

Общероссийский математический портал

В. Н. Котеров, Ю. С. Юрезанская, Моделирование переноса взвешенных веществ на океаническом шельфе. Эффективная гидравлическая крупность полидисперсной взвеси, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2009, том 49, номер 7, 1306–1318

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.223.205.151

7 января 2025 г., 23:08:29



УДК 519.634

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ВЗВЕШЕННЫХ ВЕЩЕСТВ НА ОКЕАНИЧЕСКОМ ШЕЛЬФЕ. ЭФФЕКТИВНАЯ ГИДРАВЛИЧЕСКАЯ КРУПНОСТЬ ПОЛИДИСПЕРСНОЙ ВЗВЕСИ<sup>1)</sup>

© 2009 г. В. Н. Котеров, Ю. С. Юрезанская

(119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)

e-mail: koterov@ccas.ru, july@ccas.ru

Поступила в редакцию 20.10.2008 г.

Рассматривается задача моделирования переноса взвешенных веществ в водных объектах в тех случаях, когда ареал их распространения значительно превышает глубину акватории. Показано, что даже при существенном влиянии вертикального турбулентного обмена задача расчета эволюции загрязняющих полидисперсных взвесей, порождаемых мгновенным точечным источником, может быть сведена к интегрированию небольшой совокупности одномерных эволюционных задач и решению одной пространственно-двумерной задачи. Этот факт может служить основой построения экономичных методов решения практически важных задач расчета распространения взвеси от протяженного во времени и/или пространственно распределенного источника загрязнения водной среды. Библ. 15. Фиг. 4. Табл. 1.

**Ключевые слова:** численные методы, уравнение переноса и диффузии, турбулентный обмен, шельф, загрязнения, полидисперсные взвеси.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к задачам расчета переноса взвешенных веществ в водных объектах в последнее время значительно повысился в связи с необходимостью проведения оценок влияния разнообразных антропогенных воздействий на окружающую среду. Потребность в таких оценках возникает, например, при планировании строительства буровых платформ на океаническом шельфе, при прокладке подводных трубопроводов, при проведении дноуглубительных работ и т.п. При этом нормативные документы в принципе накладывают весьма жесткие требования на качество используемых для подобных оценок математических моделей. Например, согласно этим документам, в контрольных створах, расположенных на расстояниях порядка 250–500 м от источника загрязнения, полная концентрация минеральной взвеси не должна превышать 1 мг/л, в то время как эта величина вблизи источника обычно составляет 10 г/л и более.

При описании распространения взвешенных веществ можно выделить две качественно различные области, а именно: “ближняя зона”, пространственный масштаб которой коррелирует с размером объекта, загрязняющего акваторию (например, водовыпуска из гидротехнического сооружения, земснаряда, проводящего дноуглубительные работы, и т.п.), и включающая контрольные створы, и “дальняя зона”, размер которой существенно превышает характерный размер ближней зоны.

В ближней зоне концентрации взвешенных веществ велики и моделирование их переноса требует, вообще говоря, привлечения систем нелинейных уравнений динамики многофазных сред (см., например, [1]). В дальней зоне, рассмотрению которой посвящена настоящая работа, концентрации субстанций существенно уменьшаются как за счет процесса турбулентного перемешивания, так и в результате возможного осаждения их твердых фракций. При этом взвешенные вещества испытывают пассивную дисперсию (см., например, [2]) и могут рассматриваться как примесь, перенос которой определяется лишь заданной величиной скорости течения и интенсивностью турбулентной диффузии в акватории. Более того, в дальней зоне применим принцип суперпозиции. Последнее означает, что распространение взвеси можно представить в виде движения совокупности отдельных невзаимодействующих “облаков”, порождаемых мгновен-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 08-07-00118, 08-01-00435) и Программы № 3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

ными точечными источниками загрязнения. Эти облака движутся сквозь водную толщу под воздействием местных течений и, возможно, осаждаются на дно. В процессе движения они увеличиваются в размере за счет горизонтальной турбулентной диффузии, а концентрации взвешенных веществ в них падают. Концентрация взвеси  $C$  в произвольной точке  $\mathbf{r}$  акватории при этом представляется в виде суммы концентраций пассивной примеси  $C^j$  в отдельных облаках, включающих данную точку в рассматриваемый момент времени. Например, для протяженного во времени и неподвижного точечного источника полидисперсной взвеси, начинающего действовать в момент времени  $t = 0$ , имеется соотношение

$$C(\mathbf{r}, t) = \int_0^t \sum_{j=1}^N C^j(\mathbf{r}, t - t_0, t_0) dt_0, \quad t > 0,$$

где  $j$  – номер фракции загрязняющего вещества, а  $N$  – количество фракций.

Во многих представляющих интерес для практики случаях использование трехмерного численного моделирования задач переноса загрязняющих веществ по меньшей мере неоправданно или затруднительно, так как размер ареала распространения взвешенного вещества существенно превышает глубину акватории; количество различных фракций вещества велико; скорости осаждения этих фракций могут отличаться на много порядков; значения концентраций в контрольных створах, надежный расчет которых должна обеспечить численная модель, на четыре и более порядка отличаются от концентрации взвеси у источника загрязнения.

В практических целях часто рассматриваются двумерные (усредненные по глубине) модели, исходящие из следующего интегрального соотношения:

$$\frac{\partial H \bar{C}^j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [H(\bar{u}_i \bar{C}^j + \bar{J}_i^j)] + J_z^j(H) = 0, \tag{1.1}$$

$$\bar{C}^j = \frac{1}{H} \int_0^H C^j dz, \quad \bar{J}_i^j = \frac{1}{H} \int_0^H J_i^j dz, \quad \bar{u}_i \bar{C}^j = \frac{1}{H} \int_0^H u_i C^j dz.$$

Здесь и далее  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  – горизонтальные декартовы координаты,  $z$  – вертикальная координата, отсчитываемая от поверхности к дну водоема,  $H = H(\mathbf{x})$  – локальная глубина акватории,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2)$  – скорость горизонтального течения,  $J_i^j$  – горизонтальный диффузионный поток взвеси, определяемый эффектами турбулентного обмена,  $J_z^j(H)$  – поток частиц к дну акватории. Черта сверху здесь и везде ниже означает усреднение по глубине акватории, а по повторяющемуся индексу  $i = 1, 2$  предполагается суммирование.

Полная усредненная по глубине концентрация  $\bar{C}$  частиц, находящихся во взвешенном состоянии, и изменение погонной (на единицу площади) массы взвеси  $m$ , отлагающейся на дно, определяются выражениями

$$\bar{C} = \sum_{j=1}^N \bar{C}^j, \quad \frac{\partial m}{\partial t} = \sum_{j=1}^N J_z^j(H).$$

Интегральное соотношение (1.1) является точным следствием закона сохранения массы взвеси. Обычно в расчетах приближенно полагают  $\bar{u}_i \bar{C}^j = \bar{u}_i \bar{C}^j$ ,  $J_z^j(H) = W_j \bar{C}^j$ , где  $W_j$  – так называемая гидравлическая крупность  $j$ -й фракции частиц взвеси (скорость осаждения рассматриваемой фракции в спокойной воде, когда отсутствует вертикальный турбулентный обмен). Тогда имеет место следующее двумерное “усредненное по глубине” уравнение переноса и диффузии взвешенных веществ (см., например, [3]):

$$\frac{\partial H \bar{C}^j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [H(\bar{u}_i \bar{C}^j + \bar{J}_i^j)] + W_j \bar{C}^j = 0, \quad \bar{u}_i = \frac{1}{H} \int_0^H u_i dz. \tag{1.2}$$

Однако такой подход не всегда является приемлемым. Уравнение (1.2), в частности, не учитывает вертикальный турбулентный обмен, крайне существенный для частиц малой гидравлической крупности  $W_j$ . Нет возможности учета особенностей взаимодействия отлагающихся частиц с дном акватории, а также учета влияния на процесс конкретного вертикального положения рассматриваемого источника загрязнения.

В настоящей работе для случая мгновенного точечного источника взвеси предлагается и обосновывается свободная от указанных недостатков методика усреднения трехмерного уравнения переноса и диффузии взвешенных веществ. Она основана на введении понятия зависящей от времени эффективной гидравлической крупности полидисперсной взвеси, для нахождения которой необходимо решать лишь  $N$  одномерных эволюционных задач. Усредненная по глубине концентрация взвеси затем находится путем решения двумерного уравнения переноса и диффузии.

Способы решения двумерного уравнения переноса и диффузии взвеси в настоящей работе не рассматриваются. Укажем только, что для этой цели совместимыми с предлагаемым ниже подходом представляются “метод облаков” и “стохастический метод дискретных частиц” (см., например, [4]–[6]).

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛУЧАЯ МГНОВЕННОГО ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ВЗВЕСИ

При предположении, что процесс турбулентного перемешивания можно разделить на горизонтальный турбулентный обмен и вертикальную турбулентную диффузию (см., например, [7]), трехмерное уравнение и начальное условие для определения в дальней зоне динамики изменения концентрации  $j$ -й фракции взвеси, порождаемой действием мгновенного точечного источника, может быть записано в виде

$$\frac{\partial C^j}{\partial t} + \frac{\partial u_i C^j}{\partial x_i} + \frac{\partial (u_z + W_j) C^j}{\partial z} + \frac{\partial J_i^j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial C^j}{\partial z} = 0, \quad (2.1)$$

$$C^j = M_j \delta(\mathbf{x}) \delta(z - z_0) \quad \text{при} \quad t = 0, \quad C^j \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty.$$

Здесь  $u_z$  – вертикальная компонента скорости течения,  $J_i^j$  – компоненты горизонтального турбулентного потока взвеси,  $K_z$  – коэффициент вертикальной турбулентной диффузии,  $M_j$  – начальная масса взвеси,  $\delta$  – дельта-функция Дирака,  $z_0$  – вертикальная координата источника взвеси. Считается, что источник взвеси расположен в точке  $\mathbf{x} = 0$  и действует в момент времени  $t = 0$ .

На поверхности акватории поток взвеси отсутствует, поэтому

$$W_j C^j - K_z \partial C^j / \partial z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Краевое условие на дне водоема зависит от режима взаимодействия осаждающегося вещества с поверхностью дна. В общем случае оно записывается в виде

$$W_j C^j - K_z \partial C^j / \partial z = W_j \beta_j C^j \quad \text{при} \quad z = H(\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

где  $\beta_j$  – параметр, который, по терминологии из [8], может быть назван безразмерным “коэффициентом массоотдачи” к дну.

Значения параметра  $\beta_j$  зависят от адсорбирующих свойств поверхности дна. При полностью адсорбирующей поверхности  $\beta_j = \infty$  (т.е. на дне вместо (2.2) должны выставляться условия  $C^j = 0$ ). Иногда (см. [9]) на дне постулируются условия отсутствия диффузионных потоков  $\partial C^j / \partial z = 0$ , что соответствует значению  $\beta_j = 1$ . Предельным случаем является значение  $\beta_j = 0$ , когда полностью отсутствует поток взвеси к дну (дно является полностью неадсорбирующей поверхностью). Отметим также, что случай  $\beta_j < 0$  соответствует режиму “взмучивания” взвеси, уже отложившейся на дне. В настоящей работе он не рассматривается.

Далее примем следующие допущения.

1. Глубина акватории меняется достаточно медленно:

$$|\partial H / \partial x_i| \ll 1, \quad i = 1, 2.$$

2. Реализуется так называемый “режим мелкой воды” и коэффициент вертикальной турбулентной диффузии  $K_z$  во всей рассматриваемой области представим в виде  $K_z = u_* H K(\xi)$ ,  $\xi = z/H$ , где постоянная  $u_*$  – характерная скорость вертикальной диффузии, которую в некоторых случаях можно отождествить с так называемой динамической скоростью в пограничном слое у дна водоема,  $\xi$  – безразмерная вертикальная координата,  $K(\xi)$  – безразмерный коэффициент вертикальной турбулентной диффузии.

3. Компоненты  $u_i$  горизонтальной скорости  $\mathbf{u}$  не зависят от вертикальной координаты  $z$ , т.е. представлены в виде  $u_i = \bar{u}_i(\mathbf{x}, t)$ .

4. Зависимости компонент  $J_i^j$  горизонтального турбулентного потока взвеси от распределения ее концентрации  $C^j$  даются линейными операторами, также не зависящими от вертикальной координаты  $z$ :  $J_i^j = \bar{J}_i[C^j]$ . При использовании традиционной для рассматриваемых задач гипотезы градиентного горизонтального турбулентного переноса  $J_i^j = -\bar{A}(\mathbf{x}, t)\partial C^j/\partial x_i$ , где  $\bar{A}$  – усредненный по вертикали коэффициент горизонтального турбулентного обмена. Однако в случае свободной горизонтальной турбулентности эта гипотеза не всегда является физически оправданной, и операторы  $\bar{J}_i[C^j]$ , оставаясь линейными, могут иметь более сложную структуру (см. [5], [6]).

При зависящей от времени скорости потока  $\mathbf{u}$  допущение 2, предполагающее постоянство динамической скорости в пограничном слое на дне водоема во всей расчетной области, довольно жесткое. Оно выполняется, например, если характерное время изменения модуля скорости горизонтального потока превосходит время рассеяния облака загрязнения. Можно полагать, что оно также приближенно выполняется на океаническом шельфе, когда течение обусловлено приливными процессами, эксцентриситет годографа скорости течения невелик и модуль скорости потока меняется не слишком сильно.

Допущения 3 и 4 также представляются достаточно жесткими. Однако отметим, что на практике детальная информация о пространственном распределении скорости потока, как правило, отсутствует. Более того, часто необходимое для расчетов переноса взвеси поле скорости  $\mathbf{u}$  получают путем численного моделирования, основанного на использовании двумерных гидродинамических уравнений “мелкой воды”. Результаты этих расчетов, также предполагающих, строго говоря, выполнение допущения 1, воспроизводят лишь усредненные по вертикали распределения горизонтальной скорости течения в акватории.

Сделанные допущения позволяют в первом приближении пренебречь в (2.1) вертикальной компонентой  $u_z$  скорости потока и представить рассматриваемую задачу в следующем виде, аналогичном (1.1), (1.2):

$$\frac{\partial H(\mathbf{x})C^j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{ H(\mathbf{x})(\bar{u}_i(\mathbf{x}, t)C^j + \bar{J}_i[C^j]) \} + u_* \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \varepsilon_j C^j - K(\xi) \frac{\partial C^j}{\partial \xi} \right] = 0, \quad \varepsilon_j = \frac{W_j}{u_*},$$

$$C^j = \frac{M_j}{H(0)} \delta(\mathbf{x}) \delta(\xi - \xi_0) \quad \text{при } t = 0,$$

$$\varepsilon_j C^j - K(\xi) \frac{\partial C^j}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \quad (\text{на поверхности}),$$

$$\varepsilon_j C^j - K(\xi) \frac{\partial C^j}{\partial \xi} = \varepsilon_j \beta_j C^j \quad \text{при } \xi = 1 \quad (\text{на дне}).$$

Здесь  $H(0)$  – глубина акватории в точке сброса,  $\xi_0$  – безразмерная вертикальная координата источника взвеси, а  $\varepsilon_j$  – безразмерный параметр, равный отношению скорости осаждения частиц взвеси к характерной скорости вертикальной турбулентной диффузии. На практике значения последнего параметра могут меняться в крайне широких пределах. Предел  $\varepsilon_j \rightarrow 0$  соответствует случаю мелкой не осаждающейся (так называемой консервативной) взвеси. При  $\varepsilon_j \rightarrow \infty$  (крупная взвесь) можно пренебречь вертикальным турбулентным перемешиванием.

Определим оператор усреднения концентраций по глубине обычным образом:

$$\bar{C}^j = \int_0^1 C^j(\mathbf{x}, t, \xi) G(\xi) d\xi, \quad \int_0^1 G(\xi) d\xi = 1. \tag{2.4}$$

Здесь неотрицательная функция  $G(\xi)$  – ядро усреднения. В частности, если  $G \equiv 1$ , то  $\bar{C}^j$  представляют собой средние по глубине концентрации, использованные в (1.1), (1.2).

Ниже будут сформулированы уравнения и начальные условия, которым должна удовлетворять величина полной концентрации  $\bar{C} = \sum_{j=1}^N \bar{C}^j$ , если функция  $G$  не обращается в ноль на отрезке  $[0, 1]$ .

## 3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ВЕРТИКАЛЬНЫМ ДИФFUЗИОННЫМ МОДАМ

Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$\frac{d}{d\xi} \left[ \varepsilon_j Z_n^j - K(\xi) \frac{dZ_n^j}{d\xi} \right] = \lambda_n^j Z_n^j, \quad (3.1a)$$

$$\varepsilon_j Z_n^j - K(0) \frac{dZ_n^j}{d\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad \varepsilon_j Z_n^j - K(1) \frac{dZ_n^j}{d\xi} = \varepsilon_j \beta_j Z_n^j \quad \text{при} \quad \xi = 1. \quad (3.1б)$$

Умножением обеих частей уравнения (3.1a) на величину

$$\rho^j(\xi) = \exp \left[ -\varepsilon_j \int_0^\xi K^{-1}(\xi') d\xi' \right]$$

спектральную задачу (3.1) можно свести к классической задаче Штурма–Лиувилля для уравнения

$$-\frac{d}{d\xi} \left[ p^j(\xi) \frac{dZ_n^j}{d\xi} \right] = \lambda_n^j \rho^j(\xi) Z_n^j, \quad p^j(\xi) = \rho^j(\xi) K(\xi),$$

с краевыми условиями (3.1б).

Известно (см., например, [10]), что при  $p^j(\xi) \geq \text{const} > 0$ <sup>2)</sup> эта задача имеет счетное число однократных неотрицательных собственных значений  $\lambda_n^j = \lambda_n^j(\varepsilon_j, \beta_j)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , параметрически зависящих от  $\varepsilon_j$  и  $\beta_j$  (ниже предполагается, что  $\lambda_n^j$  упорядочены по возрастанию). При этом собственные функции  $Z_n^j = Z_n^j(\xi; \varepsilon_j, \beta_j)$ , называемые далее вертикальными диффузионными модами, образуют полную систему, причем имеет место следующее соотношение ортогональности:

$$(Z_n^j, Z_m^j) = \int_0^1 Z_n^j(\xi) Z_m^j(\xi) \rho^j(\xi) d\xi = \delta_{nm}, \quad (3.2)$$

где  $\delta_{nm}$  – символ Кронекера.

Будем отыскивать решение задачи (2.3) в виде следующего ряда:

$$C^j = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^j(\mathbf{x}, t) Z_n^j(\xi), \quad C_n^j = (C^j, Z_n^j). \quad (3.3)$$

Подставляя разложение (3.3) в (2.3) и используя соотношение ортогональности (3.2), с учетом (3.1a) легко получить уравнения для коэффициентов  $C_n^j$  этого разложения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H C_n^j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{ H(\bar{u}_i C_n^j + \bar{J}_i [C_n^j]) \} + u_* \lambda_n^j C_n^j &= 0, \\ C_n^j &= \frac{M_j}{H(0)} \delta(\mathbf{x}) Z_n^j(\xi_0) \rho^j(\xi_0) \quad \text{при} \quad t = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Согласно (3.3), усредненное по глубине акватории распределение полной концентрации взвеси  $\bar{C}$  может быть найдено путем следующего суммирования:

$$\bar{C} = \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} C_n^j(\mathbf{x}, t) \bar{Z}_n^j, \quad \bar{Z}_n^j = \int_0^1 Z_n^j(\xi; \varepsilon_j, \beta_j) G(\xi) d\xi. \quad (3.5)$$

## 4. АСИМПТОТИКА ДЛЯ БОЛЬШИХ МОМЕНТОВ ВРЕМЕНИ

Можно видеть, что решения задач (3.4) экспоненциально стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , причем в разложении (3.3) наиболее медленно затухают компоненты  $C_0^j$ , отвечающие минимальным

<sup>2)</sup> В некоторых случаях допускаются также особенности (в частности, обращение в нуль) коэффициентов на границах интервала  $0 < \xi < 1$ .

собственным значениям  $\lambda_0^j$ , которые можно назвать безразмерной гидравлической крупностью фракции  $j$  с поправкой на вертикальный турбулентный обмен (см. (1.2)). Иными словами, при  $t \rightarrow \infty$  в сумме (3.5) главным является член с номером фракции  $j = j_m$ , доставляющим минимум величине  $\lambda_0^j$ . Можно отметить, что номер  $j_m$  не обязательно должен отвечать фракции с минимальной гидравлической крупностью (т.е. с минимальным значением параметра  $\varepsilon_j$ ), так как величина  $\lambda_0^j$  зависит еще и от параметра  $\beta_j$ , учитывающего особенности взаимодействия отлагающейся взвеси с дном акватории.

В общем случае неоднородного по глубине распределения коэффициента вертикальной диффузии  $K(\xi)$  спектральная задача (3.1) может быть решена только с помощью численных методов. Но при однородном распределении, когда  $K = 1$ , можно получить следующее аналитическое решение этой задачи:

$$\lambda_n^j = \frac{\varepsilon_j^2}{4} + (\omega_n^j)^2, \quad Z_n^j(\xi) = \frac{\varepsilon_j \sin(\omega_n^j \xi) + 2\omega_n^j \cos(\omega_n^j \xi)}{(D_n^j)^{1/2}} \exp\left(\frac{\varepsilon_j \xi}{2}\right),$$

$$D_n^j = \frac{\varepsilon_j^2}{2} + 2(\omega_n^j)^2 + \frac{2}{\omega_n^j} \left[ (\omega_n^j)^2 - \frac{\varepsilon_j^2}{4} \sin \omega_n^j \cos \omega_n^j \right] + 2\varepsilon_j^2 \sin^2 \omega_n^j.$$

Здесь  $\omega_n^j$  — положительные корни уравнения

$$\frac{4\beta_j \omega_n^j \varepsilon_j}{4(\omega_n^j)^2 - (2\beta_j - 1)\varepsilon_j^2} = \operatorname{tg} \omega_n^j.$$

При  $\beta_j > 0$  это уравнение имеет счетное число положительных корней, отстоящих друг от друга примерно на  $\pi$ , причем минимальный положительный корень  $\omega_0^j$  находится в диапазоне  $0 < \omega_0^j < \pi$ .

При фиксированном значении параметра  $\beta_j$  и  $\varepsilon_j \rightarrow 0$  для главного собственного значения  $\lambda_0^j$  может быть получено следующее асимптотическое разложение:

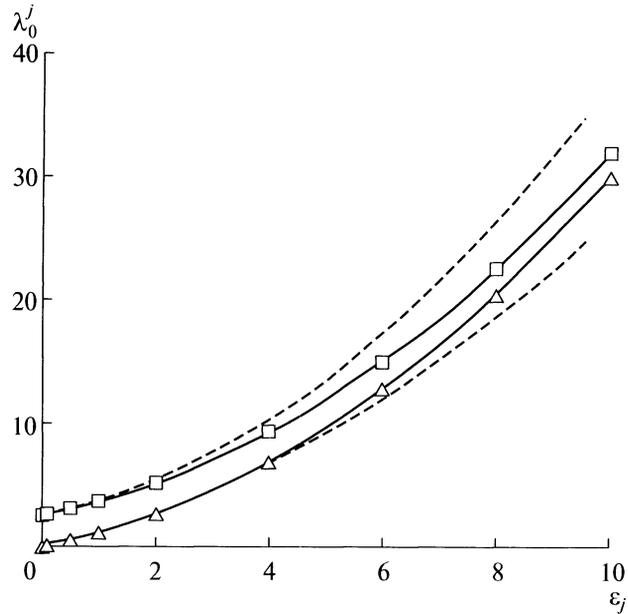
$$\lambda_0^j = \beta_j \varepsilon_j + \frac{1}{6} \beta_j (3 - 2\beta_j) \varepsilon_j^2 + O(\varepsilon_j^3). \tag{4.1}$$

Данное разложение не является регулярным при  $\beta_j \rightarrow \infty$ . Не приводя результатов детального анализа, укажем, что при  $\beta_j = \infty$  (полностью адсорбирующая поверхность дна) и  $\varepsilon_j \rightarrow 0$  имеем

$$\lambda_0^j = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \varepsilon_j + \frac{\varepsilon_j^2}{4} + O(\varepsilon_j^3). \tag{4.2}$$

Графики зависимостей  $\lambda_0^j(\varepsilon_j)$  для случаев  $\beta_j = 1$  (прямая с треугольниками),  $\beta_j = \infty$  (прямая с квадратиками) и асимптотик (4.1), (4.2) (штриховые кривые) приведены на фиг. 1.

Проведенный анализ позволяет в ряде случаев отыскивать форму шлейфа загрязнения спустя достаточно большое время после сброса загрязняющих веществ путем численного интегрирования единственного двумерного уравнения переноса и диффузии (3.4) для фракции, доставляющей минимум величине  $\lambda_0^j$ . Но если возникает необходимость расчета полного количества взвеси, отлагающейся на дно, и концентрации взвешенных веществ в течение всего времени существования шлейфа, то необходимо суммировать ряды (3.3), (3.5). Исследования случая  $K = 1$  показывают, что при  $\varepsilon_j < 1$  ряд (3.3) и внутренний ряд в (3.5) являются хорошо суммируемыми, так что при малых  $\varepsilon_j$  в этих разложениях достаточно удерживать лишь главную диффузионную моду  $Z_0^j$ . Однако сходимость рядов катастрофически ухудшается с увеличением параметра  $\varepsilon_j$  и уменьшением времени  $t$ . Это не удивительно, так как в пределе  $\varepsilon_j \rightarrow \infty$  задача (2.3) вырождается. К счастью, существует прием, позволяющий обойти эту трудность.



Фиг. 1.

### 5. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ УСРЕДНЕННОЙ ПО ГЛУБИНЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ВЗВЕШЕННЫХ ВЕЩЕСТВ В АКВАТОРИИ ПОСТОЯННОЙ ГЛУБИНЫ

Применяя оператор суммирования (3.5) к уравнениям (3.4), легко получить следующие соотношения<sup>3)</sup>, которым должна удовлетворять усредненная по глубине концентрация взвеси  $\bar{C}$ :

$$\frac{\partial H\bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{H(\bar{u}_i\bar{C} + \bar{J}_i[\bar{C}])\} + W\bar{C} = 0, \quad \bar{C} = \frac{M}{H(0)}\delta(\mathbf{x})G(\xi_0) \quad \text{при } t = 0, \quad (5.1a)$$

$$W = u_*w, \quad w = \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^j C_n^j \bar{Z}_n^j / \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} C_n^j \bar{Z}_n^j, \quad M = \sum_j M_j. \quad (5.16)$$

Здесь  $M$  – полная начальная масса загрязняющих веществ, а величина  $W$  может быть названа эффективной гидравлической крупностью взвеси ( $w$  – безразмерная эффективная гидравлическая крупность).

Покажем, что в акватории постоянной глубины, когда  $H = \text{const}$ , величина  $w$  не зависит от координат  $\mathbf{x}$ , но является функцией времени  $t$ . Укажем также путь ее нахождения.

Легко проверить, что в рассматриваемом случае решения задач (3.4) представимы в виде

$$C_n^j = \frac{M_j}{H} Z_n^j(\xi_0) \rho^j(\xi_0) \mu^0(\mathbf{x}, t) \exp(-u_* \lambda_n^j t / H). \quad (5.2)$$

Здесь не зависящая от индексов  $j$  и  $n$  функция  $C^0$  описывает консервативное распространение облака единичной массы и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mu^0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \mu^0 + \bar{J}_i[\mu^0]) = 0, \quad \mu^0 = \delta(\mathbf{x}) \quad \text{при } t = 0. \quad (5.3)$$

<sup>3)</sup> При выводе начального условия для уравнения (5.1a) использовалось следующее “разложение  $\delta$ -функции”:

$$\delta(\xi - \xi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n^j(\xi_0) \rho^j(\xi_0) Z_n^j(\xi).$$

Подставляя (5.2) в (5.1б), получаем

$$w \equiv w(t) = \frac{\sum_{j=1}^N M_j \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^j Z_n^j(\xi_0) \rho^j(\xi_0) \exp(-u_* \lambda_n^j t / H) \bar{Z}_n^j}{\sum_{j=1}^N M_j \sum_{n=0}^{\infty} Z_n^j(\xi_0) \rho^j(\xi_0) \exp(-u_* \lambda_n^j t / H) \bar{Z}_n^j}. \quad (5.4)$$

Как уже отмечалось выше, при произвольных значениях  $\varepsilon_j$  и  $t$  внутренние ряды в (5.4) суммируются плохо и попытки нахождения функции  $w(t)$  с помощью решения спектральной задачи (3.1) и последующего суммирования (5.4) не приводят к цели. Однако эта функция не зависит ни от скорости течения  $\mathbf{u}$ , ни от компонент  $\bar{J}_i$  горизонтального диффузионного потока. Поэтому ее можно отыскивать путем интегрирования следующей совокупности одномерных эволюционных задач (см. (2.3)), усреднением их решений по координате  $\xi$ , суммированием результатов по номерам фракций  $j$  и вычислением логарифмической производной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H c^j}{\partial t} + u_* \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \varepsilon_j c^j - K(\xi) \frac{\partial c^j}{\partial \xi} \right] &= 0, \quad c^j = \frac{M_j}{H} \delta(\xi - \xi_0) \quad \text{при} \quad t = 0, \\ \varepsilon_j c^j - K(\xi) \frac{\partial c^j}{\partial \xi} &= 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad \varepsilon_j c^j - K(\xi) \frac{\partial c^j}{\partial \xi} = \varepsilon_j \beta_j c^j \quad \text{при} \quad \xi = 1, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\bar{c} = \sum_{j=1}^N \int_0^1 c^j G(\xi) d\xi, \quad w(t) = -\frac{H}{u_*} \frac{d \ln \bar{c}}{dt}.$$

Легко видеть, что определенная таким образом безразмерная эффективная гидравлическая крупность  $w$  зависит от начального дисперсного состава взвеси, определяемого параметрами  $\varepsilon_j$  и  $M_j$ , от безразмерного коэффициента массоотдачи  $\beta_j$  и от параметра  $\xi_0$ , задающего положения источника взвеси над дном акватории. Кроме того, она зависит и от рассматриваемого способа усреднения концентраций по вертикали (от выбранного вида функции  $G(\xi)$ ).

Таким образом, в случае акватории постоянной глубины решение исходной задачи о расчете усредненного по вертикали распространения полидисперсной взвеси с количеством фракций  $N$  сводится к решению  $N$  одномерных эволюционных задач (5.5) и последующему расчету одной двумерной эволюционной задачи (5.1а). Решение последней, как нетрудно видеть, дается формулой

$$\bar{C} = \frac{M}{H} G(\xi_0) \mu^0(\mathbf{x}, t) \exp \left( -\frac{u_*}{H} \int_0^t w(t') dt' \right).$$

Важно отметить, что при моделировании распространения взвеси от протяженного во времени и/или пространственно распределенного источника постоянного дисперсного состава эволюционные задачи (5.5) могут быть решены всего один раз.

## 6. “ТРАЕКТОРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ” ДЛЯ СЛУЧАЯ АКВАТОРИИ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

В общем случае, когда глубина акватории  $H$  в рассматриваемой области не может считаться постоянной, решения задач (3.4) непредставимы в виде (5.2). Поэтому представленный выше подход здесь, строго говоря, неприменим. Однако может быть предложен приближенный метод расчета, связанный с введением понятия траектории движения облака взвеси. Область применимости этого метода ограничивается предположением о малом изменении глубины акватории на расстояниях порядка характерного размера эволюционирующего облака.

Определим траекторию движения “центра”  $\mathbf{x}_0(t)$  облака обычным образом:  $d\mathbf{x}_0/dt = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)$ ,  $\mathbf{x}_0(0) = 0$ . Пусть  $H_0(t) = H(\mathbf{x}_0(t))$  — изменяющаяся со временем глубина акватории в центре облака.

При сформулированном выше предположении решения задач (3.4) приближенно представимы в виде

$$C_n^j = \frac{M_j}{H} Z_n^j(\xi_0) \rho^j(\xi_0) \mu^0(\mathbf{x}, t) \exp \left( -u_* \lambda_n^j \int_0^t H_0^{-1}(t') dt' \right), \quad (6.1)$$

в котором финитная функция  $\mu^0$  удовлетворяет уравнению (5.3).

Действительно, подставляя (6.1) в (3.4), получаем

$$\frac{\partial \mu^0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \mu^0 + \bar{J}_i [\mu^0]) = u_* \lambda_n^j \left( \frac{1}{H_0(t)} - \frac{1}{H(\mathbf{x})} \right) \mu^0. \quad (6.2)$$

Пусть характерная полуширина функции  $\mu^0$  равна  $\sigma(t)$  и мала по сравнению с характерным пространственным масштабом изменения глубины акватории. Тогда правая часть в (6.2) оценивается малой величиной

$$\frac{\sigma^2(t)}{H_0(t)} \max_i |\partial H / \partial x_i|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t)} \ll 1.$$

Если приближенное представление (6.1) может быть использовано, то справедливы все рассуждения предыдущего раздела работы. В частности, имеют место уравнения (5.1а) и (5.5), в которых глубина акватории  $H$  должна быть заменена зависящей от времени величиной  $H_0(t)$ .

В данном случае эффективная гидравлическая крупность  $w(t)$  становится зависящей от траектории движения облака взвеси. Однако по-прежнему при моделировании распространения взвеси от протяженного во времени и/или пространственно распределенного источника эволюционные задачи (5.5) могут быть решены всего один раз. Действительно, произведя в (5.5) замену переменных

$$\mu^j = H_0(t) c^j, \quad \tau = u_* \int_0^t H_0^{-1}(t') dt',$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu^j}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \varepsilon_j \mu^j - K(\xi) \frac{\partial \mu^j}{\partial \xi} \right] &= 0, \quad \mu^j = M_j \delta(\xi - \xi_0) \quad \text{при } t = 0, \\ \varepsilon_j \mu^j - K(\xi) \frac{\partial \mu^j}{\partial \xi} &= 0 \quad \text{при } \xi = 0, \quad \varepsilon_j \mu^j - K(\xi) \frac{\partial \mu^j}{\partial \xi} = \varepsilon_j \beta_j \mu^j \quad \text{при } \xi = 1, \\ \bar{\mu} &= \sum_{j=1}^N \int_0^1 \mu^j G(\xi) d\xi, \quad w(\tau) = -\frac{d \ln \bar{\mu}}{d\tau}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Определенная таким образом стандартная функция  $w(\tau)$  не зависит от траектории движения облака взвеси.

В заключение отметим, что в тех случаях, когда вертикальным турбулентным перемешиванием можно пренебречь, эффективная гидравлическая крупность  $W$  в уравнении (5.1а) должна вычисляться по формуле

$$W(t) = \sum_{j=1}^N M_j W_j \exp \left( -W_j \int_0^t H_0^{-1}(t') dt' \right) \left[ \sum_{j=1}^N M_j \exp \left( -W_j \int_0^t H_0^{-1}(t') dt' \right) \right]^{-1}.$$

## 7. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ ЭФФЕКТИВНОЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ КРУПНОСТИ ПОЛИДИСПЕРСНОЙ ВЗВЕСИ

В качестве иллюстрации приведем здесь результаты расчетов эффективной гидравлической крупности одной из реальных полидисперсных взвесей, с которыми приходится иметь дело при проведении дноуглубительных работ. Это так называемый “суглинок легкий песчанистый”. Его начальный дисперсный состав, гидравлические крупности компонент и значения параметров  $\varepsilon_j$  представлены в таблице. При вычислении  $\varepsilon_j$  величина динамической скорости у дна была принята равной  $u_* = 0.05$  м/с. Распространение наиболее мелкой фракции с диаметром частиц  $D_j < 0.005$  мм считалось консервативным, т.е. для нее полагалось  $W_j = 0$ .

Безразмерный профиль коэффициента вертикальной турбулентной диффузии в акватории определялся следующим выражением (см., например, [11], [12]<sup>4)</sup>):

$$K(\xi) = (1 - \xi + \delta)(0.4 + 0.6\xi). \quad (7.1)$$

<sup>4)</sup> Отметим, что в этих работах вертикальная координата  $z$  отсчитывалась от дна к поверхности водоема.

Таблица

№ фракции $j$	Диапазон диаметров частиц, мм	Средний диаметр, $D_j$ , мм	Массовая доля в сбросе, $M_j$ %	Гидравлическая крупность, $W_j$ , м/с	$\varepsilon_j$
	> 40		0.00		
1	40–20	30	1.65	9.845E–01	1.969E+01
2	20–10	15	1.28	6.955E–01	1.391E+01
3	10.0–5.0	7.5	2.17	4.906E–01	9.812E+00
4	5.0–2.0	3.5	2.28	3.323E–01	6.647E+00
5	2.0–1.0	1.5	2.56	2.109E–01	4.217E+00
6	1.0–0.5	0.75	4.58	1.377E–01	2.754E+00
7	0.5–0.25	0.375	8.87	7.823E–02	1.565E+00
8	0.25–0.1	0.175	10.25	2.921E–02	5.841E–01
9	0.1–0.05	0.075	11.56	6.216E–03	1.243E–01
10	0.05–0.01	0.03	21.25	1.010E–03	2.019E–02
11	0.01–0.005	0.0075	15.10	6.316E–05	1.263E–03
12	<0.005		18.45	0.000E+00	0.000E+00

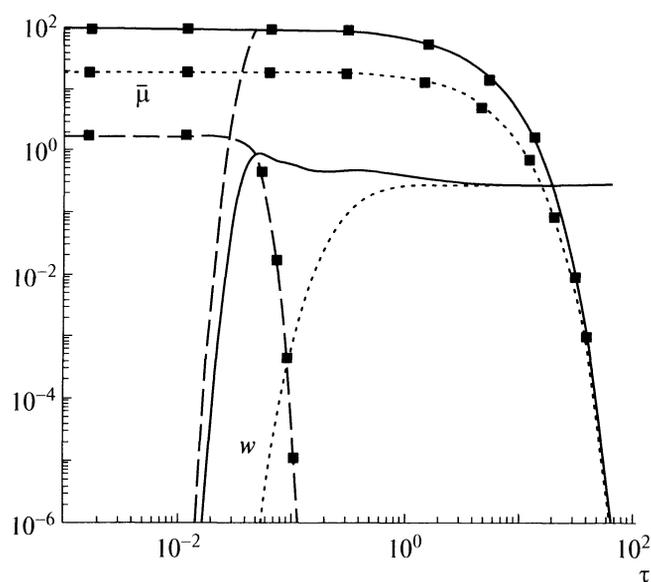
Здесь малый параметр  $\delta$  – отнесенная к глубине безразмерная шероховатость дна.

В расчетах полагалось  $\delta = 0.01$ . Безразмерная вертикальная координата источника взвеси принималась равной  $\xi_0 = 0.1$ . Находилась эффективная гидравлическая крупность взвеси, соответствующая усредненной по вертикали концентрации взвешенных веществ ( $G(\xi) = 1$ ).

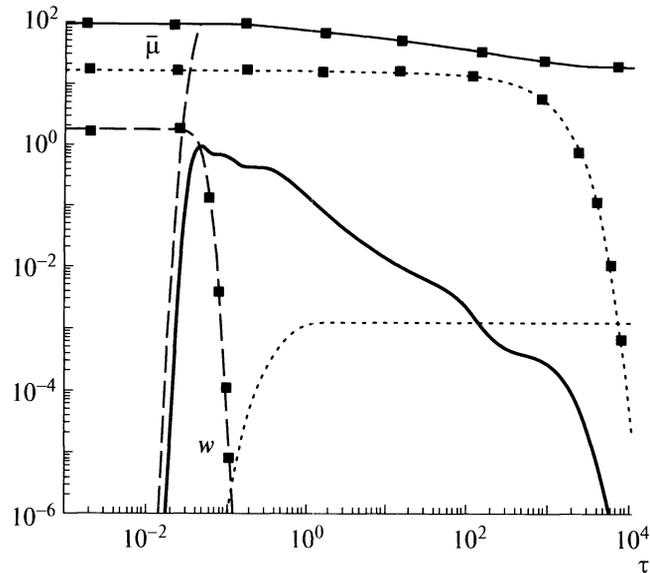
Задача (6.3) численно интегрировалась при помощи неявной консервативной разностной схемы, разрешаемой методом прогонки. Расчеты выполнены для двух случаев:

- 1) дно является полностью адсорбирующим, т.е. для всех фракций взвеси  $\beta_j = \infty$  (см. фиг. 2);
- 2) на дне отсутствуют диффузионные потоки, т.е. для всех фракций  $\beta_j = 1$  (см. фиг. 3).

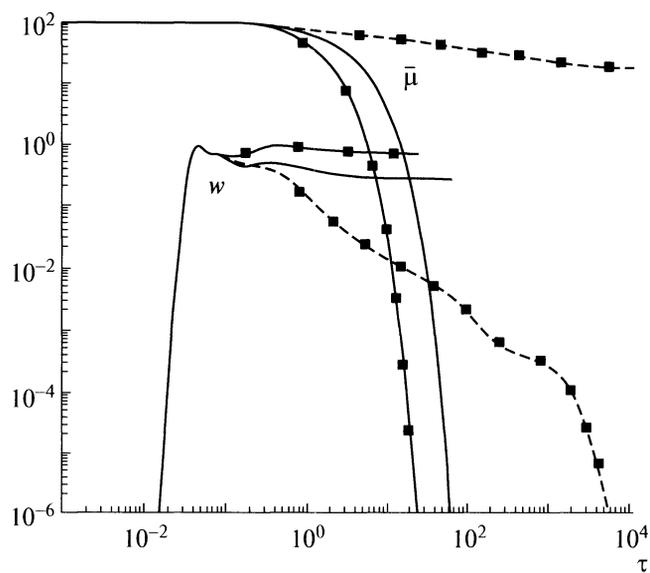
На обоих графиках приведена расчетная динамика функций  $\bar{\mu}(\tau)$  (кривые с маркерами) и  $w(\tau)$ . Сплошные кривые – расчеты, выполненные для полидисперсной взвеси, представленной в таблице. Штриховые кривые – случай монодисперсной взвеси, отвечающей наиболее крупной фракции из таблицы ( $j = 1$ ). Пунктирные кривые на фиг. 2 – монодисперсная консервативная



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

взвесь ( $j = 12$  в таблице), а на фиг. 3 — монодисперсная взвесь, отвечающая наиболее мелкой неконсервативной фракции ( $j = 11$  в таблице).

Видно, что в начальные моменты времени  $\tau$  средняя масса  $\bar{\mu}(\tau)$  взвеси, находящейся во взвешенном состоянии, не меняется, поскольку компактному облаку взвеси необходимо некоторое время для достижения дна акватории. Поэтому безразмерная эффективная гидравлическая крупность  $w(\tau) = 0$ . Дальнейшая эволюция величин  $\bar{\mu}(\tau)$  и  $w(\tau)$  связана с последовательным осаждением на дно различных фракций взвеси. В случае полностью адсорбирующего дна (см. фиг. 2) при  $\tau \rightarrow \infty$  динамика изменения этих функций определяется консервативной составляющей взвеси, адсорбируемой дном. При отсутствии диффузионных потоков к дну (фиг. 3) адсорбции консервативной составляющей не происходит и эта фракция всегда остается во взвешенном состоянии, так что для достаточно больших моментов времени  $\tau$  имеем  $w(\tau) = 0$ .

В методических целях рассматривался также случай постоянного коэффициента вертикальной турбулентной диффузии со значением

$$\bar{K} = \int_0^1 K(\xi) d\xi = 0.3 + 0.7\delta \approx 0.3. \quad (7.2)$$

Результаты этих расчетов представлены на фиг. 4. Сплошные кривые – случай  $\beta_j = \infty$ , штриховые соответствуют  $\beta_j = 1$ . Кривые без маркеров – расчеты, выполненные для случая коэффициента вертикальной диффузии, определяемого формулой (7.1), кривые с маркерами – случай усредненного коэффициента вертикальной диффузии (7.2). При  $\beta_j = 1$  кривые практически совпадают. Как и следовало ожидать, заметные отличия наблюдаются лишь тогда, когда динамика изменения  $\bar{\mu}(\tau)$  и  $w(\tau)$  определяется процессом диффузии взвеси к дну акватории ( $\beta_j = \infty$ ). Совпадение кривых при отсутствии диффузионных потоков, по-видимому, связано с тем, что, с одной стороны, процесс вертикальной диффузии малосуществен для крупных фракций, а с другой стороны, в случае мелких фракций при  $\beta_j = 1$  этот процесс вне зависимости от формы эпюры коэффициента вертикальной диффузии успевает обеспечить интенсивное турбулентное перемешивание взвеси.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано, что даже при существенном влиянии вертикального турбулентного обмена задача расчета эволюции загрязняющих полидисперсных взвесей, порождаемых мгновенным точечным источником, в акваториях малой глубины может быть сведена к интегрированию  $N$  одномерных эволюционных задач ( $N$  – количество фракций взвеси) и решению одной пространственно-двумерной задачи. Этот факт может служить основой для построения экономичных численных методов математического моделирования явления распространения взвеси от протяженного во времени и/или пространственно распределенного источника загрязнения.

Понятие эффективной гидравлической крупности, учитывающей, в частности, адсорбционные свойства дна водоема, может быть использовано при расчетах распространения загрязнений в руслах рек, течение в которых часто моделируется с помощью одномерных уравнений Сен-Венана (см., например, [13]). Представляется также, что изложенный выше подход может быть полезным и при разработке основанных на уравнении переноса и диффузии прогностических математических моделей динамики изменения качества воздуха больших городов в тех случаях, когда детальное трехмерное моделирование (см., например, [14], [15]) невозможно.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
2. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965; Ч. 2. 1967.
3. Ниуль Ж. Модели дисперсии пассивных субстанций // Моделирование морских систем. Л.: Гидрометеоздат, 1978.
4. Архипов Б.В., Котеров В.Н., Кочерова А.С. и др. Расчет распространения взвешенных веществ в прибрежной области моря // Водные ресурсы. 2004. Т. 31. № 1. С. 1–8.
5. Архипов Б.В., Котеров В.Н., Солбаков В.В. и др. О численном моделировании распространения загрязняющих веществ и нефтяных разливов стохастическим методом дискретных частиц // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 2. С. 288–301.
6. Arkhipov B., Koterov V., Solbakov V. et al. Numerical modeling of pollutant dispersion and oil spreading by the stochastic discrete particles method // Studies in Appl. Math. 2008. V. 120. № 1. P. 87–104.
7. Озмидов Р.В. Диффузия примесей в океане. Л.: Гидрометеоздат, 1986.
8. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987.
9. Bao-Shi Shiau, Jia-Jung Juang. Numerical study on the far field diffusion of ocean dumping for liquid waste // Internat. Soc. Offshore and Polar Engrs. 1988. P. 327–334.
10. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
11. Wolanski E., Asaeda T., Tanaka A. et al. Three-dimensional island wakes in the field, laboratory experiments and numerical models // Continental Shelf Res. 1996. V. 16. № 11. P. 1437–1452.
12. Blaise S., Deleersnijder E., White L. et al. Influence of the turbulence closure scheme on the finite-element simulation of the upwelling in the wake of shallow-water island // Continental Shelf Res. 2007. V. 27. P. 2329–2345.

13. *Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Самарская Е.А. и др.* Методы математического моделирования окружающей среды. М.: Наука, 2000.
14. *Белов И.В., Беспалов М.С., Клочкова Л.В. и др.* Транспортная модель процессов распространения газообразных примесей в атмосфере города // Матем. моделирование. 2000. Т. 12. № 5. С. 38–46.
15. *Калиткин Н.Н., Карпенко Н.В., Михайлов А.П. и др.* Математические модели природы и общества. М.: Физматлит, 2005.