К. А. Кириллов, М. В. Носков, Оценки погрешности на пространствах S_p кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2009, том 49, номер 1, 3–13

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 1, с. 3–13

УДК 519.644.7

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ НА ПРОСТРАНСТВАХ S_p КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ, ТОЧНЫХ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ХААРА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ[1)]

© 2009 г. К. А. Кириллов, М. В. Носков

(660074 Красноярск, ул. Киренского, 26, Сибирский федеральный ун-т)

e-mail: KKirillov@rambler.ru; MVNoskov@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.04.2008 г.

На пространствах S_p найдены верхняя оценка нормы функционала погрешности $\delta_N(f)$ кубатурных формул, обладающих d-свойством Хаара в двумерном случае, и доказано асимптотическое равенство для $\|\delta_N(f)\|_{S_p^*}$ указанных формул с числом узлов $N \sim 2^d$ при $d \longrightarrow \infty$. Установлено, что рассмотренные формулы в случае $N \sim 2^d$ при $d \longrightarrow \infty$ имеют наилучший порядок сходимости δ_N по норме, равный $N^{-1/p}$. Библ. 6.

Ключевые слова: кубатурные формулы в пространстве функций Хаара, оценка погрешности кубатурной формулы, оценка наилучшего порядка сходимости.

ВВЕДЕНИЕ

Задача построения и исследования квадратурных и кубатурных формул, точных для некоторого заданного набора функций, т.е. таких формул, которые точно интегрируют указанные функции, в основном решалась ранее для вычисления интегралов, точных на алгебраических и тригонометрических многочленах. Квадратурные и кубатурные формулы, точные для системы функций Хаара, можно найти в [1]–[3]. В этих работах точность формул приближенного интегрирования на конечных суммах Хаара использовалась при выводе оценок погрешности этих формул.

В представленной работе на введенных в [1] пространствах S_p исследована норма функционала погрешности кубатурных формул, обладающих d-свойством Хаара в двумерном случае (формул, точных на полиномах Хаара степеней, не превосходящих заданного числа d), причем коэффициенты при узлах рассмотренных формул считаются произвольными. В результате найдена верхняя оценка нормы функционала погрешности $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ указанных формул:

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leq 2^{1/p}(2^d)^{-1/p},$$

полученная в [1] для частного случая кубатурных формул, обладающих d-свойством, – формул с узлами, образующими Π_0-сетки, и равными коэффициентами при узлах. Доказано также, что в случае $N \sim 2^d$ при $d \longrightarrow \infty$

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \sim 2^{1/p}N^{-1/p}, \quad N \longrightarrow \infty.$$

Установлено, что в случае $N \sim 2^d$ при $d \longrightarrow \infty$ исследованные авторами настоящей статьи формулы имеют наилучший порядок сходимости δ_N по норме, равный $N^{-1/p}$. В частности, указанным свойством обладают минимальные кубатурные формулы, построенные в [4], в то же время они, будучи минимальными формулами приближенного интегрирования, обеспечивают наилучшую поточечную сходимость $\delta_N(f)$ к нулю.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 07-01-00326) и Аналитической целевой программы Министерства образования и науки РПН.3.1.1.5349.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В настоящей работе используется оригинальное определение функций $\chi_{m,j}(x)$, введенное Хааром (см. [5]), отличное от определения этих функций из [1].

Двоичными промежутками $l_{m,j}$ назовем промежутки с концами в точках $(j-1)/2^{m-1}, j/2^{m-1}$ ($m = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$). Если левый конец двоичного промежутка совпадает с 0, то будем считать этот промежуток замкнутым слева, если правый конец совпадает с 1, – замкнутым справа. Остальные двоичные промежутки считаются открытыми. Левую и правую половины $l_{m,j}$ (без середины этого двоичного промежутка) будем обозначать через $l^-_{m,j}$ и $l^+_{m,j}$ соответственно.

Система функций Хаара строится группами: группа номер m содержит 2^{m-1} функций $\chi_{m,j}(x)$, где $m = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. Функции Хаара $\chi_{m,j}(x)$ определим следующим образом:

$$\chi_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^{(m-1)/2}, & x \in l^-_{m,j}, \\ -2^{(m-1)/2}, & x \in l^+_{m,j}, \\ 0, & x \in [0, 1]\backslash\overline{l_{m,j}}, \\ \frac{1}{2}[\chi_{m,j}(x-0) + \chi_{m,j}(x+0)], & x \text{ – внутренняя точка разрыва,} \end{cases}$$

$\overline{l_{m,j}} = \left[\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}}\right]$, $m = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. В систему функций Хаара включают также функцию $\chi_{0,0}(x) \equiv 1$, которая остается вне групп.

Множества функций $f(x_1, x_2)$, определенных в единичном квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ и представимых в виде ряда Фурье–Хаара

$$f(x_1, x_2) = c_1 + \sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} c^{(j_1)}_{m_1,0}\chi_{m_1,j_1}(x_1) + \sum_{m_2=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} c^{(j_2)}_{0,m_2}\chi_{m_2,j_2}(x_2) + \\ + \sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}}\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}\chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2) \tag{1.1}$$

с вещественными коэффициентами c_1, $c^{(j_1)}_{m_1,0}$, $c^{(j_2)}_{0,m_2}$, $c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ ($m_n = 1, 2, \ldots,\ j_n = 1, 2, \ldots, 2^{m_n-1}$, $n = 1, 2$), удовлетворяющими условиям

$$A^{(1)}_p(f) = \sum_{m_1=1}^{\infty} 2^{\frac{m_1-1}{2}}\left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}}\left|c^{(j_1)}_{m_1,0}\right|^p\right]^{1/p} \leqslant A_1, \quad A^{(2)}_p(f) = \sum_{m_2=1}^{\infty} 2^{\frac{m_2-1}{2}}\left[\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}}\left|c^{(j_2)}_{0,m_2}\right|^p\right]^{1/p} \leqslant A_2, \\ A^{(1,2)}_p(f) = \sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty} 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}}\left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}}\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}}\left|c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}\right|^p\right]^{1/p} \leqslant A_{1,2} \tag{1.2}$$

($p \geqslant 1$, $A_1, A_2, A_{1,2}$ – вещественные константы), определяются как классы $S_p(A_1)$, $S_p(A_2)$, $S_p(A_{1,2})$ соответственно. В [1] доказано, что множество функций $f(x_1, x_2)$, принадлежащих всем классам $S_p(A_1)$, $S_p(A_2)$, $S_p(A_{1,2})$ (со всевозможными $A_1, A_2, A_{1,2}$, значение $1 \leqslant p < \infty$ фиксировано), с нормой

$$\|f\|_{S_p} = A^{(1)}_p(f) + A^{(2)}_p(f) + A^{(1,2)}_p(f) \tag{1.3}$$

образует линейное нормированное пространство, которое обозначается через S_p. При этом все функции $f(x_1, x_2)$, отличающиеся постоянными слагаемыми, считаются за одну функцию.

В двумерном случае полиномами Хаара степени d назовем линейные комбинации с вещественными коэффициентами функций $\chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2)$, где $m_1 + m_2 = 0, 1, \ldots, d$, $j_n = 1, 2, \ldots, 2^{m_n-1}$, если

$m_n \neq 0$, и $j_n = 0$, если $m_n = 0$, $n = 1, 2$, причем хотя бы один из коэффициентов при мономах $\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2)$ степени d ($m_1 + m_2 = d$) отличен от нуля.

Будем рассматривать кубатурные формулы

$$I[f] = \int_0^1\int_0^1 f(x_1, x_2)dx_1dx_2 \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) = Q[f], \tag{1.4}$$

где $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in [0, 1]\times[0, 1]$ – узлы кубатурной формулы, C_i – коэффициенты формулы при узлах (вещественные числа), $i = 1, 2, \ldots, N$.

Будем говорить, что формула (1.4) обладает d-свойством Хаара (или просто d-свойством), если она точна для любого полинома Хаара $P(x_1, x_2)$ степени, не превосходящей d, т.е. $Q[P] = I[P]$.

2. ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА НА ПРОСТРАНСТВАХ S_p НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ, ОБЛАДАЮЩИХ d-СВОЙСТВОМ ХААРА

Пусть кубатурная формула (1.4) обладает d-свойством. Пусть

$$\delta_N(f) = I[f] - Q[f] = \int_0^1\int_0^1 f(x_1, x_2)dx_1dx_2 - \sum_{i=1}^{N} C_i f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}), \tag{2.1}$$

где $f(x_1, x_2)$ – принадлежащая пространству S_p функция, определенная и суммируемая на $[0, 1]\times[0, 1]$.

В [6] показано, что существуют полиномы Хаара степени m, которые удовлетворяют равенству

$$\kappa_{m, j}(x) = \begin{cases} 2^m, & x \in l_{m+1, j}, \\ 2^{m-1}, & x \in \overline{l_{m+1, j}}\backslash l_{m+1, j}, \\ 0, & x \in [0, 1]\backslash\overline{l_{m+1, j}}, \end{cases}$$

$m = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, 2^m$, и образуют базис в линейном пространстве полиномов Хаара степеней, не превосходящих m. Введем обозначения

$$K_{m_1, 0}^{(j_1)}(x_1) = \kappa_{m_1, j_1}(x_1), \quad K_{0, m_2}^{(j_2)}(x_2) = \kappa_{m_2, j_2}(x_2), \quad K_{m_1, m_2}^{(j_1, j_2)}(x_1, x_2) = K_{m_1, 0}^{(j_1)}(x_1)K_{0, m_2}^{(j_2)}(x_2),$$

$m_n = 1, 2, \ldots$, $j_n = 1, 2, \ldots, 2^{m_n}$, $n = 1, 2$. Тогда имеет место

Лемма 1. *Для всех значений m_1, m_2, удовлетворяющих условию $m_1 + m_2 = 2, 3, \ldots, d$, справедливо соотношение*

$$Q[K_{m_1, m_2}^{(j_1, j_2)}] = I[K_{m_1, m_2}^{(j_1, j_2)}] = 1,$$

а для $m_1, m_2 = 1, 2, \ldots, d$ имеем

$$Q[K_{m_1, 0}^{(j_1)}] = I[K_{m_1, 0}^{(j_1)}] = 1, \quad Q[K_{0, m_2}^{(j_2)}] = I[K_{0, m_2}^{(j_2)}] = 1,$$

$j_n = 1, 2, \ldots, 2^{m_n}$, $n = 1, 2$.

Пусть

$$\begin{aligned} \Sigma_q^{(n)}(m_n) &= 2^{-\frac{m_n - 1}{2}}\left[\sum_{j_n = 1}^{2^{m_n - 1}}\left|\sum_{i=1}^{N} C_i\chi_{m_n, j_n}(x_n^{(i)})\right|^q\right]^{1/q}, \quad n = 1, 2, \\ \Sigma_q^{(1, 2)}(m_1, m_2) &= 2^{-\frac{m_1 - 1}{2} - \frac{m_2 - 1}{2}}\left[\sum_{j_1 = 1}^{2^{m_1 - 1}}\sum_{j_2 = 1}^{2^{m_2 - 1}}\left|\sum_{i=1}^{N} C_i\chi_{m_1, j_1}(x_1^{(i)})\chi_{m_2, j_2}(x_2^{(i)})\right|^q\right]^{1/q}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$m_1, m_2 = 1, 2, \ldots, q > 1$.

Справедлива

Лемма 2. *Для всех целых положительных l имеют место неравенства*

$$\Sigma_q^{(1,2)}(m_1, m_2) \le 2^{-m_1-m_2+2l}\left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-l}}\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-l}} Q^q[K_{m_1-l, m_2-l}^{(j_1, j_2)}]\right]^{1/q}, \tag{2.3}$$

$$\Sigma_q^{(1)}(m_1) \le 2^{-m_1+l}\left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-l}} Q^q[K_{m_1-l,0}^{(j_1)}]\right]^{1/q}, \quad \Sigma_q^{(2)}(m_2) \le 2^{-m_2+l}\left[\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-l}} Q^q[K_{0,m_2-l}^{(j_2)}]\right]^{1/q}. \tag{2.4}$$

Доказательство неравенства (2.3) проведем индукцией по l. Легко показать, что

$$\chi_{m,j}(x_1) = 2^{-\frac{m+1}{2}}[K_{m,0}^{(2j-1)}(x_1) - K_{m,0}^{(2j)}(x_1)], \quad \chi_{m,j}(x_2) = 2^{-\frac{m+1}{2}}[K_{0,m}^{(2j-1)}(x_2) - K_{0,m}^{(2j)}(x_2)], \tag{2.5}$$

$m = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$,

$$K_{m,0}^{(2j-1)}(x_1) + K_{m,0}^{(2j)}(x_1) = 2K_{m-1,0}^{(j)}(x_1), \quad K_{0,m}^{(2j-1)}(x_2) + K_{0,m}^{(2j)}(x_2) = 2K_{0,m-1}^{(j)}(x_2), \tag{2.6}$$

$m = 2, 3, \ldots, j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. Из (2.5), (2.6) следует, что

$$\left|\sum_{i=1}^{N} C_i\chi_{m_1,j_1}(x_1^{(i)})\chi_{m_2,j_2}(x_2^{(i)})\right| = 2^{-\frac{m_1+1}{2}-\frac{m_2+1}{2}}\left|Q[(K_{m_1,0}^{(2j_1-1)} - K_{m_1,0}^{(2j_1)})(K_{0,m_2}^{(2j_2-1)} - K_{0,m_2}^{(2j_2)})]\right| \le$$

$$\le 2^{-\frac{m_1+1}{2}-\frac{m_2+1}{2}} Q[(K_{m_1,0}^{(2j_1-1)} + K_{m_1,0}^{(2j_1)})(K_{0,m_2}^{(2j_2-1)} + K_{0,m_2}^{(2j_2)})] = 2^{-\frac{m_1+1}{2}-\frac{m_2+1}{2}+2} Q[K_{m_1-1,m_2-1}^{(j_1,j_2)}],$$

откуда непосредственно вытекает истинность неравенства (2.3) при $l = 1$. Исходя из индуктивного предположения о справедливости неравенства

$$\Sigma_q^{(1,2)}(m_1, m_2) \le 2^{-m_1-m_2+2l-2}\left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-l+1}}\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-l+1}} Q^q[K_{m_1-l+1, m_2-l+1}^{(j_1,j_2)}]\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{2.7}$$

доказываем (2.3). Легко видеть, что при $a, b > 0$, $q > 1$ имеет место неравенство

$$a^q + b^q \le (a+b)^q. \tag{2.8}$$

Принимая во внимание (2.6), (2.8), из (2.7) получаем

$$\Sigma_q^{(1,2)}(m_1, m_2) \le 2^{-m_1-m_2+2l-2}\left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-l}}\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-l}}(Q^q[K_{m_1-l+1,m_2-l+1}^{(2j_1-1,2j_2-1)}] + Q^q[K_{m_1-l+1,m_2-l+1}^{(2j_1-1,2j_2)}] +\right.$$

$$\left.+ Q^q[K_{m_1-l+1,m_2-l+1}^{(2j_1,2j_2-1)}] + Q^q[K_{m_1-l+1,m_2-l+1}^{(2j_1,2j_2)}])\right]^{1/q} \le 2^{-m_1-m_2+2l-2}\left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-l}}\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-l}} Q^q[K_{m_1-l+1,m_2-l+1}^{(2j_1-1,2j_2-1)} +\right.$$

$$\left.+ K_{m_1-l+1,m_2-l+1}^{(2j_1-1,2j_2)} + K_{m_1-l+1,m_2-l+1}^{(2j_1,2j_2-1)} + K_{m_1-l+1,m_2-l+1}^{(2j_1,2j_2)}]\right]^{1/q} =$$

$$= 2^{-m_1-m_2+2l-2}\left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-l}}\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-l}} Q^q[(K_{m_1-l+1,0}^{(2j_1-1)} + K_{m_1-l+1,0}^{(2j_1)})(K_{0,m_2-l+1}^{(2j_1-1)} + K_{0,m_2-l+1}^{(2j_2)})]\right]^{1/q} =$$

$$= 2^{-m_1-m_2+2l}\left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-l}}\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-l}} Q^q[K_{m_1-l,m_2-l}^{(j_1,j_2)}]\right]^{1/q}.$$

Неравенства (2.4) доказываются аналогично.

Справедлива

Теорема 1. *Для нормы функционала погрешности кубатурной формулы* (1.4), *обладающей* d-*свойством, имеет место оценка*

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \le 2^{1/p}(2^d)^{-1/p}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Подставим ряд (1.1) в (2.1). Из точности кубатурной формулы на полиномах Хаара степеней, не превосходящих d, и равномерной сходимости ряда (1.1) следует, что

$$\begin{aligned}\delta_N(f) = -\sum_{i=1}^{N} C_i\Bigg[&\sum_{m_1>d}\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} c_{m_1,0}^{(j_1)}\chi_{m_1,j_1}(x_1^{(i)}) + \sum_{m_2>d}\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} c_{0,m_2}^{(j_2)}\chi_{m_2,j_2}(x_2^{(i)}) + \\ &+\sum_{m_1+m_2>d}\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}}\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}\chi_{m_1,j_1}(x_1^{(i)})\chi_{m_2,j_2}(x_2^{(i)})\Bigg].\end{aligned} \tag{2.10}$$

Пусть q – число, связанное с p соотношением $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Применим к выражению $|\delta_N(f)|$ неравенства треугольника и Гёльдера. С учетом (2.2) получаем

$$\begin{aligned}|\delta_N(f)| \le &\sum_{m_1>d}\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}}\left|c_{m_1,0}^{(j_1)}\right|\left|\sum_{i=1}^{N}C_i\chi_{m_1,j_1}(x_1^{(i)})\right| + \sum_{m_2>d}\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}}\left|c_{0,m_2}^{(j_2)}\right|\left|\sum_{i=1}^{N}C_i\chi_{m_2,j_2}(x_2^{(i)})\right| + \\ &+\sum_{m_1+m_2>d}\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}}\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}}\left|c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}\right|\left|\sum_{i=1}^{N}C_i\chi_{m_1,j_1}(x_1^{(i)})\chi_{m_2,j_2}(x_2^{(i)})\right| \le \\ \le &\sum_{m_1>d}2^{\frac{m_1-1}{2}}\left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}}\left|c_{m_1,0}^{(j_1)}\right|^p\right]^{1/p}\Sigma_q^{(1)}(m_1) + \sum_{m_2>d}2^{\frac{m_2-1}{2}}\left[\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}}\left|c_{0,m_2}^{(j_2)}\right|^p\right]^{1/p}\Sigma_q^{(2)}(m_2) + \\ &+\sum_{m_1+m_2>d}2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}}\left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}}\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}}\left|c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}\right|^p\right]^{1/p}\Sigma_q^{(1,2)}(m_1,m_2).\end{aligned} \tag{2.11}$$

В силу лемм 1, 2, для $m_1+m_2-2l\le d$ имеем

$$\Sigma_q^{(1,2)}(m_1,m_2) \le 2^{-m_1-m_2+2l}\left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-l}}\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-l}}1\right]^{1/q} = (2^{m_1+m_2-2l})^{-\frac{1}{p}}, \tag{2.12}$$

а для $m_n-l\le d$ будет

$$\Sigma_q^{(n)}(m_n) \le 2^{-m_n+l}\left[\sum_{j_n=1}^{2^{m_n-l}}1\right]^{1/q} = (2^{m_n-l})^{-1/p}, \quad n = 1, 2. \tag{2.13}$$

Из (2.12) следует, что при $m_1+m_2=d+2l$ справедлива оценка

$$\Sigma_q^{(1,2)}(m_1,m_2) \le (2^d)^{-1/p},$$

а при $m_1+m_2=d+2l-1$ справедлива оценка

$$\Sigma_q^{(1,2)}(m_1,m_2) \le 2^{1/p}(2^d)^{-1/p}, \tag{2.14}$$

из (2.13) вытекает, что при $m_n=d+l$ имеем

$$\Sigma_q^{(n)}(m_n) \le (2^d)^{-1/p}, \quad n = 1, 2,$$

$l = 1, 2, \ldots$. Тогда из (2.11) с учетом (1.2), (1.3) получаем

$$\begin{gathered}|\delta_N(f)| \leqslant \sum_{m_1=1}^{\infty} 2^{\frac{m_1-1}{2}}\left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}}\left|c_{m_1,0}^{(j_1)}\right|^p\right]^{1/p}\Sigma_q^{(1)}(m_1) + \sum_{m_2=1}^{\infty} 2^{\frac{m_2-1}{2}}\left[\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}}\left|c_{0,m_2}^{(j_2)}\right|^p\right]^{1/p}\Sigma_q^{(2)}(m_2) + \\ + \sum_{m_1+m_2=2}^{\infty} 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}}\left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}}\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}}\left|c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}\right|^p\right]^{1/p}\Sigma_q^{(1,2)}(m_1,m_2) \leqslant 2^{\frac{1}{p}}(2^d)^{-1/p}\|f\|_{S_p}.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Из (2.15) следует утверждение теоремы.

3. ОЦЕНКИ НА ПРОСТРАНСТВАХ S_p НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ, ОБЛАДАЮЩИХ d-СВОЙСТВОМ ХААРА, С ЧИСЛОМ УЗЛОВ $N \sim 2^d$ ПРИ $d \longrightarrow \infty$

Будем рассматривать кубатурные формулы (1.4), обладающие d-свойством, число узлов которых $N \sim 2^d$ при $d \longrightarrow \infty$. Например, указанному условию удовлетворяют минимальные кубатурные формулы (формулы с наименьшим возможным числом узлов), обладающие d-свойством, которые были построены в [4] для значений $d \geqslant 5$; число узлов каждой такой формулы $N = 2^d - \lambda(d)$, где

$$\lambda(d) = \begin{cases} 2^{\frac{d}{2}+1} - 2, & d = 2l, \\ 3 \times 2^{\frac{d-1}{2}} - 2, & d = 2l-1, \end{cases}$$

$l = 3, 4, \ldots$. Тогда в силу (2.9) имеет место

Теорема 2. *Если кубатурная формула* (1.4), *число узлов которой* $N \sim 2^d$ *при* $d \longrightarrow \infty$, *обладает* d*-свойством, то норма ее функционала погрешности удовлетворяет неравенству*

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant \Theta(N), \quad \text{где} \quad \Theta(N) \sim 2^{1/p}N^{-1/p} \quad \text{при} \quad N \longrightarrow \infty.$$

Исследуем асимптотику нормы функционала погрешности рассматриваемых формул. Зафиксируем значения m_1, m_2, удовлетворяющие условию

$$\begin{gathered} m_1 = m_2 = (d+1)/2, \quad \text{если} \quad d = 2l-1, \\ m_1 = d/2, \quad m_2 = d/2+1, \quad \text{если} \quad d = 2l. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Заметим, что при этом $m_1 + m_2 = d + 1$.

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 3. *Если кубатурная формула* (1.4) *обладает* d*-свойством, то при* $m_1 + m_2 = d + 1$ *имеем*

$$Q[K_{m_1,m_2}^{(2j_1-1,2j_2-1)}] = Q[K_{m_1,m_2}^{(2j_1,2j_2)}], \tag{3.2}$$

$$Q[K_{m_1,m_2}^{(2j_1-1,2j_2)}] = Q[K_{m_1,m_2}^{(2j_1,2j_2-1)}], \tag{3.3}$$

$j_n = 1, 2, \ldots, 2^{m_n-1}$, $n = 1, 2$.

Доказательство. Используя равенства (2.6) и условие точности формулы (1.4) на полиномах Хаара $K_{m_1,m_2-1}^{(2j_1-1,j_2)}$, $K_{m_1-1,m_2}^{(j_1,2j_2)}$, $K_{m_1-1,m_2}^{(j_1,2j_2-1)}$ степени d (лемму 1), получаем

$$Q[K_{m_1,m_2}^{(2j_1-1,2j_2-1)}] + Q[K_{m_1,m_2}^{(2j_1-1,2j_2)}] = Q[K_{m_1,0}^{(2j_1-1)}(K_{0,m_2}^{(2j_2-1)} + K_{0,m_2}^{(2j_2)})] = 2Q[K_{m_1,m_2-1}^{(2j_1-1,2j_2)}] = 2, \tag{3.4}$$

$$Q[K_{m_1,m_2}^{(2j_1-1,2j_2)}] + Q[K_{m_1,m_2}^{(2j_1,2j_2)}] = Q[K_{0,m_2}^{(2j_2)}(K_{m_1,0}^{(2j_1-1)} + K_{m_1,0}^{(2j_1)})] = 2Q[K_{m_1-1,m_2}^{(j_1,2j_2)}] = 2, \tag{3.5}$$

$$Q[K_{m_1,m_2}^{(2j_1-1,2j_2-1)}] + Q[K_{m_1,m_2}^{(2j_1,2j_2-1)}] = 2Q[K_{0,m_2}^{(2j_2-1)}(K_{m_1,0}^{(2j_1-1)} + K_{m_1,0}^{(2j_1)})] = 2Q[K_{m_1-1,m_2}^{(j_1,2j_2-1)}] = 2. \tag{3.6}$$

Из (3.4) и (3.5) следует равенство (3.2), а из (3.4) и (3.6) – равенство (3.3). Лемма доказана.

Пусть $\operatorname{supp}\{f(x_1, x_2)\}$ – носитель функции $f(x_1, x_2)$, т.е. замыкание множества $\{(x_1, x_2): f(x_1, x_2) = 0\}$.

Лемма 4. *Если кубатурная формула* (1.4) *обладает d-свойством, то каждое из множеств* $\operatorname{supp}\{K_{l_1, l_2}^{(j_1, j_2)}\}$ $(l_1 + l_2 = d, j_n = 1, 2, \ldots, 2^{l_n}, n = 1, 2)$, $\operatorname{supp}\{K_{d,0}^{(j)}\}$, $\operatorname{supp}\{K_{0,d}^{(j)}\}$, $j = 1, 2, \ldots, 2^d$, *содержит хотя бы один узел этой формулы.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не имеет места, т.е. существует хотя бы одна из функций, указанных в условии леммы (для определенности обозначим ее через $P_d(x_1, x_2)$), такая, что $\operatorname{supp}\{P_d\}$ не содержит ни одного узла кубатурной формулы (1.4). Тогда $Q[P_d] = 0$. Однако в силу леммы 1 имеем $Q[P_d] = I[P_d] = 1$. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

Лемма 5. *Существует функция* $g(x_1, x_2) \in S_p$ *такая, что*

$$|\delta_N(g)| = \Sigma_q^{(1,2)}(m_1, m_2)\|g\|_{S_p},$$

где значения m_1, m_2 *удовлетворяют условию* (3.1).

Доказательство. Воспользуемся техникой, примененной в [1]. Пусть

$$B_{j_1, j_2} = 2^{-\frac{m_1-1}{2}-\frac{m_2-1}{2}} \sum_{i=1}^{N} C_i \chi_{m_1, j_1}(x_1^{(i)}) \chi_{m_2, j_2}(x_2^{(i)}).$$

Тогда по определению (2.2) имеем

$$\Sigma_q^{(1,2)}(m_1, m_2) = \left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} |B_{j_1, j_2}|^q\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{3.7}$$

Рассмотрим функцию

$$g(x_1, x_2) = \sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} \operatorname{sgn} B_{j_1, j_2} |B_{j_1, j_2}|^{q-1} \chi_{m_1, j_1}(x_1) \chi_{m_2, j_2}(x_2).$$

Коэффициенты Фурье–Хаара этой функции равны $c_{m_1, m_2}^{(j_1, j_2)} = \operatorname{sgn} B_{j_1, j_2} |B_{j_1, j_2}|^{q-1}$ для рассматриваемых значений m_1, m_2 и $c_{m_1', m_2'}^{(j_1, j_2)} = 0$ для $m_1' \neq m_1$, $m_2' \neq m_2$. Поэтому по формулам (1.2) вычисляем

$$A_p^{(1,2)}(g) = 2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} |B_{j_1, j_2}|^q\right]^{1/p}, \tag{3.8}$$

а по формуле (2.10) имеем

$$\delta_N(g) = -2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} \left[\operatorname{sgn} B_{j_1, j_2} |B_{j_1, j_2}|^{q-1} 2^{-\frac{m_1-1}{2}-\frac{m_2-1}{2}} \sum_{i=1}^{N} C_i \chi_{m_1, j_1}(x_1^{(i)}) \chi_{m_2, j_2}(x_2^{(i)})\right] =$$

$$= -2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} |B_{j_1, j_2}|^q.$$

Последнее соотношение вместе с (3.7) и (3.8) показывает, что

$$\delta_N(g) = -2^{\frac{m_1-1}{2}+\frac{m_2-1}{2}} \left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} |B_{j_1, j_2}|^q\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}} |B_{j_1, j_2}|^q\right]^{\frac{1}{q}} = -A_p^{(1,2)}(g) \Sigma_q^{(1,2)}(m_1, m_2).$$

Заметим, что $A_p^{(1)}(g) = A_p^{(2)}(g) = 0$. Тогда $\|g\|_{S_p} = A_p^{(1,2)}(g)$ и

$$\delta_N(g) = -\Sigma_q^{(1,2)}(m_1, m_2)\|g\|_{S_p}.$$

Лемма доказана.

Имеет место

Теорема 3. *Если кубатурная формула* (1.4), *число узлов которой* $N \sim 2^d$ *при* $d \longrightarrow \infty$, *обладает* d*-свойством, то норма ее функционала погрешности оценивается формулой*

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \sim 2^{1/p} N^{-1/p} \quad при \quad N \longrightarrow \infty.$$

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$L_{гр}$ – число прямых вида $x_n = \text{const}$, отличных от $x_n = 0$, $x_n = 1$, $n = 1, 2$, на которых лежат узлы формулы (1.4), расположенные на границе носителей $\operatorname{supp}\{\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2)\}$;

L_0 – число прямых вида $x_n = \text{const}$, $n = 1, 2$, содержащих узлы $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$ формулы (1.4), такие, что $\chi_{m_1, j_1}(x_1^{(i)})\chi_{m_2, j_2}(x_2^{(i)}) = 0$ для всех функций $\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2)$, носителям которых эти узлы принадлежат;

H_0 – число носителей функций $\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2)$, содержащих узлы $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$ формулы (1.4) такие, что для этих функций имеем $\chi_{m_1, j_1}(x_1^{(i)})\chi_{m_2, j_2}(x_2^{(i)}) = 0$;

$H_{гр}$ – число носителей $\operatorname{supp}\{\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2)\}$, на границе которых лежат узлы формулы (1.4);

$\mathbb{H}$ – множество носителей функций $\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2)$, не содержащих узлы формулы (1.4) на своей границе и узлы, в которых эти функции принимают значение, равное 0, $|M|$ – число элементов множества M.

Легко видеть, что

$$H_0 \leqslant L_0, \quad H_{гр} \leqslant 2L_{гр}. \tag{3.9}$$

Так как общее число носителей $\operatorname{supp}\{\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2)\}$ равно 2^{d-1}, то в силу (3.9) имеем

$$|\mathbb{H}| \geqslant 2^{d-1} - H_0 - H_{гр} \geqslant 2^{d-1} - L_0 - 2L_{гр}. \tag{3.10}$$

Пусть L_0' – число прямых вида $x_n = \text{const}$, $n = 1, 2$, пересекающих носители $\operatorname{supp}\{\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2)\}$ по отрезкам, в каждой точке которых $\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2) = 0$, $L_{гр}'$ – число прямых вида $x_n = \text{const}$, отличных от $x_n = 0$, $x_n = 1$, $n = 1, 2$, на которых лежат стороны прямоугольников-носителей $\operatorname{supp}\{\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2)\}$.

Тогда в силу (3.1) имеем

$$L_0 \leqslant L_0' = 2^{m_1 - 1} + 2^{m_2 - 1} = \begin{cases} 2^{\frac{d+1}{2}}, & d = 2l - 1, \\ 3 \times 2^{\frac{d}{2} - 1}, & d = 2l, \end{cases}$$

$$L_{гр} \leqslant L_{гр}' = 2^{m_1 - 1} + 2^{m_2 - 1} - 2 = \begin{cases} 2^{\frac{d+1}{2}} - 2, & d = 2l - 1, \\ 3 \times 2^{\frac{d}{2} - 1} - 2, & d = 2l, \end{cases}$$

и в силу (3.10) имеем

$$|\mathbb{H}| \geqslant 2^{d-1} - L_0' - 2L_{\text{гр}}' = \begin{cases} 2^{d-1} - 3\sqrt{2}\times 2^{d/2} + 4, & d = 2l-1, \\ 2^{d-1} - \dfrac{9}{2}\times 2^{d/2} + 4, & d = 2l. \end{cases} \tag{3.11}$$

В силу (2.5) имеем

$$\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2) = 2^{-\frac{m_1+1}{2}-\frac{m_2+1}{2}}[K_{m_1, m_2}^{(2j_1-1, 2j_2-1)}(x_1, x_2) - K_{m_1, m_2}^{(2j_1-1, 2j_2)}(x_1, x_2) - \\ - K_{m_1, m_2}^{(2j_1, 2j_2-1)}(x_1, x_2) + K_{m_1, m_2}^{(2j_1, 2j_2)}(x_1, x_2)]. \tag{3.12}$$

Так как попарные пересечения носителей функций $K_{m_1, m_2}^{(2j_1-1, 2j_2-1)}$, $K_{m_1, m_2}^{(2j_1-1, 2j_2)}$, $K_{m_1, m_2}^{(2j_1, 2j_2-1)}$, $K_{m_1, m_2}^{(2j_1, 2j_2)}$ содержат только граничные точки этих носителей, то имеем

$$\operatorname{supp}\{\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2)\} = \operatorname{supp}\{K_{m_1, m_2}^{(2j_1-1, 2j_2-1)}\} \cup \operatorname{supp}\{K_{m_1, m_2}^{(2j_1-1, 2j_2)}\} \cup \\ \cup \operatorname{supp}\{K_{m_1, m_2}^{(2j_1, 2j_2-1)}\} \cup \operatorname{supp}\{K_{m_1, m_2}^{(2j_1, 2j_2)}\}. \tag{3.13}$$

Обозначим через $\operatorname{int}M$ внутренность множества M – совокупность всех внутренних точек этого множества. В соответствии с равенством (3.13), леммами 3, 4 и определением множества $\mathbb{H}$ возможны следующие 2 случая.

1. Любой носитель $\operatorname{supp}\{\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2)\} \in \mathbb{H}$ содержит только те узлы формулы (1.4), которые принадлежат $\operatorname{int}\operatorname{supp}\{K_{m_1, m_2}^{(2j_1-1, 2j_2-1)}\}$, и узлы, лежащие в $\operatorname{int}\operatorname{supp}\{K_{m_1, m_2}^{(2j_1, 2j_2)}\}$, либо только те узлы, которые принадлежат $\operatorname{int}\operatorname{supp}\{K_{m_1, m_2}^{(2j_1-1, 2j_2)}\}$, и узлы, лежащие в $\operatorname{int}\operatorname{supp}\{K_{m_1, m_2}^{(2j_1, 2j_2-1)}\}$ (через $\mathbb{H}_1$ обозначим множество указанных носителей функций $\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2)$).

2. Любой носитель $\operatorname{supp}\{\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2)\} \in \mathbb{H}$ содержит узлы формулы (1.4) в каждом из множеств $\operatorname{int}\operatorname{supp}\{K_{m_1, m_2}^{(2j_1-1, 2j_2-1)}\}$, $\operatorname{int}\operatorname{supp}\{K_{m_1, m_2}^{(2j_1-1, 2j_2)}\}$, $\operatorname{int}\operatorname{supp}\{K_{m_1, m_2}^{(2j_1, 2j_2-1)}\}$, $\operatorname{int}\operatorname{supp}\{K_{m_1, m_2}^{(2j_1-1, 2j_2)}\}$ и не содержит узлов за пределами этих множеств (множество таких носителей функций $\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2)$ обозначим через $\mathbb{H}_2$).

Таким образом, $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \cup \mathbb{H}_2$, $\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2 = \varnothing$, следовательно,

$$|\mathbb{H}| = |\mathbb{H}_1| + |\mathbb{H}_2|. \tag{3.14}$$

Докажем следующее асимптотическое равенство:

$$|\mathbb{H}_1| \sim 2^{d-1} \quad \text{при} \quad d \longrightarrow \infty. \tag{3.15}$$

Предположим, что (3.15) не имеет места. Тогда в соответствии с (3.14) имеем

$$|\mathbb{H}_2| = 2^{d-1}C, \quad 0 < C \leqslant 1.$$

Так как при $m_1 + m_2 = d + 1$ число носителей всех функций $\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2)$ равно 2^{d-1}, то из (3.11) следует, что $|\mathbb{H}| \sim 2^{d-1}$ при $d \longrightarrow \infty$. Тогда $|\mathbb{H}_1| = (1-C)2^{d-1}$.

Пусть $\tilde{N}$ – число узлов формулы (1.4), принадлежащих элементам множества $\mathbb{H}$, $N_{j_1, j_2}^{(n)}$ – число узлов, принадлежащих носителю $\operatorname{supp}\{\chi_{m_1, j_1}(x_1)\chi_{m_2, j_2}(x_2)\}$ из множества $\mathbb{H}_n$, $N_n = \min\limits_{j_1, j_2} N_{j_1, j_2}^{(n)}$, $n = 1, 2$. Из определения множеств $\mathbb{H}_1$, $\mathbb{H}_2$ следует, что $N_1 \geqslant 2$, $N_2 \geqslant 4$. Тогда имеем

$$\tilde{N} \geqslant (1-C)2^{d-1}N_1 + C\times 2^{d-1}N_2 \geqslant (1+C)\times 2^d. \tag{3.16}$$

Так как

$$\operatorname{supp}\{\chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2)\} = \{\overline{l_{m_1+1,2j_1-1}}\times\overline{l_{m_2,j_2}}\}\cup\{\overline{l_{m_1+1,2j_1}}\times\overline{l_{m_2,j_2}}\} =$$
$$= \operatorname{supp}\{K_{m_1,m_2-1}^{(2j_1-1,j_2)}\}\cup\operatorname{supp}\{K_{m_1,m_2-1}^{(2j_1,j_2)}\},\quad m_1+m_2 = d+1,$$

то в силу леммы 4 имеем

$$\tilde{N} \geqslant 2|\mathbb{H}|. \tag{3.17}$$

Из (3.17) и (3.11) следует, что $\tilde{N} \sim 2^d$ при $d \longrightarrow \infty$, а это противоречит условию (3.16).

Асимптотическое равенство (3.15) доказано.

Рассмотрим $\Sigma_q^{(1,2)}(m_1, m_2)$ со значениями m_1, m_2, удовлетворяющими равенствам (3.1). В силу (2.2) и (3.12) имеем

$$\begin{aligned}\Sigma_q^{(1,2)}(m_1,m_2) &= 2^{-d-1}\left[\sum_{j_1=1}^{2^{m_1-1}}\sum_{j_2=1}^{2^{m_2-1}}\left|Q[K_{m_1,m_2}^{(2j_1-1,2j_2-1)}-K_{m_1,m_2}^{(2j_1-1,2j_2)}-K_{m_1,m_2}^{(2j_1,2j_2-1)}+K_{m_1,m_2}^{(2j_1,2j_2)}]\right|^q\right]^{1/q} \geqslant\\ &\geqslant 2^{-d-1}\left[\sum_{j_1,j_2}{}'\left|Q[K_{m_1,m_2}^{(2j_1-1,2j_2-1)}-K_{m_1,m_2}^{(2j_1-1,2j_2)}-K_{m_1,m_2}^{(2j_1,2j_2-1)}+K_{m_1,m_2}^{(2j_1,2j_2)}]\right|^q\right]^{1/q},\end{aligned} \tag{3.18}$$

где под Σ'_{j_1,j_2} понимается суммирование по всем значениям индексов j_1, j_2, удовлетворяющим условию $\operatorname{supp}\{\chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2)\}\in\mathbb{H}_1$. В соответствии с определением множества $\mathbb{H}_1$ имеет место один из следующих двух случаев:

$$\text{либо}\quad Q[K_{m_1,m_2}^{(2j_1-1,2j_2)}] = Q[K_{m_1,m_2}^{(2j_1,2j_2-1)}] = 0,\quad\text{либо}\quad Q[K_{m_1,m_2}^{(2j_1-1,2j_2-1)}] = Q[K_{m_1,m_2}^{(2j_1,2j_2)}] = 0.$$

Принимая во внимание (3.18), (2.6) и условие точности кубатурной формулы (1.4) на полиномах Хаара $K_{m_1-1,m_2}^{(j_1,2j_2-1)}(x_1,x_2)$, $K_{m_1-1,m_2}^{(j_1,2j_2)}(x_1,x_2)$ степени d, получаем

$$\begin{aligned}\Sigma_q^{(1,2)}(m_1,m_2) &\geqslant 2^{-d-1}\left[\sum_{j_1,j_2}{}'Q^q[K_{m_1,m_2}^{(2j_1-1,2j_2-1)}+K_{m_1,m_2}^{(2j_1-1,2j_2)}+K_{m_1,m_2}^{(2j_1,2j_2-1)}+K_{m_1,m_2}^{(2j_1,2j_2)}]\right]^{1/q} =\\ &= 2^{-d-1}\left[\sum_{j_1,j_2}{}'Q^q[(K_{m_1,0}^{(2j_1-1)}+K_{m_1,0}^{(2j_1)})(K_{0,m_2}^{(2j_2-1)}+K_{0,m_2}^{(2j_2)})]\right]^{1/q} =\\ &= 2^{-d}\left[\sum_{j_1,j_2}{}'Q^q[K_{m_1-1,m_2}^{(j_1,2j_2-1)}+K_{m_1-1,m_2}^{(j_1,2j_2)}]\right]^{1/q} = 2^{-d}\left[\sum_{j_1,j_2}{}'2^q\right]^{1/q} = 2^{-d+1}\left[\sum_{j_1,j_2}{}'1\right]^{1/q}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

В соответствии с (3.15) имеем $\sum'_{j_1,j_2}1 = |\mathbb{H}_1| \sim 2^{d-1}$ при $d \longrightarrow \infty$. Тогда в силу (3.19) получаем

$$\Sigma_q^{(1,2)}(m_1,m_2) \geqslant 2^{-d+1}|\mathbb{H}_1|^{1/q} \sim 2^{1/p}(2^d)^{-1/p} \sim 2^{1/p}N^{-1/p}\quad\text{при}\quad d\longrightarrow\infty. \tag{3.20}$$

Так как $m_1 + m_2 = d + 1$, то из (2.14) и (3.20) следует, что

$$\Sigma_q^{(1,2)}(m_1,m_2) \sim 2^{1/p}N^{-1/p}\quad\text{при}\quad N\longrightarrow\infty. \tag{3.21}$$

Из (3.21) и леммы 5 вытекает асимптотическое равенство

$$|\delta_N(g)| \sim 2^{1/p}N^{-1/p}\|g\|_{S_p}\quad\text{при}\quad N\longrightarrow\infty. \tag{3.22}$$

В соответствии с (2.15), для любой функции $f(x_1, x_2) \in S_p$ справедливо неравенство

$$|\delta_N(f)| \leqslant \Theta(N)\|f\|_{S_p}, \quad \text{где} \quad \Theta(N) \sim 2^{\frac{1}{p}} N^{-\frac{1}{p}} \quad \text{при} \quad N \longrightarrow \infty. \tag{3.23}$$

Тогда в силу (3.22) и (3.23) имеет место утверждение теоремы.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В [1] рассмотрены кубатурные формулы

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f(x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}) \tag{4.1}$$

с узлами $(x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}) \in [0, 1]^n$, образующими Π_τ-сетки – сетки, состоящие из $N = 2^\nu$ узлов, удовлетворяющих такому условию: каждый двоичный параллелепипед объема $2^{\tau - \nu}$ содержит 2^τ точек сетки ($\nu > \tau$). Для таких формул с функцией f, принадлежащей пространству S_p, в [1] доказана верхняя оценка нормы функционала погрешности

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant 2^{\frac{n-1+\tau}{p}} N^{-1/p}. \tag{4.2}$$

В [1] показано, что Π_τ-сетки при $n = 2$ и $n = 3$ со сколь угодно большим числом $N = 2^\nu$ узлов существуют для любых значений $\tau = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, в двумерном случае константа–множитель в правой части неравенства (4.2) принимает наименьшее значение при $\tau = 0$ и оценка (4.2) записывается в виде

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant 2^{1/p} N^{-1/p}. \tag{4.3}$$

В [1] доказано, что кубатурные формулы (4.1) с 2^d узлами, образующими Π_0-сетки, обладают d-свойством. Следовательно, теорема 1 является в некотором смысле обобщением оценки (4.3).

Кроме того, в [1] установлено, что для любой кубатурной формулы (4.1) с функцией $f \in S_p$ имеет место нижняя оценка нормы функционала погрешности

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \geqslant N^{-1/p},$$

которая, как доказано в [1], справедлива также для кубатурной формулы

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f(x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$$

с неравными коэффициентами при узлах, а значит, и для формулы (1.4), обладающей d-свойством.

Таким образом, в случае $N \sim 2^d$ при $d \longrightarrow \infty$ исследованные авторами настоящей статьи кубатурные формулы имеют наилучший порядок сходимости δ_N по норме, равный $N^{-1/p}$. В частности, указанным свойством обладают формулы, построенные в [4], в то же время они, будучи минимальными формулами приближенного интегрирования, обеспечивают наилучшую поточечную сходимость $\delta_N(f)$ к нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболь И.М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969.
2. *Entacher K.* Quasi-Monte Carlo methods for numerical integration of multivariate Haar series // BIT (Dan). 1997. V. 37. № 4. P. 846–861.
3. *Entacher K.* Quasi-Monte Carlo methods for numerical integration of multivariate Haar series. II // BIT (Dan). 1998. V. 38. № 2. P. 283–292.
4. *Кириллов К.А.* Построение минимальных кубатурных формул, точных для полиномов Хаара высших степеней в двумерном случае // Вычисл. технологии. 2005. Т. 1. Спец. выпуск. С. 29–47.
5. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. 1910. V. 69. P. 331–371.
6. *Кириллов К.А., Носков М.В.* Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 6. С. 791–799.