М. И. Сумин, Параметрическая двойственная регуляризация для задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2009, том 49, номер 12, 2083–2102

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 12, с. 2083–2102

УДК 519.626

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОТОЧЕЧНЫМИ ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1)]

© 2009 г. **М. И. Сумин**

(603950 Н. Новгород, пр-т Гагарина, 23, Нижегородский гос. ун-т)

e-mail: m.sumin@mm.unn.ru; msumin@sinn.ru

Поступила в редакцию 15.06.2009 г.

Описывается применение метода возмущений в теории двойственной регуляризации для линейно-выпуклой задачи оптимального управления с сильно выпуклым функционалом качества и с поточечными фазовыми ограничениями, понимаемыми как ограничения в пространстве L_2. Основное внимание уделяется изучению качественных свойств метода двойственной регуляризации в зависимости от дифференциальных свойств функции значений (S-функции) оптимизационной задачи. Устанавливается теснейшая связь свойств сходимости метода с принципом Лагранжа и принципом максимума Понтрягина. Показывается, что схема двойственной регуляризации дает новый способ доказательства принципа максимума в задаче с поточечными фазовыми ограничениями, понимаемыми как в пространстве L_2, так и в пространстве C. Обсуждаются так называемые регуляризованные принцип Лагранжа в недифференциальной форме и принцип максимума Понтрягина. Рассматриваются иллюстративные примеры. Библ. 26.

Ключевые слова: оптимальное управление, поточечные фазовые ограничения, метод возмущений, минимизирующая последовательность, параметрическая двойственная регуляризация, принцип Лагранжа, прицип максимума Понтрягина.

ВВЕДЕНИЕ

Двойственные алгоритмы традиционно являются одними из наиболее популярных и эффективных при решении оптимизационных задач с ограничениями (см. [1], [2]). Целенаправленное изучение и применение метода двойственности в теории алгоритмов решения задач математического программирования началось, по-видимому, с работ Удзавы [3], [4]. К основным проблемам, связанным с классическим алгоритмом Удзавы, как отмечено в [5], можно отнести его неустойчивость к ошибкам исходных данных и потребность в существовании седловой точки функции Лагранжа оптимизационной задачи при доказательстве сходимости (соответствующие теоремы сходимости могут быть найдены, например, в [6], [7]). Подход к преодолению указанных трудностей применения метода двойственности для решения оптимизационных задач с ограничениями был предложен в [8]–[11] на пути его объединения с методами регуляризации решения некорректных задач (см. [12]). В то же время, как известно (см., например, [13], [14]), двойственность неразрывно связана и с самим методом регуляризации Тихонова (см. [12]).

Статья посвящена изучению метода двойственной регуляризации (см. [5], [8]–[11]) применительно к параметрической линейно-выпуклой задаче оптимального управления с сильно выпук-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 07-01-00495, 09-01-97019-р_поволжье), аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)" Минобрнауки РФ (регистрационный № 2.1.1/3927) и федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы (проект НК-13П(9)).

лым целевым функционалом и с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства, понимаемыми как ограничения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \equiv L_2(X)$:

$$g_0(u) \equiv \int\limits_0^T (\langle F(t)x[u](t), x[u](t)\rangle + \langle G(t)u(t), u(t)\rangle)dt \longrightarrow \min, \quad u \in \mathcal{D} \subset L_2(0, T), \qquad (P_{p,r})$$

$$g_1(u)(t) \equiv \langle \varphi_1(t), x[u](t)\rangle = h(t) + p(t), \quad g_2(u)(t) \equiv \varphi_2(t, x[u](t)) \le r(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in X.$$

Здесь $p \in \mathcal{H}$, $r \in \mathcal{H}$ – параметры, $g_0 : L_2(0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^1$ – сильно выпуклый функционал, φ_1, $h \in L_\infty(0, T)$ – заданные функции, $\varphi_2 : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$ – выпуклая по x, непрерывная вместе с градиентом $\nabla_x\varphi_2$ функция, $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_2(0, T) : u(t) \in U$ при п. в. $t \in (0, T)\}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ – выпуклый компакт, $X \subset [0, T]$, $X = \operatorname{cl}\operatorname{int} X$, $x[u](t)$, $t \in [0, T]$, – решение задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T].$$

Двойственная регуляризация (см. [5], [8]–[11]) для задачи $(P_{p,r})$ заключается в непосредственном решении двойственной к $(P_{p,r})$ и регуляризованной по Тихонову задачи

$$R^\alpha_{p,r}(\lambda, \mu) \equiv V_{p,r}(\lambda, \mu) - \alpha\|(\lambda, \mu)\|^2 \longrightarrow \sup, \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+,$$

$$V_{p,r}(\lambda, \mu) \equiv \min_{u \in \mathcal{D}} L_{p,r}(u, \lambda, \mu), \quad L_{p,r}(u, \lambda, \mu) \equiv g_0(u) + \langle \lambda, g_1(u) - h - p\rangle + \langle \mu, g_2(u) - r\rangle,$$

$$u[\lambda, \mu] \equiv \operatorname{argmin}\{L_{p,r}(u, \lambda, \mu) : u \in \mathcal{D}\}, \quad (\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}) \equiv \operatorname{argmax}\{R^\alpha_{p,r}(\lambda, \mu) : (\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+\},$$

$$\mathcal{H}_+ \equiv \{z \in L_2(X) : z(t) \ge 0 \text{ при п.в. } t \in X\},$$

в результате чего происходит аппроксимация в метрике $L_2(0, T)$ при $\alpha \longrightarrow 0$ решения $u^0_{p,r}$ задачи $(P_{p,r})$ элементами $u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]$. Наличие параметров $(p, r) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ в исходной задаче обусловливает возможность применения для ее изучения идеологии метода возмущений (см., например, [15]), что позволяет исследовать зависимость свойств сходимости метода двойственной регуляризации от параметров: связь с дифференциальными свойствами функции значений (S-функции) с разрешимостью двойственной задачи, принципом Лагранжа и принципом максимума Понтрягина.

Важнейшее преимущество рассмотрения ограничений задачи $(P_{p,r})$ как ограничений в пространстве $L_2(X)$ заключается, прежде всего, в том, что это приводит к устойчивому к ошибкам исходных данных алгоритму ее решения. Как и в указанных работах, алгоритм двойственной регуляризации для решения задачи $(P_{p,r})$ ведет себя двояко в зависимости от того, разрешима или нет двойственная к $(P_{p,r})$ задача. В первом случае семейство двойственных переменных $(\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r})$, $\alpha \longrightarrow 0$, ограничено в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, во втором – нет. Однако в обоих случаях "параллельно" с построением минимизирующего приближенного решения в смысле Варги (см. [16]) двойственный алгоритм ведет и к соответствующим необходимым условиям – так называемому регуляризованному принципу Лагранжа в недифференциальной форме в задаче $(P_{p,r})$ и, соответственно, регуляризованному принципу максимума Понтрягина. Аналогичный регуляризованный принцип Лагранжа в недифференциальной и дифференциальной формах в случае линейно-выпуклой задачи математического программирования в гильбертовом пространстве рассматривался нами ранее (см. [14]). Главное отличие регуляризованных принципа Лагранжа и принципа максимума от их классических аналогов заключается в том, что, во-первых, они записываются в терминах минимизирующих последовательностей (а не оптимальных управлений), а во-вторых, выполняются в любой задаче $(P_{p,r})$, имеющей решение. При этом, как известно, эти классические аналоги в задачах $(P_{p,r})$ с ограничениями в $L_2(X)$ могут не быть справедливыми, что, в частности, подтверждается иллюстративным примером (см. пример 2.1) и в данной работе. Заметим, что пространство L_2 в качестве пространства, в котором рассматриваются поточечные фазовые ограничения задачи, использовалось ранее с целью доказательства необходимых условий оптимальности на основе метода штрафов многими авторами (см., например, [17]).

В настоящей работе центральное внимание уделяется обсуждению регуляризованных принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина в задаче $(P_{p,r})$. В работе также подчеркивается, что эти понятия расширяют возможности применимости аналогичных классических понятий, обсуждается целесообразность их применения, в частности, для анализа и решения некорректных задач оптимального управления и обратных задач, для которых характерно как раз вырождение в том или ином смысле классических условий оптимальности в исходной (точной) задаче (см. иллюстративный пример 4.1).

Естественно, при определенных условиях на исходные данные задачи $(P_{p,r})$ ее ограничения, рассматриваемые в пространстве $L_2(X)$, можно трактовать и как ограничения в $L_\infty(X)$ $(p, r \in L_\infty(X))$ и $C(X)$ $(\varphi_1, h, p, r \in C(X))$. При этом понятия оптимальности управления в указанных частных случаях эквивалентны понятию оптимальности для случая, когда "те же" ограничения рассматриваются в $L_2(X)$. Соответственно, совпадают и значения задачи $(P_{p,r})$ в этих частных случаях. Заметим в этой связи, что если в задаче отсутствует ограничение-равенство $((P_{p,r}) = (P_r))$, а ограничение-неравенство понимается как ограничение в $C(X)$, $r \in C(X)$, то регуляризованный принцип максимума после некоторой естественной перенормировки множителя μ_r^α, рассматриваемого одновременно как элемент пространства $L_1(X)$, независимо от того, разрешима или нет двойственная задача, приводит к невырожденному классическому принципу максимума Понтрягина для оптимального управления $\overset{0}{u}_r$, в записи которого участвует традиционная в таком важном частном случае мера Радона (см., например, [17]). При этом одновременно становится ясным, в каком смысле следует понимать "сходимость" при $\alpha \longrightarrow 0$ множителей $\mu_r^\alpha \in L_2(X)$, нормы которых в $L_2(X)$ неограниченно возрастают в случае неразрешимости двойственной задачи. Заметим, что такой же метод получения необходимых условий с помощью естественной перенормировки множителей Лагранжа в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями, понимаемыми как ограничения в пространстве C, посредством предварительного ее изучения с ограничениями, понимаемыми в L_2, может применяться и в нелинейных задачах оптимального управления (см. [18]).

Подчеркнем, наконец, что изучение метода двойственной регуляризации применительно к рассматриваемой параметрической линейно-выпуклой задаче оптимального управления важно и с точки зрения лучшего понимания того, как надо организовывать алгоритмы решения на основе идеологии двойственной регуляризации в случае нелинейных задач оптимального управления с фазовыми ограничениями (см. [19]).

Статья состоит из введения и пяти основных разделов. Разд. 1 посвящен постановке линейно выпуклой задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями. В разд. 2 доказывается параметрический принцип максимума Понтрягина в задаче с фазовыми ограничениями, понимаемыми как ограничения в пространстве суммируемых с квадратом функций. Разд. 3 посвящен алгоритму двойственной регуляризации для рассматриваемой линейно-выпуклой задачи с сильно выпуклым целевым функционалом. В разд. 4 доказываются так называемые регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в рассматриваемой задаче. И, наконец, в разд. 5 изучается связь регуляризованного принципа максимума с классическим принципом максимума, формулируемым в случае, когда ограничения задачи понимаются как ограничения в пространстве непрерывных функций.

Результаты работы были частично анонсированы в [20].

1. ПОСТАНОВКА ЛИНЕЙНО ВЫПУКЛОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим в пространстве $L_2(0, T)$ параметрическую задачу $(P_{p,r})$ оптимального управления с фиксированным временем и с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства, понимаемыми как ограничения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \equiv L_2(X)$.

В ней $p \in \mathcal{H}$, $r \in \mathcal{H}$ – параметры, $g_0 : L_2(0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^1$ – сильно выпуклый функционал с постоянной к, $F, A : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$, $B : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$, $G : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times m}$ – измеримые по Лебегу ограниченные матрицы, $\varphi_1, h \in L_\infty(0, T)$ – заданные функции, $\varphi_2 : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$ – выпуклая по x, непрерывная вместе с градиентом $\nabla_x\varphi_2$ функция, $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_2(0, T) : u(t) \in U$ при п. в. $t \in (0, T)\}$,

$U \in \mathbb{R}^m$ – выпуклый компакт, $X \subset [0, T]$ – компакт без изолированных точек с непустой внутренностью, $X = \mathrm{cl\,int}X$, $x[u](t)$, $t \in [0, T]$, – решение задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T]. \tag{1.1}$$

Очевидно, для каждого управления $u \in \mathcal{D}$ существует единственное решение задачи Коши $x[u](t)$, $t \in [0, T]$, причем все эти решения равномерно ограничены. Обозначим единственное решение задачи $(P_{p,r})$, если оно существует, через $u^0_{p,r}$.

Важное значение в контексте конструирования алгоритма двойственной регуляризации в задаче $(P_{p,r})$ имеет понятие минимизирующего приближенного решения в смысле Варги (см. [16]). Напомним, что под минимизирующим приближенным решением понимается такая последовательность $u^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, для которой справедливы соотношения $g_0(u^i) \le \beta(p, r) + \delta^i$, $u^i \in \mathcal{D}^{\epsilon^i}_{p,r}$, для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i, ϵ^i, $i = 1, 2, \ldots$. Здесь $\beta(p, r)$ – обобщенная нижняя грань, т.е. S-функция:

$$\beta(p, r) \equiv \beta_{+0}(p, r) \equiv \lim_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon(p, r),$$

$$\beta_\epsilon(p, r) \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^\epsilon_{p,r}} g_0(u), \quad \beta_\epsilon(p, r) \equiv +\infty, \quad \text{если} \quad \mathcal{D}^\epsilon_{p,r} = \emptyset,$$

$$\mathcal{D}^\epsilon_{p,r} \equiv \{u \in \mathcal{D} : \|g_1(u) - h - p\|_{2,X} \le \epsilon,\ \min_{z \in \mathcal{H}_-} \|g_2(u) - r - z\|_{2,X} \le \epsilon\}, \quad \epsilon \ge 0,$$

$$\mathcal{H}_- \equiv \{z \in L_2(X) : z(t) \le 0 \text{ при п.в. } t \in X\}.$$

Очевидно, в общей ситуации $\beta(p, r) \le \beta_0(p, r)$, где $\beta_0(p, r)$ – классическое значение задачи. Но в случае поставленной выше задачи $(P_{p,r})$ имеет место равенство: $\beta(p, r) = \beta_0(p, r)$.

Справедлива важная для дальнейшего изложения (см., например, [5], [21])

Лемма 1.1. *Функционал* $\beta : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ *является выпуклым и полунепрерывным снизу. Если* $\beta(p, r) < +\infty$, *то нижняя грань* $\beta(p, r)$ *в задаче* $(P_{p,r})$ *достигается и справедливо равенство* $\beta_0(p, r) = \beta(p, r)$.

Отсюда и из определения минимизирующего приближенного решения u^i, $i = 1, 2, \ldots$, вытекает справедливость предельного соотношения

$$g_0(u^i) \longrightarrow g_0(u^0_{p,r}) = \beta_0(p, r) = \beta(p, r), \quad i \longrightarrow \infty, \tag{1.2}$$

если решение задачи $(P_{p,r})$ существует.

Введем функционал Лагранжа

$$L_{p,r}(u, \lambda, \mu) \equiv g_0(u) + \langle \lambda, g_1(u) - h - p \rangle + \langle \mu, g_2(u) - r \rangle, \quad u \in \mathcal{D},$$

и вогнутый двойственный функционал – функционал значений

$$V_{p,r}(\lambda, \mu) \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}} L_{p,r}(u, \lambda, \mu), \quad \lambda \in \mathcal{H}, \quad \mu \in \mathcal{H}_+.$$

Ввиду сильной выпуклости функционала Лагранжа для любой пары $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, где $\mathcal{H}_+ \equiv \equiv \{z \in L_2(X) : z(t) \ge 0$ при п. в. $t \in X\}$, значение $V_{p,r}(\lambda, \mu)$ достигается на единственном элементе $u[\lambda, \mu] \equiv \mathrm{argmin}\{L_{p,r}(u, \lambda, \mu), u \in \mathcal{D}\}$. В силу ограниченности множества $\mathcal{D}$, двойственный функционал $V_{p,r}$, очевидно, определен и конечен для любого элемента $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Справедлива следующая важная для дальнейших построений лемма, доказательство которой может быть проведено, например, точно по схеме доказательства аналогичной леммы 3 в [5].

Лемма 1.2. *Супердифференциал (в смысле выпуклого анализа) функционала* $V_{p,r} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}^1$ *в точке* $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ *определяется по формуле*

$$\partial V_{p,r}(\lambda, \mu) = (g_1(u[\lambda, \mu]) - h - p, g_2(u[\lambda, \mu]) - r)$$

и удовлетворяет в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ *условию Липшица*

$$\left\|\partial V_{p,r}(\lambda^1, \mu^1) - \partial V_{p,r}(\lambda^2, \mu^2)\right\| \le (C/\kappa)\left\|(\lambda^1, \mu^1) - (\lambda^2, \mu^2)\right\|,$$

с некоторой постоянной $C > 0$, *не зависящей от* (λ^1, μ^1), $(\lambda^2, \mu^2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$.

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ЗАДАЧЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для формулировки и доказательства основного результата данного раздела напомним прежде всего понятие нормали (в смысле выпуклого анализа) к выпуклому множеству.

Лемма 2.1. *Для того чтобы ненулевой вектор* $v \in H$, *где* H *– гильбертово пространство, был нормалью (в смысле выпуклого анализа) к выпуклому множеству* $\Omega \subset H$ *в точке* $x \in \overline{\Omega}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* $\langle v, c - x\rangle \le 0 \ \ \forall c \in \overline{\Omega}$. *Множество всех таких нормалей к выпуклому множеству* $\Omega \subset H$ *в точке* $x \in \overline{\Omega}$ *обозначим через* $N_\Omega(x)$. *Если* $f\colon H \longrightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ *– полунепрерывная снизу выпуклая функция, то* $\zeta \in \partial f(x)$, *где* $\partial f(x)$ *– субдифференциал в смысле выпуклого анализа функции* f, *тогда и только тогда, когда* $(\zeta, -1) \in N_{\mathrm{epi}f}(x, f(x))$, *что, в свою очередь, эквивалентно неравенству*

$$\langle(\zeta, -1), (y, r) - (x, f(x))\rangle \le 0 \quad \forall (y, r) \in \mathrm{epi}f.$$

Сформулируем принцип максимума Понтрягина в параметрической задаче $(\mathrm{P}_{p,r})$ с ограничениями, понимаемыми как ограничения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, введя предварительно стандартное обозначение

$$H(t, x, u, \psi, \nu, \lambda(t), \mu(t)) \equiv \langle \psi, A(t)x + B(t)u\rangle - \nu(\langle F(t)x, x\rangle + \langle G(t)u, u\rangle) -$$
$$-\lambda(t)(\langle \varphi_1(t), x\rangle - h(t) - p(t)) - \mu(t)(\varphi_2(t, x) - r(t)), \quad \lambda, \mu \in L_2(X).$$

Здесь и ниже в случае, если функции $\lambda, \mu \in L_2(X)$ рассматриваются на всем временнóм интервале $[0, T]$, то полагается, что $\lambda(t) = \mu(t) = 0$ при $t \in [0, T]\backslash X$, и одновременно для этих функций, рассматриваемых на более широком интервале, сохраняется прежнее обозначение.

Теорема 2.1 (*параметрический принцип максимума*). *Пусть управление* $\overset{0}{u}_{p,r} \in \overset{0}{\mathcal{D}}_{p,r}$ *является оптимальным в задаче* $(\mathrm{P}_{p,r})$, *т.е.* $g_0(\overset{0}{u}_{p,r}) = \beta(p, r)$ *и* $\beta(p, r) < +\infty$, $\overset{0}{\mathcal{D}}_{p,r} \equiv \{u \in \mathcal{D} : g_1(u) = h + p, g_2(u) - r \in \mathcal{H}_-\}$. *Тогда, если* $\zeta \in \partial\beta(p, r)$, *где* $\partial\beta(p, r)$ *– субдифференциал в смысле выпуклого анализа, то для множителей Лагранжа* $\lambda \in \mathcal{H}$, $\mu \in \mathcal{H}_+$, $(\lambda, \mu) = -\zeta$, *при* $\nu = 1$ *выполняются соотношения*

$$\begin{gathered} H(t, x[\overset{0}{u}_{p,r}](t), \overset{0}{u}_{p,r}(t), \psi(t), \nu, \lambda(t), \mu(t)) = \max_{v \in U} H(t, x[\overset{0}{u}_{p,r}](t), v, \psi(t), \nu, \lambda(t), \mu(t)) \\ \text{при п.в.} \quad t \in [0, T], \\ \mu(t)(g_2(t, x[\overset{0}{u}_{p,r}](t)) - r(t)) = 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in X, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\psi(t) = \psi_{p,r}[\overset{0}{u}_{p,r}](t) = \psi_{p,r}[\overset{0}{u}_{p,r}, \nu, \lambda, \mu](t)$, $t \in [0, T]$, *– решение при* $u = \overset{0}{u}_{p,r}$ *сопряженной задачи*

$$\dot\psi = -\nabla_x H(t, x[u](t), u(t), \psi, \nu, \lambda(t), \mu(t)), \quad \psi(T) = 0, \tag{2.2}$$

и при этом $-\zeta = (\lambda, \mu)$ *– вектор Куна–Таккера задачи* $(\mathrm{P}_{p,r})$.

Если же $\zeta \in \partial^\infty\beta(p, r)$, *где* $\partial^\infty\beta(p, r)$ *– сингулярный (асимптотический) субдифференциал, определяемый формулой*

$$\partial^\infty\beta(p, r) \equiv \{(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : ((\lambda, \mu), 0) \in N_{\mathrm{epi}\,\beta}((p, r), \beta(p, r))\},$$

то для множителей Лагранжа $\lambda \in \mathcal{H}$, $\mu \in \mathcal{H}_+$, $(\lambda, \mu) = -\zeta$, *соотношения* (2.1) *выполняются при* $\nu = 0$.

И, наоборот, если $\overset{0}{u}_{p,r} \in \overset{0}{\mathcal{D}}_{p,r}$ *– такое управление, что при некоторых* $\nu > 0$, $\lambda \in \mathcal{H}$, $\mu \in \mathcal{H}_+$ *выполняются соотношения* (2.1), *то этот элемент оптимален в задаче* $(\mathrm{P}_{p,r})$ *и одновременно* $(-\lambda/\nu, -\mu/\nu) \in \partial\beta(p, r)$.

Если же $u^0_{p,r} \in \mathcal{D}^0_{p,r}$ *— такое управление, что при* $\nu = 0$ *и некоторых* $\lambda \in \mathcal{H}$, $\mu \in \mathcal{H}_+$, $(\lambda, \mu) \neq 0$, *выполняются соотношения* (2.1), *то* $(p, r) \in \partial \operatorname{dom} \beta$ *и одновременно* $(-\lambda, -\mu) \in \partial^\infty \beta(p, r)$.

Замечание 2.1. Важно подчеркнуть, что этим классическим принципом максимума "не охватываются" задачи $(\mathrm{P}_{p,r})$, для которых множество $\partial\beta(p, r)$ пусто и одновременно $\partial^\infty\beta(p, r) = \{0\}$, что вполне возможно для задач с ограничениями, задаваемыми операторами с бесконечномерными образами.

Пример 2.1. В качестве иллюстративного примера к замечанию 2.1, рассмотрим простейшую задачу оптимального управления с фазовым ограничением типа равенства, понимаемым как ограничение в $L_2(0, T)$:

$$g_0(u) \equiv \int_0^1 u^2(t)dt \longrightarrow \inf, \quad g_1(u) \equiv x[u](\cdot) = p, \quad p \in L_2[0, 1] - \text{параметр},$$
$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, 1], \tag{2.3}$$
$$u \in \mathcal{D} \equiv \{ v \in L_2(0, 1) : v(t) \in [-1, 1] \text{ п.в. на } [0, 1] \}.$$

Пусть $\hat{u}$ — кусочно-непрерывная функция, имеющая разрывы I рода и принимающая свои значения в интервале $(-1, 1)$. Так как оператор $g_1 : L_2[0, 1] \longrightarrow L_2[0, 1]$ инъективен, то множество $\mathcal{D}^0_{g_1(\hat{u})} \equiv \{u \in \mathcal{D} : g_1(u) = g_1(\hat{u})\}$ состоит лишь из одного элемента $\hat{u}$. Легко показать, что в задаче (2.3) с $p = g_1(\hat{u}_p)$ принцип максимума теоремы 2.1 не выполняется. Действительно, если бы это было не так, то существовали бы неравные нулю одновременно множители Лагранжа $\nu \geq 0$, $\lambda \in L_2[0, 1]$ такие, что выполнялись бы соотношения

$$\nu(v^2 - \hat{u}(t)) + \psi(t)(v - \hat{u}(t)) \geq 0 \quad \forall v \in [-1, 1] \quad \text{п.в. на} \quad [0, 1],$$
$$\dot{\psi} = \lambda(t), \quad \psi(1) = 0, \quad t \in [0, 1], \tag{2.4}$$

означающие, что $\hat{u}(t)$ при $t \in [0, 1]$ есть решение задачи

$$\nu v^2 + \psi(t)v \longrightarrow \min, \quad v \in [-1, 1].$$

Решение же последней задачи является, очевидно, в силу "заглаженности" сопряженной функции ψ непрерывной функцией при $\nu > 0$, т.е. не может совпадать с $\hat{u}(t)$. В случае же $\nu = 0$ это решение может не принимать значения ± 1 только в случае $\psi(t) \equiv 0$, что возможно только для $\lambda(t) \equiv 0$. Так как точки $\hat{u}$ указанного выше вида лежат всюду плотно в $\mathcal{D}$, то приведенными рассуждениями показано, что для плотного в $\operatorname{dom}\beta$ множества точек p в этом примере принцип максимума не выполняется.

Доказательство теоремы 2.1. Доказываем первое утверждение первой части теоремы. В силу леммы 2.1, можно записать

$$\langle((-\lambda, -\mu), -1), ((v, w), s) - ((p, r), \beta(p, r))\rangle \leq 0 \quad \forall((v, w), s) \in \operatorname{epi}\beta, \tag{2.5}$$

или

$$\langle\lambda, v\rangle + \langle\mu, w\rangle + s \geq \langle\lambda, p\rangle + \langle\mu, r\rangle + \beta(p, r) \quad \forall((v, w), s) \in \operatorname{epi}\beta.$$

Отсюда следует, что точка $(u^0_{p,r}, (p, r)) \in \mathcal{D} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ доставляет минимальное значение в задаче

$$\tilde{g}_0(u, v, w) \equiv g_0(u) + \langle\lambda, v\rangle + \langle\mu, w\rangle \longrightarrow \min,$$
$$g_1(u)(t) - h(t) = v(t), \quad g_2(u)(t) \leq w(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in X, \quad (u, (v, w)) \in \mathcal{D} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H}. \tag{2.6}$$

Получим условия оптимальности этой точки в задаче (2.6). Определим с этой целью семейство зависящих от $\gamma > 0$ вспомогательных задач минимизации

$$J^\gamma(u, v, w) \longrightarrow \inf, \quad (u, v, w) \in \mathcal{D} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \tag{2.7}$$

где

$$J^\gamma(u, v, w) \equiv \sqrt{(\tilde{f}^\gamma_m(u, v, w; u^0_{p,r}, p, r))^2 + \rho((g_1(u) - h - v, g_2(u) - w), \mathcal{M}_-)^2},$$

$$\tilde{f}_m^{\gamma}(u, v, w; u_{p,r}^0, p, r) \equiv \max\{0, \tilde{g}_0(u, v, w) - \tilde{g}_0(u_{p,r}^0, p, r) + \gamma\},$$

$$\mathcal{M}_- \equiv \{(v, w) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : v(t) = 0, w(t) \le 0 \text{ при п.в. } t \in X\},$$

$$\rho((v, w), \mathcal{M}_-) \equiv \inf_{(x, y) \in \mathcal{M}} \|(v, w) - (x, y)\|.$$

Так как выполняется очевидное неравенство

$$J^{\gamma}(u_{p,r}^0, p, r) \le \inf_{(u, v, w) \in \mathcal{D} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H}} J^{\gamma}(u, v, w) + \gamma,$$

то, применив в задаче (2.7) к непрерывному на полном метрическом пространстве $\mathcal{D} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ с метрикой $d(u, u') + \|(v, w) - (v', w')\|$, где $d(u, u') \in \operatorname{meas}\{t \in [0, T] : u(t) \ne u'(t)\}$ – метрика Экланда (см. [22]), вариационный принцип Экланда (см. [22]), можем утверждать, что существует элемент $(u^{\gamma}, v^{\gamma}, w^{\gamma}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, который является решением задачи

$$J^{\gamma}(u, v, w) + \sqrt{\gamma}(d(u, u^{\gamma}) + \|(v, w) - (v^{\gamma}, w^{\gamma})\|) \longrightarrow \min, \quad (u, v, w) \in \mathcal{D} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \tag{2.8}$$

и удовлетворяет неравенству

$$\|(u^{\gamma}, v^{\gamma}, w^{\gamma}) - (u_{p,r}^0, p, r)\| \le \sqrt{\gamma}. \tag{2.9}$$

Элементарные выкладки, связанные с подсчетом первой вариации функционала J^{γ} после обычного одноточечного игольчатого варьирования управления u^{γ} и классического варьирования элементов v^{γ}, w^{γ}, позволяют утверждать, что условия оптимальности элемента $(u^{\gamma}, v^{\gamma}, w^{\gamma}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ в задаче (2.8) имеют вид

$$\begin{gathered} H(t, x[u^{\gamma}](t), u^{\gamma}(t), \psi^{\gamma}(t), \nu^{\gamma}, \nu_1^{\gamma}(t), \nu_2^{\gamma}(t)) \ge \\ \ge \max_{v \in U} H(t, x[u^{\gamma}](t), v, \psi^{\gamma}(t), \nu^{\gamma}, \nu_1^{\gamma}(t), \nu_2^{\gamma}(t)) - \delta(\gamma) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0, T], \end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\|\nu^{\gamma}\lambda - \nu_1^{\gamma}\| \le \delta(\gamma), \quad \|\nu^{\gamma}\mu - \nu_2^{\gamma}\| \le \delta(\gamma), \tag{2.11}$$

где $\delta(\gamma) > 0$, $\delta(\gamma) \longrightarrow 0$, $\gamma \longrightarrow 0$, $\psi^{\gamma}(t)$, $t \in [0, T]$, – решение сопряженной задачи (2.2) при $u = u^{\gamma}$, $\nu = \nu^{\gamma}$, $\lambda = \nu_1^{\gamma}$, $\mu = \nu_2^{\gamma}$, и приняты обозначения

$$\nu^{\gamma} \equiv \frac{\max\{0, \tilde{g}_0(u^{\gamma}, v^{\gamma}, w^{\gamma}) - \tilde{g}_0(u_{p,r}^0, p, r) + \gamma\}}{\sqrt{[\tilde{f}_m^{\gamma}(u^{\gamma}, v^{\gamma}, w^{\gamma}; u_{p,r}^0, p, r)]^2 + \rho((g_1(u^{\gamma}) - h - v^{\gamma}, g_2(u) - w^{\gamma}), \mathcal{M}_-)^2}},$$

$$\nu_1^{\gamma} \equiv \frac{\rho((g_1(u^{\gamma}) - h - v^{\gamma}, g_2(u^{\gamma}) - w^{\gamma}), \mathcal{M}_-)}{\sqrt{[\tilde{f}_m^{\gamma}(u^{\gamma}, v^{\gamma}, w^{\gamma}; u_{p,r}^0, p, r)]^2 + \rho((g_1(u^{\gamma}) - h - v^{\gamma}, g_2(u^{\gamma}) - w^{\gamma}), \mathcal{M}_-)^2}} \times$$

$$\times \frac{g_1(u^{\gamma}) - h - v^{\gamma}}{\|(g_1(u^{\gamma}) - h - v^{\gamma}, g_2(u^{\gamma}) - w^{\gamma}) - \mathrm{Pr}_{\mathcal{M}}(g_1(u^{\gamma}) - h - v^{\gamma}, g_2(u^{\gamma}) - w^{\gamma})\|},$$

$$\nu_2^{\gamma} \equiv \frac{\rho((g_1(u^{\gamma}) - h - v^{\gamma}, g_2(u^{\gamma}) - w^{\gamma}), \mathcal{M}_-)}{\sqrt{[\tilde{f}_m^{\gamma}(u^{\gamma}, v^{\gamma}, w^{\gamma}; u_{p,r}^0, p, r)]^2 + \rho((g_1(u^{\gamma}) - h - v^{\gamma}, g_2(u^{\gamma}) - w^{\gamma}), \mathcal{M}_-)^2}} \times$$

$$\times \frac{g_2(u^{\gamma}) - w^{\gamma} - \mathrm{Pr}_{\mathcal{H}}(g_2(u^{\gamma}) - w^{\gamma})}{\|(g_1(u^{\gamma}) - h - v^{\gamma}, g_2(u^{\gamma}) - w^{\gamma}) - \mathrm{Pr}_{\mathcal{M}}(g_1(u^{\gamma}) - h - v^{\gamma}, g_2(u^{\gamma}) - w^{\gamma})\|}.$$

Если $\nu^\gamma = 0$, то $\|(\nu_1^\gamma, \nu_2^\gamma)\|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = 1$, что противоречит неравенствам (2.11) при всех достаточно малых $\gamma > 0$. Если же $\nu^\gamma > 0$, то, очевидно, $\nu^\gamma \longrightarrow 1$ при $\gamma \longrightarrow 0$ и одновременно в силу (2.11) получаем предельные соотношения

$$\nu_1^\gamma \longrightarrow \lambda, \quad \nu_2^\gamma \longrightarrow \mu, \quad \gamma \longrightarrow 0.$$

Поэтому с учетом оценки (2.9) получаем в результате предельного перехода при $\gamma \longrightarrow 0$ в (2.10), (2.11) первое из соотношений (2.1), а в силу устройства элемента ν_2^γ – и соотношение дополняющей нежесткости в (2.1).

Заметим здесь же, что одновременно, в силу линейной выпуклости задачи, нами доказано, что элемент $-\zeta = (\lambda, \mu)$ является и ее вектором Куна–Таккера. Таким образом, первое утверждение первой части теоремы доказано.

В случае второго утверждения первой части имеем вместо неравенства (2.5) неравенство

$$\langle((-\lambda, -\mu), 0), ((v, w), s) - ((p, r), \beta(p, r))\rangle \le 0 \quad \forall((v, w), s) \in \operatorname{epi}\beta$$

и, соответственно, точка $(\overset{0}{u}_{p,r}, (p, r)) \in \mathcal{D}\times\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ доставляет минимальное значение в задаче

$$\begin{gathered}\tilde{g}_0(u, v, w) \equiv \langle\lambda, v\rangle + \langle\mu, w\rangle \longrightarrow \min,\\ g_1(u)(t) - h(t) = v(t), \quad g_2(u)(t) \le w(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in X, \quad (u, (v, w)) \in \mathcal{D}\times\mathcal{H}\times\mathcal{H}.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Повторяя далее практически дословно рассуждения доказательства первого утверждения первой части, получаем, что для множителей Лагранжа $\lambda \in \mathcal{H}$, $\mu \in \mathcal{H}_+$, $(\lambda, \mu) = -\zeta$, соотношения (2.1) выполняются при $\nu = 0$.

Пусть, далее, $\overset{0}{u}_{p,r} \in \overset{0}{\mathcal{D}}_{p,r}$ – такой элемент, что при некоторых $\nu > 0$, $\lambda \in \mathcal{H}$, $\mu \in \mathcal{H}$ выполняются соотношения (2.1). В этом случае в силу неравенства в (2.1) и линейной выпуклости задачи можно утверждать, что эта же точка $\overset{0}{u}_{p,r} \in \overset{0}{\mathcal{D}}_{p,r}$ доставляет минимальное значение в задаче

$$\nu g_0(u) + \langle\lambda, g_1(u) - h - p\rangle + \langle\mu, g_2(u) - r\rangle \longrightarrow \min, \quad u \in \mathcal{D}. \tag{2.13}$$

Тогда с учетом условия дополняющей нежесткости в (2.1) имеем

$$\begin{gathered}\nu g_0(\overset{0}{u}_{p,r}) = \nu g_0(\overset{0}{u}_{p,r}) + \langle\lambda, g_1(\overset{0}{u}_{p,r}) - h - p\rangle + \langle\mu, g_2(\overset{0}{u}_{p,r}) - r\rangle \le\\ \le \nu g_0(u) + \langle\lambda, g_1(u) - h - p\rangle + \langle\mu, g_2(u) - r\rangle \quad \forall u \in \mathcal{D}.\end{gathered} \tag{2.14}$$

Поэтому для всех $u \in \overset{0}{\mathcal{D}}_{p,r}$ можно записать $\nu g_0(\overset{0}{u}_{p,r}) \le \nu g_0(u)$, и, значит, в силу положительности ν имеем $g_0(\overset{0}{u}_{p,r}) \le g_0(u)$ $\forall u \in \overset{0}{\mathcal{D}}_{p,r}$. Заметим, что одновременно из (2.14) вытекает, что

$$\beta(p, r) = g_0(\overset{0}{u}_{p,r}) \le g_0(u) + \langle\lambda/\nu g_1(u) - h - p\rangle + \langle\mu/\nu g_2(u) - r\rangle \quad \forall u \in \mathcal{D},$$

т.е. $(\lambda/\nu, \mu/\nu)$ – вектор Куна–Таккера. Из последнего неравенства выводим также

$$\beta(p, r) + \langle(\lambda/\nu, \mu/\nu), (p, r)\rangle \le g_0(u) + \langle(\lambda/\nu, \mu/\nu), (g_1(u) - h, g_2(u))\rangle \quad \forall u \in \mathcal{D},$$

откуда, в свою очередь, получаем

$$\beta(p, r) - \langle-(\lambda/\nu, \mu/\nu), (p, r)\rangle \le g - \langle-(\lambda/\nu, \mu/\nu), (v, w)\rangle \quad \forall(v, w) \in \operatorname{dom}\beta, \quad g \ge \beta(v, w),$$

или

$$\langle(-(\lambda/\nu, \mu/\nu), -1), ((v, w), g) - ((p, r), \beta(p, r))\rangle \le 0 \quad \forall(v, w)), g) \in \operatorname{epi}\beta,$$

что в силу леммы 2.1 означает справедливость включения $-(\lambda/\nu, \mu/\nu) \in \partial\beta(p, r)$.

Если же $\nu = 0$, то вместо (2.14) имеем неравенство

$$0 \le \langle\lambda, g_1(u) - h - p\rangle + \langle\mu, g_2(u) - r\rangle \quad \forall u \in \mathcal{D}. \tag{2.15}$$

Перепишем (2.15) в виде

$$-\langle-(\lambda, \mu), (p, r)\rangle \le -\langle-(\lambda, \mu), (g_1(u) - h, g_2(u))\rangle \quad \forall u \in \mathcal{D},$$

откуда, как и выше в случае $\nu > 0$, получаем

$$-\langle -(\lambda, \mu), (p, r)\rangle \le -\langle -(\lambda, \mu), (p', r')\rangle \quad \forall (p', r') \in \operatorname{dom}\beta.$$

Отсюда и из леммы 2.1 следует, что $(-\lambda, -\mu) \in N_{\operatorname{dom}\beta}(p, r)$, т.е. $(p, r) \in \partial \operatorname{dom}\beta$ и одновременно $-(\lambda, \mu) \in \partial^{\infty}\beta(p, r)$.

Теорема полностью доказана.

Обозначим далее через Q множество всех значений параметра $(p, r) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, удовлетворяющих условию $\beta(p, r) < +\infty$, для которых задача, двойственная к невозмущенной задаче $(\mathrm{P}_{p,r})$, разрешима, т.е. имеет место равенство

$$\max_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} \min_{u \in \mathcal{D}} L_{p,r}(u, \lambda, \mu) = \min_{u \in \mathcal{D}} \max_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} L_{p,r}(u, \lambda, \mu), \tag{2.16}$$

эквивалентное существованию седловой точки функционала Лагранжа $L_{p,r}$ на множестве $\mathcal{D} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$. Справедлива следующая лемма, доказательство которой проводится точно по схеме доказательства полностью аналогичной леммы 2.4 из [14].

Лемма 2.2. *Включение $(p, r) \in Q$ при условии $\beta(p, r) < +\infty$ имеет место тогда и только тогда, когда не пуст субдифференциал $\partial\beta(p, r)$. Множество Q плотно в* $\operatorname{dom}\beta$.

3. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Опишем регуляризованный двойственный алгоритм (см. [5], [8]–[11]) для задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями $(\mathrm{P}_{p,r})$ и изучим его поведение в зависимости от параметров p, r и дифференциальных свойств функции значений β.

Обозначим через $(\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r})$ единственную в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ точку, дающую на этом множестве максимум функционалу

$$R^{\alpha}_{p,r}(\lambda, \mu) \equiv V_{p,r}(\lambda, \mu) - \alpha\|\lambda\|^2 - \alpha\|\mu\|^2, \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+.$$

Аппроксимация решения $u^0_{p,r}$ задачи $(\mathrm{P}_{p,r})$ при $\alpha \longrightarrow 0$ происходит с помощью регуляризованных элементов $u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}]$.

Ниже нам понадобится следующая вспомогательная полезная лемма, утверждение которой есть частный случай более общего утверждения, содержащегося в следствии 4.3.6(c) из [23].

Лемма 3.1. *Пусть H – гильбертово пространство, $f: H \longrightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ – собственная выпуклая полунепрерывная снизу функция, $\Omega \subset H$ – замкнутое выпуклое множество. Тогда $x \in \Omega$ – точка минимума f на Ω в том и только том, если $0 \in \partial f(x) + N_{\Omega}(x)$.*

Заметим прежде всего, что с учетом лемм 1.2, 3.1 выполняются соотношения

$$g_1(u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}]) - h - p = 2\alpha\lambda^{\alpha}_{p,r}, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} g_2(u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}])(t) - r(t) - 2\alpha\mu^{\alpha}_{p,r}(t) &= 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in \{t \in X : \mu^{\alpha}_{p,r}(t) > 0\}, \\ g_2(u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}])(t) - r(t) &\le 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in \{t \in X : \mu^{\alpha}_{p,r}(t) = 0\}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

откуда следуют равенства

$$\langle \lambda^{\alpha}_{p,r}, g_1(u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}]) - h - p\rangle = 2\alpha\left\|\lambda^{\alpha}_{p,r}\right\|^2, \quad \langle \mu^{\alpha}_{p,r}, g_2(u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}]) - r\rangle = 2\alpha\left\|\mu^{\alpha}_{p,r}\right\|^2. \tag{3.3}$$

Из (3.2) следует также, что если $\mu^{\alpha}_{p,r}(t) > 0$ для некоторого t, принадлежащего множеству полной меры в $\{t \in X : \mu^{\alpha}_{p,r}(t) > 0\}$, то

$$g_2(u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}])(t) - r(t) - 2\alpha\mu^{\alpha}_{p,r}(t) = 0, \quad (g_2(u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}])(t) - r(t))\mu^{\alpha}_{p,r}(t) > 0 \tag{3.4}$$

и, значит, при п.в. $t \in X$ таких, что $g_2(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}])(t) - r(t) < 0$, выполняется равенство $\mu^\alpha_{p,r}(t) = 0$. Из (3.2) и (3.4) получаем одновременно, что

$$\mu^\alpha_{p,r}(t)(g_2(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}])(t) - r(t)) \geq 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in X. \tag{3.5}$$

Одновременно из (3.3) получаем неравенство

$$\langle (g_1(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]) - h - p, g_2(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]) - r), (\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r})\rangle \geq 0. \tag{3.6}$$

Далее, так как

$$L_{p,r}(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}], \lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}) \equiv$$
$$\equiv g_0(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]) + \langle \lambda^\alpha_{p,r}, g_1(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]) - h - p\rangle + \langle \mu^\alpha_{p,r}, g_2(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]) - r\rangle \leq$$
$$\leq g_0(\overset{0}{u}_{p,r}) + \langle \lambda^\alpha_{p,r}, g_1(\overset{0}{u}_{p,r}) - h - p\rangle + \langle \mu^\alpha_{p,r}, g_2(\overset{0}{u}_{p,r}) - r\rangle \leq g_0(\overset{0}{u}_{p,r}),$$

то получаем оценку

$$\langle \lambda^\alpha_{p,r}, g_1(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]) - h - p\rangle + \langle \mu^\alpha_{p,r}, g_2(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]) - r\rangle \leq g_0(\overset{0}{u}_{p,r}) - g_0(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]) \leq$$
$$\leq g_0(\overset{0}{u}_{p,r}) - \min_{u \in \mathcal{D}} g_0(u),$$

из которой, в свою очередь, в силу равенств (3.3) вытекает оценка

$$2\alpha(\|\lambda^\alpha_{p,r}\|^2 + \|\mu^\alpha_{p,r}\|^2) \leq g_0(\overset{0}{u}_{p,r}) - \min_{u \in \mathcal{D}} g_0(u),$$

следствием которой, в свою очередь, является предельное соотношение

$$\alpha(\|\lambda^\alpha_{p,r}\| + \|\mu^\alpha_{p,r}\|) \longrightarrow 0, \quad \alpha \longrightarrow 0. \tag{3.7}$$

Наконец, предельное соотношение (3.7) в совокупности с (3.1) – (3.3) позволяет утверждать, что

$$g_1(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]) - h - p \longrightarrow 0, \quad g_2(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]) - r \leq \phi_\alpha, \quad \|\phi_\alpha\| \longrightarrow 0, \quad \alpha \longrightarrow 0. \tag{3.8}$$

Здесь неравенство $g_2(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]) - r \leq \phi_\alpha$ понимается в смысле упорядоченности по конусу неположительных функций.

Одновременно можно заметить, что справедливо и очевидное предельное соотношение

$$\lim_{\alpha \to +0} V_{p,r}(\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}) = \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_1} V_{p,r}(\lambda, \mu) \leq g_0(\overset{0}{u}_{p,r}). \tag{3.9}$$

Покажем, что из соотношений (3.6) и (3.8) следует, что

$$g_0(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]) \longrightarrow g_0(\overset{0}{u}_{p,r}), \quad \alpha \longrightarrow 0. \tag{3.10}$$

Так как элемент $u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]$ минимизирует функционал $L_{p,r}(u, \lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r})$, $u \in \mathcal{D}$, то

$$g_0(u) - g_0(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]) + \langle \lambda^\alpha_{p,r}, g_1(u) - g_1(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}])\rangle +$$
$$+ \langle \mu^\alpha_{p,r}, g_2(u) - g_2(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}])\rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{D},$$

или, в силу неравенства (3.6),

$$g_0(u) - g_0(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]) + \langle \lambda^\alpha_{p,r}, g_1(u) - h - p\rangle + \langle \mu^\alpha_{p,r}, g_2(u) - r\rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}. \tag{3.11}$$

Подставляя в это неравенство $u = \overset{0}{u}_{p,r}$, получаем

$$g_0(u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]) \leq g_0(\overset{0}{u}_{p,r}).$$

Последнее неравенство в совокупности с соотношениями (3.8) в силу леммы 1.1 (см. предельное соотношение (1.2)) и приводит к предельному соотношению (3.10).

Замечание 3.1. Заметим, что если функционал $V_{p,r}$ имеет на $\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ точку максимума, то, очевидно, процесс регуляризации дает сильную сходимость

$$(\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}) \longrightarrow (\lambda^{0}_{p,r}, \mu^{0}_{p,r}), \quad \alpha \longrightarrow 0, \tag{3.12}$$

где $(\lambda^{0}_{p,r}, \mu^{0}_{p,r}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ – минимальный по норме элемент среди всех элементов, доставляющих максимум функционалу $V_{p,r}$.

Покажем, что одновременно справедлива и слабая сходимость

$$u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}] \longrightarrow u^{0}_{p,r} \quad \text{слабо в} \quad L_2(0, T), \quad \alpha \longrightarrow 0. \tag{3.13}$$

Перепишем для этого неравенство (3.11) в виде

$$g_0(u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}]) \le g_0(u) + \langle \lambda^{\alpha}_{p,r}, g_1(u) - h - p \rangle + \langle \mu^{\alpha}_{p,r}, g_2(u) - r \rangle \quad \forall u \in \mathcal{D}. \tag{3.14}$$

Будем, в силу (3.10), без ограничения общности считать, что

$$u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}] \longrightarrow \bar{u} \quad \text{слабо в} \quad L_2(0, T), \quad \alpha \longrightarrow 0, \quad \bar{u} \in \mathcal{D}. \tag{3.15}$$

Тогда, пользуясь слабой полунепрерывностью снизу сильно выпуклого функционала g_0, выводим из (3.14) $g_0(\bar{u}) \le g_0(u)$ $\forall u \in \mathcal{D}^{0}_{p,r} \equiv \{u \in \mathcal{D} : g_1(u) - h - p = 0, g_2(u) - r \le 0\}$. Так как в то же время благодаря предельному соотношению (3.8) и слабой сходимости (3.15) можно записать, что $\bar{u} \in \mathcal{D}^{0}_{p,r}$, то в силу единственности решения исходной задачи получаем $\bar{u} = u^{0}_{p,r}$, т.е. предельное соотношение (3.13) действительно справедливо.

Так как сильно выпуклый функционал g_0 является субдифференцируемым (в смысле выпуклого анализа) в точках $\mathcal{D}$, то, используя критерий сильной выпуклости субдифференцируемого функционала (см., например, [1, с. 206, упражнение 12]), в совокупности с фактами (3.10) и (3.15) получаем, наконец,

$$\left\| u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}] - u^{0}_{p,r} \right\| \longrightarrow 0, \quad \alpha \longrightarrow 0. \tag{3.16}$$

Таким образом, приведенными выше рассуждениями доказана

Теорема 3.1 (регуляризующий двойственный алгоритм). *Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к* ($\mathrm{P}_{p,r}$) *задача, выполняются соотношения*

$$\alpha \left\| (\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}) \right\| \longrightarrow 0, \quad g_0(u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}]) \longrightarrow g_0(u^{0}_{p,r}), \quad \alpha \longrightarrow 0,$$

$$g_1(u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}]) - h - p \longrightarrow 0, \quad g_2(u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}]) - r \le \kappa(\alpha), \quad \|\kappa(\alpha)\| \longrightarrow 0, \quad \alpha \longrightarrow 0.$$

Одновременно, в силу субдифференцируемости функционала g_0 *(в смысле выпуклого анализа) в точках* $\mathcal{D}$, *справедливо и предельное соотношение*

$$\left\| u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}] - u^{0}_{p,r} \right\| \longrightarrow 0, \quad \alpha \longrightarrow 0.$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная задача, регуляризованный двойственный алгоритм представляет собой регуляризующий алгоритм (*см.* [12]).

Одновременно, в силу леммы 2.2, *можно утверждать, что двойственная к* ($\mathrm{P}_{p,r}$) *задача заведомо является разрешимой и соответственно конструируемое в настоящей теореме семейство двойственных переменных* $(\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r})$, $\alpha \in [0, \alpha_0]$, *является ограниченным для любой пары* $(p, r) \in Q$, *т.е. для всех точек* (p, r) *из плотного в* $\operatorname{dom}\beta$ *множества.*

Замечание 3.2. Легко сообразить, что если вместо функционала

$$R^{\alpha}_{p,r}(\lambda, \mu) \equiv V_{p,r}(\lambda, \mu) - \alpha\|\lambda\|^2 - \alpha\|\mu\|^2, \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+,$$

использовать функционал

$$R^{\alpha}_{p,r}(\lambda, \mu) \equiv V_{p,r}(\lambda, \mu) - \alpha\|\lambda - \bar{\lambda}\|^2 - \alpha\|\mu - \bar{\mu}\|^2, \quad (\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+,$$

где $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ – произвольная фиксированная точка, то все утверждения последней теоремы останутся в силе, однако в случае, когда функционал $V_{p,r}$ достигает максимума на $\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, вместо сходимости (3.12), в которой $(\lambda^0_{p,r}, \mu^0_{p,r})$ – элемент, минимальный по норме среди всех элементов, максимизирующих функционал $V_{p,r}$, имеет место сходимость

$$(\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}) \longrightarrow (\bar{\lambda}^0_{p,r}, \bar{\mu}^0_{p,r}), \quad \alpha \longrightarrow 0,$$

где $(\bar{\lambda}^0_{p,r}, \bar{\mu}^0_{p,r})$ – элемент, минимизирующий на множестве всех элементов максимизирующих функционал $V_{p,r}$, функционал квадрата нормы разности $\|(\lambda, \mu) - (\bar{\lambda}, \bar{\mu})\|^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

4. ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

Итак, в зависимости от того, имеет или нет решение двойственная к $(P_{p,r})$ задача, сконструированный выше двойственный алгоритм ведет себя двояко. В случае существования решения двойственной задачи генерируемое в соответствии с алгоритмом семейство двойственных переменных $(\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r})$, $\alpha \longrightarrow 0$, ограничено в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$. Если же такого решения нет, то нормы элементов этого семейства неограниченно возрастают при $\alpha \longrightarrow 0$. Однако в обоих случаях, как будет показано в данном разделе, “параллельно” с построением минимизирующего приближенного решения в смысле Варги алгоритм двойственной регуляризации ведет и к соответствующим необходимым условиям – так называемому регуляризованному принципу Лагранжа в недифференциальной форме в задаче $(P_{p,r})$ (в случае задачи математического программирования в гильбертовом пространстве регуляризованный принцип Лагранжа в недифференциальной форме получен в [14]) и, соответственно, регуляризованному принципу максимума Понтрягина. Главное отличие последних от их классических аналогов заключается в том, что, во-первых, они записываются в терминах минимизирующих последовательностей (а не оптимальных управлений), а во-вторых, выполняются в любой задаче $(P_{p,r})$, имеющей решение. В то же время, как известно (см., в частности, иллюстративный пример 2.1), эти классические аналоги в задачах $(P_{p,r})$ с ограничениями в $\mathcal{H} = L_2(X)$ могут не быть справедливыми.

Рассмотрим сначала случай, когда субдифференциал $\partial\beta(p, r)$ не пуст. В этом случае, в соответствии с утверждением леммы 2.2, функционал $V_{p,r}$ достигает максимума. Так как элемент $u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]$ минимизирует функционал Лагранжа $L_{p,r}(u, \lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r})$, $u \in \mathcal{D}$, то справедлив следующий принцип максимума при $\nu = 1$:

$$\begin{gathered} H(t, x[u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]](t), u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}](t), \psi^\alpha_{p,r}(t), \nu, \lambda^\alpha_{p,r}(t), \mu^\alpha_{p,r}(t)) = \\ = \max_{v \in U} H(t, x[u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]](t), v, \psi^\alpha_{p,r}(t), \nu, \lambda^\alpha_{p,r}(t), \mu^\alpha_{p,r}(t)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0, T], \end{gathered} \tag{4.1}$$

где $\psi^\alpha_{p,r}(t)$, $t \in [0, T]$, – абсолютно непрерывное решение сопряженной задачи (2.2) при $u = u[\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}]$, $\nu = \nu$, $\lambda = \lambda^\alpha_{p,r}$, $\mu = \mu^\alpha_{p,r}$.

В соответствии с (3.12) и (3.16), так как в этом случае функционал $V_{p,r}$ достигает максимума, имеем предельные соотношения

$$(\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r}) \longrightarrow (\lambda_{p,r}, \mu_{p,r}), \quad u[(\lambda^\alpha_{p,r}, \mu^\alpha_{p,r})] \longrightarrow u^0_{p,r}, \quad \alpha \longrightarrow 0,$$

где $(\lambda_{p,r}, \mu_{p,r})$ – минимальный по норме элемент, максимизирующий функционал $V_{p,r}$ на $\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$. Поэтому, переходя к пределу в (4.1) при $\alpha \longrightarrow 0$, получаем при $\nu = 1$

$$\begin{gathered} H(t, x[u^0_{p,r}](t), u^0_{p,r}(t), \psi_{p,r}(t), \nu, \lambda_{p,r}(t), \mu_{p,r}(t)) = \max_{v \in U} H(t, x[u^0_{p,r}](t), v, \psi_{p,r}(t), \nu, \lambda_{p,r}(t), \mu_{p,r}(t)) \\ \text{при п.в.} \quad t \in [0, T], \end{gathered} \tag{4.2}$$

где $\psi_{p,r}(t)$, $t \in [0, T]$, – абсолютно непрерывное решение сопряженной задачи (2.2) при $u = u^0_{p,r}$, $\nu = \nu$, $\lambda = \lambda_{p,r}$, $\mu = \mu_{p,r}$.

Одновременно, поскольку в силу (3.4) в случае $\mu^{\alpha}_{p,r}(t) > 0$ с необходимостью выполняется неравенство $g_2(u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}])(t) - r(t) > 0$, то если $g_2(u^0_{p,r})(t) - r(t) < 0$, тогда при достаточно малых α имеем $g_2(u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}])(t) - r(t) < 0$ и, значит, с необходимостью при таких t и при тех же α имеем $\mu^{\alpha}_{p,r}(t) = 0$ и, как следствие, $\mu_{p,r}(t) = 0$. Последними рассуждениями показано, что $\mu_{p,r}(t)[g_2(u^0_{p,r})(t) - r(t)] = 0$, $t \in X$. Таким образом, алгоритм двойственной регуляризации естественным путем привел и к классическим необходимым условиям – принципу максимума в задаче $(P_{p,r})$ в случае, когда субдифференциал $\partial\beta(p, r)$ не пуст или, другими словами, когда функционал $V_{p,r}$ достигает максимума. При этом элемент $u^0_{p,r}$ доставляет минимальное значение функционалу Лагранжа $L_{p,r}(u, \lambda_{p,r}, \mu_{p,r})$, $u \in \mathcal{D}$, а в качестве множителей Лагранжа $(\lambda_{p,r}, \mu_{p,r})$ в этом принципе максимума может быть, в соответствии с замечанием 3.2, взята любая пара множителей (λ, μ), на которой достигает максимума функционал значений $V_{p,r}$.

Заметим здесь же, что одновременно с доказательством принципа максимума, в силу линейной выпуклости задачи, мы, по сути дела, получаем, что любой такой элемент $(\lambda_{p,r}, \mu_{p,r})$ является и вектором Куна–Таккера задачи $(P_{p,r})$ (подробности см. в доказательстве леммы 2.4 в [14]). Рассуждая далее, например, так, как и при доказательстве второй части теоремы 2.1, можно утверждать, что $-(\lambda_{p,r}, \mu_{p,r}) \in \partial\beta(p, r)$.

Рассмотрим далее случай, когда субдифференциал $\partial\beta(p, r)$ пуст. При этом мы находимся в ситуации, когда заведомо не имеет места компактность единичной сферы пространства $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Тем не менее, так как элемент $u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}]$ доставляет минимальное значение функционалу Лагранжа $L_{p,r}(u, \lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r})$, $u \in \mathcal{D}$, то выполняются соотношения принципа максимума (4.1), а в силу (3.4), (3.5) – и соотношения

$$\begin{gathered}\lambda^{\alpha}_{p,r}(t)(g_1(u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}])(t) - h(t) - p(t)) \geq 0,\\ \mu^{\alpha}_{p,r}(t)(g_2(u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}])(t) - r(t)) \geq 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in X.\end{gathered} \tag{4.3}$$

С другой стороны, если некоторые элементы u^k, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют при $\nu = 1$ и при некоторых $(\lambda^k, \mu^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ соотношениям

$$\begin{gathered}H(t, x[u^k](t), u^k(t), \psi^k(t), \nu, \lambda^k(t), \mu^k(t)) =\\ = \max_{v \in U} H(t, x[u^k](t), v, \psi^k(t), \nu, \lambda^k(t), \mu^k(t)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0, T],\end{gathered} \tag{4.4}$$

где $\psi^k(t)$, $t \in [0, T]$, – абсолютно непрерывное решение сопряженной задачи (2.2) при $u = u^k$, $\nu = \nu$, $\lambda = \lambda^k$, $\mu = \mu^k$,

$$\int_X \lambda^k(t)[g_1(u^k)(t) - h(t) - p(t)]dt \geq 0, \quad \int_X \mu^k(t)[g_2(u^k)(t) - r(t)]dt \geq 0 \tag{1.5}$$

и удовлетворяют ограничениям задачи “в пределе”

$$g_1(u^k) - h - p \longrightarrow 0, \quad g_2(u^k) - r \leq \phi_k, \quad \|\phi_k\| \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty,$$

то, в силу линейной выпуклости задачи $(P_{p,r})$, из соотношения максимума (4.4) следует неравенство

$$g_0(u) - g_0(u^k) + \langle \lambda^k, g_1(u) - g_1(u^k)\rangle + \langle \mu^k, g_2(u) - g_2(u^k)\rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{D},$$

из которого, рассуждая, в силу неравенств (4.5), так же, как и при получении предельного соотношения (3.10), выводим, что последовательность u^k, $k = 1, 2, \ldots$, есть минимизирующее приближенное решение в задаче $(P_{p,r})$.

Поделим соотношение максимума (4.1) на $\|(\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r})\|$ (считаем без ограничения общности эту величину не равной нулю) и перейдем к пределу при $\alpha \longrightarrow 0$. Введя обозначения $\bar{\nu}^{\alpha} \equiv$

$\equiv 1/\|(\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r})\|$, $\bar{\lambda}^{\alpha} \equiv \lambda^{\alpha}_{p,r}/\|(\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r})\|$, $\bar{\mu}^{\alpha} \equiv \mu^{\alpha}_{p,r}/\|(\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r})\|$, считая без ограничения общности в силу слабой компактности шара в гильбертовом пространстве, что

$$\bar{\nu}^{\alpha} \longrightarrow \nu, \quad \bar{\lambda}^{\alpha} \longrightarrow \lambda_{p,r} \quad \text{слабо в} \quad \mathcal{H}, \quad \bar{\mu}^{\alpha} \longrightarrow \mu_{p,r} \quad \text{слабо в} \quad \mathcal{H}, \quad \nu \ge 0, \quad \mu_{p,r} \ge 0,$$

и пользуясь доказанным выше в этом случае предельным соотношением $u[\lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r}] - \overset{0}{u}_{p,r} \longrightarrow 0$, $\alpha \longrightarrow 0$, после указанного предельного перехода получаем

$$H(t, x[\overset{0}{u}_{p,r}](t), \overset{0}{u}_{p,r}(t), \psi_{p,r}(t), \nu, \lambda_{p,r}(t), \mu_{p,r}(t)) = \max_{v \in U} H(t, x[\overset{0}{u}_{p,r}](t), v, \psi_{p,r}(t), \nu, \lambda_{p,r}(t), \mu_{p,r}(t))$$
$$\text{при п.в.} \quad t \in [0, T],$$

где $\psi_{p,r}(t)$, $t \in [0, T]$, определяется так же, как и в (4.2), а предельный набор множителей $(\nu, \lambda_{p,r}, \mu_{p,r})$ может быть и вырожденным. Естественно, при этом, рассуждая, как и выше, в силу (3.4), (3.5) можно показать, что выполняется и предельное соотношение дополняющей нежесткости: $\mu_{p,r}(t)[g_2(\overset{0}{u}_{p,r})(t) - r(t)] = 0$ при п.в. $t \in X$.

Таким образом, алгоритм двойственной регуляризации естественным путем привел и к классическим необходимым условиям – принципу максимума в задаче $(P_{p,r})$, который в общей ситуации может быть и вырожденным. При этом важным является то, что мы аппроксимировали решение $\overset{0}{z}_{p,r}$ задачи $(P_{p,r})$ точками, доставляющими минимальное значение функциям Лагранжа $L_{p,r}(u, \lambda^{\alpha}_{p,r}, \mu^{\alpha}_{p,r})$, $u \in \mathcal{D}$.

Предположим далее, что в рассматриваемой ситуации $\partial\beta(p, r) = \emptyset$, а сингулярный (асимптотический) субдифференциал $\partial^{\infty}\beta(p, r)$ содержит ненулевой элемент. В этом случае воспользуемся известным представлением для субдифференциала выпуклого полунепрерывного снизу функционала (см., например, [24], [25, с. 82])

$$\partial^{\infty}\beta(p, r) = \limsup_{(p', r') \xrightarrow{\beta} (p, r),\, t \downarrow 0} t\partial\beta(p', r') \equiv$$
$$\equiv \left\{ w - \lim_{k \to \infty} (t_k \zeta_k) : t_k \downarrow 0, \zeta_k \in \partial\beta(p^k, r^k) \xrightarrow{\beta} (p, r) \right\},$$

где символ $(p', r') \xrightarrow{\beta} (p, r)$ означает, что $((p', r'), \beta(p', r')) \longrightarrow ((p, r), \beta(p, r))$, а символ $t \downarrow 0$ означает сходимость к нулю справа.

Умножим соотношение максимума (4.2) при $\nu = 1$ на $s > 0$:

$$\begin{aligned} &H(t, x[\overset{0}{u}_{p,r}](t), \overset{0}{u}_{p,r}(t), \psi_{p,r}(t), s, s\lambda_{p,r}(t), s\mu_{p,r}(t)) = \\ &= \max_{v \in U} H(t, x[\overset{0}{u}_{p,r}](t), v, \psi_{p,r}(t), s, s\lambda_{p,r}(t), s\mu_{p,r}(t)) \end{aligned} \tag{4.6}$$

и поступим следующим образом. Для любой слабой предельной точки вида

$$(\tilde{\lambda}_{p,r}, \tilde{\mu}_{p,r}) = w - \lim_{k \to \infty, (p^k, r^k) \xrightarrow{\beta} (p, r), s_k \downarrow 0} s_k(\lambda^k_{p^k, r^k}, \mu^k_{p^k, r^k})$$

с $(\lambda^k_{p^k, r^k}, \mu^k_{p^k, r^k}) \in \partial\beta(p^k, r^k)$ можно записать после очевидного предельного перехода в (4.6) при $(p, r) = (p^k, r^k)$, $(\lambda_{p,r}, \mu_{p,r}) = (\lambda^k_{p^k, r^k}, \mu^k_{p^k, r^k})$, $s = s_k$

$$H(t, x[\overset{0}{u}_{p,r}](t), \overset{0}{u}_{p,r}(t), \psi_{p,r}(t), 0, \tilde{\lambda}_{p,r}(t), \tilde{\mu}_{p,r}(t)) = \max_{v \in U} H(t, x[\overset{0}{u}_{p,r}](t), v, \psi_{p,r}(t), 0, \tilde{\lambda}_{p,r}(t), \tilde{\mu}_{p,r}(t)). \tag{4.7}$$

Одновременно, в силу условия дополняющей нежесткости,

$$\mu_{p^k, r^k}(t)[g_2(\overset{0}{u}_{p^k, r^k})(t) - r^k(t)] = 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in X$$

в результате предельного перехода при $k \longrightarrow \infty$ и предельного соотношения $u^0_{p^k, r^k} \longrightarrow u^0_{p,r}$, $k \longrightarrow \infty$, получаем

$$\tilde{\mu}_{p,r}(t)[g_2(u^0_{p,r})(t) - r(t)] = 0, \quad t \in X,$$

что в совокупности с (4.7) и означает выполнимость нерегулярного невырожденного принципа максимума. При этом мы аппроксимировали решение $u^0_{p,r}$ задачи $(P_{p,r})$ точками $u^0_{p^k,r^k}$, доставляющими минимальное значение функциям Лагранжа

$$L_{p^k,r^k}(u, \lambda_{p^k,r^k}, \mu_{p^k,r^k}), \quad u \in \mathcal{D}.$$

Итак, алгоритм двойственной регуляризации естественным образом приводит в задаче $(P_{p,r})$ к регуляризованному принципу Лагранжа в недифференциальной форме и, соответственно, к регуляризованному принципу максимума Понтрягина, в которых оказываются "задействованными" все точки $(p, r) \in \operatorname{dom}\beta$, в том числе и такие, для которых одновременно субдифференциал $\partial\beta(p, r)$ пуст, а асимптотический субдифференциал $\partial^\infty\beta(p, r)$ состоит из одного нуля (см. пример 2.1). Главное отличие последних от их классических аналогов заключается в том, что, во-первых, они записываются в терминах минимизирующих последовательностей (а не оптимальных управлений), а во-вторых, выполняются в любой задаче $(P_{p,r})$, имеющей решение.

Суммируя полученные выше в этом разделе результаты, можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 4.1 (регуляризованные принцип Лагранжа в недифференциальной форме и принцип максимума). *Если субдифференциал $\partial\beta(p, r)$ не пуст, то найдется пара двойственных переменных $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ такая, что*

$$(\lambda, \mu) \in \operatorname{argmax}\{V_{p,r}(\lambda', \mu') : (\lambda', \mu') \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+\},$$

а решение $u^0_{p,r}$ задачи $(P_{p,r})$ доставляет минимальное значение функционалу Лагранжа $L_{p,r}(u, \lambda, \mu)$, $u \in \mathcal{D}$ и удовлетворяет, естественно, регулярному принципу максимума Понтрягина теоремы 2.1.

Если субдифференциал $\partial\beta(p, r)$ пуст, мы можем в общей ситуации лишь утверждать, что найдется последовательность (λ^k, μ^k), $k = 1, 2, \ldots$, двойственных переменных такая, что

$$V_{p,r}(\lambda^k, \mu^k) \longrightarrow \beta(p, r) = \sup_{(\lambda', \mu') \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} V_{p,r}(\lambda', \mu'), \quad k \longrightarrow \infty,$$

а точки u^k, $k = 1, 2, \ldots$, минимизирующие функционал Лагранжа $L_{p,r}(u, \lambda^k, \mu^k)$, $u \in \mathcal{D}$, сходятся при $k \longrightarrow \infty$ к решению $u^0_{p,r}$ задачи $(P_{p,r})$. Одновременно выполняются соотношения регуляризованного принципа максимума

$$\begin{gathered} H(t, x[u^k](t), u^k(t), \psi^k(t), 1, \lambda^k(t), \mu^k(t)) = \\ = \max_{v \in U} H(t, x[u^k](t), v, \psi^k(t), 1, \lambda^k(t), \mu^k(t)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0, T], \end{gathered} \tag{4.8}$$

где $\psi^k(t)$, $t \in [0, T]$, — абсолютно-непрерывное решение сопряженной задачи (2.2) *при $u = u^k$, $\nu = 1$, $\lambda = \lambda^k$, $\mu = \mu^k$ с условиями*

$$\lambda^k(t)[g_1(u^k)(t) - h(t) - p(t)] \ge 0, \quad \mu^k(t)[g_2(u^k)(t) - r(t)] \ge 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in X, \tag{4.9}$$

а следовательно, и с условиями

$$\int_X \lambda^k(t)[g_1(u^k)(t) - h(t) - p(t)]dt \ge 0, \quad \int_X \mu^k(t)[g_2(u^k)(t) - r(t)]dt \ge 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in X. \tag{4.10}$$

При этом элемент $u^0_{p,r}$ в совокупности с любой слабой предельной точкой, возможно вырожденной $(0, \lambda, \mu)$ нормированной последовательности

$$\xi^k \equiv (1/\|(\lambda^k, \mu^k)\|, \lambda^k/\|(\lambda^k, \mu^k)\|, \mu^k/\|(\lambda^k, \mu^k)\|)$$

удовлетворяет соотношениям нерегулярного принципа максимума теоремы 2.1, *возможно вырожденного.*

Обратно, если последовательность u^k, $k = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяет соотношениям* (4.8), (4.10) *при некоторых* $(\lambda^k, \mu^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ *и удовлетворяет ограничениям задачи "в пределе"*

$$g_1(u^k) - h - p \longrightarrow 0, \quad g_2(u^k) - r \le \phi_k, \quad \|\phi_k\| \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty,$$

то она является минимизирующим приближенным решением в задаче $(\mathrm{P}_{p,r})$.

Если же в случае $\partial\beta(p, r) = \emptyset$ *сингулярный (асимптотический) субдифференциал* $\partial^\infty\beta(p, r)$ *состоит не из одного нуля, то найдутся последовательность* (p^k, r^k), $k = 1, 2, \ldots$, $(p^k, r^k) \longrightarrow (p, r)$, $k \longrightarrow \infty$, *последовательность двойственных переменных* (λ^k, μ^k), $k = 1, 2, \ldots$, *такие, что* $V_{p^k, r^k}(\lambda^k, \mu^k) \longrightarrow \beta(p, r)$, $k \longrightarrow \infty$, *а минимизирующие функционал Лагранжа*

$$L_{p^k, r^k}(u, \lambda^k, \mu^k), \quad u \in \mathcal{D},$$

точки u^k, $k = 1, 2, \ldots$, *сходятся при* $k \longrightarrow \infty$ *к решению* $\overset{0}{u}_{p,r}$ *задачи* $(\mathrm{P}_{p,r})$. *При этом элемент* $\overset{0}{u}_{p,r}$ *в совокупности с любой существующей в этом случае ненулевой слабой предельной точкой* (λ, μ) *последовательности* $t_k(\lambda^k, \mu^k)$, $t_k \downarrow 0$, $k \longrightarrow \infty$, *удовлетворяет соотношениям невырожденного принципа максимума теоремы* 2.1 *при* $\nu = 0$.

Итак, важнейшим свойством алгоритма двойственной регуляризации является то, что он вырабатывает последовательность u^k, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющую соотношениям регуляризованного принципа максимума Понтрягина (4.8), (4.9), которая является минимизирующим приближенным решением в задаче $(\mathrm{P}_{p,r})$. С другой стороны, если последовательность u^k, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет этим соотношениям и удовлетворяет ограничениям задачи "в пределе"

$$g_1(u^k) - h - p \longrightarrow 0, \quad g_2(u^k) - r \le \phi_k, \quad \|\phi_k\| \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty,$$

то, во-первых, в силу линейной выпуклости задачи $(\mathrm{P}_{p,r})$, из соотношения максимума (4.8) следует неравенство

$$g_0(u) - g_0(u^k) + \langle \lambda^k, g_1(u) - g_1(u^k) \rangle + \langle \mu^k, g_2(u) - g_2(u^k) \rangle \ge 0 \quad \forall u \in \mathcal{D},$$

из которого, рассуждая, в силу неравенств (4.10), так же, как и при получении предельного соотношения (3.10), выводим, что последовательность u^k, $k = 1, 2, \ldots$, есть минимизирующее приближенное решение в задаче $(\mathrm{P}_{p,r})$. При этом обычный принцип максиума для элемента $\overset{0}{u}_{p,r}$ в задаче $(\mathrm{P}_{p,r})$ с ограничениями, понимаемыми в пространстве $\mathcal{H} = L_2(X)$, может не быть верным. Сформулированное обстоятельство является важным с точки зрения применимости регуляризованного принципа максимума Понтрягина для анализа и решения некорректных обратных задач. Для иллюстрации вернемся к иллюстративному примеру из замечания 2.1, который нам будет удобно трактовать как обратную некорректную задачу поиска решения простейшего дифференциального уравнения по наблюдению его траектории.

Пример 4.1. Рассматриваем простейшую обратную задачу поиска возмущающего воздействия (управления), приведшего к наблюдению $p(t)$ (для простоты ошибку наблюдения считаем равной нулю) траектории $x(t)$, $0 \le t \le 1$, для задачи Коши

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

с ограничением на управляющие воздействия $u(t) \in [-1, 1]$. Естественно, эта обратная задача эквивалентна задаче минимизации (2.3) с поточечным фазовым ограничением типа равенства, понимаемым как ограничение в $L_2(0, 1)$:

$$g_0(u) \equiv \int_0^1 u^2(t)dt \longrightarrow \inf, \quad g_1(u) \equiv x[u](\cdot) = p, \quad p \in L_2[0, 1] - \text{параметр}, \tag{4.11}$$

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad u \in \mathcal{D} \equiv \{ v \in L_2(0, 1) : v(t) \in [-1, 1] \ \text{п.в. на} \ [0, 1] \}.$$

Как показано при анализе примера 2.1, классический принцип максимума в этой задаче при $p = g_1(\hat{u})$, где $\hat{u}$ – кусочно-непрерывная функция, имеющая разрывы I рода и принимающая свои значения в интервале $(-1, 1)$, не верен. В то же время, алгоритм двойственной регуляризации вырабатывает в ней сходящееся к $\hat{u}$ в метрике $L_2(0, 1)$ минимизирующее приближенное решение и, наоборот, любая последовательность возмущений-управлений в этой задаче, приводящая в пределе к данному наблюдению или, другими словами, удовлетворяющая в пределе фазовому ограничению-равенству, для которой выполняются соответствующие соотношения регуляризованного принципа максимума, сходится к элементу $\hat{u}$.

Возьмем для определенности $\hat{u}(t) = \{1/2,\ 0 \le t \le 1/2;\ -1/2,\ 1/2 < t \le 1\}$. Элементарный подсчет приводит к $\hat{p}(t) \equiv x[\hat{u}](t) = \{1/2t,\ 0 \le t \le 1/2;\ 1/2(1-t),\ 1/2 < t \le 1\}$. Регуляризованный принцип максимума в этом примере приводит к тому, что элементы $u^k(t)$, $0 \le t \le 1$, $k = 1, 2, \ldots$, минимизирующего приближенного решения удовлетворяют соотношениям (см. пример 2.1)

$$v^2 + \psi^k(t)v \ge (u^k)^2(t) + \psi^k(t)u^k(t) \quad \forall v \in [-1, 1] \quad \text{при п.в.} \quad t \in (0, 1), \tag{4.12}$$

$$\dot{\psi}^k = \lambda^k(t), \quad \psi^k(1) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

$$\|x[u^k] - \hat{p}\|_{2,(0,1)} \longrightarrow 0, \quad \int_0^1 \lambda^k(t)(x[u^k](t) - \hat{p}(t))dt \ge 0, \quad k \longrightarrow \infty. \tag{4.13}$$

Тогда можем записать

$$\psi^k(t) = \int_t^1 \lambda^k(s)ds, \quad u^k(t) = \begin{cases} -1/2\psi^k(t), & -1 \le -1/2\psi^k(t) \le 1, \\ 1, & -1/2\psi^k(t) \ge 1, \\ -1, & -1/2\psi^k(t) \le -1. \end{cases}$$

Пусть функциональный множитель $\lambda^k \in L_2(0, 1)$ задается формулой

$$\lambda^k(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1/2 - 1/k, \\ -2k, & 1/2 - 1/k \le t \le 1/2, \\ 0, & 1/2 \le t \le 1 - 1/k, \\ k, & 1 - 1/k \le t \le 1. \end{cases}$$

При этом, очевидно, $\|\lambda^k\|_{2,(0,1)} \longrightarrow \infty$, $k \longrightarrow \infty$. Непосредственные вычисления в силу (4.12) дают

$$-1/2\psi^k(t) = \begin{cases} 1/2, & 0 \le t \le 1/2 - 1/k, \\ -kt + 1/2(k-1), & 1/2 - 1/k \le t \le 1/2, \\ -1/2, & 1/2 \le t \le 1 - 1/k, \\ k/2(t-1), & 1 - 1/k \le t \le 1, \end{cases}$$

и, значит, $u^k(t) = -1/2\psi^k(t)$, $0 \le t \le 1$,

$$x[u^k](t) = \begin{cases} 1/2t, & 0 \le t \le 1/2 - 1/k, \\ -k/2t^2 + 1/2(k-1)t - k/8 - 1/(2k) + 1/4, & 1/2 - 1/k \le t \le 1/2, \\ -1/2t + 1/2 - 1/(2k), & 1/2 \le t \le 1 - 1/k, \\ k/4t^2 - k/2t + k/4 - 1/(4k), & 1 - 1/k \le t \le 1. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что выполняются и соотношения (4.13). Таким образом, последовательность u^k, $k = 1, 2, \ldots$, в силу регуляризованного принципа максимума теоремы 4.1 сходится в $L_2(0, 1)$ к выбранному конкретному решению $\hat{u}$ исходной обратной задачи. При этом, как показано выше, принцип максимума теоремы 2.1 в задаче минимизации (4.11) не выполняется. Заметим в заключение, что в силу простоты выбранного конкретного примера легко показать, что соотношения (4.12), (4.13) можно “замкнуть” и получить “классический” принцип максимума в задаче (4.11) с поточечным фазовым ограничением типа равенства, понимаемым как ограничение в пространстве $C[0, 1]$. Соответствующие соотношения имеют вид

$$v^2 + \psi(t)v \ge \hat{u}^2(t) + \psi(t)\hat{u}(t) \quad \forall v \in [-1, 1] \quad \text{при п.в.} \quad t \in (0, 1), \quad \psi(t) = \int_t^1 d\lambda, \quad t \in [0, 1],$$

где λ — знакопеременная мера Радона: $\lambda = -2\delta_{1/2} + \delta_1$, δ_t — мера Дирака, сосредоточенная в точке t.

5. ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И КЛАССИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ЗАДАЧЕ С ПОТОЧЕЧНЫМИ ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВА

Как уже отмечалось выше, важнейшее преимущество рассмотрения ограничений задачи $(P_{p,r})$, как ограничений в $L_2(X)$, заключается прежде всего в том, что это приводит к устойчивому к ошибкам исходных данных алгоритму ее решения. В то же время при определенных условиях на исходные данные эти ограничения можно, естественно, трактовать и как ограничения в $L_\infty(X)$ $(p, r \in L_\infty(X))$ и $C(X)$ $(\varphi_1, h, p, r \in C(X))$. При этом, в силу компактности в $C[0, T]$ множества всех траекторий $\{x[u] \in C[0, T] : u \in \mathcal{D}\}$, понятия оптимальности управления в указанных частных случаях эквивалентны понятию оптимальности для случая, когда "те же" ограничения рассматриваются в $L_2(X)$.

При этом, например, в случае $\varphi_1, h, p, r \in C(X)$, когда ограничения понимаются в $C(X)$, метод двойственной регуляризации, "работающий с ограничениями в $L_2(X)$", приводит к приближенным решениям и в задаче с ограничениями, понимаемыми в пространстве $C(X)$. В этой ситуации, когда субдифференциал $\partial\beta(p, r)$ пуст, результат теоремы 4.1 может быть в ряде случаев уточнен.

Рассмотрим, например, задачу $(P_{p,r})$ без ограничения-равенства, т.е. задачу с поточечным фазовым ограничением типа неравенства $(P_{p,r}) = (P_r)$ с $r \in C(X)$. Тогда, в соответствии с теоремой 4.1, для этой задачи найдется такая неограниченная в норме $\mathcal{H} = L_2(X)$ последовательность $\mu^k \in \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \ldots$, что

$$V_r(\mu^k) \longrightarrow \beta(r) = \sup_{\mu' \in \mathcal{H}_+} V_r(\mu'), \quad k \longrightarrow \infty,$$

а минимизирующие функционал Лагранжа $L_r(u, \mu^k)$, $u \in \mathcal{D}$, точки u^k, $k = 1, 2, \ldots$, сходятся при $k \longrightarrow \infty$ к решению u_r^0 задачи (P_r). При этом неограниченную последовательность $\mu^k \in \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \ldots$, после определенной естественной перенормировки мы "погрузим" в пространство $C^*(X)$, в $*$-слабой метрике которого ее любая предельная точка будет уже соответствующим ограничению-неравенству, понимаемому как ограничение в пространстве $C(X)$, множителем Лагранжа в задаче $(P_{p,r})$.

Образуем с этой целью нормированную в пространстве $\mathbb{R}^1 \times L_1(X)$ последовательность множителей Лагранжа

$$(1/n^k, \mu^k/n^k) \in \mathbb{R}^1_+ \times \mathcal{H}_+ \subset \mathbb{R}^1_+ \times L_{1+}(X), \quad n^k \equiv 1 + \|\mu^k\|_{1,X}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\mathbb{R}^1_+ \equiv \{x \in \mathbb{R}^1 : x \ge 0\}$, $L_{1+}(X) \equiv \{y \in L_1(X) : y(t) \ge 0$ при п. в. $t \in X\}$.

Введем сосредоточенную на X неотрицательную меру Радона $\eta^k \in C^*(X)$ посредством равенства

$$\eta^k(E) = \int_E \mu^k/n^k dt, \quad E \subset X \text{ — борелево множество}, \quad 1/n^k + |\eta^k| = 1.$$

Тогда, так как, в соответствии с теоремой 4.1, управление u^k удовлетворяет принципу максимума Понтрягина

$$\begin{aligned} &H(t, x[u^k](t), u^k(t), \psi^k(t), 1/n^k, 1/n^k\mu^k(t)) = \\ &= \max_{v \in U} H(t, x[u^k](t), v, \psi^k(t), 1/n^k, 1/n^k\mu^k(t)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\psi^k(t)$, $t \in [0, T]$, – абсолютно непрерывное решение сопряженной задачи

$$\dot{\psi} = -\nabla_x H(t, x[u^k](t), u^k(t), \psi, 1/n^k, 1/n^k\mu^k(t)), \quad \psi(T) = 0,$$

а в силу (4.10) выполняется неравенство

$$\int_X [g_2(\tau, x[u^k](\tau)) - r(\tau)]\mu^k(t)/n^k dt \geq 0, \tag{5.2}$$

то с учетом определения меры η^k можно переписать соотношения (5.1), (5.2) в виде

$$\begin{gathered}\hat{H}(t, x[u^k](t), u^k(t), \psi^k(t), 1/n^k) = \\ = \max_{v \in U} \hat{H}(t, x[u^k](t), v, \psi^k(t), 1/n^k) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0, T],\end{gathered} \tag{5.3}$$

где $\psi^k(t)$, $t \in [0, T]$, – абсолютно непрерывное решение сопряженной задачи

$$\psi(t) = \int_t^T \nabla_x \hat{H}(\tau, x[u^k](\tau), u^k(\tau), \psi(\tau), 1/n^k) - \int_t^T \nabla_x g_2(\tau, x[u^k](\tau))\eta^k(dt)$$

и

$$\int_X (g_2(\tau, x[u^k](\tau)) - r(\tau))\eta^k(dt) \geq 0. \tag{5.4}$$

При этом в (5.3) функция Гамильтона–Понтрягина $\hat{H}$ определяется так (см., например, [17]):

$$\hat{H}(t, x, u, \psi, \nu) \equiv \langle \psi, A(t)x + B(t)u \rangle - \nu(\langle F(t)x, x \rangle + \langle G(t)u, u \rangle).$$

В соотношениях (5.3), (5.4) можно перейти к пределу при $k \longrightarrow \infty$ в силу классической теоремы о $*$-слабой компактности замкнутого шара в пространстае мер Радона, теоремы о слабой сходимости вероятностных мер (см., например, [26]) с учетом неотрицательности мер η^k и условия невырожденности $1/n^k + |\eta^k| = 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Так как одновременно, в силу теоремы 3.1,

$$g_2(u^k) - r \leq \kappa^k, \quad \|\kappa^k\| \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty,$$

то слабый предельный переход при $k \longrightarrow \infty$ дает для любой $*$-слабой предельной точки (ν, η) последовательности $(1/n^k, \eta^k)$, $k = 1, 2, \ldots,$

$$\nu \geq 0, \quad \eta \geq 0, \quad \nu + |\eta| = 1, \tag{5.5}$$

$$\int_X [g_2(\tau, x[u^k](\tau)) - r(\tau)]\eta^k(dt) = 0. \tag{5.6}$$

И, наконец, одновременный очевидный слабый предельный переход в (5.3) (его подробности опускаются) с учетом (5.5), (5.6) приводит к следующей теореме – принципу максимума Понтрягина в задаче (P_r) с поточечным фазовым ограничением типа неравенства, понимаемым как ограничение в пространстве $C(X)$.

Теорема 5.1. *Управление* u_r^0 *в совокупности с любой невырожденной в этом случае слабой предельной точкой* (ν, η), $\nu \geq 0$, $\eta \in C^*(X)$, *последовательности* $(1/n^k, \eta^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, $n^k \equiv 1 + \|\mu^k\|_{1,X}$, *удовлетворяют принципу максимума Понтрягина*

$$\hat{H}(t, x[u_r^0](t), u_r^0(t), \psi(t), \nu) = \max_{v \in U} \hat{H}(t, x[u_r^0](t), v, \psi(t), \nu) \quad \textit{при п.в.} \quad t \in [0, T],$$

$$\int_X [g_2(\tau, x[u_r^0](\tau)) - r(\tau)]\eta(dt) = 0,$$

$$\psi(t) = \int_t^T \nabla_x \hat{H}(\tau, x[u_r^0](\tau), u_r^0(\tau), \psi(\tau), \nu)d\tau - \int_t^T \nabla_x g_2(\tau, x[u_r^0](\tau))\eta(dt),$$

и минимизирует функционал Лагранжа $L_r(u, \eta) \equiv \nu g_0(u) + \langle \eta, g_2(u) - r \rangle$, $u \in \mathfrak{D}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
2. *Мину М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990.
3. *Uzawa H.* Iterative methods for concave programming // Studies in Linear and Nonlinear Programming, Ch. 10 Stanford Univ. Press, 1958.
4. *Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х.* Исследования по линейному и нелинейному программированию. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
5. *Сумин М.И.* Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 4. С. 602–625.
6. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
7. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
8. *Сумин М.И.* Оптимальное управление параболическими уравнениями: двойственные численные методы, регуляризация // Распределенные системы: оптимизация и прилож. в экономике и науках об окружающей среде. Сб. докл. к Междунар. конф. (Екатеринбург, 30 мая–2 июня 2000 г.), Екатеринбург: Изд-во ин-та матем. и механ. УрО РАН, 2000. С. 66–69.
9. *Сумин М.И.* Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 11. С. 2001–2019.
10. *Сумин М.И.* Итеративная регуляризация градиентного двойственного метода для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода // Вестн. Нижегородского ун-та. Сер. Матем. 2004. Вып. 1(2). С. 192–208.
11. *Сумин М.И.* Регуляризованный двойственный алгоритм в задачах оптимального управления для распределенных систем // Вестн. Нижегородского ун-та. Сер. Матем. моделирование и оптимальное управление. 2006. Вып. 2(31). С. 82–101.
12. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
13. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.
14. *Сумин М.И.* Метод возмущений и двойственная регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования // Пробл. динамич. управления. Сб. научн. тр. ф-та ВМиК МГУ. Вып. 3. М.: Издат. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2008. С. 200–231.
15. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
16. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
17. *Арутюнов А.В.* Условия экстремума. Нормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
18. *Сумин М.И.* Математическая теория субоптимального управления распределенными системами. Дис. ... докт. физ.-матем. наук. Нижний Новгород: Нижегородский гос. ун-т, 2000.
19. *Сумин М.И.* Регуляризованный двойственный метод решения нелинейной задачи математического программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 5. С. 796–816.
20. *Сумин М.И.* Минимизирующие последовательности, регуляризация, двойственность и принцип максимума Понтрягина // Междунар. конф. "Дифференциальные ур-ния и топология", посвященная 100-летию Л.С. Понтрягина. Тезисы докл. Москва, 17–22 июня 2008 г. М.: Издат. отд. ВМиК; МАКС Пресс, 2008. С. 401–402.
21. *Сумин М.И.* Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов / Уч. пособие. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2009.
22. *Ekeland I.* On the variational principle // J. Math. Analys. Appl. 1974. V. 47. № 2. P. 324–353.
23. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
24. *Borwein J.M., Strojwas H.M.* Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space. Part I: Theory // Canadian J. Math. 1986. V. 38. № 2. P. 431–452; Part II: Applications // 1987. V. 39. № 2. P. 428–472.
25. *Loewen P.D.* Optimal control via nonsmooth analysis // CRM Proc. and Lect. Notes. V. 2. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
26. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.