К. В. Брушлинский, П. А. Игнатов, Плазмостатическая модель магнитной ловушки “галатея-пояс”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2010, том 50, номер 12, 2184–2194

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2010, том 50, № 12, с. 2184–2194

УДК 519.634

К столетию со дня рождения академика А.А. Дородницына

ПЛАЗМОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКИ "ГАЛАТЕЯ-ПОЯС"[1)]

© 2010 г. К. В. Брушлинский*, П. А. Игнатов**
(125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМатем. РАН;*
*** 115409 Москва, Каширское ш., 31, Нац. иссл. ядерный ун-т, МИФИ)*
e-mail: brush@keldysh.ru
Поступила в редакцию 28.04.2010 г.

Математический аппарат плазмостатики, включающий в себя магнитогазодинамическое уравнение равновесия и стационарные уравнения Максвелла, в двумерных задачах, обязанных симметрии, сводится к одному скалярному уравнению второго порядка эллиптического типа с нелинейной правой частью – уравнению Грэда–Шафранова. В предлагаемой работе представлено численное решение серии краевых задач с этим уравнением, которые моделируют равновесные конфигурации плазмы в магнитном поле ловушки-галатеи типа "Пояс" в цилиндре с двумя погруженными в плазму проводниками. После краткого изложения математической модели приведены результаты расчетов магнитного поля и давления плазмы в цилиндре в зависимости от параметров задачи, вычислены основные интегральные характеристики ловушки. Обращено внимание на вопросы существования и единственности решения, и найдены предельные значения максимального давления, при котором существует решение задачи о равновесии. Библ. 16. Фиг. 4. Табл. 2.

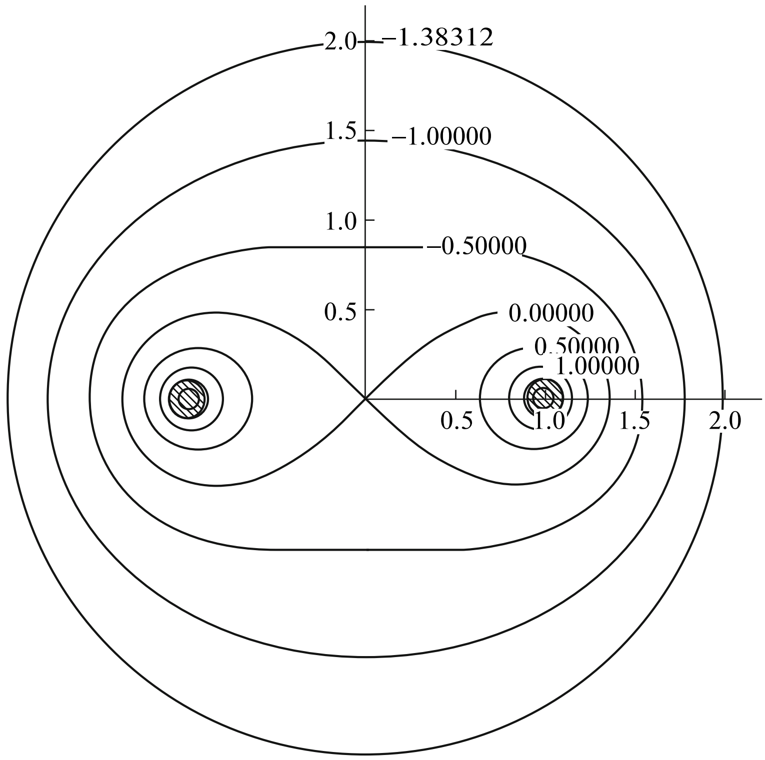
Ключевые слова: математический аппарат плазмостатики, уравнение Грэда–Шафранова, расчеты равновесных конфигураций плазмы в магнитных ловушках.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема управляемого термоядерного синтеза (УТС) включает в себя удержание предполагаемого "топлива" в сильно сжатом и нагретом состоянии в течение времени, достаточного для осуществления ожидаемой реакции. Поскольку необходимая для этого температура измеряется десятками миллионов градусов, любое рабочее вещество может быть только в состоянии плазмы, а роль удерживающих ее сосудов может играть только магнитное поле. По этим причинам основным объектом многих исследований в области УТС становятся равновесные конфигурации плазмы в магнитном поле. Их часто имеет смысл изучать в плазмостатической модели вне зависимости от вопросов истории их формирования и устойчивости равновесия: и те, и другие представляют самостоятельный интерес и являются темой отдельных работ (см., например, [1]). Если конфигурация обладает какой-либо симметрией (плоской, осевой, винтовой), то математический аппарат плазмостатики, опирающийся на уравнения магнитной газодинамики, достаточно прост и весьма распространен в приложениях.

Представляет интерес перспективный класс ловушек, предложенных А.И. Морозовым в [2] и названных им "галатеями". Их отличительное свойство состоит в том, что проводники с электрическим током, создающие магнитное поле, погружены в плазменный объем. В результате геометрия поля становится более разнообразной и позволяет рассчитывать на более высокие параметры удержания. Одним из примеров галатей является тороидальная ловушка "Пояс". Ее основные особенности можно исследовать в упрощенной распрямленной модели: плазменный цилиндр с расположенными в нем двумя прямолинейными проводниками с токами, одинаковыми по величине и направлению. Идея ловушки, относящиеся к ней теоретические вопросы и име-

1) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 09-01-00181 и 09-01-12056 офи-м).



Фиг. 1.

ющиеся экспериментальные результаты изложены в [3]. Ряд вариантов равновесных конфигураций плазмы и поля в плазмостатической модели исследованы аналитически в простейших предположениях в [3], [4]. Интересны теоретические результаты об идеальных фигурах равновесия “дублет”, полученные методами комплексного анализа в [5], [6]. Расчетам формирования равновесных конфигураций в нестационарной двумерной МГД-модели посвящены работы [7], [8] (см. также [1], [9], [10] с подробной библиографией).

В настоящей работе рассмотрена плазмостатическая модель распрямленной конфигурации типа “Пояс” на основе численного решения краевой задачи с уравнением Грэда–Шафранова. Связь давления плазмы с магнитными поверхностями (“магнитобарическая характеристика”) предполагает сосредоточить плазму в центральной части цилиндра и вдоль сепаратрисы магнитного поля, проходящей через центр. В серии расчетов найдены распределения равновесных магнитного поля и давления в цилиндре в зависимости от параметров задачи, и на их основе получены интегральные характеристики, касающиеся азимутального магнитного потока и соотношения между величинами положительного (сонаправленного с током в проводниках) и отрицательного токов в плазме. Взаимодействие этих токов с магнитным полем создает амперову силу, удерживающую плазму в указанной окрестности сепаратрисы. Получены также максимально возможные значения давления плазмы и полного тока в ней в каждом варианте расчетов, допускающие единственное и устойчивое решение задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МОДЕЛЬ МГД-РАВНОВЕСИЯ С УРАВНЕНИЕМ ГРЭДА–ШАФРАНОВА

В круглый[2)] цилиндр с плазмой погружены два проводника с токами. Сечение цилиндра и проводников плоскостью $z = \text{const}$, а также силовые линии созданного токами магнитного поля схематически представлены на фиг. 1. Предполагается, что поле не пересекает внешнюю границу цилиндра, а внутри его уравновешивает неоднородное по сечению давление плазмы. Задача со-

[2)] Форма внешней границы цилиндра не играет принципиальной роли в задаче. В работах [7], [8] он имеет квадратное сечение.

стоит в отыскании топологии магнитных поверхностей и удерживаемой ими равновесной плазменной конфигурации.

В приближении механики сплошных сред – магнитной газодинамики равновесие плазмы в магнитном поле описывается уравнением

$$\nabla p = \frac{1}{c}[\mathbf{j}^{\mathrm{pl}} \times \mathbf{H}], \tag{1.1}$$

где p – давление, $\mathbf{j}$ – плотность тока, $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля. Для получения замкнутой системы его следует дополнить уравнениями Максвелла

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = \operatorname{rot}\mathbf{H}. \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{\mathrm{ex}} + \mathbf{j}^{\mathrm{pl}}$ – сумма заданного в проводниках внешнего $\mathbf{j}^{\mathrm{ex}}$ и индуцированного в плазме $\mathbf{j}^{\mathrm{pl}}$ токов.

Предполагается плоская симметрия задачи в цилиндрических координатах (r, φ, z):

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0, \quad H_z \equiv 0, \quad j_r^{\mathrm{ex}} \equiv j_r^{\mathrm{pl}} \equiv j_r \equiv 0, \quad j_\varphi^{\mathrm{ex}} \equiv j_\varphi^{\mathrm{pl}} \equiv j_\varphi \equiv 0. \tag{1.3}$$

Это, как известно (см., [1], [11], [12]), сильно упрощает математический аппарат исследования. Вместо магнитного поля $\mathbf{H}$ удобно ввести вектор-потенциал, в данном случае его z-компоненту ψ:

$$rH_r = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \quad H_\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{1.4}$$

Она является функцией магнитного потока, а ее линии уровня $\psi(r, \varphi) = \mathrm{const}$ – магнитными силовыми линиями. Из уравнений (1.1), (1.2) следует, что p и ψ функционально зависимы, т.е. $p = p(\psi)$, и удовлетворяют скалярному уравнению Грэда–Шафранова

$$\Delta\psi + 4\pi\frac{dp}{d\psi} + \frac{4\pi}{c}j^{\mathrm{ex}} = 0. \tag{1.5}$$

Здесь $j^{\mathrm{ex}} = j_z^{\mathrm{ex}}$, а $p(\psi)$ – произвольная функция, которая не определяется формальной постановкой задачи и задается с помощью дополнительных требований к искомой конфигурации или на основе информации, полученной из экспериментальных данных. Это обстоятельство позволяет говорить о недоопределенности модели равновесия в терминах уравнения Грэда–Шафранова (см. [13]).

Краевая задача с уравнением (1.5) содержит граничное условие $\psi = \psi_\Gamma = \mathrm{const}$, соответствующее непротеканию магнитного поля $H_n = 0$ при $r = R$. Значение константы ψ_Γ пока произвольно, поскольку потенциал ψ определяется с точностью до аддитивного слагаемого. Задача требует граничных условий также на границах проводников, однако, чтобы избежать трудностей ее решения в неодносвязной области, рассмотрим ее во всем круге $r < R$, задав в нем внешний ток $j^{\mathrm{ex}}(r, \varphi)$ распределенным в пространстве, но сосредоточенным вблизи центров проводников. По аналогии с циклом работ о стелларатор-галатеях (см. [1], [10], [14]) положим

$$j^{\mathrm{ex}} = j_0\sum_{n=0}^{1,} \exp\left\{-\left(\frac{r-r_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{\varphi - n\pi}{b}\right)^2\right\}, \tag{1.6}$$

где $(r = r_0, \varphi = n\pi)$ – координаты центров проводников, а a и b – малые коэффициенты, определяющие их фактический поперечный размер. Коэффициент j_0 подбирается так, чтобы полный внешний ток равнялся заданному току в проводниках:

$$\int_0^R\int_0^{2\pi} j^{\mathrm{ex}} r dr d\varphi = 2I_{\mathrm{c}}. \tag{1.7}$$

Здесь I_{c} – значение тока в каждом из проводников.

В расчетах проверено, что результаты почти не меняются, если вместо экспоненты (1.6) задать финитные функции, например параболоиды

$$j_0 \max\left\{1 - \frac{(x \pm r_0)^2 + y^2}{a^2}, 0\right\},$$

где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, подчиненные тому же требованию (1.7).

Функция $p(\psi)$ задается в соответствии с логикой галатеи-пояса так, чтобы плазма оказалась сосредоточенной в центре и вдоль сепаратрисы магнитного поля, которая проходит через центр (фиг. 1). Для этого (по аналогии с [14]) положим

$$p = p_0 e^{-(\psi/q)^2} \tag{1.8}$$

и подберем граничное значение $\psi_г$ так, чтобы $\psi = 0$ при $r = 0$.

Здесь p_0 – характерная величина давления, q – параметр, влияющий на поперечный размер плазменной конфигурации.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Сформулированная краевая задача предварительно приведена к безразмерным переменным. Единицы измерения составлены из размерных величин, участвующих в постановке задачи, а именно от расстояния r_0 от оси цилиндра до проводников и от заданной величины тока в одном проводнике I_c:

$$r_u = r_0, \quad H_u = \frac{2I_c}{cr_u}, \quad p_u = \frac{H_u^2}{4\pi}, \quad j_u = \frac{cH_u}{4\pi r_u}, \quad \psi_u = H_u r_u. \tag{2.1}$$

Параметры a и q в формулах (1.6) и (1.8) следует отнести к единицам r_u и ψ_u. В безразмерных переменных задача формулируется следующим образом.

Уравнение Грэда–Шафранова

$$\Delta\psi + g(\psi) = 0 \tag{2.2}$$

имеет место в круге $r < R$ (R – радиус внешней границы, отнесенный к единице r_u).

Его правая часть

$$g(\psi) = \frac{dp}{d\psi} + j^{ex} \tag{2.3}$$

содержит функции

$$p = p_0 \exp\left[-\left(\frac{\psi - \psi_0}{q}\right)^2\right], \tag{2.4}$$

$$j^{ex} = \frac{2}{ab}\sum_{n=0}^{1} \exp\left\{-\left(\frac{r-1}{a}\right)^2 - \left(\frac{\varphi - n\pi}{b}\right)^2\right\}. \tag{2.5}$$

Параметр ψ_0 подбирается так, чтобы в искомом решении

$$\psi = \psi_0 \quad \text{при} \quad r = 0. \tag{2.6}$$

Тогда граничное значение $\psi_г$ может быть любым, например $\psi_г = 0$. Окончательный смысл функции потока в изложенных ниже результатах расчетов придается разности $\psi - \psi_0$.

Задача, очевидно, симметрична относительно осей $x(\varphi = 0)$ и $y(\varphi = \pi/2)$, поэтому ее достаточно рассмотреть в одном квадранте

$$0 < r < R, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

снабдив дополнительными граничными условиями $\partial\psi/\partial\varphi = 0$ на упомянутых осях. В формуле (1.6) для внешнего тока достаточно оставить только первое слагаемое ($n = 0$).

В особой точке $r = 0$, обязанной полярной системе координат, требуется, как обычно, ограниченность решения $|\psi(0)| < \infty$, что реализуется в виде $\partial\psi/\partial r = 0$.

Уравнение (2.2) аппроксимируется конечными разностями

$$\Lambda_1(\psi_{lm}) + \Lambda_2(\psi_{lm}) + g(\psi_{lm}) = 0,$$

где

$$\Lambda_1(\psi_{lm}) = \frac{1}{r_{lm}\Delta r}\left(r_{l+1/2,\,m}\frac{\psi_{l+1,\,m} - \psi_{lm}}{\Delta r} - r_{l-1/2,\,m}\frac{\psi_{lm} - \psi_{l-1,\,m}}{\Delta r}\right),$$

$$\Lambda_2(\psi_{lm}) = \frac{\psi_{l,\,m+1} - 2\psi_{lm} + \psi_{l,\,m-1}}{r_{lm}^2\Delta\varphi^2}.$$

Здесь l и m — номера точек сетки по радиусу и азимуту соответственно.

Разностные уравнения решаются хорошо зарекомендовавшим себя (см. [1], [14]) итерационным методом типа установления с “неявными” выражениями для вторых производных

$$\frac{\overset{s+1}{\psi_{lm}} - \overset{s}{\psi_{lm}}}{\tau} = \Lambda_1\overset{s+1}{\psi_{lm}} + \Lambda_2\overset{s+1}{\psi_{lm}} + g(\overset{s}{\psi_{lm}}). \tag{2.7}$$

Поскольку коэффициенты линейного оператора Λ_2 не зависят от m, удобно применить к уравнению (2.7) дискретное преобразование Фурье по переменной m (с учетом граничных условий $\partial\psi/\partial\varphi = 0$ — это разложение по косинусам). Полученное после этого одномерное разностное уравнение вдоль координаты l решается известным методом прогонки.

Неизвестный параметр ψ_0 в формуле (2.4) полагаем равным значению ψ^s на предыдущей итерации при $r = 0$:

$$\psi_0 = \overset{s}{\psi}(0). \tag{2.8}$$

Этот прием обеспечит сформулированное выше требование (2.6) после сходимости итераций.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

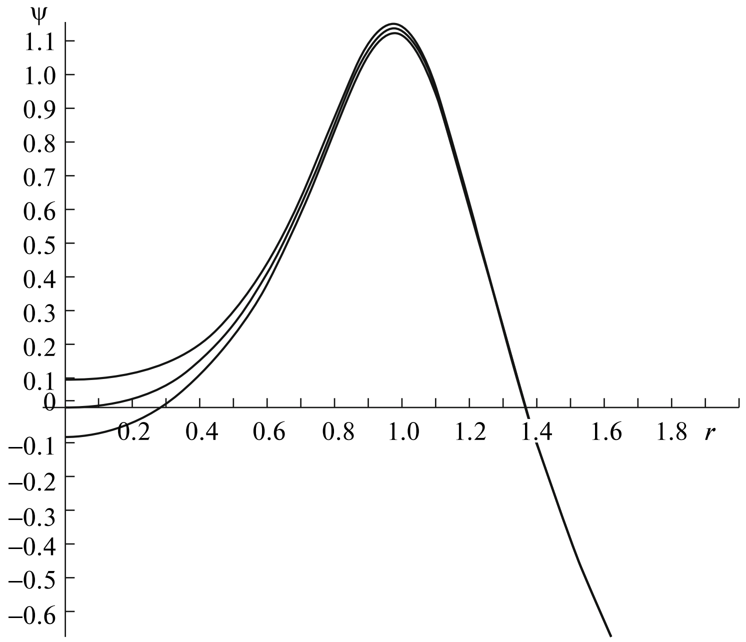
Краевая задача в изложенной постановке, как известно, не всегда имеет решение, независимо от конкретного варианта ее геометрии (см. [1], [10], [14]). Итерационный процесс сходится к единственному и в некотором смысле устойчивому решению лишь при ограничении на давление[3)] плазмы:

$$p < p_0^{\mathrm{cr}}. \tag{3.1}$$

Это ограничение не является недостатком численного метода, так как обязано спектральным свойствам дифференциального оператора линеаризованной краевой задачи и относится к общим вопросам теории полулинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка, участвующих в моделировании широкого класса процессов взаимодействия реакции и диффузии (см. [1] с необходимой библиографией).

В рассматриваемой здесь задаче ограничение (3.1) также имеет место, и критическое значение p_0^{cr} зависит главным образом от параметра q в формуле (2.4) – характерной “толщины” конфигурации и в меньшей степени – от параметров a и b, определяющих условный “диаметр” проводников в данной модели. Кроме того, значение p_0^{cr} уменьшается при возрастании внешнего радиуса R цилиндра (отнесенного к расстоянию проводников от оси). Это следует из общей теории спектральных задач Штурма–Лиувилля: собственные значения уменьшаются с расширением области, в которой ставится задача (см. [15]), а p_0^{cr} соответствует обращению в нуль старшего собственного значения (см. [1]).

[3)] Точнее говоря, p_0 – отношение характерных газового и магнитных давлений. Последнее определяется величиной тока в проводниках (см. выбор единиц измерения в (2.1)).



Фиг. 2.

Кроме того, как было замечено в [14], критическое значение p_0^{cr} удается повысить, если задать $p(\psi)$ в виде (2.4) и определить ψ_0 в процессе итераций согласно (2.8). Этот прием устраняет в погрешности итераций старшую собственную функцию упомянутого выше оператора, которая не обращается в нуль при $r = 0$, и ограничение p_0^{cr} возникает позже, при обращении в нуль следующего собственного значения. В то же время первая бифуркация значений p_0 улавливается в расчетах, если пользоваться формулой (1.8) и подбирать граничное значение $\psi_\text{г}$ так, чтобы решение ψ обращалось в нуль при $r = 0$. Если $a = b = 0.1$, $R = 2$ и $q = 0.1$, эта бифуркация наступает при $p_0^{\text{cr}} = 0.1$. Итерации с формулами (2.4), (2.8) позволяют найти решение также в интервале $0.1 < p_0 < 0.56$ между первой и второй бифуркациями, однако оно неединственно и неустойчиво: итерации без упомянутой “хитрости” не сходятся к нему и позволяют найти еще два решения, которые удовлетворяют тому же граничному условию при $r = R$, но не обращаются в нуль при $r = 0$. Поскольку они получены сходящимися итерациями, их естественно назвать “устойчивыми”. Связь этой устойчивости с общепринятой МГД-устойчивостью равновесных конфигураций относительно произвольных малых возмущений, включая движение, указана в [1], [16]. На фиг. 2 приведены графики всех трех решений $\psi(r)$ вдоль луча $\varphi = 0$.

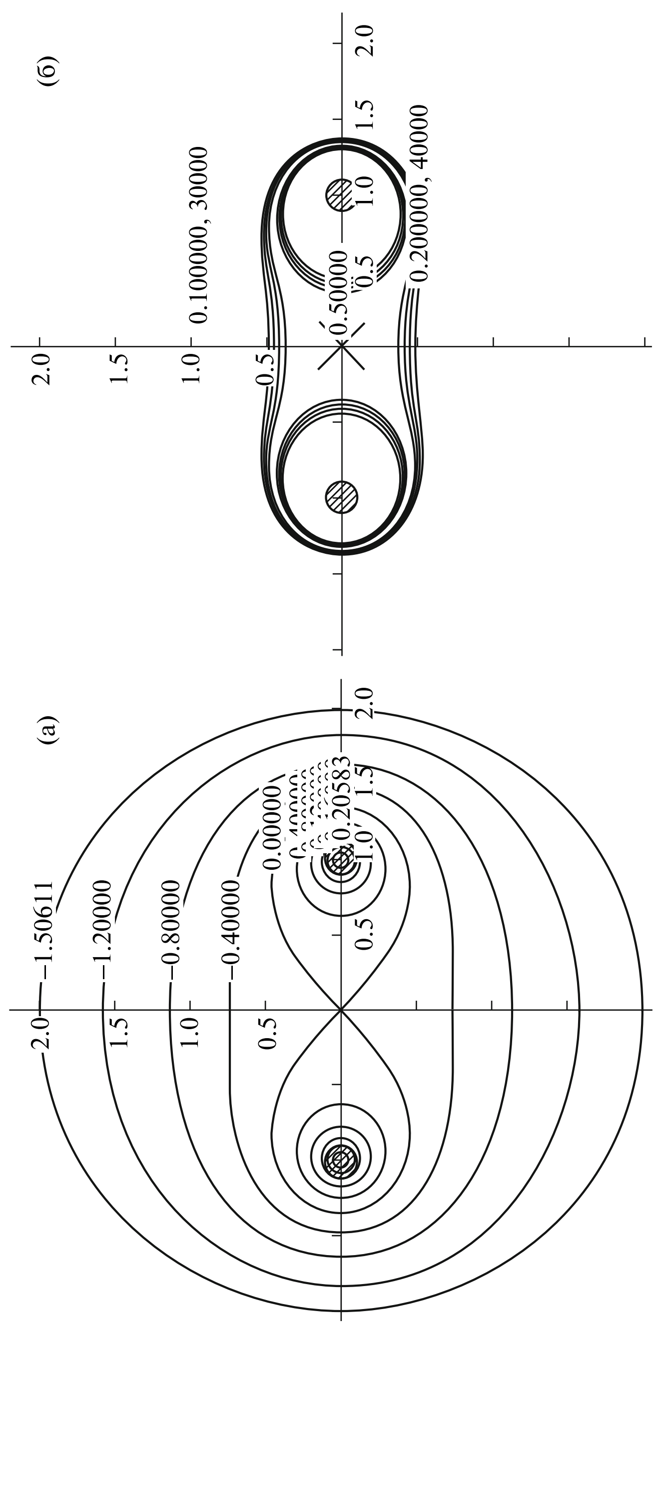
Критическая величина p_0^{cr} возрастает с ростом параметра q. Зависимость ее значений, полученных с помощью формул (2.4), (2.8), от q при указанных выше значениях a, b и R такова:

q	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0
p_0^{cr}	0.27	0.56	1.19	3.60	9.13

При изменении параметров a, b она практически не меняется, а указанная ее зависимость от R в диапазоне $1.5 < R < 3$ очень слабая.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Непосредственным результатом каждого варианта расчета является функция магнитного потока и связанное с ней давление плазмы $p(\psi)$. На фиг. 3а представлены линии уровня $\psi(r, \varphi)$, они же – силовые линии магнитного поля или сечения магнитных поверхностей плоскостью $z = \text{const}$, полученные в расчете конфигурации при $a = b = 0.1$, $R = 2$, $q = 0.1$, $p_0 = 0.5$. На фиг. 3б –


(а)
(б)
–1.50611
–1.20000
–0.80000
–0.40000
0.00000
0.20583
0.100000, 30000
0.200000, 40000
0.50000
2.0
1.5
1.0
0.5

Фиг. 3.

Таблица 1

p_0 \ q	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0
0.1	0.235	0.193	0.176	0.206	0.262
0.2	0.472	0.386	0.351	0.405	0.518
0.5	–	0.955	0.861	0.960	1.249
0.8	–	–	1.341	1.463	1.926
1.1	–	–	1.787	1.926	2.551

Таблица 2

p_0 \ q	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0
0.1	–0.117	–0.106	–0.084	–0.049	–0.024
0.2	–0.235	–0.210	–0.167	–0.096	–0.049
0.5	–	–0.501	–0.399	–0.230	–0.118
0.8	–	–	–0.600	–0.351	–0.183
1.1	–	–	–0.768	–0.460	–0.244

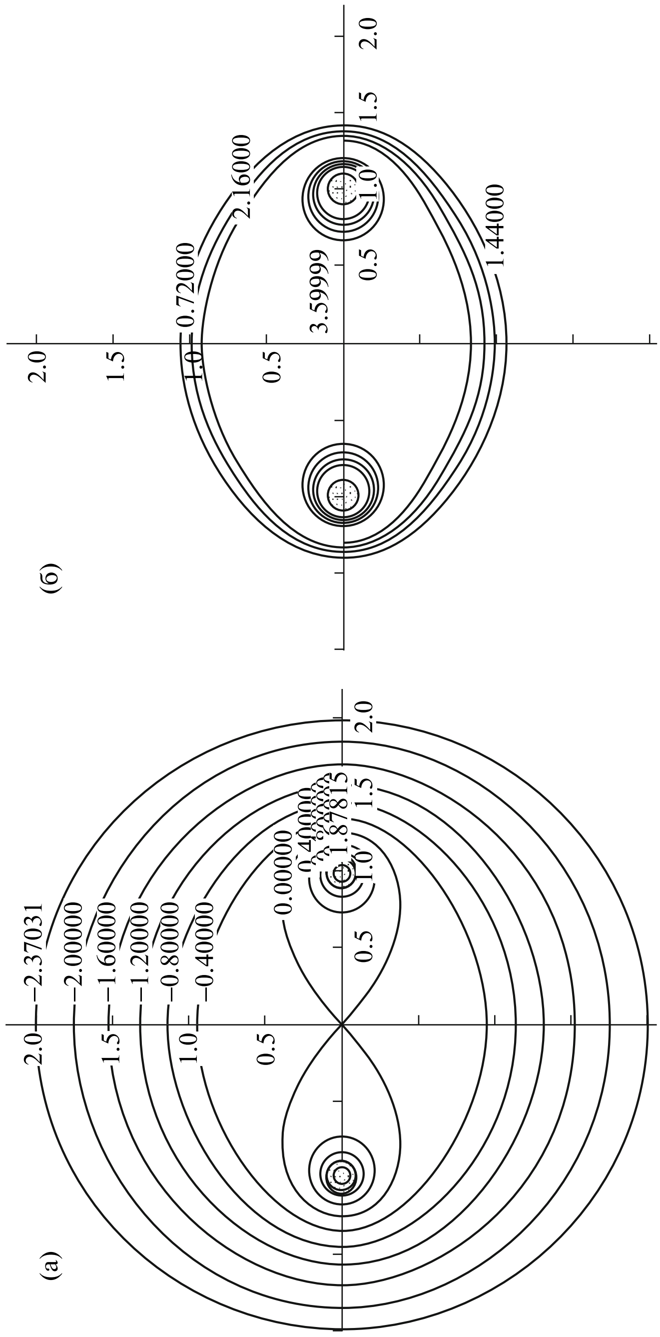
линии уровня давления $p(r, \varphi)$: плазма расположена в основном в центре системы, заполняя плато в виде криволинейного четырехугольника с примыкающими к его углам кольцевыми образованиями вдоль сепаратрисы поля, окружающей проводники. Условной границей конфигурации естественно считать поверхность (линию на фиг. 3б), на которой давление плазмы изнутри и магнитного поля извне равны друг другу. В безразмерных переменных это значит $p = H^2/2$, а в размерных $p = H^2/(8\pi)$. На этой границе распространенный в физике плазмы параметр $\beta = 8\pi p/H^2$ равен единице, что позволяет говорить о равновесных конфигурациях с “$\beta = 1$” (см. [3], [4]). На фиг. 3б граница $\beta = 1$ приближенно совпадает с внутренней линией уровня $p = 0.4$. При возрастании допустимого значения p_0, а также его дальнейшего возрастания при больших значениях q размеры четырехугольника увеличиваются. Заметим, что в умеренном диапазоне значений параметра q граница допустимых конфигураций в своей основной (четырехугольной) части выпукла в сторону плазмы, что, по-видимому, влияет на существование и устойчивость конфигурации.

В предположении положительного направления токов в проводниках $j^{\mathrm{ex}} > 0$ магнитное поле ориентировано вдоль силовых линий против часовой стрелки. Плазма удерживается в равновесии силой Ампера $\mathbf{j}^{\mathrm{pl}} \times \mathbf{H}$. Магнитное поле $\mathbf{H}$ определяется с помощью функции ψ формулами (1.4), а плазменный ток можно выразить через p или ψ из уравнений (1.1), (1.2), (2.2) (в безразмерных переменных, участвующих в расчете, т.е. без коэффициентов 4π и c):

$$j_z^{\mathrm{pl}} = \frac{dp}{d\psi} = -\Delta\psi - j_z^{\mathrm{ex}}.$$

Поскольку $p(\psi)$ – немонотонная функция с максимумом на сепаратрисе, плазменный ток отрицательный ($j^{\mathrm{pl}} < 0$) внутри сепаратрисы и положительный ($j^{\mathrm{pl}} > 0$) вне ее. Амперова сила везде направлена в сторону сепаратрисы: внутри – от проводника, удерживая плазму от соприкосновения с ним, а вне – от внешней границы цилиндра. Величина тока, положительного и отрицательного в каждой из указанных областей, определяется численным интегрированием $dp/d\psi$ по каждой из них. Значение полного тока в системе можно получить также из интеграла

$$I^{\mathrm{tot}} = \int_0^R\int_0^{2\pi}(j^{\mathrm{pl}} + j^{\mathrm{ex}})rdrd\varphi = -\iint\Delta\psi rdrd\varphi = \iint(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_z rdrd\varphi = \oint_{r=R} H_\varphi rd\varphi = -R\oint_{r=R}\frac{\partial\psi}{\partial r}d\varphi.$$


(а)
−2.37031
−2.00000
−1.60000
−1.20000
−0.80000
−0.40000
0.00000
0.40000
1.87815
2.0
1.5
1.0
0.5
(б)
2.16000
0.72000
3.59999
1.44000

Фиг. 4.

Вычитая отсюда ток в двух проводниках

$$2I_c = \iint j^{ex} r dr d\varphi = 4\pi,$$

получаем полное значение плазменного тока $I^{pl} = I_+^{pl} + I_-^{pl} = I^{tot} - 2I_c$.

Величина указанных интегральных токов зависит от максимального давления p_0 и размера занимаемой плазмой области, который характеризуется параметром q.

В табл. 1 и 2 приведены значения положительного I_+^{pl} и отрицательного I_-^{pl} токов в плазме при различных значениях p_0 и q. На фиг. 4 представлены магнитное поле (а) и давление (б) плазмы в конфигурации, более насыщенной плазмой и током по сравнению с фиг. 3 ($a = 0.1$, $R = 2$, $q = 0.5$, $p_0 = 3.6$).

Во всех вариантах расчетов функция ψ монотонно изменяется от минимального значения ψ_{min} на внешней границе области до максимального ψ_{max} в центре проводников. Первое из них соответствует магнитному потоку поля между сепаратрисой и границей цилиндра:

$$F_{ex} = -\psi_{min} = \psi_{sep} - \psi_{min} = \int_{r_{sep}}^{R} H_\varphi(r, 0)dr.$$

Это значение при $p \ll 1$ определяется в основном током I_c и поэтому слабо зависит от p_0. При возрастании p_0 значение ψ_{min} убывает и поток возрастает, включая в себя поле, индуцированное током в плазме I^{pl}. Максимальное значение ψ_{max} соответствует магнитному потоку внутри сепаратрисы. Он сильно зависит от “радиуса” проводника $a = b$ и в рассмотренной односвязной модели носит условный характер. Значение ψ на расстоянии $r = a$ от центра проводника приобретает тоже условный физический смысл магнитного потока между проводником и сепаратрисой, но по-прежнему зависит от a в рассмотренной модели:

$$F_{int} = \psi(1 + a, 0) = \psi(1 + a, 0) - \psi_{sep} = \int_{1+a}^{r_{sep}} H_\varphi(r, 0)dr.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье изложена математическая модель равновесной плазменной конфигурации в магнитном поле одной из простейших ловушек – распрямленном аналоге тороидальной галатеи “Пояс”. Рассмотрены конфигурации в цилиндре с погруженными в плазму двумя параллельными оси прямолинейными проводниками с током. Задача о равновесии поставлена и численно решена в магнитогазодинамической модели. В предположении плоской симметрии, она сводится к краевой задаче со скалярным уравнением Грэда–Шафранова – двумерным эллиптическим уравнением второго порядка. Его нелинейная правая часть содержит произвольную функцию $p(\psi)$, задающую распределение давления плазмы между магнитными поверхностями. В известных работах на эту тему она выбрана простейшим образом: уравнение линейно и допускает аналитические решения задачи. В данной статье эта функция задана в соответствии с желанием исследовать конфигурацию, в которой плазма сосредоточена вблизи оси цилиндра и вдоль сепаратрисы магнитных поверхностей, проходящей через ось. Коротко изложен численный метод решения задач такого класса.

В серии расчетов получены распределения магнитного поля и плазмы в цилиндре в зависимости от параметров задачи и соответствующие им интегральные значения плазменного тока и магнитного потока в областях внутри сепаратрисы и вне ее. Найдены предельные значения максимального давления, допускающие решение задачи, указана их связь со спектральными свойствами дифференциального оператора линеаризованной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брушлинский К.В.* Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2009.

2. *Морозов А.И.* О галатеях – плазменных ловушках с омываемыми плазмой проводниками // Физ. плазмы. 1992. Т. 18. Вып. 3. С. 305–316.
3. *Морозов А.И., Франк А.Г.* Тороидальная магнитная ловушка-галатея с азимутальным током // Физ. плазмы. 1994. Т. 20. № 11. С. 982–989.
4. *Морозов А.И., Мурзина М.В.* Простейшие равновесные конфигурации галатей типа "Пояс" // Физ. плазмы. 1996. Т. 22. № 6. С. 551–563.
5. *Морозов А.И., Савельев В.В.* Фигуры равновесия идеальной плазмы с $\beta = 1$ в магнитном поле // Физ. плазмы. 1993. Т. 19. № 8. С. 977–989.
6. *Савельев В.В.* Фигуры равновесия идеальной плазмы с током в магнитном поле // Физ. плазмы. 1995. Т. 21. № 3. С. 216–220.
7. *Брушлинский К.В., Горшенин К.П.* Плоская МГД модель образования плазменной конфигурации с погруженными в нее проводниками // Матем. моделирование. 1997. Т. 9. № 5. С. 28–36.
8. *Дудникова Г.И., Морозов А.И., Федорук М.П.* Численное моделирование прямых плазменных конфигураций – галатей типа "Пояс" // Физ. плазмы. 1997. Т. 23. № 5. С. 387–396.
9. *Морозов А.И., Савельев В.В.* О галатеях-ловушках с погруженными в плазму проводниками // Успехи физ. наук. 1998. Т. 168. № 11. С. 1153–1194.
10. *Брушлинский К.В., Савельев В.В.* Магнитные ловушки для удержания плазмы // Матем. моделирование. 1999. Т. 11. № 5. С. 3–36.
11. *Шафранов В.Д.* О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // Ж. эксперим. и теор. физ. 1957. Т. 33. Вып. 3(9). С. 710–722.
12. *Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П.* Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.
13. *Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А.* О равновесии плазмы в магнитном поле ловушек галатей // Матем. моделирование. 2010. Т. 22. № 6. С. 3–14.
14. *Брушлинский К.В., Зуева Н.М., Михайлова М.С. и др.* Численное моделирование прямых винтовых шнуров с проводниками, погруженными в плазму // Физ. плазмы. 1994. Т. 20. № 3. С. 284–292.
15. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984.
16. *Брушлинский К.В.* Два подхода к задаче об устойчивости равновесия плазмы в цилиндре // Прикл. матем. и механ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 235–243.