu w_z$$

выполняется почти всюду в Δ. Функция μ называется *дифференциалом Бельтрами.*

В случае, когда $k = 0$, т.е. $\mu = 0$, уравнение Бельтрами совпадает с уравнением Коши–Римана, поэтому в этом случае отображение w является конформным. Как известно, такие гомеоморфизмы w характеризуются следующим свойством: касательное к w отображение в произвольной точке $z \in \Delta$ переводит окружности с центром в нуле касательного пространства $T_z\Delta$ снова в окружности на $T_{w(z)}\Delta$ с центром в нуле. Гладкие квазиконформные гомеоморфизмы w характеризуются аналогичным свойством, а именно касательное отображение к такому гомеоморфизму w в произвольной точке $z \in \Delta$ посылает окружности с центром в начале на $T_z\Delta$ в эллипсы на $T_{w(z)}\Delta$ с центром в начале и отношением большой полуоси к малой, ограниченным общей константой $K < \infty$, не зависящей от z.

Приведем несколько основных свойств квазиконформных отображений, доказательство которых можно найти в книге [1].

1. Квазиконформные гомеоморфизмы $w : \Delta \to \Delta$ непрерывно (на самом деле, непрерывно по Гельдеру) продолжаются на границу $S^1 = \partial\Delta$ до гомеомоморфизмов $S^1 \to S^1$.

2. Композиция квазиконформных отображений $\Delta \to \Delta$ является снова квазиконформным отображением. То же самое верно для отображений, обратных к квазиконформным. Тем самым, квазиконформные автоморфизмы круга Δ образуют группу относительно операции композиции.

3. Решения уравнения Бельтрами однозначно определены с точностью до конформных отображений. Более подробно, если имеются два решения этого уравнения с одним и тем же дифференциалом Бельтрами μ, то оба отображения $w_1 \circ w_2^{-1}$ и $w_2 \circ w_1^{-1}$ являются конформными.

4. Для любой измеримой ограниченной функции μ на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ с $\|\mu\|_\infty < 1$ найдется решение w уравнения Бельтрами
$$\bar{\partial} w = \mu \partial w,$$
являющееся квазиконформным отображением, дифференциал которого почти всюду совпадает с μ.

Согласно свойству 1) произвольный квазиконформный гомеоморфизм $w : \Delta \to \Delta$ единичного круга Δ на себя непрерывно продолжается на границу S^1 до гомеоморфизма замыканий $\overline{\Delta} \to \overline{\Delta}$. Спрашивается, когда верно обратное утверждение, т.е. когда заданный гомеоморфизм единичной окружности S^1 на себя продолжается до квазиконформного гомеоморфизма $\Delta \to \Delta$?

Разберем этот вопрос сначала в случае верхней полуплоскости $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Назовем монотонно возрастающий гомеоморфизм $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *квазисимметричным*, если найдется $0 < k < 1$ такое, что
$$\frac{1}{k} \le \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \le k, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$
для всех $t > 0$.

Теорема 10 (Берлинг–Альфорс)**.** *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть квазисимметричный гомеоморфизм. Тогда найдется квазиконформный гомеоморфизм $w : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, граничное значение которого совпадает с f*

Приведем идею доказательства этого результата (полное доказательство см. в [1]).

Определим отображение w, заданное на замыкании $\overline{\mathbb{H}}$, по формуле

$$w(x+iy) = \frac{1}{2}\int_0^1 [f(x+ty) + f(x-iy)]\,dt + \frac{i}{2}\int_0^1 [f(x+ty) - f(x-iy)]\,dt.$$

Очевидно, что на вещественной оси $w(x) = f(x)$. Если ввести обозначение

$$\alpha(x,y) = \int_0^1 f(x+ty)dt = \frac{1}{y}\int_x^{x+y} f(t)dt,$$
$$\beta(x,y) = \int_0^1 f(x-ty)dt = \frac{1}{y}\int_{x-y}^{x} f(t)dt,$$

то формула для w запишется в виде

$$w(x+iy) = \frac{\alpha+\beta}{2} + i\frac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

Геометрический смысл функций α и β очевиден: функция $\alpha(x,y)$ сопоставляет точке $x+iy \in \mathbb{H}$ среднее значение функции f на отрезке $[x, x+y]$, а функция $\beta(x,y)$ – среднее значение f на отрезке $[x-y, x]$.

Функции α и β непрерывно дифференцируемы по x и y и определяемое ими отображение $w : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ имеет положительный якобиан (вычисленный в [1]). Из этого факта и того, что граничное значение w, совпадающее с f, является монотонно возрастающим гомеоморфизмом $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, следует, что w задает гомеоморфизм $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Условие квазиконформности w переписывается в терминах неравенства, связывающего значения функции f в точках x, $x+y$ и $x-y$, выполнение которого обеспечивается условием (5.1).

В случае единичного круга Δ условие квазисимметричности Берлинга–Альфорса (5.1) удобно формулировать в терминах перекрестного отношения. Напомним, что *перекрестным* (или *двойным) отношением* четырех попарно различных точек z_1, z_2, z_3, z_4 на комплексной плоскости называется величина

$$CR(z_1,z_2,z_3,z_4) := \frac{z_4-z_1}{z_4-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\,.$$

Совпадение перекрестных отношений $CR(z_1,z_2,z_3,z_4) = CR(w_1,w_2,w_3,w_4)$ является необходимым и достаточным условием существования конформного преобразования комплексной плоскости, переводящего точки (z_1,z_2,z_3,z_4) в точки (w_1,w_2,w_3,w_4).

Назовем сохраняющий ориентацию гомеоморфизм f единичной окружности S^1 на себя *квазисимметричным*, если при некотором $0 < \epsilon < 1$ он удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2}(1-\epsilon) \le CR\left(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)\right) \le \frac{1}{2}(1+\epsilon) \tag{5.2}$$

для любой четверки попарно различных точек z_1, z_2, z_3, z_4 на S^1 с перекрестным отношением $CR(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{2}$.

Условие (5.2) является аналогом условия Берлинга–Альфорса (5.1) для единичного круга Δ. Как и в случае верхней полуплоскости $\mathbb{H}$, оно гарантирует квазиконформную продолжаемость квазисимметричного гомеоморфизма $f : S^1 \to S^1$ внутрь Δ.

Поскольку любой диффеоморфизм окружности S^1 на себя, сохраняющий ориентацию, очевидно, удовлетворяет условию (5.2), то он квазисимметричен, т.е. допускает продолжение до квазиконформного диффеоморфизма единичного круга Δ.

Пользуясь геометрическим определением квазиконформных отображений (см.[21]), нетрудно показать, что граничное значение произвольного квазиконформного гомеоморфизма единичного круга на себя является квазисимметричным гомеоморфизмом единичной окружности S^1. Теорема Берлинга–Альфорса утверждает, что верно и обратное: любой квазисимметричный гомеоморфизм окружности продолжается до квазиконформного гомеоморфизма круга. Тем самым, квазисимметричные гомеоморфизмы S^1 можно определить также, как граничные значения квазиконформных гомеоморфизмов Δ.

5.2 Определение универсального пространства Тейхмюллера

Так как квазиконформные гомеоморфизмы единичного круга Δ образуют группу относительно композиции, то и квазисимметричные гомеоморфизмы единичной окружности S^1 образуют группу относительно этой операции. Мы обозначаем ее через $\mathrm{QS}(S^1)$. Как было отмечено выше, группа $\mathrm{QS}(S^1)$ содержит группу $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ диффеоморфизмов S^1, сохраняющих ориентацию. Тем самым, имеется цепочка вложений

$$\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \subset \mathrm{Diff}_+(S^1) \subset \mathrm{QS}(S^1) \subset \mathrm{Homeo}_+(S^1),$$

где $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ обозначает группу гомеоморфизмов S^1, сохраняющих ориентацию, а $\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ — группу дробно-линейных автоморфизмов единичного круга Δ, суженных на S^1.

Определение 29. Пространство

$$\mathcal{T} = \mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$$

называется *универсальным пространством Тейхмюллера.*

Пространство $\mathcal{T}$ можно отождествить с подпространством $\mathrm{QS}(S^1)$, состоящим из *нормализованных квазисимметричных гомеоморфизмов* окружности, оставляющих три точки окружности S^1 неподвижными. В качестве таких точек принято выбирать ± 1 и $-i$.

Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ содержит в качестве подпространства пространство

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1),$$

которое можно отождествить с пространством *нормализованных квазисимметричных диффеоморфизмов* окружности.

Поскольку понятие квазиконформности определяется через дифференциалы Бельтрами, удобно иметь определение универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ непосредственно в терминах этих дифференциалов.

Обозначим пространство дифференциалов Бельтрами в единичном круге Δ через $B(\Delta)$. Его можно отождествить с единичным шаром в комплексном банаховом пространстве $L^\infty(\Delta)$.

Пусть $\mu \in B(\Delta)$ есть дифференциал Бельтрами в круге Δ. Продолжим его до дифференциала Бельтрами $\hat{\mu}$ во всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ с помощью симметрии относительно окружности S^1, полагая

$$\hat{\mu}(\frac{1}{z}) := \overline{\mu(z)}\,\frac{z^2}{\bar{z}^2} \quad \text{при } z \in \Delta.$$

Применяя теорему существования квазиконформных отображений к уравнению Бельтрами с продолженным дифференциалом Бельтрами $\hat{\mu}$, найдем нормализованный квазиконформный гомеоморфизм w_μ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ с дифференциалом Бельтрами $\hat{\mu}$. В силу теоремы единственности этот гомеоморфизм w_μ должен быть симметричен относительно S^1 и, следовательно, отображать окружность S^1 в себя. Таким образом, мы можем сопоставить исходному дифференциалу Бельтрами μ нормализованный квазисимметричный гомеоморфизм окружности $w_\mu|_{S^1}$:

$$B(\Delta) \ni \mu \longmapsto w_\mu|_{S^1} \in \mathcal{T}.$$

Это отображение взаимнооднозначно по модулю следующего отношения эквивалентности дифференциалов Бельтрами:

$$\mu \sim \nu \Longleftrightarrow w_\mu|_{S^1} \equiv w_\nu|_{S^1} .$$

Следовательно, универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ можно отождествить с фактором

$$\mathcal{T} = B(\Delta)/\sim \ .$$

По-другому заданный дифференциал Бельтрами $\mu \in B(\Delta)$ можно продолжить на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ до дифференциала Бельтрами $\check{\mu}$, полагая:

$$\check{\mu}(z) \equiv 0 \quad \text{при } z \in \Delta_- := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Delta}.$$

Применяя теорему существования квазиконформных отображений к уравнению Бельтрами с продолженным дифференциалом Бельтрами $\check{\mu}$, получим квазиконформный гомеоморфизм w^μ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ с дифференциалом Бельтрами $\check{\mu}$. Удобно нормализовать его условием фиксации точек $0, 1, \infty$. Построенный нормализованный квазиконформный гомеоморфизм w^μ будет конформным на дополнении Δ_- к замкнутому единичному кругу $\overline{\Delta}$.

Назовем *квазикругом* образ единичного круга Δ при квазиконформном отображении, а *квазиокружностью* образ единичной окружности S^1 при таком отображении. С учетом этого определения мы только что построили отображение

$$B(\Delta) \ni \mu \longmapsto \text{квазикруг } \Delta^\mu := w^\mu(\Delta) \text{ в } \overline{\mathbb{C}}.$$

Это отображение взаимнооднозначно по модулю следующего отношения эквивалентности дифференциалов Бельтрами:

$$\mu \approx \nu \Longleftrightarrow w^\mu|_{\Delta_-} \equiv w^\nu|_{\Delta_-} .$$

Можно показать (см. [31]), что введенные отношения эквивалентности дифференциалов Бельтрами совпадают, т.е.

$$\mu \sim \nu \Longleftrightarrow \mu \approx \nu.$$

Благодаря этому факту, получаем еще две интерпретации универсального пространства Тейхмюллера:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \{&\text{пространство нормализованных квазикругов в } \overline{\mathbb{C}}\} = \\ &= \{\text{пространство нормализованных квазиконформных} \\ &\qquad \text{отображений } \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}, \text{ конформных в круге } \Delta_-\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Связь между двумя реализациями универсального пространства Тейхмюллера в виде пространства нормализованных квазисимметричных гомеоморфизмов окружности S^1 и пространства нормализованных квазикругов в $\hat{\mathbb{C}}$ может быть установлена и непосредственным образом.

Для этого воспользуемся следующей задачей факторизации, представляющей самостоятельный интерес. Пусть f – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности S^1 на себя. Требуется найти конформные отображения w_+ и w_-, заданные соответственно в круге $\Delta_+ \equiv \Delta$ и его внешности Δ_-, такие что

$$f = w_+^{-1} \circ w_- \quad \text{на } S^1 \tag{5.4}$$

Пара отображений (w_+, w_-) называется *нормализованной*, если отображения $w_\pm$ оставляют на месте точки $\pm 1, -i$.

Лемма 1. *Пусть f есть нормализованный квазисимметричный гомеоморфизм окружности S^1 на себя. Тогда задача факторизации* (5.4) *допускает единственное нормализованное решение.*

Действительно, для данного гомеоморфизма f по теореме Берлинга–Альфорса найдется нормализованный квазиконформный гомеоморфизм $w : \Delta_+ \to \Delta_+$ такой, что $w|_{S^1} = f$. Обозначим через μ его дифференциал Бельтрами. Продолжим μ на $\overline{\mathbb{C}}$ нулем вне Δ_+ до дифференциала Бельтрами $\check{\mu}$ и обозначим через $\tilde{w}^\mu$ квазиконформный гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$, дифференциал Бельтрами которого совпадает с $\check{\mu}$, оставляющий на месте точки $\pm 1, -i \in S^1$. Тогда отображения

$$w_+ : = \tilde{w}^\mu|_{\Delta_+} \circ w_\mu^{-1} : \Delta_+ \longrightarrow \text{квазикруг } \tilde{\Delta}_+^\mu \tag{5.5}$$

$$w_- : = \tilde{w}^\mu|_{\Delta_-} : \Delta_- \longrightarrow \text{квазикруг } \tilde{\Delta}_-^\mu \tag{5.6}$$

конформны соответственно в Δ_+ и Δ_- (конформность w_+ вытекает из того, что гомеоморфизмы $\tilde{w}^\mu$ и w_μ имеют один и тот же дифференциал Бельтрами μ в круге Δ_+). Поэтому они задают нормализованное решение задачи факторизации (5.4).

Вернемся к интересующему нас соответствию

$$\{\text{нормализованные квазисимметричные гомеоморфизмы } S^1\} \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \{\text{нормализованные квазикруги в } \overline{\mathbb{C}}\}. \tag{5.7}$$

Если f – нормализованный квазисимметричный гомеоморфизм $S^1 \to S^1$, то он допускает единственную нормализованную факторизацию вида

$$f = w_+^{-1} \circ w_-,$$

где $w_+ = \tilde{w}^\mu|_{\Delta_+} \circ w_\mu^{-1}$, $w_- = \tilde{w}^\mu|_{\Delta_-}$. Сопоставим ему нормализованный квазикруг $\Delta^\mu = \tilde{w}^\mu(\Delta_+)$.

Обратно, если Δ^μ есть нормализованный квазикруг, отвечающий квазиконформному отображению w^μ с дифференциалом Бельтрами μ, рассмотрим отображения

$$w_+ = \tilde{w}^\mu \circ w_\mu^{-1} \quad \text{на } \Delta_+ \quad \text{и} \quad w_- = \tilde{w}^\mu \quad \text{на } \Delta_-.$$

Эти отображения конформны и оставляют на месте точки $\pm 1, -i$ на S^1. Сопоставим им квазисимметричный гомеоморфизм окружности S^1 на себя, задаваемый формулой

$$f = w_+^{-1} \circ w_- \quad \text{на } S^1.$$

Это и есть искомый нормализованный квазисимметричный гомеоморфизм $S^1 \to S^1$.

5.3 Свойства универсального пространства Тейхмюллера

Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ обладает естественной метрикой, называемой *расстоянием Тейхмюллера*, которое определяется следующим образом. Будем представлять точки $\mathcal{T}$ в виде классов $[f]$ квазисимметричных гомеоморфизмов $S^1 \to S^1$. Тогда расстояние между двумя точками $[w_1]$, $[w_2]$ пространства $\mathcal{T}$ можно определить как

$$\tau([w_1],[w_2]) := \frac{1}{2} \inf\{\log K_{w_2 \circ w_1^{-1}} : w_1 \in [w_1], w_2 \in [w_2]\},$$

где K_w есть константа квазиконформности квазиконформного отображения w. Введенная метрика превращает $\mathcal{T}$ в метрическое пространство. Перечислим его основные свойства, доказательства которых можно найти в книге [20].

1. Пространство $\mathcal{T}$ линейно связно.
2. Пространство $\mathcal{T}$ полно, т.е. любая последовательность Коши в $\mathcal{T}$ сходится.
3. Пространство $\mathcal{T}$ стягиваемо.
4. Пространство $\mathcal{T}$ не является топологической группой. Иными словами, операция композиции нормализованных квазисимметричных гомеоморфизмов $S^1 \to S^1$ не является непрерывной в топологии, задаваемой расстоянием Тейхмюллера.

Для того, чтобы ввести на универсальном пространстве Тейхмюллера $\mathcal{T}$ комплексную структуру, построим его вложение в пространство голоморфных квадратичных дифференциалов в круге.

Для этого напомним, прежде всего, определение и свойства производной Шварца. *Производной Шварца* конформного отображения f называется величина

$$S[f] = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = (\log f')' - \frac{1}{2}(\log f')^2 = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Она обладает следующими свойствами (см. [20]).

1. Если f – дробно-линейное отображение, то $S[f] = 0$.

2. Формула композиции:

$$S[f \circ g] = (S[f] \circ g)\, g'^2 + S[g].$$

   В частности,

$$S[f] = S\left[\frac{af+b}{cf+d}\right] \quad \text{для} \quad \frac{az+b}{cz+d} \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\overline{\mathbb{C}}).$$

Пусть точке $[\mu] \in \mathcal{T}$ отвечает нормализованный квазиконформный гомеоморфизм w^μ. Тогда w^μ конформен во внешности Δ_- единичного круга Δ, поэтому мы можем рассмотреть его производную Шварца

$$S\left[w^\mu|_{\Delta_-}\right].$$

Полученная функция на Δ_- не зависит от выбора $\mu \in [\mu]$ и голоморфна по $z \in \Delta_-$. Более того, при конформных заменах координат она преобразуется как квадратичный дифференциал. Отображение $[\mu] \longmapsto S\left[w^\mu|_{\Delta_-}\right]$ является вложением, поскольку из равенства

$$S\left[w^\mu|_{\Delta_-}\right] = S\left[w^\nu|_{\Delta_-}\right]$$

следует, что $w^\mu|_{\Delta_-} = w^\nu|_{\Delta_-}$, т.е. $\mu \sim \nu$.

Итак, мы построили вложение

$$\Psi : \mathcal{T} \longrightarrow B_2(\Delta_-)$$

универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ в пространство $B_2(\Delta_-)$ голоморфных квадратичных дифференциалов в круге Δ_-, называемое *вложением*

Берса. Множество $B_2(\Delta_-)$ является комплексным банаховым пространством, наделенным естественной гиперболической нормой:

$$B_2(\Delta_-) = \{\psi = \psi(z)dz^2 : \ \|\psi\|_{B_2} := \sup_{z\in\Delta_-}(1-|z|^2)^2|\psi(z)| < \infty\}.$$

Вложение Ψ является гомеоморфизмом пространства $\mathcal{T}$ на его образ в $B_2(\Delta_-)$, описываемый следующей теоремой.

Теорема 11. *Образ $\Psi(\mathcal{T})$ в $B_2(\Delta_-)$ является связным открытым стягиваемым подмножеством в $B_2(\Delta_-)$, которое содержит открытый шар $B(0,2)$ радиуса 2 с центром в начале и содержится в замкнутом шаре $B(0,6)$.*

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [20].

Введем комплексную структуру на пространстве $\mathcal{T}$, индуцированную комплексной структурой на комплексном банаховом пространстве $B_2(\Delta_-)$ посредством вложения Берса.

По-другому, на $\mathcal{T}$ можно было бы ввести комплексную структуру, индуцированную естественной проекцией

$$B(\Delta) \longrightarrow \mathcal{T} = B(\Delta)/\sim \ .$$

Оба способа дают один и тот же результат, в том смысле, что композиция естественной проекции $B(\Delta) \to \mathcal{T}$ с вложением Берса, задающая отображение

$$F : B(\Delta) \longrightarrow B_2(\Delta_-),$$

является голоморфным отображением комплексных банаховых пространств.

Пользуясь приведенными результатами, попытаемся ввести кэлерову метрику на пространстве $\mathcal{T}$. Для этого воспользуемся отображением Альфорса

$$\Phi : L^\infty(\Delta) \longrightarrow B_2(\Delta),$$

сопоставляющим функции $\mu \in L^\infty(\Delta)$ интеграл

$$\Phi[\mu](z) \equiv \varphi(z) = \int_\Delta \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{(1-z\bar{\zeta})^4}d\xi d\eta. \tag{5.8}$$

Образом функции μ при этом отображении является голоморфный квадратичный дифференциал $\varphi = \varphi(z)dz^2$ в круге Δ.

Нам хотелось бы определить эрмитову метрику на пространстве $\mathcal{T}$, пользуясь формулой (5.8). Попробуем сначала определить ее в нуле, чтобы затем разнести в другие точки $\mathcal{T}$ с помощью действия группы $\mathrm{QS}(S^1)$ на $\mathcal{T}$ левыми сдвигами. Эрмитову метрику на касательном пространстве $T_0\mathcal{T}$ естественно определять, полагая ее равной на касательных векторах $[\mu],[\nu]\in T_0\mathcal{T}$ двойному интегралу

$$(\mu,\nu)\equiv\langle\mu,\Phi[\nu]\rangle=\int_\Delta\int_\Delta\frac{\mu(z)\overline{\nu(\zeta)}}{(1-z\zeta)^4}\,d\xi d\eta\,dxdy. \tag{5.9}$$

Однако, введенная таким образом метрика оказывается корректно определенной только на плотном подмножестве в $T_0\mathcal{T}$. Причина в том, что для общего $\nu\in L^\infty(\Delta)$ его образ $\Phi[\nu]$ в $B_2(\Delta)$ может оказаться не интегрируемым, и в этом случае интеграл в формуле (5.9) разойдется. На самом деле, формула (5.9) корректно определена только для достаточно гладких касательных векторов $[\mu],[\nu]$ из $T_0\mathcal{T}$.

Сформулируем это утверждение более точно. Рассмотрим отображение

$$d\beta: T_0\left(B(\Delta)/\sim\right)\longrightarrow T_{[\mathrm{id}]}\left(\mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)\right), \tag{5.10}$$

касательное к изоморфизму

$$\beta: B(\Delta)/\sim\longrightarrow\mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1).$$

Будем называть векторные поля на S^1, являющиеся образами элементов $[\mu]\in T_0\mathcal{T}$ при отображении $d\beta$, *квазисимметричными.* Оказывается, интеграл в формуле (5.9) сходится, если векторам $[\mu],[\nu]$ отвечают векторные поля на S^1 с гладкостью класса $C^{3/2+\epsilon}$ с любым $\epsilon>0$.

Несмотря на то, что формула (5.9) задает только плотно заданную квазиметрику на пространстве $\mathcal{T}$, ее сужение на классические пространства Тейхмюллера $T(G)$ и на пространство нормализованных диффеоморфизмов $\mathcal{S}$ оказывается уже корректно определенной кэлеровой метрикой (мы обсудим этот вопрос более подробно в следующем параграфе).

Вернемся к соответствию (5.10), рассмотренному выше, и дадим внутреннее описание квазисимметричных векторных полей на S^1, являющихся образами векторов $[\mu]\in T_0(B(\Delta)/\sim)$ при отображении (5.10). Поскольку в этом описании существенную роль играет условие Берлинга–Альфорса, удобно начать со случая верхней полуплоскости $\mathbb{H}$.

Введем *пространство Зигмунда* $\Lambda(\mathbb{R})$, состоящее из непрерывных функций $f(x)$, удовлетворяющих условию:

$$|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\le C|t|$$

равномерно по $x\in\mathbb{R}$, $t>0$. Пространство $\Lambda(\mathbb{R})$ является (не сепарабельным) банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_\Lambda:=\sup_{x,t}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right|.$$

Оказывается, квазисимметричные векторные поля на $\mathbb{R}$ отвечают в точности функциям из пространства Зигмунда $\Lambda(\mathbb{R})$.

Отсюда нетрудно получить аналог пространства $\Lambda(\mathbb{R})$ для окружности S^1, пользуясь преобразованием Кэли.

5.4 Подпространства универсального пространства Тейхмюллера

Классические пространства Тейхмюллера $T(G)$, где $G \subset \text{Möb}(S^1)$ – фуксова группа (см. [10]), вкладываются в универсальное пространство Тейхмюллера в виде комплексных подмногообразий.

Напомним, что квазисимметричный гомеоморфизм $f \in \text{QS}(S^1)$ называется *G-инвариантным* относительно фуксовой группы G, если

$$fGf^{-1} \subset \text{Möb}(S^1).$$

(Понятие G-инвариантного дифференциала Бельтрами является дифференциальным аналогом этого определения, см. [31].) Обозначим подгруппу G-инвариантных квазисимметричных гомеоморфизмов в $\text{QS}(S^1)$ через $\text{QS}(S^1)^G$ и определим *классическое пространство Тейхмюллера* $T(G)$ как

$$T(G) = \text{QS}(S^1)^G/\text{Möb}(S^1).$$

Пространство Тейхмюллера $T(G)$ есть комплексное банахово многообразие, комплексная структура которого индуцируется вложением Берса или естественной проекцией пространства G-инвариантных дифференциалов Бельтрами $B(\Delta)^G$ на $T(G)$:

$$B(\Delta)^G \longrightarrow T(G) = B(\Delta)^G/\sim\ .$$

Вложение $B(\Delta)^G \to B(\Delta)$ порождает вложение пространства Тейхмюллера $T(G)$ в универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$, отвечающее фуксовой группе $\{1\}$.

Пусть риманова поверхность S_0 униформизуется фуксовой группой G, т.е.

$$S_0 = \Delta/G.$$

По каждому классу $[\mu] \in T(G)$ мы можем построить новую риманову поверхность

$$S_\mu = \Delta/G_\mu,$$

где $G_\mu = w_\mu G w_\mu^{-1}$. Эту же поверхность можно записать в виде

$$S_\mu = \Delta^\mu / G^\mu,$$

где $\Delta^\mu := w^\mu(\Delta)$, $G^\mu = w^\mu G (w^\mu)^{-1}$. Поверхности $S_\mu = \Delta^\mu / G^\mu$ гомеоморфны друг другу и различаются только своими комплексными структурами. (В то же время риманова поверхность Δ_-^μ / G^μ, где $\Delta_-^\mu := w^\mu(\Delta_-)$, биголоморфно эквивалентна Δ_- / G, поскольку w^μ конформно на Δ_- .)

Иными словами, пространство $T(G)$ параметризует, посредством сопоставления $[\mu] \mapsto G_\mu$, различные комплексные структуры на римановой поверхности $S_0 = \Delta / G$, получающиеся из исходной квазиконформными деформациями.

Все свойства универсального пространства Тейхмюллера, изложенные выше, переносятся и на классические пространства Тейхмюллера, нужно только добавлять всюду условие G-инвариантности.

Так, вложение Берса в случае единичного круга Δ задается отображением

$$F : B(\Delta)^G \longrightarrow B_2(\Delta_-)^G \ ,$$

сопоставляющим дифференциалу Бельтрами $\mu \in B(\Delta)^G$ голоморфный квадратичный дифференциал $S[w^\mu|_{\Delta_-}]$ на Δ_- . Пространство $B_2(\Delta_-)^G$ состоит по определению из G-инвариантных голоморфных квадратичных дифференциалов в Δ_-, имеющих конечную норму

$$\|\psi\|_2 := \sup_{z \in \Delta_-} (1 - |z|^2)^2 |\psi(z)| < \infty.$$

Как и в случае универсального пространства Тейхмюллера, имеется отображение Альфорса, задаваемое формулой

$$L^\infty(\Delta)^G \ni \mu \longmapsto \Phi[\mu](z) = \int_\Delta \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{(1 - z\bar{\zeta})^4} \, d\xi d\eta.$$

Попытаемся, как и выше, ввести с помощью этого отображения кэлерову метрику на пространстве $T(G)$, задавая ее на векторах $[\mu], [\nu]$ из $T_0 T(G)$ формулой

$$(\mu, \nu)_G = \langle \mu, \Phi[\nu] \rangle_G := \int_{\Delta/G} \int_\Delta \frac{\mu(z) \overline{\nu(\zeta)}}{(1 - z\bar{\zeta})^4} \, d\xi d\eta \, dx dy. \tag{5.11}$$

В случае классических пространств Тейхмюллера $T(G)$ пространство $B_2(\Delta)^G$ совпадает с пространством интегрируемых голоморфных квадратичных дифференциалов, поэтому формула (5.11) корректно определена для всех $\mu, \nu \in$

$L^\infty(\Delta)^G$ и задает эрмитову метрику на пространстве $T_0T(G)$, называемую *метрикой Вейля–Петерсона*.

Что можно сказать об образе классических пространств $T(G)$ в универсальном пространстве Тейхмюллера $\mathcal{T}$? Имеется любопытный результат Боуэна [7], показывающий, что этот образ не принадлежит регулярной части $\mathcal{T}$.

Более точно, будем называть точку из $\mathcal{T}$ *регулярной*, если ей отвечает гладкий нормализованный квазисимметричный гомеоморфизм из $\mathrm{QS}(S^1)$ или, что то же самое, квазикруг с гладкой границей. Боуэн показал, что каждой точке из $T(G)\setminus\{0\}$ отвечает квазикруг с фрактальной границей, хаусдорфова размерность d_H которой находится в пределах $1<d_H<2$ и может быть любым числом из этого промежутка.

Обратимся теперь к подпространству $\mathcal{T}$ иного рода, а именно к пространству нормализованных диффеоморфизмов

$$\mathcal{S}=\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)\subset\mathcal{T}=\mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1). \tag{5.12}$$

Оно целиком лежит в регулярной части пространства $\mathcal{T}$ и вложение (5.12) наделяет его индуцированной комплексной структурой. Однако эту структуру на $\mathcal{S}$ можно ввести и более непосредственным образом.

Прежде всего заметим, что указанную комплексную структуру достаточно определить в начале $[\mathrm{id}]\in\mathcal{S}$, а затем разнести в другие точки $\mathcal{S}$ с помощью действия группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$. Построенная таким образом комплексная структура будет, тем самым, $\mathrm{Diff}_+(S^1)$-инвариантной. Касательное пространство

$$T_{[\mathrm{id}]}\mathcal{S}=T_{[\mathrm{id}]}\left(\mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)\right)$$

можно отождествить с фактором алгебры Ли группы Ли $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ по ее подалгебре $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$, совпадающей с алгеброй Ли группы Ли $\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$. Алгебра Ли группы Ли $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ совпадает с алгеброй Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ гладких векторных полей на S^1, а ее элементы $v=v(\theta)\partial/\partial\theta$ удобно задавать разложениями Фурье вида

$$v=\sum_{n\in\mathcal{Z}}v_ne_n$$

с комплексными коэффициентами, удовлетворяющими условию $\bar{v}_n=v_{-n}$, где e_n – базисные векторные поля

$$e_n=e^{in\theta}\partial/\partial\theta=iz^{n+1}\partial/\partial z,\quad n\in\mathbb{Z},\ z=e^{i\theta}.$$

Тогда элементы $v\in T_{[\mathrm{id}]}\mathcal{S}$ будут задаваться рядами вида

$$v=\sum_{n\neq 0,\pm1}v_ne_n.$$

Комплексная структура J на пространстве $T_{[\mathrm{id}]}\mathcal{S}$ определяется формулой

$$Jv = -i\sum_{n=2}^{\infty} v_n e_n + i\sum_{n=-\infty}^{-1} v_n e_n. \tag{5.13}$$

Введенная комплексная структура эквивалентна построенной ранее комплексной структуре на пространстве $\mathcal{T}$.

Пространство $\mathcal{S}$ обладает $\mathrm{Diff}_+(S^1)$-инвариантной симплектической формой ω. Эта форма определяется однозначно с точностью до умножения на константу и ее значения на базисных векторных полях $e_n \in T^{\mathbb{C}}_{[\mathrm{id}]}\mathcal{S}$ равны (см. [32]):

$$\omega(e_m, e_n) = \alpha(m^3 - m)\delta_{m,-n}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

По форме ω и комплексной структуре J можно построить согласованную с ними риманову метрику g_R, задаваемую на касательных векторах $u, v \in T_{[\mathrm{id}]}\mathcal{S}$ формулой

$$g_R(u, v) = a\,\mathrm{Re}\left[\sum_{n=2}^{\infty} \bar{u}_n v_n (n^3 - n)\right], \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

где

$$u = \sum_{n \neq 0, \pm 1} u_n e_n, \quad v = \sum_{n \neq 0, \pm 1} v_n e_n.$$

Кэлерова метрика

$$g(u, v) = a\sum_{n=2}^{\infty} \bar{u}_n v_n (n^3 - n) \tag{5.14}$$

является комплексификацией построенной римановой метрики g_R. Заметим, что ряд в правой части (5.14) абсолютно сходится, если векторные поля u, v принадлежат классу $C^{3/2+\epsilon}$ с любым $\epsilon > 0$.

Образ вложения $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{T}$ лежит, как указывалось ранее, в регулярной части пространства $\mathcal{T}$. С другой стороны, образы вложений классических пространств Тейхмюллера $T(G) \setminus \{0\}$ принадлежат нерегулярной части $\mathcal{T}$. Тем самым, эти подмногообразия пересекаются только в начале $[\mathrm{id}] \in \mathcal{T}$.

5.5 Грассманова реализация универсального пространства Тейхмюллера

В п.4.2 было введено соболевское пространство полудифференцируемых функций на окружности

$$V_S = H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R}),$$

состоящее из функций $f \in L^2(S^1, \mathbb{R})$, ряды Фурье которых имеют вид

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} f_n z^n, \quad \bar{f}_n = f_{-n},\ z = e^{i\theta},$$

с конечной соболевской нормой порядка $1/2$

$$\|f\|^2_{1/2} = \sum_{n \neq 0} |n||f_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} n|f_n|^2 < \infty.$$

Положим $V := V_S$ и введем на этом пространстве симплектическую 2-форму, которая определяется в терминах коэффициентов Фурье формулой

$$\omega(\xi, \eta) = -i \sum_{n \neq 0} n\xi_n\eta_{-n} = 2\,\mathrm{Im} \sum_{n=1}^{\infty} n\xi_n\bar{\eta}_n,$$

где $\xi, \eta \in V$. Она корректно определена, поскольку

$$|\omega(\xi, \eta)| \leq \|\xi\|_{1/2} \cdot \|\eta\|_{1/2}.$$

Пространство V обладает также комплексной структурой J^0, которая определяется в терминах разложений Фурье формулой

$$\xi(z) = \sum_{n \neq 0} \xi_n z^n \longmapsto (J^0\xi)(z) = -i\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n z^n + i\sum_{n=-\infty}^{-1} \xi_n z^n. \tag{5.15}$$

Эта комплексная структура совместима с симплектической формой ω в том смысле, что вместе они определяют риманову метрику на V вида $g^0(\xi, \eta) := \omega(\xi, J^0\eta)$, или в терминах коэффициентов Фурье

$$g^0(\xi, \eta) = \sum_{n \neq 0} |n|\xi_n\bar{\eta}_n = 2\,\mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} n\xi_n\bar{\eta}_n. \tag{5.16}$$

Иными словами, V является кэлеровым гильбертовым пространством.

Для того, чтобы построить грассманову реализацию пространства V, рассмотрим действие гомеоморфизмов $f : S^1 \to S^1$ на этом пространстве. А именно, сопоставим f оператор замены переменной T_f

$$(T_f\xi)(z) = \xi(f(z)) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(f(e^{i\theta}))d\theta, \quad z = e^{i\theta},$$

действующий на функциях $\xi \in V$.

Теорема 12 (Наг–Сулливан, см.[24]). *Оператор T_f корректно определен и действует из пространства V в себя тогда и только тогда, когда $f \in QS(S^1)$. Действие операторов $T_f : V \to V$ с $f \in QS(S^1)$ сохраняет симплектическую структуру ω, т.е.*

$$\omega(T_f\xi, T_f\eta) = \omega(\xi, \eta) \quad \text{для любых } \xi, \eta \in V. \tag{5.17}$$

Более того, комплексно-линейное продолжение оператора T_f на комплексифицированное пространство $V^{\mathbb{C}}$ сохраняет подпространства $W_\pm$ тогда и только тогда, когда $f \in M\ddot{o}b(S^1)$ и в этом случае T_f действует на $W_\pm$ как унитарный оператор.

Из приведенной теоремы вытекает, что имеется вложение

$$\mathcal{T} = \mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \longrightarrow \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+), \tag{5.18}$$

где $\mathrm{Sp}(V)$ обозначает *симплектическую группу* пространства V, состоящую из ограниченных линейных операторов на V, сохраняющих симплектическую форму ω, а $\mathrm{U}(W_+)$ – ее подгруппа, состоящая из унитарных операторов, т.е. операторов, комплексно-линейные продолжения которых на $V^{\mathbb{C}}$ сохраняют подпространство W_+ (и, следовательно, W_-).

Опишем эти группы более подробно. В терминах разложения $V^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$ любой линейный оператор $A : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ может быть записан в блочной форме

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a : W_+ \to W_+ & b : W_- \to W_+ \\ c : W_+ \to W_- & d : W_- \to W_- \end{pmatrix}$$

В частности, линейные операторы на $V^{\mathbb{C}}$, получаемые комплексно-линейным продолжением операторов $A : V \to V$, имеют блочные представления вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} ,$$

где мы отождествляем пространство W_- с комплексно сопряженным пространством $\overline{W}_+$. Линейный оператор $A : V \to V$ принадлежит симплектической группе $\mathrm{Sp}(V)$, если он сохраняет симплектическую форму ω. Это условие эквивалентно следующим соотношениям на блочные компоненты A:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(V) \Longleftrightarrow \bar{a}^t a - b^t \bar{b} = 1, \quad \bar{a}^t b = b^t \bar{a}, \tag{5.19}$$

где $a^t : W'_+ \to W'_+$ и $b^t : W'_+ \to W'_-$ обозначают транспонированные операторы, а пространство $W'_\pm$, двойственное к $W_\pm$, отождествляется с пространством $W_\mp$ с помощью скалярного произведения $< \cdot, \cdot >$ на $V^{\mathbb{C}}$, задаваемого комплексно-линейным продолжением на $V^{\mathbb{C}}$ римановой метрики g^0. Унитарная группа $\mathrm{U}(W_+)$ вкладывается в симплектическую группу $\mathrm{Sp}(V)$ в виде подгруппы блочно-диагональных матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} .$$

Вернемся к отображению (5.18). Пространство

$$\mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+)$$

в правой части (5.18) можно отождествить с пространством $\mathcal{J}(V)$ комплексных структур на пространстве $V^{\mathbb{C}}$, совместимых с симплектической формой ω. Действительно, любая комплексная структура J такого вида определяет разложение

$$V^{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W} \tag{5.20}$$

в прямую сумму собственных $(\mp i)$-подпространств оператора J, изотропных относительно ω. Обратно, любое разложение вида (5.20) пространства $V^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму подпространств, изотропных относительно ω, определяет комплексную структуру J на $V^{\mathbb{C}}$, равную $-iI$ на W и $+iI$ на $\overline{W}$ и совместимую с ω. Тем самым, группа $\mathrm{Sp}(V)$ действует транзитивно на пространстве $\mathcal{J}(V)$ комплексных структур J на V, совместимых с ω.

Чтобы получить однородное представление для пространства $\mathcal{J}(V)$, нужно профакторизовать группу $\mathrm{Sp}(V)$ по ее подгруппе, состоящей из преобразований, сохраняющих исходную комплексную структуру J^0 или, другими словами, сохраняющих подпространства $W_\pm$. Указанная подгруппа состоит в точности из унитарных преобразований из группы $\mathrm{U}(W_+)$, откуда следует, что

$$\mathcal{J}(V) = \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+).$$

Пространство $\mathcal{J}(V)$ допускает интерпретацию в виде бесконечномерного зигелева диска. По определению, *зигелев диск* $\mathcal{D}$ состоит из ограниченных линейных операторов вида

$$\mathcal{D} = \{Z : W_+ \to W_- \text{ есть ограниченный линейный симметричный оператор, удовлетворяющий } \bar{Z}Z < I\}.$$

Симметричность Z означает, что $Z^t = Z$, а условие $\bar{Z}Z < I$ равносильно тому, что симметричный оператор $I - \bar{Z}Z$ положительно определен.

Для того, чтобы отождествить пространство $\mathcal{J}(V)$ с зигелевым диском $\mathcal{D}$, рассмотрим действие группы $\mathrm{Sp}(V)$ на $\mathcal{D}$, задаваемое операторными дробно-линейными преобразованиями вида

$$\mathrm{Sp}(V) \ni A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : Z \longmapsto (\bar{a}Z + \bar{b})(bZ + a)^{-1}.$$

Нетрудно проверить, что сопоставление оператору $A \in \mathrm{Sp}(V)$ указанного дробно-линейного преобразования зигелева диска $\mathcal{D}$ задает взаимно-однозначное отображение

$$\mathcal{J}(V) = \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+) \longrightarrow \mathcal{D}.$$

Зигелев диск $\mathcal{D}$ естественным образом вкладывается в грассманиан $\mathrm{Gr}_b(V^{\mathbb{C}})$ гильбертова пространства $V^{\mathbb{C}}$, состоящий из замкнутых подпространств $W \subset V^{\mathbb{C}}$, получаемых из W_+ действием ограниченных линейных операторов. Указанное вложение задается отображением

$$\mathcal{D} \ni Z \longmapsto \text{график отображения } Z : W_+ \to W_-.$$

Грассманиан $\mathrm{Gr}_b(V^{\mathbb{C}})$ является комплексным банаховым многообразием (см. [32]), а сквозное отображение

$$\mathcal{T} = \mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \longrightarrow \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+) = \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Gr}_b(V^{\mathbb{C}})$$

является эквивариантным голоморфным вложением комплексных банаховых многообразий.

Построенное вложение $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathrm{Gr}_b(V^{\mathbb{C}})$ порождает вложение пространства нормализованных диффеоморфизмов

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \subset \mathcal{T}$$

в "регулярную часть" грассманиана $\mathrm{Gr}_b(V^{\mathbb{C}})$, совпадающую с грассманианом Гильберта–Шмидта $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$, который определяется следующим образом.

Определение 30. *Грассманианом Гильберта–Шмидта* $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ называется множество, состоящее из замкнутых подпространств $W \subset V^{\mathbb{C}}$ таких, что ортогональная проекция $\pi_+ : W \to W_+$ является фредгольмовым оператором, а ортогональная проекция $\pi_- : W \to W_-$ — оператором Гильберта–Шмидта.

Грассманиан $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ является кэлеровым гильбертовым многообразием, имеющим в качестве локальной модели гильбертово пространство $\mathrm{HS}(W_+, W_-)$ операторов Гильберта–Шмидта.

Введем теперь *симплектическую группу Гильберта–Шмидта* $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$, которая состоит из преобразований

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(V),$$

для которых b является оператором Гильберта–Шмидта. Унитарная группа $\mathrm{U}(W_+)$ содержится в $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ в виде подгруппы блочно-диагональных матриц.

Построенное вложение $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{J}(V)$ индуцирует вложение

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \hookrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+).$$

Пространство

$$\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) := \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+)$$

отождествляется, как и выше, с некоторым пространством комплексных структур на $V^{\mathbb{C}}$, совместимых с симплектической формой ω. Будем называть комплексные структуры из $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$ *комплексными структурами Гильберта–Шмидта.* Также, как выше, пространство $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$ допускает реализацию в виде *зигелева диска Гильберта–Шмидта*, определяемого как

$$\mathcal{D}_{\mathrm{HS}} = \{Z : W_+ \to W_- \text{ – симметричный оператор Гильберта–Шмидта } \text{с } \bar{Z}Z < I\}.$$

Указанный зигелев диск $\mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$ вкладывается, как и выше, в грассманиан Гильберта–Шмидта $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ так, что сквозное отображение

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \hookrightarrow \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}} \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$$

является эквивариантным голоморфным вложением комплексного пространства Фреше $\mathcal{S}$ в комплексное гильбертово многообразие $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$.

5.6 Квантование пространства нормализованных диффеоморфизмов

Конечномерная *классическая система* задается парой $(M, \mathcal{A})$, состоящей из фазового пространства M и алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$.

Фазовое пространство M есть гладкое симплектическое многообразие четной размерности $2n$ с симплектической формой ω. Локально, оно изоморфно *стандартной модели* $M_0 := (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, где ω_0 – стандартная симплектическая форма на $\mathbb{R}^{2n}$, задаваемая в канонических координатах (p_i, q_i), $i = 1, \ldots, n$, на $\mathbb{R}^{2n}$ формулой

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

Алгебра наблюдаемых $\mathcal{A}$ есть произвольная подалгебра Ли в алгебре Ли $C^\infty(M, \mathbb{R})$ гладких вещественнозначных функций на фазовом пространстве M относительно скобки Пуассона, определяемой симплектической формой ω. В частности, $\mathcal{A}$ может совпадать со всей алгеброй Пуассона $C^\infty(M, \mathbb{R})$. В случае стандартной модели $M_0 = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ в качестве алгебры наблюдаемых можно взять *алгебру Гейзенберга* $\mathrm{heis}(\mathbb{R}^{2n})$, которая порождается координатными функциями p_i, q_i, $i = 1, \ldots, n$, и 1, удовлетворяющими коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} \{p_i, p_j\} &= \{q_i, q_j\} = 0\ , \\ \{p_i, q_j\} &= \delta_{ij} \quad \text{при } i, j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Алгебры наблюдаемых возникают обычно следующим образом. Пусть Γ есть некоторая группа Ли, действующая на односвязном фазовом многообразии M симплектическими преобразованиями. Тогда ее алгебру Ли $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ можно рассматривать как подалгебру алгебры Ли гамильтоновых векторных полей X_f на M, порождаемых гладкими функциями $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. В этом случае за алгебру наблюдаемых $\mathrm{ham}(\Gamma)$, отвечающую группе Γ, можно взять алгебру Ли, состоящую из функций f, для которых $X_f \in \mathrm{Lie}(\Gamma)$, и наделенную скобкой Пуассона в качестве скобки Ли.

Пусть $(M, \mathcal{A})$ есть некоторая классическая система. *Квантованием* этой системы называется неприводимое линейное представление

$$r : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{End}^*\mathcal{H}$$

наблюдаемых из $\mathcal{A}$ самосопряженными линейными операторами, действующими в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, называемом *пространством квантования.* При этом требуется, чтобы

$$r\left(\{f, g\}\right) = \frac{1}{i}\left[r(f), r(g)\right] = \frac{1}{i}\left(r(f)r(g) - r(g)r(f)\right) \tag{5.21}$$

для любых $f, g \in \mathcal{A}$ и $r(1) = I$.

Операторы квантования $r(f)$, возникающие в конкретных примерах, оказываются, как правило, неограниченными, поэтому необходимо требовать, чтобы все они были определены на общей области определения, плотной в $\mathcal{H}$.

Часто бывает удобнее иметь дело с комплексифицированными алгебрами наблюдаемых $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ или, более общим образом, с комплексными алгебрами наблюдаемых $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, наделенными инволюцией. В этом случае квантование алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ будет задаваться неприводимым линейным представлением $r : \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ замкнутыми линейными операторами на $\mathcal{H}$, удовлетворяющими помимо условия (5.21) и нормировки $r(1) = I$ еще и правилу сопряжения: инволюция в $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ переходит под действием r в эрмитово сопряжение.

Мы будем применять приведенное определение квантования к бесконечномерным классическим системам, в которых как фазовые пространства, так и алгебры наблюдаемых являются бесконечномерными. Для бесконечномерных алгебр Ли $\mathcal{A}$ более естественно искать не обычные, а проективные представления. Если нам удастся найти такое представление для заданной алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$, то это будет означать, что мы построили квантование не исходной системы $(M, \mathcal{A})$, а ее расширения $(M, \tilde{\mathcal{A}})$, где $\tilde{\mathcal{A}}$ – подходящее центральное расширение алгебры $\mathcal{A}$, которое определяется коциклом проективного представления.

В случае пространства нормализованных диффеоморфизмов

$$\mathcal{S} = \operatorname{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$$

роль бесконечномерной классической системы будет играть пара

$$\left(\mathcal{S}, \operatorname{Vect}(S^1)\right),$$

где $\mathcal{S}$ – фазовое пространство системы, а $\operatorname{Vect}(S^1)$ – алгебра наблюдаемых, являющаяся алгеброй Ли группы $\operatorname{Diff}_+(S^1)$. Эта алгебра совпадает с алгеброй Ли гладких векторных полей на S^1.

Мы построим квантование указанной системы, предварительно расширив ее до системы, ассоциированной с соболевским пространством V. Для этого воспользуемся построенным выше вложением

$$\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{J}_{\text{HS}}(V) = \text{Sp}_{\text{HS}}(V)/\text{U}(W_+).$$

При таком вложении группа $\operatorname{Diff}_+(S^1)$ реализуется в виде подгруппы симплектической группы Гильберта–Шмидта $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$. В качестве расширенной классической системы берется пара

$$(\mathcal{J}_{\text{HS}}(V) = \mathcal{D}_{\text{HS}}, \text{sp}_{\text{HS}}(V)),$$

где $\text{sp}_{\text{HS}}(V)$ есть алгебра Ли симплектической группы Гильберта–Шмидта $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$.

Приступая к квантованию расширенной системы $(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V), \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V))$, необходимо прежде всего указать пространство квантования $\mathcal{H}$, в котором реализуется представление алгебры наблюдаемых $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. Роль этого пространства в рассматриваемом случае будет играть фоковское пространство, ассоциированное с соболевским пространством V.

Для того, чтобы определить указанное пространство, фиксируем некоторую комплексную структуру $J \in \mathcal{J}(V)$, совместимую с симплектической формой ω. Эта структура порождает разложение комплексифицированного пространства $V^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму

$$V^{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}$$

собственных $(\mp i)$-подпространств оператора J. Указанное разложение ортогонально относительно эрмитова скалярного произведения на $V^{\mathbb{C}}$, порождаемого J и ω:

$$< z, w >_J := \omega(z, Jw).$$

Фоковское пространство $F(V^{\mathbb{C}}, J)$ является пополнением алгебры симметричных полиномов от переменных $z \in W$ по норме, порожденной скалярным произведением $< \cdot, \cdot >_J$.

Более подробно, обозначим через $\mathfrak{S}(W)$ алгебру симметричных полиномов от переменных $z \in W$ и введем на ней скалярное произведение, порождаемое скалярным произведением $< \cdot, \cdot >_J$. На мономах одинаковой степени оно задается формулой

$$\langle z_1 \otimes \ldots \otimes z_n, z'_1 \otimes \ldots \otimes z'_n >_J := \sum_{\{i_1,\ldots,i_n\}} < z_1, z'_{i_1} >_J \cdot \ldots \cdot < z_n, z'_{i_n} >_J,$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\{i_1, \ldots, i_n\}$ множества $\{1, \ldots, n\}$ (скалярное произведение мономов разных степеней полагается равным нулю). Скалярное произведение на мономах продолжается затем по линейности на всю алгебру $\mathfrak{S}(W)$.

Фоковское пространство

$$F_J = F(V^{\mathbb{C}}, J)$$

есть замыкание алгебры $\mathfrak{S}(W)$ по норме $< \cdot, \cdot >_J$.

Если $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть ортонормированный базис пространства W, то в качестве ортонормированного базиса фоковского пространства F_J можно взять мономы вида

$$P_K(z) = \frac{1}{\sqrt{k!}} < z, w_1 >_J^{k_1} \cdot \ldots \cdot < z, w_n >_J^{k_n}, \quad z \in W, \tag{5.22}$$

где $K = (k_1, \ldots, k_n, 0, \ldots)$ – финитный набор натуральных чисел $k_i \in \mathbb{N}$, и $k! = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!$. Тем самым, фоковское пространство разлагается в прямую сумму

$$F_J = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{S}_k(W),$$

где $\mathfrak{S}_k(W)$ есть подпространство полиномов степени k в $\mathfrak{S}(W)$.

Алгеброй Гейзенберга $\mathrm{heis}(V)$ гильбертова пространства V называется центральное расширение абелевой алгебры Ли V, порождаемой координатными функциями. Другими словами, как векторное пространство, эта алгебра совпадает с

$$\mathrm{heis}(V) = V \oplus \mathbb{R}$$

и наделяется скобкой Ли вида

$$[(x,s),(y,t)] := (0, \omega(x,y)) \,, \quad x, y \in V, \ s, t \in \mathbb{R}.$$

Построим неприводимое представление алгебры Гейзенберга $\mathrm{heis}(V)$ в фоковском пространстве F_J. Заметим, прежде всего, что элементы алгебры $\mathfrak{S}(W)$ можно рассматривать как голоморфные функции на пространстве $\overline{W}$, отождествляя $z \in W$ с голоморфной функцией

$$\overline{W} \ni \bar{w} \longmapsto < z, w >_J \quad \text{на } \overline{W}.$$

Соответственно, пространство F_J можно рассматривать как пространство функций, голоморфных на $\overline{W}$.

С учетом этого отождествления, *представление Гейзенберга* r_J алгебры Гейзенберга $\mathrm{heis}(V)$ в фоковском пространстве F_J будет задаваться формулой

$$V \ni v \longmapsto r_J(v)f(\bar{w}) = \partial_v f(\bar{w}) + < v, w >_J f(\bar{w}), \tag{5.23}$$

где ∂_v есть оператор дифференцирования в направлении вектора v. Продолжая r_J на комплексифицированную алгебру $\mathrm{heis}^{\mathbb{C}}(V)$ той же формулой (5.23), получим, что

$$r_J(\bar{z})f(\bar{w}) = \partial_{\bar{z}} f(\bar{w}) \quad \text{при } \bar{z} \in \overline{W},$$
$$r_J(z)f(\bar{w}) = < z, w >_J f(\bar{w}) \quad \text{при } z \in W.$$

Представление Гейзенберга удобно описывать в терминах *операторов рождения* и *уничтожения* на пространстве F_J, которые задаются формулами

$$a_J^*(v) = \frac{r_J(v) + i r_J(Jv)}{2} \,, \quad a_J(v) = \frac{r_J(v) - i r_J(Jv)}{2} \,,$$

где $v \in V^{\mathbb{C}}$. Отсюда

$$a_J^*(z)f(\bar{w}) =< z, w >_J f(\bar{w}) \quad \text{при } z \in W,$$
$$a_J(\bar{z})f(\bar{w}) = \partial_{\bar{z}} f(\bar{w}) \quad \text{при } \bar{z} \in \overline{W}.$$

Выбирая ортонормированный базис $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве W, введем операторы

$$a_n^* := a^*(w_n), \quad a_n := a(\bar{w}_n) \quad \text{при } n = 1, 2, \dots .$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям вида

$$[a_m, a_n] = [a_m^*, a_n^*] = 0, \quad [a_m^*, a_n] = \delta_{mn} I \quad \text{при } m, n \in \mathbb{N}. \tag{5.24}$$

Вектор $f_J \in F_J \setminus \{0\}$ называется *вакуумом*, если он аннулируется всеми операторами уничтожения, т.е.

$$a_n f_J = 0 \quad \text{при всех } n = 1, 2, \dots . \tag{5.25}$$

Такой вектор определяется представлением r_J однозначно с точностью до мультипликативной константы. В случае исходного фоковского пространства $F_0 = F(V, J^0)$ в качестве вакуума берется $f_0 \equiv 1$.

Действуя на вакуум f_J операторами рождения a_n^*, мы получим множество векторов в F_J вида $(a_1^*)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (a_n^*)^{k_n} f_J$, замкнутая линейная оболочка которого совпадает со всем пространством F_J, откуда вытекает неприводимость представления r_J. Заметим, что мономы $P_K(z)$, задаваемые формулой (5.22), которые были выбраны нами в качестве ортонормированного базиса пространства F_J, построены именно таким способом.

Мы хотим построить унитарный оператор $U_J : F_0 \to F_J$, сплетающий представления Гейзенберга r_0 в пространстве F_0 и r_J в пространстве F_J.

Теорема 13 (Шейл–Березин, см. [6])**.** *Пусть комплексная структура $J \in \mathcal{J}(V)$ получается из комплексной структуры J^0 действием элемента $A \in Sp(V)$. Тогда представления r_0 в пространстве F_0 и r_J в пространстве F_J унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $A \in Sp_{HS}(V)$. Другими словами, при выполнении последнего условия существует унитарный сплетающий оператор $U_J : F_0 \to F_J$, такой что*

$$r_J = U_J \circ r_0 \circ U_J^{-1}.$$

Приведем идею доказательства этой теоремы. Для того, чтобы построить сплетающий оператор U_J, достаточно, согласно рассуждению, приведенному выше, построить вакуум в пространстве F_J. Указанный вакуум можно искать, раскладывая его по базису пространства F_0, образованному векторами $\frac{1}{\sqrt{k!}}(a_1^*)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (a_n^*)^{k_n} f_0$, и подставляя полученный ряд в соотношения (5.25). Искомый вакуум f_J будет задаваться формулой

$$f_J = ce^{-\frac{1}{2}a_J^*(a^{-1}b)a_J^*} f_0, \tag{5.26}$$

если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$. Коэффициент c в этой формуле равен $c = \theta(\det a\bar{a}^t)^{-1/4}$, где θ – комплексное число, по модулю равное 1. Заметим, что из описания группы $\mathrm{Sp}(V)$, даваемого соотношением (5.19), следует, что оператор a обратим. Более того, вектор f_J, задаваемый формулой (5.26), принадлежит пространству F_J тогда и только тогда, когда $a^{-1}b$ есть оператор Гильберта–Шмидта $\Longleftrightarrow b$ есть оператор Гильберта–Шмидта, т.е. $A \in \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. В этом случае оператор $a\bar{a}^t = 1 + b\bar{b}^t$ имеет вид "1 + ядерный" и потому его детерминант имеет смысл. Неопределенный коэффициент θ возникает из-за того, что вакуум f_J определяется только с точностью до мультипликативной константы, по модулю равной 1. Имея формулу (5.26) для вакуума f_J, можно найти и явное представление для сплетающего оператора U_J, которое выписано в [6]. Этот оператор, также как и вакуум, определяется однозначно с точностью до мультипликативной константы, по модулю равной 1.

Объединим все фоковские пространства F_J с $J \in \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$ в единое *фоковское расслоение*

$$\mathcal{F} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)} F_J \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}.$$

Предложение 3. *Фоковское расслоение $\mathcal{F} \to \mathcal{J}_{HS}(V)$ является эрмитовым голоморфным гильбертовым расслоением над зигелевым диском $\mathcal{D}_{HS}$. На нем имеется унитарное проективное действие группы $Sp_{HS}(V)$, накрывающее естественное действие этой группы на $\mathcal{J}_{HS}(V) = \mathcal{D}_{HS}$.*

Голоморфность фоковского расслоения устанавливается также, как голоморфность детерминантного расслоения над грассманианом Гильберта–Шмидта $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ (см. [32]). Поскольку зигелев диск $\mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$ является стягиваемым (и даже выпуклым) множеством, то это расслоение тривиально. Более того, действие группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$, определяемое теоремой Шейла–Березина, задает его явную тривиализацию.

Инфинитезимальным вариантом действия симплектической группы Гильберта–Шмидта $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ на фоковском расслоении является проективное представление ее алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ в слое $F_0 = F(V^{\mathbb{C}}, J^0)$ фоковского расслоения над точкой J^0.

Симплектическая алгебра Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ состоит из ограниченных линейных операторов A, действующих в пространстве $V^{\mathbb{C}}$ и имеющих блочные представления вида

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

где α – ограниченный косоэрмитов оператор, β – симметричный оператор Гильберта–Шмидта. Комплексифицированная алгебра Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)^{\mathbb{C}}$ состоит из операторов вида

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\gamma} & -\alpha^t \end{pmatrix},$$

где α – ограниченный оператор, а β и $\bar{\gamma}$ являются симметричными операторами Гильберта–Шмидта.

Проективное представление комплексифицированной симплектической алгебры $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)^{\mathbb{C}}$ в пространстве F_0 задается формулой

$$\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)^{\mathbb{C}} \ni A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\gamma} & -\alpha^t \end{pmatrix} \longmapsto \rho(A) = D_\alpha + \frac{1}{2} M_\beta + \frac{1}{2} M_\gamma^*. \tag{5.27}$$

Здесь, D_α – оператор дифференцирования, порождаемый оператором $\alpha : W_+ \to W_+$ и определяемый посредством

$$D_\alpha f(\bar{w}) =< \alpha w, \partial_w > f(\bar{w}).$$

Оператор M_β, порождаемый оператором $\beta : W_- = \overline{W}_+ \to W_+$, имеет вид

$$M_\beta f(\bar{w}) =< \bar{\beta} w, w > f(\bar{w}),$$

а оператор M_γ^*, сопряженный к M_γ, действует по формуле

$$M_\gamma^* f(\bar{w}) =< \gamma \partial_w, \partial_w > f(\bar{w}).$$

Теорема 14 ([29])**.** *Формула* (5.27) *задает унитарное проективное представление симплектической алгебры Ли $sp_{HS}(V)^{\mathbb{C}}$ в фоковском пространстве F_0 с коциклом*

$$[\rho(A_1), \rho(A_2)] - \rho([A_1, A_2]) = \frac{1}{2} tr(\bar{\gamma}_2 \beta_1 - \bar{\gamma}_1 \beta_2) I. \tag{5.28}$$

Это представление сплетается с представлением Гейзенберга r_0 алгебры Гейзенберга $heis(V)$ в пространстве F_0.

Проективное представление алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ определяет квантование расширенной системы

$$\left(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}, \widetilde{\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)}\right)$$

где $\widetilde{\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)}$ есть центральное расширение алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$, задаваемое коциклом (5.28).

Одновременно мы построили квантование еще одной классической системы, тесно связанной с теорией струн. А именно, системы $(V, \mathcal{A})$, фазовое пространство которой совпадает с соболевским пространством $V = H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R})$, а алгебра наблюдаемых $\mathcal{A}$ есть полупрямая сумма $\mathcal{A} = \mathrm{heis}(V) \rtimes \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. Указанную алгебру наблюдаемых можно рассматривать как бесконечномерный аналог алгебры Пуанкаре пространства Минковского. Напомним, что алгебра Пуанкаре есть полупрямая сумма алгебры трансляций и алгебры гиперболических поворотов пространства Минковского. В случае соболевского пространства V роль алгебры трансляций играет алгебра Гейзенберга, а роль алгебры поворотов — симплектическая алгебра Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. В случае пространства Минковского преобразования из алгебры сдвигов линейно зависят от координат, а преобразования из алгебры поворотов зависят от них квадратично. Эта закономерность сохраняется и в бесконечномерном случае — представление Гейзенберга линейно по переменным $\bar{w}$ и $\partial_{\bar{w}}$, а представление алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ по ним квадратично.

Сужение конструкции фоковского расслоения $\mathcal{F} \to \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$, приведенной выше, на подмногообразие

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \subset \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$$

дает фоковское расслоение

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}} := \bigcup_{J \in \mathcal{S}} F_J \longrightarrow \mathcal{S}$$

над пространством $\mathcal{S}$.

Предложение 4. *Фоковское расслоение $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ является эрмитовым голоморфным гильбертовым расслоением над пространством $\mathcal{S}$. На этом расслоении имеется унитарное проективное действие группы диффеоморфизмов $\mathit{Diff}_+(S^1)$, накрывающее естественное действие этой группы на $\mathcal{S}$.*

Фоковское расслоение $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ тривиально, поскольку пространство $\mathcal{S}$ стягиваемо. Действие группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ на расслоении $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ задается ограничением $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$-действия на фоковском расслоении $\mathcal{F} \to \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$, построенного выше.

Инфинитезимальным вариантом действия группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ на фоковском расслоении $\mathcal{F}_\mathcal{S}$ является проективное представление алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ этой группы в фоковском пространстве F_0. Конструкцию этого представления, называемого представлением Вирасоро, удобно описать в терминах операторов рождения и уничтожения a_n^*, a_n на пространстве F_0, введенных выше. Дополним это определение, полагая $a_0 = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и $a_{-n} := na_n^*, n \in \mathbb{N}$, так что для полученных операторов будут выполняться следующие коммутационные соотношения

$$[a_m, a_n] = m\delta_{m,-n}I \quad \text{при } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Представление Вирасоро алгебры Ли $\mathrm{Vect}^\mathbb{C}(S^1)$ порождается *операторами Вирасоро* L_n, являющимися образами базисных элементов e_n алгебры $\mathrm{Vect}^\mathbb{C}(S^1)$. Эти операторы задаются формулой

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} :a_{-i}a_{i+n}: \quad, \ n \in \mathbb{Z},$$

где знак : : означает *нормальное упорядочение*, определяемое правилом

$$:a_i a_j: = \begin{cases} a_i a_j & \text{при } i \le j, \\ a_j a_i & \text{при } i > j. \end{cases}$$

В частности, оператор энергии L_0 имеет вид $L_0 = \lambda^2/2 + \sum_{i>0} a_{-i}a_i$. Из-за нормального упорядочения, при применении оператора L_n к любому полиному P из алгебры $\mathfrak{S}(W_+)$ только конечное число членов в бесконечном ряде, задающем L_nP, будет отлично от нуля, т.е. действие операторов L_n корректно определено на алгебре $\mathfrak{S}(W_+)$ и продолжается на все фоковское пространство $F_0 = \widehat{\mathfrak{S}(W_+)}$ по замыканию.

Операторы L_n, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \delta_{m,-n}\frac{m^3-m}{12} \tag{5.29}$$

порождают унитарное проективное представление алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ в фоковском пространстве F_0.

Построенное проективное представление алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ в фоковском пространстве F_0 задает квантование системы $(\mathcal{S}, \mathrm{vir})$, где vir есть центральное расширение алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$. Это расширение называется *алгеброй Вирасоро* и определяется коциклом представления (5.29). Заметим, что центральное расширение $\mathrm{Vect}(S^1)$ определяется по существу единственным образом (см. [32]).

5.7 Квантование универсального пространства Тейхмюллера

В основе квантования расширенной системы $(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V), \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V))$, а следовательно и пространства нормализованных диффеоморфизмов $(\mathcal{S}, \mathrm{Vect}(S^1))$ лежал тот факт, что естественное действие группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ на пространстве $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+)$ удалось поднять с помощью теоремы Шейла–Березина до проективного действия этой группы на фоковском расслоении

$$\mathcal{F} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)} F_J \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V).$$

Однако этот метод не применим для всего универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$. Хотя у нас по-прежнему имеются вложение $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{J} = \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+)$ пространства $\mathcal{T}$ в пространство $\mathcal{J}$ комплексных структур на V, совместимых с симплектической формой ω, и фоковское расслоение

$$\mathcal{F}_{\mathcal{J}} := \bigcup_{J \in \mathcal{J}(V)} F_J \longrightarrow \mathcal{J}(V),$$

мы не можем поднять естественное действие группы $\mathrm{Sp}(V)$ на $\mathcal{J}(V)$ до проективного действия этой группы на $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$, накрывающего ее действие на базе $\mathcal{J}(V)$. Это запрещается теоремой Шейла–Березина. Поэтому приходится использовать другой подход к квантованию $\mathcal{T}$, основанный на соображениях из некоммутативной геометрии.

Напомним, что в изложенном выше дираковском подходе квантованию подвергались классические системы $(M, \mathcal{A})$, задаваемые фазовым пространством M и алгеброй наблюдаемых $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, являющейся инволютивной алгеброй Ли, состоящей из гладких функций на M. Квантование такой системы задается неприводимым линейным представлением r наблюдаемых из $\mathcal{A}$ замкнутыми линейными операторами, действующими в пространстве квантования $\mathcal{H}$, переводящим скобку Пуассона $\{f, g\}$ наблюдаемых $f, g \in \mathcal{A}$ в коммутатор $\frac{1}{i}[r(f), r(g)]$ отвечающих им операторов. В подходе Конна классическая система задается парой (M, A), где M снова фазовое пространство, а алгебра наблюдаемых A есть ассоциативная инволютивная алгебра, состоящая из гладких функций на M. Квантованием такой системы по Конну называется неприводимое линейное представление π наблюдаемых из A замкнутыми линейными операторами, действующими в пространстве квантования $\mathcal{H}$, переводящее оператор внешнего дифференцирования d в коммутатор с оператором симметрии S:

$$\pi : df \longmapsto d^q f = [S, \pi(f)], \quad f \in A.$$

Если все наблюдаемые являются гладкими функциями на M (как предполагалось выше), то между двумя подходами к квантованию нет большого различия. Действительно, дифференциал df наблюдаемой f является симплектически двойственным к гамильтонову векторному полю X_f, что устанавливает связь между ассоциативной алгеброй наблюдаемых $A \ni f$ и алгеброй Ли гамильтоновых векторных полей $\mathcal{A} \ni X_f$ или двойственной к ней алгеброй Ли гамильтонианов f, порождающих векторные поля X_f. Оператор симметрии S определяется в этом случае *поляризацией*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \tag{5.30}$$

пространства квантования $\mathcal{H}$, т.е. разложением $\mathcal{H}$ в прямую ортогональную сумму замкнутых бесконечномерных подпространств $\mathcal{H}_\pm$. Отвечающий поляризации оператор симметрии полагается равным $S = \pm I$ на $\mathcal{H}_\pm$. Этот оператор тесно связан с оператором комплексной структуры J на $\mathcal{H}$, задаваемым разложением (5.30), а именно, $S = iJ$, так что $J = \pm iI$ на $\mathcal{H}_\pm$.

Однако в случае, если мы разрешим алгебре наблюдаемых $\mathcal{A}$ содержать негладкие функции, дираковское определение потеряет смысл. В конновском подходе дифференциал негладкой наблюдаемой $f \in A$ также не определен в классическом смысле, тем не менее его квантовый аналог

$$d^q f = [S, \pi(f)]$$

может быть корректно определен, как мы видели в п.4.1 на примере алгебры $A_S = L^\infty(S^1, \mathbb{C})$.

Обратимся к квантованию системы, имеющей в качестве фазового пространства соболевское пространство V. Мы должны выбрать естественную алгебру наблюдаемых A на этом пространстве. По причинам, которые выяснятся позже, мы предпочитаем начать с группы G симплектических преобразований пространства V.

Группа G состоит из двух компонент. Первая задается *группой Гейзенберга* $\mathrm{Heis}(V)$. Эта группа является центральным расширением абелевой группы V. Другими словами, $\mathrm{Heis}(V)$ есть прямое произведение $\mathrm{Heis}(V) = V \times S^1$, наделенное групповой операцией, задаваемой формулой

$$(v_1, s_1) \cdot (v_2, s_2) = \left(v_1 + v_2, s_1 s_2 e^{i\omega(v_1, v_2)}\right).$$

В качестве второй компоненты группы G возьмем группу $\mathrm{QS}(S^1)$ квазисимметричных гомеоморфизмов окружности S^1, действующую на V с помощью репараметризации, т.е. замены переменной (см. п.5.5). По определению, G есть полупрямое произведение группы $\mathrm{Heis}(V)$ и группы $\mathrm{QS}(S^1)$. Группу G можно рассматривать как бесконечномерный аналог группы Пуанкаре, совпадающей с полупрямым произведением группы трансляций и группы гиперболических поворотов.

Если бы G была группой Ли, действующей на V гладкими симплектическими преобразованиями, мы могли бы взять в качестве алгебры наблюдаемых A алгебру Ли этой группы. Однако, ни группа G, ни ее действие на соболевском пространстве V не являются гладкими. По этой причине мы не можем построить классическую систему, отвечающую фазовому пространству V с действующей на нем группой G. Вместо этого мы определим напрямую *квантовую систему*, ассоциированную с V. Иными словами, мы меняем нашу исходную точку зрения на квантование и будем строить сначала квантовую систему, ассоциированную с пространством V и группой G, минуя стадию построения классической системы.

Перейдем к построению квантовой алгебры наблюдаемых, ассоциированной с соболевским пространством V и группой G.

Начнем с первой компоненты, отвечающей группе Гейзенберга $\mathrm{Heis}(V)$. Обозначим, как и ранее, через M_f ограниченный оператор умножения в гильбертовом пространстве $V^{\mathbb{C}}$, а в качестве оператора симметрии возьмем преобразование Гильберта. Дифференциал общей функции $f \in V^{\mathbb{C}}$ не определен в классическом смысле, однако его квантовый аналог $d^q f := [S, M_f]$ корректно определен и является ограниченным линейным оператором в $V^{\mathbb{C}}$. Как мы видели ранее в п.4.1, он задается формулой

$$(d^q f)(h)(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_f(\phi,\psi)h(\psi)d\psi, \quad h \in V^{\mathbb{C}},$$

где $k_f(\phi,\psi) = K(\phi,\psi)(f(\phi)-f(\psi))$. Квазиклассический предел этого оператора, получаемый его сужением на гладкие функции с последующим взятием следа на диагонали $\phi = \psi$, совпадает с оператором умножения $h \mapsto f' \cdot h$. Операторы $d^q f$ есть квантовые наблюдаемые, отвечающие элементам $f \in V$.

Для того, чтобы определить квантовые наблюдаемые, отвечающие элементам $g \in \mathrm{QS}(S^1)$, удобно перейти от окружности S^1 к вещественной прямой $\mathbb{R}$. Тогда пространство V заменится соболевским пространством $H^{1/2}(\mathbb{R})$ вещественнозначных полудифференцируемых функций на вещественной прямой (по-прежнему обозначаемом через V), а $\mathrm{QS}(S^1)$ — группой $\mathrm{QS}(\mathbb{R})$ квазисимметричных гомеоморфизмов прямой $\mathbb{R}$, продолжающихся до квазиконформных гомеоморфизмов верхней полуплоскости.

Согласно теореме Реймана [27], касательное пространство к $\mathrm{QS}(\mathbb{R})$ в начале совпадает с *пространством Зигмунда* $\Lambda(\mathbb{R})$, состоящим из непрерывных функций $f(x)$, удовлетворяющих условию:

$$|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)| \leq C|t|$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Это мотивирует определение оператора дифференцирования $d^q g$ для $g \in \mathrm{QS}(\mathbb{R})$ как

$$d^q g(v) = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(x+t)+g(x-t)-2g(x)}{t}\, v(t)dt, \quad v \in V^{\mathbb{C}}.$$

Пользуясь этим оператором, мы можем ввести квантовые наблюдаемые, отвечающие элементам $g \in \mathrm{QS}(\mathbb{R})$, как операторы $T^q_g h := d^q h(g) \circ d^q g$. Квазиклассический предел оператора $h \mapsto T^q_g h$ совпадает с оператором умножения $h \mapsto h'(g)g'h$.

Этот оператор можно продолжить на все фоковское пространство F_0 следующим образом. Мы определяем его вначале на элементах ортонормированного базиса пространства F_0, задаваемых мономами $P_K(z)$ (см. формулу (5.22)), по правилу Лейбница. Затем продолжаем на всю алгебру симметричных полиномов по переменным W_+ по линейности. Замыкание полученного оператора дает оператор $T^q_g h$ в фоковском пространстве F_0. Таким же образом оператор $d^q h$ продолжается до замкнутого оператора $d^q h$ в пространстве F_0.

Искомая *квантовая алгебра наблюдаемых*, ассоциированная с соболевским пространством V, наделенным действием группы G, есть алгебра Ли, порожденная операторами $d^q h$ и $T^q_g h$, действующими в F_0, с $g \in \mathrm{QS}(\mathbb{R})$, $h \in V$.

Глава 6

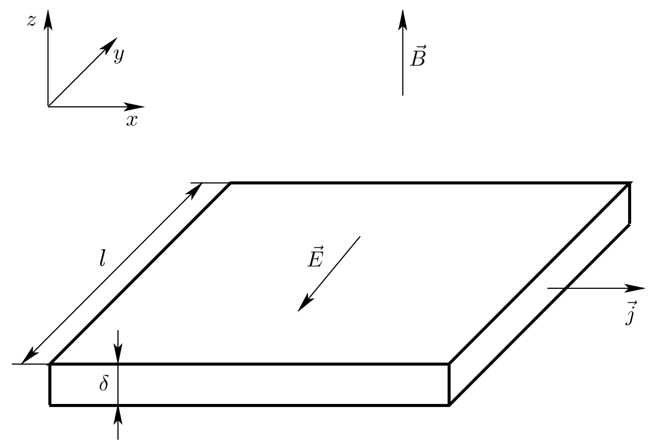
КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ХОЛЛА

Эта глава посвящена интерпретации квантового эффекта Холла в терминах некоммутативной геометрии. В ней излагаются главные идеи, лежащие в основе указанной интерпретации.

6.1 Классический и квантовый эффекты Холла

Квантовый эффект Холла был открыт в 1980 г. фон Клитцингом и его коллегами. Проведенные ими эксперименты показали, что при очень низких температурах порядка $1^\circ K$ проводимость Холла "квантуется", т.е. принимает целочисленные значения (в подходящих единицах e^2/h). Этот феномен был назван квантовым эффектом Холла и за его открытие фон Клитцинг был награжден Нобелевской премией по физике 1985 г. Уже начиная с первых теоретических работ [18], [36], посвященных этому эффекту, стало ясно, что он имеет топологическую природу. В статьях [5] и [37] было предложено его объяснение в терминах некоммутативной геометрии.

Классический эффект Холла был открыт в 1880 г. при проведении следующего физического эксперимента. Тонкая прямоугольная пластина толщины δ и ширины l помещалась параллельно (x, y)-плоскости в постоянное однородное магнитное поле $\vec{B}$, направленное вдоль оси (z), перпендикулярной пластине. В направлении оси (x) запускался постоянный электрический ток с плотностью $\vec{j}$. Свободные электроны под действием силы Лоренца, индуцированной магнитным полем, начинали двигаться вдоль оси (y). В результате возникала разность потенциалов в направлении оси (y) между краями пластины и сопутствующее ей электрическое поле $\vec{E}$.



Из уравнений Максвелла вытекает, что

$$ne\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = 0, \tag{6.1}$$

где n – плотность электронов, e – заряд электрона. Отсюда

$$\vec{j} = \frac{ne}{B^2}\vec{B} \times \vec{E} = \sigma\vec{E}, \tag{6.2}$$

где σ – тензор проводимости, задаваемый 2×2-матрицей вида

$$\sigma = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_H \\ -\sigma_H & 0 \end{pmatrix} .$$

Здесь, δ – толщина пластины, а величина σ_H называется *проводимостью Холла.*

Из уравнения (6.2) следует, что

$$\sigma_H = \frac{ne\delta}{B}. \tag{6.3}$$

Ток в направлении оси (y) равен $J_y = j\delta l$, а потенциал в этом направлении задается формулой $V_y = -lE$. Из уравнения (6.1) получаем

$$V_y = \frac{BJ_y}{ne\delta} = \frac{J_y}{\sigma_H}. \tag{6.4}$$

Последнее соотношение можно рассматривать как 2-мерный аналог классического закона Ома. Из него вытекает, в частности, что проводимость Холла σ_H имеет размерность обратного сопротивления. Ее принято характеризовать безразмерной величиной

$$\nu := \frac{n\delta h}{eB},$$

называемой *коэффициентом заполнения*. В его терминах приведенную выше формулу (6.3) для проводимости Холла можно переписать в виде

$$\sigma_H = \frac{\nu}{R_H}, \tag{6.5}$$

где $R_H := h/e^2$ – универсальная постоянная, называемая *сопротивлением Холла*.

Согласно формуле (6.5), график зависимости проводимости Холла σ_H от ν представляет собой прямую линию. Однако такая зависимость, диктуемая классическим эффектом Холла, не сохраняется для квантовых систем.

А именно, упомянутый выше эксперимент Клитцинга показывает, что при температурах порядка $1^\circ K$ на этом графике появляются некие горизонтальные "плато", отвечающие целочисленным значениям σ_H (в единицах e^2/h). Продольная проводимость $\sigma_\parallel$ в направлении оси (x) на таких интервалах зануляется.

Для указанных температур система электронов, заключенных в двумерной плоскости, начинает вести себя как квантовая система и должна исследоваться квантовыми методами. Описанный феномен был назван *квантовым эффектом Холла.*

Более тщательные эксперименты, выполненные Цуем и Штермером при еще более низких температорах, показали, что горизонтальные плато на графике проводимости Холла наблюдаются не только для целочисленных значений σ_H, но и при некоторых дробных значениях, более точно, при значениях σ_H, равных $\frac{p}{q}\left(\frac{e^2}{h}\right)$ с взаимно простыми p, q и нечетными q. Этот эффект был назван *дробным эффектом Холла* и за его открытие Цуй и Штермер вместе с Лафлином получили Нобелевскую премия по физике 1998 г.

6.2 Классическая и магнитная теории Блоха

Исследование поведения систем электронов естественно начать с классической теории Блоха. Главным целью этой теории является объяснение природы кристаллов (см. [16], [2]).

Физический кристалл характеризуется своей *решеткой Бравэ*, т.е. решеткой Γ в пространстве $d = 3$ измерений, описывающей симметрии кристалла. Математически, решетка Γ в $\mathbb{R}^d$ есть дискретная абелева группа, изоморфная $\mathbb{Z}^d$, которая действует на $\mathbb{R}^d$ трансляциями. Поведение свободного электрона в кристалле определяется его взаимодействием с ионами кристаллической решетки. В одно-электронном приближении оно описывается оператором Шредингера вида

$$H = -\Delta + V$$

с потенциалом V, задаваемым ограниченной функцией, инвариантной относительно Γ.

Оператор Шредингера H коммутирует со всеми операторами трансляции T_γ, $\gamma \in \Gamma$, и эти операторы порождают унитарное представление группы Γ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Обозначим через Γ' двойственную решетку в двойственном пространстве $(\mathbb{R}^d)'$, определяемую как

$$\Gamma' = \{k \in (\mathbb{R}^d)' : (k, \gamma) \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{для любых } \gamma \in \Gamma\}.$$

Блоховские собственные функции оператора H – это функции вида

$$\psi_{jk}(x) = e^{i(k,x)}\varphi_{jk}(x),$$

где вектор k принадлежит *зоне Бриллюэна*, т.е. фундаментальной области F' двойственной решетки Γ', а $\varphi_{jk}(x)$ являются собственными функциями оператора H_k, определяемого соотношением

$$H\left(e^{i(k,x)}\varphi(x)\right) = e^{i(k,x)}H_k\varphi(x).$$

Область определения оператора H_k совпадает с подпространством

$$D(H_k) = \left\{\varphi : \varphi(x) = \sum_{\gamma' \in \Gamma'} c_{\gamma'} e^{i(\gamma',x)} \text{ с } \sum_{\gamma' \in \Gamma'} (1 + |\gamma'|^2)|c_{\gamma'}|^2 < \infty\right\}.$$

Оператор H_k имеет дискретный спектр и полную ортогональную систему собственных функций φ_{jk} с собственными значениями $E_j(k)$:

$$H_k\varphi_{jk} = E_j(k)\varphi_{jk}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

такими, что $E_j(k) \to +\infty$ при $j \to \infty$ (см. [3]). Функции φ_{jk} являются C^∞-гладкими, если потенциал V является таковым.

Спектр H состоит из конечного числа непересекающихся отрезков

$$\sigma(H) = [c_1, d_1] \cup [c_2, d_2] \cup \ldots [c_l, d_l] \cup [c_{l+1}, +\infty),$$

где $c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < \ldots < d_l < c_{l+1}$. Интервалы $(-\infty, c_1)$, (d_1, c_2), (d_2, c_3),…, свободные от спектра, называются *лакунами* или *запрещенными зонами*. Блоховские собственные функции образуют полную систему обобщенных собственных функций оператора H ([3]).

Предположим теперь, что B есть вещественная 2-форма на $\mathbb{R}^d$, инвариантная относительно действия группы Γ. Эту форму, играющую роль магнитного поля, можно представить в виде

$$B = dA$$

для некоторой вещественной 1-формы A, играющей роль электромагнитного вектор-потенциала. *Магнитный оператор Шредингера* – это оператор вида

$$H = -(d+iA)^*(d+iA)+V.$$

Как и в случае классической теории Блоха, мы можем построить операторы, называемые *магнитными трансляциями*, которые коммутируют с магнитным оператором Шредингера. Именно, магнитная форма B инвариантна относительно действия группы Γ, так что

$$0 = B - \gamma \cdot B = d(A - \gamma \cdot A)$$

для любого $\gamma \in \Gamma$. Иными словами, форма $A - \gamma \cdot A$ замкнута и потому может быть представлена в виде

$$A - \gamma \cdot A = dh_\gamma$$

для некоторой гладкой вещественной функции h_γ, заданной с точностью до аддитивной константы.

Магнитный оператор Шредингера H инвариантен относительно магнитных трансляций вида

$$T_\gamma : f \longmapsto T_\gamma f = e^{ih_\gamma}\gamma \cdot f.$$

В отличие от классической теории Блоха магнитные трансляции T_γ удовлетворяют соотношению

$$T_{\gamma_1}T_{\gamma_2} = \sigma(\gamma_1,\gamma_2)T_{\gamma_1\gamma_2} \text{ с } \quad \sigma(\gamma_1,\gamma_2) \in \mathrm{U}(1).$$

Другими словами, они порождают проективное унитарное представление группы Γ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$. Оно становится настоящим представлением группы Γ только в случае, когда форма A инвариантна относительно действия группы Γ.

6.3 Алгебра наблюдаемых

При естественных условиях на потенциал V (см.[15]) магнитный оператор Шредингера H является самосопряженным оператором в $L^2(\mathbb{R}^d)$. При этом его спектральные проекторы есть ограниченные операторы в $L^2(\mathbb{R}^d)$, также коммутирующие с магнитными трансляциями T_γ.

Это наблюдение мотивирует введение следующей алгебры ограниченных операторов, ассоциированной с H:

$$\mathcal{A}(\sigma) = \{A \text{ – ограниченный оператор в } L^2(\mathbb{R}^d),$$
$$\text{коммутирующий с } T_\gamma \text{ для любого } \gamma \in \Gamma\}.$$

Указанная алгебра полностью определяет оператор H. Ниже мы дадим ее описание в терминах групповых алгебр фон Неймана.

Построим по заданному проективному представлению T группы Γ естественное левое проективное представление T^L этой группы в пространстве $\ell^2(\Gamma)$, действующее по правилу:

$$T^L_\gamma f(\gamma') = f(\gamma^{-1}\gamma')\overline{\sigma}(\gamma, \gamma^{-1}\gamma'), \quad \gamma, \gamma' \in \Gamma.$$

По этому представлению можно построить *правую групповую алгебру фон Неймана.* Она определяется как

$$\mathfrak{a}^R(\sigma) = \{A \text{ – ограниченный оператор в } \ell^2(\Gamma),$$
$$\text{коммутирующий с } T^L_\gamma \text{ для любого } \gamma \in \Gamma\}.$$

Аналогично строится *левая групповая алгебра фон Неймана* $\mathfrak{a}^L(\overline{\sigma})$, ассоциированная с правым проективным представлением T^R группы Γ в пространстве $\ell^2(\Gamma)$. Это представление задается формулой

$$T^R_\gamma f(\gamma') = f(\gamma'\gamma)\sigma(\gamma, \gamma'\gamma), \quad \gamma, \gamma' \in \Gamma,$$

а ассоциированная левая групповая алгебра фон Неймана есть

$$\mathfrak{a}^L(\overline{\sigma}) = \{A \text{ – ограниченный оператор в } \ell^2(\Gamma),$$
$$\text{коммутирующий с } T^R_\gamma \text{ для любого } \gamma \in \Gamma\}.$$

Алгебра $\mathfrak{a}^R(\sigma)$ порождается операторами $\{T^R_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, тогда как алгебра $\mathfrak{a}^L(\overline{\sigma})$ порождается операторами $\{T^L_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.

Чтобы определить след на введенных алгебрах, фиксируем естественный ортонормированный базис в $\ell^2(\Gamma)$, образованный функциями e_γ, $\gamma \in \Gamma$, определяемыми как

$$e_\gamma(\gamma') = \begin{cases} 1 & \text{если } \gamma' = \gamma, \\ 0 & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Обозначим через 1 единицу группы Γ и определим *след* на групповых алгебрах по формуле

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{a}} A := (Ae_1, e_1).$$

Функции $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ порождают групповую алгебру $\mathcal{C}_0(\sigma)$, которая состоит из комплекснозначных функций на Γ с конечными носителями. На этой алгебре имеется операция свертки, задаваемая посредством

$$(f * g)(\gamma) = \sum_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} \sigma(\gamma_1, \gamma_2) f(\gamma_1) g(\gamma_2).$$

Аналогичным образом, заменяя σ комплексно сопряженным коциклом $\overline{\sigma}$, мы можем определить групповую алгебру $C_0(\overline{\sigma})$.

Отображения $\gamma \mapsto T^L_\gamma$ и $\gamma \mapsto T^R_\gamma$ задают представления групповых алгебр $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma})$ и $\mathcal{C}_0(\sigma)$ соответственно в пространстве $\ell^2(\Gamma)$. Слабые замыкания образов этих отображений в алгебре $\mathcal{L}(\ell^2(\Gamma))$ ограниченных операторов в $\ell^2(\Gamma)$ совпадают с введенными алгебрами фон Неймана $\mathfrak{a}^L(\overline{\sigma})$ и $\mathfrak{a}^R(\sigma)$ соответственно. Замыкания образов этих отображений по норме являются C^*-алгебрами, обозначаемыми соответственно через $\mathcal{C}(\overline{\sigma})$ и $\mathcal{C}(\sigma)$.

Для того, чтобы дать интерпретацию алгебры $\mathcal{A}(\sigma)$, нам понадобятся также групповые алгебры фон Неймана с коэффициентами в алгебре ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Для этого продолжим построенные проективные представления T^L и T^R, действующие в пространстве $\ell^2(\Gamma)$, тривиальным образом на тензорное произведение $\ell^2(\Gamma) \otimes \mathcal{H}$, полагая

$$\Gamma \ni \gamma \longmapsto T^L_\gamma \otimes \mathrm{id}, \quad \Gamma \ni \gamma \longmapsto T^R_\gamma \otimes \mathrm{id}.$$

Эти проективные представления определяют, также как и выше, соответствующие групповые алгебры фон Неймана $\mathfrak{a}^L_{\mathcal{H}}(\overline{\sigma})$ и $\mathfrak{a}^R_{\mathcal{H}}(\sigma)$ с коэффициентами в $\mathcal{H}$:

$$\mathfrak{a}^L_{\mathcal{H}}(\overline{\sigma}) = \mathfrak{a}^L(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad \mathfrak{a}^R_{\mathcal{H}}(\sigma) = \mathfrak{a}^R(\sigma) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Согласно теореме из [15], любой оператор $A \in \mathfrak{a}^L_{\mathcal{H}}(\overline{\sigma})$ может быть представлен в виде

$$A = \sum_{\gamma\in\Gamma} T^L_\gamma \otimes A(\gamma),$$

где $A(\gamma)$ – ограниченный оператор в $\mathcal{H}$ и ряд в правой части сходится в сильной операторной топологии.

Определим след на алгебрах $\mathfrak{a}^L_{\mathcal{H}}(\overline{\sigma})$ и $\mathfrak{a}^R_{\mathcal{H}}(\sigma)$, полагая

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} := \mathrm{tr}_{\mathfrak{a}} \otimes \mathrm{Tr},$$

где Tr обозначает обычный след на алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных операторов, принимающий конечные значения на ядерных операторах.

Вернемся к алгебре $\mathcal{A}(\sigma)$ ограниченных операторов в $L^2(\mathbb{R}^d)$, коммутирующих с магнитными трансляциями, и дадим ее интерпретацию в терминах групповых алгебр фон Неймана.

Для этого обозначим через F фундаментальную область группы Γ и рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H} = L^2(F)$ квадратично интегрируемых функций на F. Обозначим через $i : F \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ естественное вложение и рассмотрим отображение

$$W : f \longmapsto W(f) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_\gamma \otimes i^*(T_\gamma f)$$

из пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$ в пространство $\ell^2(\Gamma) \otimes \mathcal{H}$. Это отображение является изометрией, порождающей изоморфизм между алгеброй $\mathcal{A}(\sigma)$ и алгеброй $\mathfrak{a}^L_{\mathcal{H}}(\overline{\sigma})$.

Пользуясь этим изоморфизмом, мы можем перенести след $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}$ с алгебры $\mathfrak{a}^L_{\mathcal{H}}(\overline{\sigma})$ на алгебру $\mathcal{A}(\sigma)$. Тогда спектральные проекторы $E(\lambda)$ магнитного оператора Шредингера H будут иметь конечный след и *спектральная плотность*

$$N_H(\lambda) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} E(\lambda)$$

корректно определена. Спектр H состоит из точек роста этой функции.

Теперь мы можем ввести *алгебру наблюдаемых*. Ее роль будет играть C^*-алгебра

$$\mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}),$$

где $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ – алгебра компактных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Эта алгебра совпадает с замыканием по норме алгебраического тензорного произведения $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma})\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Она содержит, в частности, все операторы $A \in \mathfrak{a}^L_{\mathcal{H}}(\overline{\sigma})$ вида

$$A = \sum_{\gamma\in\Gamma} T^L_\gamma \otimes A(\gamma)$$

с коэффициентами $A(\gamma) \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, для которых сходится ряд $\sum_\gamma \|A(\gamma)\|$.

Построим на введенной алгебре наблюдаемых инварианты, которые задаются циклическими коциклами Хохшильда (см. п.3.4).

Такие коциклы строятся, исходя из коциклов φ на группе Γ, удовлетворяющих следующему условию: $\varphi(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) = 0$, если по крайней мере один из элементов γ_i или их произведение $\gamma_1 \ldots \gamma_k$ равны единице. По любому такому коциклу φ можно построить циклический коцикл τ_φ на алгебре $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma})$, задаваемый на базисных функциях формулой

$$\tau_\varphi(e_{\gamma_0}, \ldots, e_{\gamma_k}) = \begin{cases} \varphi(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)\mathrm{tr}_{\mathfrak{a}}(e_{\gamma_0} * \ldots * e_{\gamma_k}) & \text{если } \gamma_0\gamma_1 \ldots \gamma_k = 1, \\ 0 & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Коцикл τ_φ можно продолжить до циклического коцикла $\tau_\varphi \otimes \mathrm{Tr}$ на подалгебре $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{S}$ алгебры наблюдаемых $\mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$, где $\mathcal{S}$ подалгебра Шварца в алгебре $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, определяемая ниже. Циклический коцикл $\tau_\varphi \otimes \mathrm{Tr}$ задается формулой

$$\tau_\varphi \otimes \mathrm{Tr}(a_0, \ldots, a_k) = \sum_{\gamma_0 \cdot \ldots \cdot \gamma_k = e} \mathrm{Tr}\left(a_0(\gamma_0) \cdot \ldots \cdot a_k(\gamma_k)\right) \tau_\varphi(e_{\gamma_0}, \ldots, e_{\gamma_k}),$$

где

$$a_i = \sum_{\gamma \in \Gamma} e_\gamma \otimes a_i(\gamma) \in \mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}),\ i = 0, 1, \ldots, k.$$

Дадим теперь определение подалгебры Шварца $\mathcal{S}$ в алгебре $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Она состоит из операторов $T \in \mathcal{K}(H)$ с матричными компонентами $T_{ij} := (Te_i, e_j)$, $i, j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющими следующему условию: для любых фиксированных натуральных чисел $k, l \in \mathbb{N}$ выполняется следующее неравенство

$$\sup\left\{ i^k j^l |T_{ij}| : i, j \in \mathbb{N} \right\} < \infty.$$

Как показано в [15], построенный коцикл $\tau_\varphi \otimes \mathrm{Tr}$, определенный выше на подалгебре $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{S}$, можно продолжить на всю алгебру наблюдаемых $\mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

6.4 Интерпретация квантового эффекта Холла

Применим теперь развитую технике к математическому объяснению целочисленного квантового эффекта Холла. В этом случае $d = 2$ и $\Gamma = \mathbb{Z}^2$.

Выберем в пространстве $\mathcal{H}$ квадратично интегрируемых блоховских функций ортонормированный базис, составленный из собственных блоховских функций $\{\psi_j\}$ оператора Шредингера H и фиксируем унитарный изоморфизм $\mathcal{H} \to \ell^2$, переводящий функции ψ_j в функции e_j. Композиция этого изоморфизма с унитарным изоморфизмом $W : L^2(\mathbb{R}^2) \to \ell^2(\Gamma) \otimes \mathcal{H}$ задает унитарный изоморфизм

$$U : L^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \ell^2(\Gamma) \otimes \ell^2.$$

Обозначим через $\delta_1 = \delta_x$ (соотв. $\delta_2 = \delta_y$) операторы дифференцирования в алгебре наблюдаемых $\mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Зададим их снова сначала на гладкой подалгебре $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{S}$, а затем продолжим до замкнутых операторов на всей алгебре наблюдаемых.

Величина тока j_k в состоянии, описываемом спектральным проектором P, дается выражением

$$i\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(P[\partial_t P, \delta_k P]),\ k = 1, 2.$$

Если зависимость j_k от времени t порождается только изменением l-й компоненты вектор-потенциала A с $l \neq k$, $l = 1, 2$, то последнее выражение можно переписать в виде

$$-iE_l \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(P[\delta_l P, \delta_2 P]),$$

где $E_l = -\partial A_l/\partial t$. Отсюда следует, что проводимость Холла в k-м направлении, индуцированная изменением электрического поля в l-м направлении, равна $-i\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(P[\delta_l P, \delta_k P])$.

Введем следующий циклический 2-коцикл

$$c(T_0, T_1, T_2) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(T_0[\delta_l T_1, \delta_2 T_2]), \tag{6.6}$$

определенный на операторах $T_0, T_1, T_2 \in \mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Снова определяем его сначала на операторах из гладкой подалгебры $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{S}$, а затем продолжаем на произвольные операторы из алгебры наблюдаемых. Полученный коцикл называется *коциклом Холла.*

Он совпадает с циклическим коциклом $\tau_\varphi \otimes \mathrm{Tr}$, введенным ранее, если в качестве 2-коцикла $\varphi : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}$ на группе Γ взять коцикл

$$\varphi(\gamma_1, \gamma_2) = \text{площадь треугольника } \Delta(\gamma_1, \gamma_2)$$
$$\text{с вершинами в точках } O,\ \gamma_1 \cdot O,\ \gamma_2 \cdot O,$$

где O – начало координат.

Для того, чтобы получить из формулы (6.6) выражение для проводимости Холла, достаточно взять в качестве операторов дифференцирования δ_j ковариантные производные $\partial_{A,j}$, а в качестве операторов $T_0 = T_1 = T_2$ спектральный проектор P_F на *уровень Ферми* (см. [16], [2]). В результате придем к *формуле Кубо–Черна* для проводимости Холла:

$$\sigma_H = \frac{e^2}{h}\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left(P_F[\partial_{A,1}P_F, \partial_{A,2}P_F]\right),$$

где

$$\mathrm{Ch}(P_F) = \frac{1}{2\pi i}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left(P_F[\partial_{A,1}P_F, \partial_{A,2}P_F]\right)$$

называется *характером Черна* проектора P_F. Это целочисленный топологический инвариант, ответственный зп целочисленный квантовый эффект Холла.

В работе [8] (см. также [22]) было высказано предположение, что дробный эффект Холла можно описать магнитным оператором Шредингера, определенным на гиперболической плоскости $\mathbb{H}$ вместо $\mathbb{R}^2$, инвариантным относительно дискретной группы Γ, действующей на этой плоскости.

Более подробно, отождествим $\mathbb{H}$ с верхней полуплоскостью в $\mathbb{C}$, наделенной гиперболической метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}\,.$$

Обозначим через Γ дискретную фуксову группу, действующую на $\mathbb{H}$. Более точно, $\Gamma \equiv \Gamma(g; \nu_1, \ldots, \nu_n)$ есть дискретная подгруппа группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ с образующими a_i, b_i, c_j, где $i = 1, \ldots, g$, $j = 1, \ldots, n$, удовлетворяющими соотношениям

$$\prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] c_1 \cdot \ldots \cdot c_n = 1, \ c_j^{\nu_j} = 1.$$

Фактор $\Sigma \equiv \Sigma(g; \nu_1, \ldots, \nu_n) = \mathbb{H}/\Gamma$ является компактным орбифолдом рода g, т.е. компактной римановой поверхностью рода g с n сингулярными точками, являющимися образами точек из $\mathbb{H}$ с нетривиальными стабилизаторами. Для орбифолдов указанного типа можно ввести понятие *эйлеровой характеристики*, принимающей рациональные значения. В нашем случае эта характеристика равна

$$\chi\left(\Sigma(g; \nu_1, \ldots, \nu_n)\right) = 2 - 2g + \nu - n,$$

где $\nu = 1/\nu_1 + \ldots + 1/\nu_n$.

Магнитный оператор Шредингера

$$H = -(d + iA)^*(d + iA) + V$$

с потенциалом V, инвариантным относительно Γ, задает самосопряженный оператор, коммутирующий с проективным действием Γ с коциклом σ, задаваемым магнитными трансляциями T_γ.

Выбирая вновь ортонормированный базис ψ_j в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, состоящий из квадратично интегрируемых блоховских собственных функций $\{\psi_j\}$ оператора H и фиксируя унитарный изоморфизм $\mathcal{H} \to \ell^2$, переводящий ψ_j в функции e_j, получим унитарный изоморфизм

$$U : L^2(\mathbb{H}) \longrightarrow \ell^2(\Gamma) \otimes \ell^2.$$

Введем снова операторы дифференцирования на алгебре наблюдаемых $\mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$, ассоциированные с образующими группы Γ. Обозначим через δ_i операторы дифференцирования, отвечающие образующим a_i, $i = 1, \ldots, g$, и через δ_{i+g} операторы дифференцирования, отвечающие образующим b_i, $i = 1, \ldots, g$. (Снова эти операторы определяются сначала на гладкой подалгебре $\mathcal{C}_0(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{S}$, а затем продолжаются до замкнутых операторов на всей алгебре наблюдаемых.)

Введем, как и в случае целочисленного эффекта Холла, циклические 2-коциклы
$$c_{l,k}(T_0, T_1, T_2) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(T_0[\delta_l T_1, \delta_k T_2]),$$
определенные на операторах $T_0, T_1, T_2 \in \mathcal{C}(\overline{\sigma}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$, где $l, k = 1, \ldots, 2g$.

Коцикл Холла задается теперь формулой

$$c(T_0, T_1, T_2) = \sum_{l=1}^{g} c_{l,l+g}.$$

Предполагается, что этот коцикл, как и в случае целочисленного эффекта Холла, отвечает за дробный эффект Холла.

Литература

[1] Л.Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, Москва, 1969.

[2] Н.Ашкрофт, Н.Мермин, *Физика твердого тела*, Мир, Москва, 1979.

[3] Ф.А.Березин, М.А.Шубин, *Уравнение Шредингера*, МГУ, Москва, 1983.

[4] [B] Х.Басс, *Алгебраическая K-теория*, Мир, Москва, 1973.

[5] J.Bellisard, A. van Elst, H. Schulz-Baldes, The noncommutative geometry of the quantum Hall effect, J. Math. Phys. **35**(1994), 5373–5451.

[6] Ф.А.Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, Москва, 1986.

[7] R.Bowen, Hausdorff dimension of quasicircles, Publ. Math. IHES **50**(1979), 259-273.

[8] A.Carey, K.Hannabuss, V.Mathai, Quantum Hall effect on the hyperbolic plane, Commun. Math. Phys. **190**(1998), 629–673.

[9] [Con] A.Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London–San Diego, 1994.

[10] H.M.Farkas, I.Kra, *Riemann Surfaces*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1992.

[11] [GVF] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

[12] [H] Л.Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, Мир, Москва, 1986.

[13] S.Janson, T.H.Wolff, Schatten classes and commutators of singular integral operators, Ark. Mat., **20**, 1982, 301-310.

[14] M.Khalkhali, *Basic Noncommutative Geometry*, European Mathematical Society, Zürich, 2013.

[15] Yu. Kordyukov, V.Mathai, M.A.Shubin, Equivalence of spectral properties in semi-classical limit and a vanishing theorem for higher traces in K-theory, J. Reine Angew. Math. **581** (2005), 193-236

[16] Е.М.Лифшиц, Л.П.ПИтаевский, *Статистическая Физика, часть 2* Наука, Москва, 1978.

[17] G.Landi, *An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometries*, Springer, Berlin, 1997.

[18] B.Laughlin, Quantized Hall conductivity in two dimensions, Phys. Rev. **B23**(1981), 5232.

[19] [LM] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[20] O.Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1987.

[21] O.Lehto, K.Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1973.

[22] M. Marcolli, V. Mathai, Towards the fractional quantum Hall effect: a noncommutative geometry perspective. In: "Noncommutative Geometry and Number Theory", Aspects of Mathematics, Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006; 235-261.

[23] [MS] Дж.Милнор, Дж.Сташефф, *Характеристические классы*, Мир, Москва, 1979.

[24] S.Nag, D.Sullivan, Teichmüller theory and the universal period mapping via quantum calculus and the $H^{1/2}$ space on the circle, Osaka J. Math. **32**(1995), 1-34.

[25] В.В.Пеллер, *Операторы Ганкеля и их приложения*, Регулярная и хаотическая динамика, 2005.

[26] S.Power, *Hankel operators on Hilbert space*, Research Notes in Math. 64(1982).

[27] M. Reimann, Ordinary differential equations and quasiconformal mappings, Inventiones Math. **33**(1976), 247–270.

[28] [R] У.Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, Москва, 1975.

[29] G.Segal, Unitary representations of some infinite dimensional groups, Commun. Math. Phys. **80**(1981), 301-342.

[30] [S] А.Г.Сергеев, *Лекции по функиональному анализу*, МИАН, Москва, 2014.

[31] A. G. Sergeev, *Lectures on Universal Teichmüller Space*, Publishing House, European Mathematical Society, 2014.

[32] А.Г.Сергеев, *Геометрическое квантование пространств петель*, МИАН, Москва, 2009.

[33] И.Стейн, *Сингулярные интегралы и диффереציальные свойства функций*, Мир, Москва, 1973.

[34] И.Стейн, Г.Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, Москва, 1974.

[35] [T] М.Тейлор, *Псевдодифференциальные операторы*, Мир, Москва, 1985.

[36] D.J.Thouless, M.Kohmono, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405–408.

[37] J.Xia, Geometric invariants of the quantum Hall effect, Commun. Math. Phys. **119**(1988), 29–50.