

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Конопелько, В. А. Титарев, Е. М. Шахов, Нестационарное течение разреженного газа в микроканале из-за распада разрыва давления, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2016, том 56, номер 3, 476–489

DOI: 10.7868/S004446691603011X

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.220.139.28

7 ноября 2024 г., 14:24:37



УДК 519.634

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В МИКРОКАНАЛЕ ИЗ-ЗА РАСПАДА РАЗРЫВА ДАВЛЕНИЯ¹⁾

© 2016 г. Н. А. Конопелько*, В. А. Титарев***, Е. М. Шахов***

(* 141700 М. о., Долгопрудный, Институтский пер. 9, МФТИ;

** 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН;

*** 107005 Москва, 2-ая Бауманская ул. 5, МГТУ)

e-mail: konopelko.na@mipt.ru, titarev@ccas.ru, shakhov@ccas.ru

Поступила в редакцию 18.05.2015 г.

На основе кинетической S-модели рассматривается нестационарная задача о развитии течения разреженного газа в плоском канале между параллельными пластинами бесконечной длины при условии, что в начальный момент времени покоящийся газ имеет различные значения давления по разные стороны от плоскости $x = 0$, разделяющей канал на две половины. Изучается влияние торможения газа на стенках канала в зависимости от степени его разреженности и от начального перепада давления при условиях диффузного отражения молекул на границе. Прослеживается затухание ударной волны и исчезновение области однородного потока за ударной волной. Особое внимание уделяется расчету зависимости от времени потока массы газа через сечение $x = 0$. Изучается асимптотическое поведение решения при неограниченном возрастании времени. Кинетическое уравнение решается численно консервативным методом конечных разностей второго порядка аппроксимации по пространственным переменным. Библ. 18. Фиг. 8.

Ключевые слова: разреженный газ, распад разрыва, кинетическая S-модель, ударная волна, разностная схема Колгана, кинетическое уравнение.

DOI: 10.7868/S004446691603011X

ВВЕДЕНИЕ

Движениям разреженных газов в каналах и трубах посвящены обзор [1] и монография [2]. Однако в этих работах рассмотрены только установившиеся движения. В последнее время значительно возрос интерес к нестационарным течениям (см., например, [3]–[7]). Интерес обусловлен, в частности, возможностью создания высокоскоростных молекулярных пучков импульсного типа (см. [7]). Начало исследованиям двумерных течений, возникающих вследствие распада разрыва давления в покоящемся газе, расположенном в пространстве между двумя параллельными пластинами, положено в [8], [9]. В связи с актуальностью исследований по нестационарным течениям в каналах возникает необходимость более углубленного изучения основных закономерностей о распространении возмущений в разреженном газе, ограниченных стенками канала.

Во всех цитированных работах исследования ограничивались сравнительно небольшими интервалами времени, но при этом отмечалось быстрое торможение потока, затухание ударной волны и исчезновение области равномерного потока за ударной волной. В первую очередь изучалось поведение газа низкой плотности, находящегося первоначально в рабочей секции ударной трубы под действием толкающего газа, расположенного в начальный момент в секции высокого давления. В предлагаемой работе акцент сделан на поведении толкающего газа.

В [10] изучалось торможение разреженного газа в канале между параллельными пластинами при расширении газа в пустоту. Цель данного исследования – проследить способность разреженного газа преодолевать сопротивление стенок с диффузным отражением молекул от поверхности при расширении газа в плоском канале в условиях противодействия. Работа является естественным продолжением исследований, проведенных в [8]–[10]. В отличие от [8], [9] прослеживается развитие потока на значительных расстояниях от места разрыва до полного исчезновения

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 13-01-00522а).

ударной волны и области однородного потока за ней (“пробки”). Определяется характерное состояние, на котором “пробка” полностью исчезает. Также, в отличие от [8], [9] и [10], в основу исследований положена кинетическая S-модель (см. [11]). Исследуется асимптотическое поведение решения при больших временах. Устанавливается возможность приближенного описания процесса в этом случае.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим нестационарное течение одноатомного разреженного газа в плоском канале между параллельными пластинами ширины $2a$, возникающее вследствие разрывных начальных условий. В начальный момент $t = 0$ газ покоится с постоянными параметрами n_0, p_0, T_0 (числовая плотность, давление, температура) в левой стороне канала, $x < 0$, и с постоянными параметрами $n_1, p_1, T_1 = T_0$ в правой стороне канала, $x > 0$. Покоящийся газ с различными термодинамическими параметрами разделен перегородкой, расположенной в плоскости $x = 0$. Ось x совпадает со средней линией канала. В начальный момент перегородка убирается и возникает движение газа в пределах канала. Задача состоит в том, чтобы оценить влияние торможения газа на стенках канала при диффузном отражении молекул от стенок при полной тепловой аккомодации с температурой стенок T_w . Температуру стенок считаем постоянной и равной начальной температуре газа: $T_w = T_0$. В дальнейшем полагаем, что $p_1 < p_0$. Частный случай $p_1 = 0$, соответствующий истечению газа в вакуум, рассмотрен в [10].

Задачу формулируем в декартовой системе координат x, y, z с началом на средней линии канала в сечении $x = 0$. Канал расположен между плоскостями $y = \pm a$. Будем изучать двумерные течения газа, не зависящие от координаты z . Состояние разреженного газа в точке (x, y) изображающей плоскости xOy в момент времени t определяется функцией распределения молекул по скоростям $f(t, x, y, \xi_x, \xi_y, \xi_z)$, где (ξ_x, ξ_y, ξ_z) – компоненты вектора молекулярной скорости по направлениям (x, y, z) соответственно.

Плотность, скорость газа, напряжение трения, потоки энергии и тепла выражаются тройными интегралами по пространству молекулярных скоростей:

$$\begin{aligned} n &= \int f d\xi, \quad nu_i = \int \xi_i f d\xi, \quad v_i = \xi_i - u_i, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ P_{ij} &= m \int v_i v_j f d\xi, \quad p = \frac{1}{3}(P_{11} + P_{22} + P_{33}), \quad p = mnRT, \\ E_i &= \frac{1}{2} m \int \xi_i \xi_i^2 f d\xi, \quad \xi^2 = \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2, \\ q_i &= \frac{1}{2} m \int v_i v^2 f d\xi, \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где m – масса молекулы, R – газовая постоянная, p – давление, T – температура, v_i – собственная молекулярная скорость.

Предполагаем, что функция распределения удовлетворяет уравнению Больцмана с оператором столкновений в форме S-модели (см. [11]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial f}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial f}{\partial y} &= \delta(f^{(S)} - f), \quad \delta = \frac{p}{\mu}, \\ f^{(S)} &= f^{(M)} \left(1 + \frac{4}{15} S_\alpha C_\alpha \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) \right), \\ f^{(M)} &= \frac{n}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp(-C^2), \quad C_i = \frac{\xi_i - u_i}{\sqrt{2RT}}, \\ \mu &= \frac{5}{16} mn\sqrt{2\pi RT}\lambda, \quad C^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$S_i = \frac{1}{n} \int C_i C^2 f d\xi,$$

где μ – вязкость газа, λ – средняя длина свободного пробега молекул, соответствующая межмолекулярному взаимодействию по закону жестких сфер, δ – частота столкновений, или локальный параметр разреженности (точнее сплошности). Индексы 1, 2, 3 соответствуют направлениям осей x, y, z . Предполагается суммирование по повторяющимся греческим индексам.

Начальные условия:

$$\begin{aligned} f(0; x, y, z; \xi_x, \xi_y, \xi_z) &= f_{0m} = \frac{n_0}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \exp(-C_0^2), \quad x < 0, \\ f(0; x, y, z; \xi_x, \xi_y, \xi_z) &= f_{1m} = \frac{n_1}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \exp(-C_0^2), \quad x > 0, \\ C_0^2 &= \frac{\xi^2}{2RT_0}, \quad \xi^2 = \xi_\alpha \xi_\alpha. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Граничные условия на верхней поверхности канала $y = a$:

$$\begin{aligned} f(t, x, y, z; \xi_x, \xi_y, \xi_z) &= f_w, \quad y = a, \quad \xi_y < 0, \\ f_w &= \frac{n_w(t, x)}{(2\pi RT_w)^{3/2}} \exp(-C_w^2), \quad C_w^2 = \frac{\xi^2}{2RT_w}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Плотность отраженных частиц $n_w(t, x)$ определяется условиями непротекания:

$$\begin{aligned} n_w &= n_0 \frac{N_y}{N_w}, \quad N_y = \int_{\xi_y > 0} \xi_y f d\xi, \quad y = a, \\ N_w &= - \int_{\xi_y < 0} \xi_y \frac{1}{(2\pi RT_w)^{3/2}} \exp(-C_w^2) d\xi. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В случае зеркального отражения молекул от стенок имеем

$$f(x, a, \xi_x, \xi_y, \xi_z) = f(x, a, \xi_x, -\xi_y, \xi_z).$$

Аналогичные условия выполняются на нижней стороне канала $y = -a$.

Интегральной расчетной величиной является расход массы газа M_x , вычисляемый в контрольных сечениях канала:

$$M_x = m \int_{-a}^a n u_x dy = m N_x.$$

В дальнейшем потребуется уравнение неразрывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n u_x}{\partial x} + \frac{\partial n u_y}{\partial y} = 0.$$

Введем интегральную по сечению канала числовую плотность газа

$$N(x, t) = \int_{-a}^a n dy.$$

Интегрируя уравнение неразрывности по сечению канала, получаем закон сохранения массы газа в виде

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N_x}{\partial x} = 0. \quad (1.6)$$

По закону сохранения массы газа между двумя сечениями канала $x = -L$, $x = L$, достаточно удаленными от начального разрыва ($L \gg 1$), где потоки массы равны нулю, имеем

$$m \int_{-a}^a dy \int_{-L}^L n dx \approx m(n_0 + n_1)L. \quad (1.7)$$

Равенство (1.7) служит для дополнительного контроля точности расчетов.

В дальнейшем пользуемся безразмерными величинами. В качестве линейного масштабов длины, скорости, плотности, температуры, потока тепла, функции распределения и вязкости примем величины

$$a, \sqrt{2RT_0}, n_0, T_0, mn_0(2RT_0)^{3/2}, n_0(2RT_0)^{-3/2}, \mu_0 = \frac{5}{16} mn_0\sqrt{2\pi RT_0}\lambda_0,$$

где λ_0 — средняя длина свободного пробега, соответствующая параметрам покоящегося газа n_0, T_0 .

Интегральный поток массы M_x через поперечное сечение канала отнесен к величине $mn_0\sqrt{2RT_0}2a$.

Ниже все безразмерные величины обозначены теми же буквами, что и соответствующие размерные.

Безразмерную частоту столкновений при параметрах покоя n_0, T_0 обозначим через δ_0 (параметр разреженности). Она связана с числом Кнудсена простым соотношением

$$\delta_0 = \frac{8}{5\sqrt{\pi}} \frac{1}{\text{Kn}}, \quad \text{Kn} = \frac{\lambda_0}{a}.$$

Локальную частоту столкновений представляем в виде

$$\delta = \delta_0 \frac{\rho}{\mu}.$$

Решение задачи зависит от параметра разреженности покоящегося газа δ_0 и отношения начальных давлений p_1/p_0 . Приводимые ниже численные результаты получены для $\mu = \sqrt{T}$, что соответствует молекулам-шарам.

2. УПРОЩЕНИЕ ЗАДАЧИ

Поставленная двумерная задача допускает существенное упрощение путем введения редуцированных функций распределения. Число аргументов задачи можно понизить на единицу путем интегрирования полной функции распределения $f(t, x, y, \xi_x, \xi_y, \xi_z)$ по ξ_z и вводя редуцированные функции ϕ, ψ :

$$\phi(t, x, y, \xi_x, \xi_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f d\xi_z, \quad \psi(t, x, y, \xi_x, \xi_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_z^2 f d\xi_z. \quad (2.1)$$

Необходимые макропараметры выражаются через введенные функции в виде

$$\begin{aligned} n &= \int \phi d\xi_x d\xi_y, \quad nu_i = \int \xi_i \phi d\xi_x d\xi_y, \quad i, j = 1, 2, \\ P_{ij} &= \int v_i v_j \phi d\xi_x d\xi_y, \quad P_{33} = \int \psi d\xi_x d\xi_y, \\ \frac{3}{2} n T + n(u_x^2 + u_y^2) &= \int [(\xi_x^2 + \xi_y^2)\phi + \psi] d\xi_x d\xi_y, \\ E_i &= \frac{1}{2} \int \xi_i [(\xi_x^2 + \xi_y^2)\phi + \psi] d\xi_x d\xi_y, \quad q_i = \frac{1}{2} \int v_i [(v_x^2 + v_y^2)\phi + \psi] d\xi_x d\xi_y. \end{aligned}$$

Уравнения (2.1) для ϕ, ψ получаются путем умножения основного кинетического уравнения (в безразмерной форме) на 1 и ξ_z^2 и последующего интегрирования по ξ_z в пределах $(-\infty, +\infty)$ и имеют вид, аналогичный (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \delta(\phi^{(S)} - \phi), \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \delta(\psi^{(S)} - \psi), \\ \phi^{(S)} &= \Phi = \phi^{(M)} \left(1 + \frac{4}{15} S_\alpha C_\alpha (C_\beta C_\beta - 2) \right), \\ \psi^{(S)} &= \Psi = \psi^{(M)} \left(1 + \frac{4}{15} S_\alpha C_\alpha (C_\beta C_\beta - 1) \right), \\ \phi^{(M)} &= \frac{n}{\pi T} \exp(-C_\beta C_\beta), \quad \psi^{(M)} = \frac{1}{2} T \phi^{(M)}, \quad a, \beta = 1, 2, \\ C_i &= v_i T^{-1/2}, \quad S_i = 2q_i n^{-1} T^{-3/2}, \quad \mu = T^\omega. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Начальное условие (1.3) и граничные условия (1.4), (1.5) переписываются соответствующим образом:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\pi} \exp(-(\xi_x^2 + \xi_y^2)), & \psi &= \frac{1}{2} \phi, & t &= 0, & x < 0, \\ \phi &= \frac{n_1}{n_0} \frac{1}{\pi} \exp(-(\xi_x^2 + \xi_y^2)), & \psi &= \frac{1}{2} \phi, & t &= 0, & x > 0. \end{aligned}$$

Граничные условия на верхней поверхности канала $y = a$ при $T_w = T_0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_w, & t > 0, & & y = a, & & \xi_y < 0, \\ \phi_w &= \frac{n_w(t, x)}{\pi} \exp(-(\xi_x^2 + \xi_y^2)), \\ n_w &= -2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_x \int_{-\infty}^0 \xi_y \phi d\xi_y. \end{aligned}$$

Аналогичное условие выполняется на нижней стороне канала $y = -a$.

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим одномерные решения, предельные по параметру разреженности. Для простоты скорость газа обозначаем просто через u . Обратимся сначала к свободномолекулярному пределу $\text{Kn} = \infty$. В этом случае функция распределения зависит от разности $x - \xi_x t$. Согласно разрывному начальному условию (1.3) она равна начальному равновесному максвелловскому распределению с плотностью n_0 при $x - \xi_x t < 0$ и с плотностью n_1 при $x - \xi_x t > 0$. С использованием разрывной ступенчатой функции Хевисайда $\eta(x)$ решение кинетического уравнения (1.2) записывается в виде

$$\begin{aligned} f(x, t; \xi_x, \xi_y, \xi_z) &= f_{0m} \eta(\xi_x t - x) + f_{1m} \eta(x - \xi_x t), \\ \eta(x > 0) &= 1, & \eta(x < 0) &= 0. \end{aligned}$$

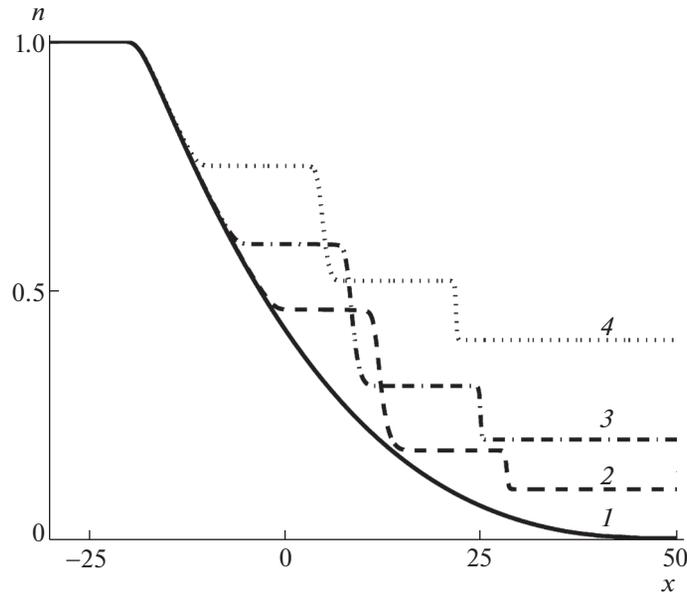
Распределения плотности и расхода газа получаются интегрированием соответствующих выражений в формулах (1.1) с учетом (1.3) по ξ_y и по ξ_z в пределах $(-\infty, +\infty)$, а по ξ_x — в пределах от x/t до $+\infty$ для первого слагаемого и от $-\infty$ до x/t для второго. В результате получаем

$$\begin{aligned} n &= \frac{n_0 + n_1}{2} - \frac{n_0 - n_1}{2} \Phi\left(\frac{x}{t}\right), \\ nu &= \frac{n_0 - n_1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{t^2}\right), & \Phi(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-x^2) dx, \end{aligned}$$

где $n_0 = 1$ и оставлено в формулах ради симметрии обозначений.

Примечательно, что плотность — монотонная функция координаты и что расход газа в сечении начального разрыва $x = 0$ оказывается максимальным и остается постоянным во все время процесса.

В газодинамическом пределе $\text{Kn} = 0$ поле течения распадается на пять областей (см. [12]): 1) область 0 невозмущенного газа высокого давления (толкающий газ) и область 1 невозмущенного газа низкого давления (вытесняемый газ); 2) область изэнтропического расширения газа высокого давления в центрированной волне разрежения от начального состояния 0 до конечного состояния 3; 3) область 3 постоянных параметров толкающего газа и, наконец, 4) область 2 однородного потока вытесняемого газа с постоянными параметрами p_2, n_2, T_2, u_2 , сформировавшаяся в результате сжатия газа первоначально низкого давления в ударной волне. Скорость $u_2 = V$ — скорость спутного потока за ударной волной, которая перемещается со скоростью U_s . Таким образом, толкающий газ располагается в областях 0 и 3 и расположенной между ними области волны расширения, а вытесняемый газ — в областях 1 и 2. Оба газа разделены плоским контактным разрывом, движущимся с постоянной скоростью по закону $x = Vt$. На контакте разрыв претерпевают температура и плотность, в то время как скорость и давление остаются непрерывными.



Фиг. 1.

ми, т.е. $u_2 = u_3, p_2 = p_3$. Состояние газа в области 3 связано с состоянием покоя газа в области 0 формулами изэнтропического расширения газа в центрированной волне разрежения:

$$u_3 + 3c_3 = 3c_0, \quad \frac{n_3}{n_0} = \left(\frac{c_3}{c_0}\right)^3, \quad \frac{p_3}{p_0} = \left(\frac{c_3}{c_0}\right)^5, \quad (3.1)$$

где c – скорость звука, $c_0 = \sqrt{5/6}$ – скорость звука в покоящемся газе. Формулы выписаны для одноатомного газа, для которого отношение удельных теплоемкостей $\gamma = c_p/c_v = 5/3$.

Область 3 ограничена справа контактными разрывом $x = Vt$, а слева – характеристикой $x = (u_2 - c_3)t$. В последнем равенстве учтено, что $u_3 = u_2$. Значение c_3 определяется последним равенством из (3.1) при условии, что $p_3 = p_2$.

К выписанным зависимостям добавляются соотношения на ударной волне. В результате получается формула, определяющая скорость ударной волны (точнее число Маха ударной волны M_1) по заданному начальному отношению давлений в отсеках канала. По найденному числу Маха вычисляются скорость спутного потока V и отношение давлений p_2/p_1 :

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{1}{4}(5M_1^2 - 1) \left[1 - \frac{1}{4} \left(M_1 - \frac{1}{M_1} \right) \right]^{-5},$$

$$V = \frac{6}{5} \left(M_1 - \frac{1}{M_1} \right) c_1, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{5}{4} M_1^2 - \frac{1}{4}, \quad M_1 = \frac{U_s}{c_1}, \quad c_1 = c_0.$$

Расход газа достигает максимума в сечении $x = 0$, где все параметры газа мгновенно устанавливаются и остаются постоянными в течение всего времени движения. Скорость газа становится равной скорости звука, называемой *критической*. Критическими становятся плотность и расход газа через единицу площади поперечного сечения:

$$x = 0 : u = c = c_* = \frac{3}{4} c_0,$$

$$n_* = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \approx 0.422, \quad n_* u_* = \left(\frac{3}{4}\right)^4 c_0 \approx 0.289.$$

Газодинамическое решение справедливо в пределе $Kn = 0$ независимо от характера граничных условий на стенках канала.

В обоих рассматриваемых предельных случаях течение автомодельно, параметры течения зависят от комбинации независимых переменных x/t .

В случае зеркального отражения молекул от стенок торможения газа не происходит, решение не зависит от y , движение газа остается одномерным независимо от степени его разреженности. Газ движется вдоль оси канала, как если бы стенок не было. Влияние числа Кнудсена проявляется только в формировании структур ударной волны, контактного разрыва и волны разрежения.

На фиг. 1 изображены распределения плотности в случае расширения газа с учетом столкновений при различных противодавлениях при зеркальном граничном условии для числа Кнудсена $\text{Kn} = 0.01$ и времени $t = 10$, кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют противодавлениям $n_1 = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4$.

Видно, что при зеркальном отражении молекул от стенок течение близко к газодинамическому в областях постоянных параметров потока и в области центрированной волны расширения. Кинетические эффекты проявляются в формировании структуры ударной волны и в размывании контактного разрыва. Повышение противодавления приводит к падению скорости ударной волны и спутного потока за ней.

4. О ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Для численного решения кинетического уравнения использовалась явная разностная схема Колгана (см. [13]) первого порядка аппроксимации по времени и второго по пространственным переменным. Применительно к решению кинетического уравнения алгоритм вычислений подробно описан в [14], [15]. Здесь ограничимся тем, что выпишем разностную схему решения на сетке (x_i, y_j) с постоянными шагами $\Delta x, \Delta y$. Для краткости введем обозначения

$$\phi(i, j) = \phi(x_i, y_j, \xi_x, \xi_y), \quad \phi^S = \Phi.$$

В этих обозначениях расчетная схема для уравнения (2.2) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\phi^{n+1}(i, j) - \phi^n(i, j)}{\Delta t} + \xi_x \frac{\phi^n(i + 1/2, j) - \phi^n(i - 1/2, j)}{\Delta x} + \\ & + \xi_y \frac{\phi^n(i, j + 1/2) - \phi^n(i, j - 1/2)}{\Delta y} = \delta^n(i, j)(\Phi^n(i, j) - \phi^n(i, j)), \end{aligned}$$

где верхний индекс n относится к моменту времени t_n , а индекс $n + 1$ — к моменту $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Узлы x_i, y_j расположены в центрах ячеек, а узлы $(x_{i+1/2}, y_j), (x_{i-1/2}, y_j), (x_i, y_{j+1/2}), (x_i, y_{j-1/2})$ располагаются на серединах граней ячеек. Значения функции $\phi^n(i - 1/2, j), \phi^n(i, j - 1/2)$ известны из расчета соседних ячеек или из граничных условий. Искомые значения $\phi^n(i + 1/2, j), \phi^n(i, j + 1/2)$ рассчитываются при помощи аппроксимации Колгана из [13]. Так, величина $\phi^n(i + 1/2, j)$ определяется через разностные производные $D_{i-1/2}, D_{i+1/2}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \phi^n(i + 1/2, j) &= \phi^n(i, j) + \min \text{mod}(D_{i+1/2}, D_{i-1/2}) \frac{\Delta x}{2}, \\ D_{i-1/2} &= \frac{\phi^n(i, j) - \phi^n(i - 1, j)}{x_i - x_{i-1}}, \quad D_{i+1/2} = \frac{\phi^n(i + 1, j) - \phi^n(i, j)}{x_{i+1} - x_i}, \end{aligned}$$

где использовано ограничение наклонов $\min \text{mod}(x, y)$:

$$\min \text{mod}(x, y) = \frac{1}{2}(\text{sign} x + \text{sign} y) \min(|x|, |y|).$$

Шаг сетки по пространству и шаг интегрирования по времени выбирался в зависимости от числа Кнудсена. В типичном варианте $\text{Kn} = 0.01$ принималось $\Delta x = 0.01, \Delta y = 0.01, \Delta t = 0.001$.

Интегрирование по молекулярной скорости выполнялось методом трапеций с равномерным шагом $\Delta \xi_x = \Delta \xi_y = 12/49$ в пределах по ξ_x, ξ_y , которые слабо зависят от противодавления. В максимальном варианте, соответствующем истечению в вакуум, принималось $-6 < \xi_x, \xi_y < 6$.

Расчет макропараметров газа производился методом, описанным в [16].

Особенностью течения является то, что область течения расширяется со временем. В связи с этим в целях экономии область интегрирования по x расширялась с ростом t . Например, при рас-

чете на интервале по времени ($0 < t < 1$) по x счет велся в пределах ($-L_1 < x < +L_1$), при ($1 < t < 10$) пределы по x расширялись до ($-L_2 < x < +L_2$), а при ($10 < t < 100$) – до ($-L_3 < x < +L_3$) и т.д.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

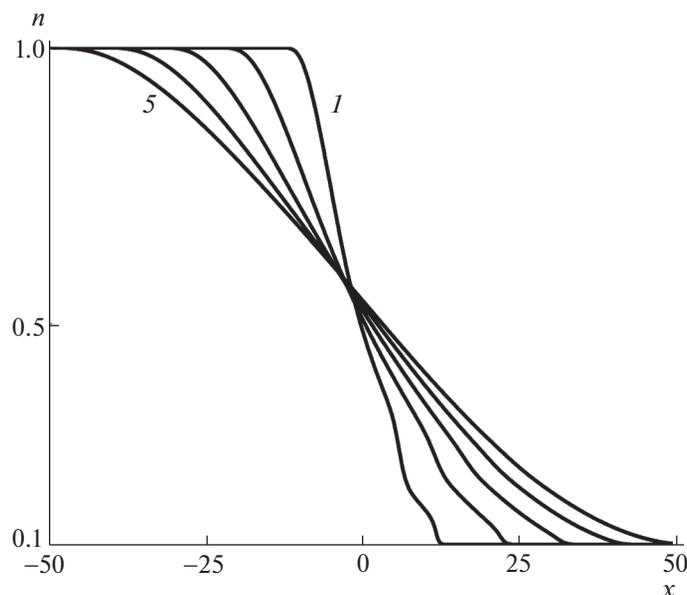
Для двумерных течений при диффузном законе отражения молекул от стенок расчеты выполнялись для следующих значений параметра разреженности: $Kn = \infty, 1.0, 0.1, 0.01$.

Тормозящее действие границ канала на характер течения проявляется сильнее всего в свободномолекулярном режиме, ослабевает с уменьшением числа Кнудсена и сводится к нулю в газодинамическом пределе. В свободномолекулярном течении распределение плотности по оси канала в любой момент времени монотонно, т.е. подобно распределению плотности при расширении в вакуум (см. [10]). Расчеты показывают, что даже при $Kn = 0.1$ распределение плотности по оси x остается монотонным. Впрочем, это не удивительно, так как число Кнудсена, определенное по параметрам газа 1, равно единице, т.е. средняя длина свободного пробега равна полуширине канала. Структура ударной волны и вся характерная немонотонная картина течения отчетливо видна при $Kn = 0.01$. По этой причине основным расчетным значением параметра разреженности было принято $Kn = 0.01$.

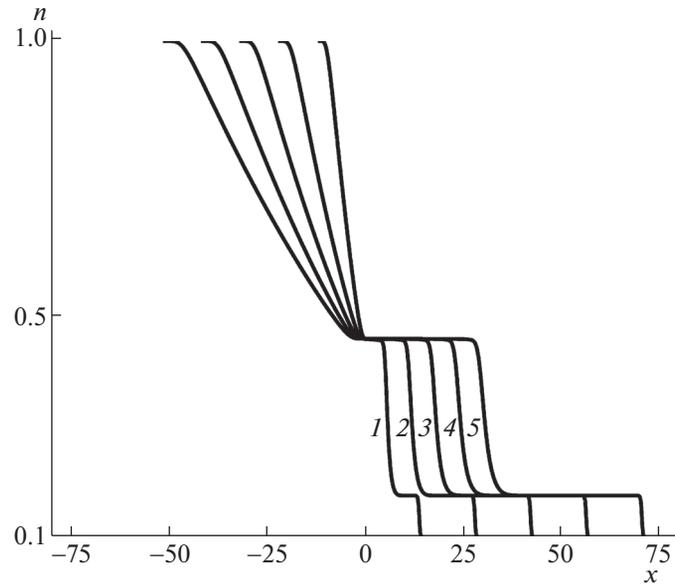
Применялась модель межмолекулярного взаимодействия по закону жестких сфер.

Влияние торможения газа вследствие потери импульса при диффузном законе отражения молекул от стенок канала характеризуется отклонением решения от соответствующего решения при зеркальном отражении частиц от границ (которое одномерно). В [10] изучено влияние торможения газа на стенках канала при отсутствии противодавления. Появление противодавления приводит к появлению ударной волны, а повышение противодавления ведет к падению скорости ударной волны и спутного потока за ней. В свою очередь, трение на стенках канала также приводит к замедлению потока газа. Однако оба эффекта проявляют себя по-разному. Противодавление производит эффект мгновенного удара (как в газодинамическом пределе) или кратковременного силового воздействия (как в кинетическом режиме), в результате чего скорость потока и другие параметры газа испытывают конечные изменения. В противоположность этому торможение газа на стенках происходит непрерывно, силовое воздействие трения возрастает по мере увеличения объема газа, вовлеченного в движение. На фиг. 1 приведено распределение плотности газа для различных значений противодавления n_1 .

На фиг. 2 изображены распределения плотности вдоль оси канала для числа Кнудсена $Kn = 0.01$ при значении плотности в камере низкого давления $n_1 = 0.1$. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют



Фиг. 2.



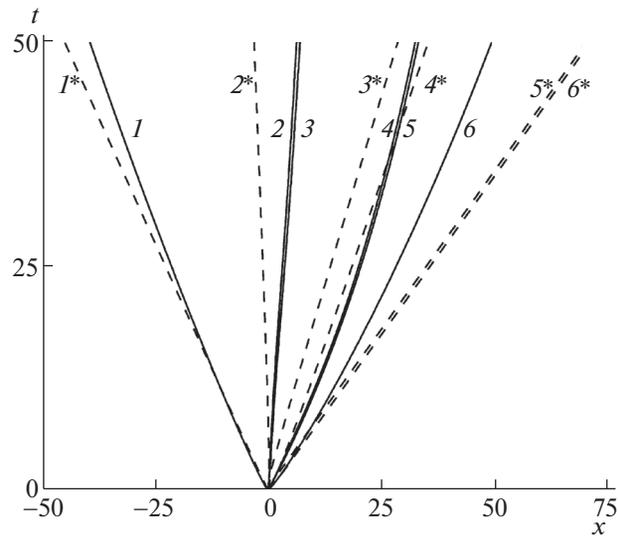
Фиг. 3.

моментам времени $t = 10, 20, 30, 40, 50$ (на фигуре обозначения кривых 2, 3, 4 опущены из-за близости кривых). Видно, что детали неравномерного распределения плотности, порожденные действием противодействия, со временем изглаживаются, так что уже при $t = 50$ распределение плотности становится монотонным и близким к предельному при $\text{Kn} \rightarrow \infty$ (на фигуре нанесено символами). Повышение противодействия лишь слегка затягивает процесс выравнивания не-монотонностей на кривых распределения плотности (скорости и других макропараметров) по x .

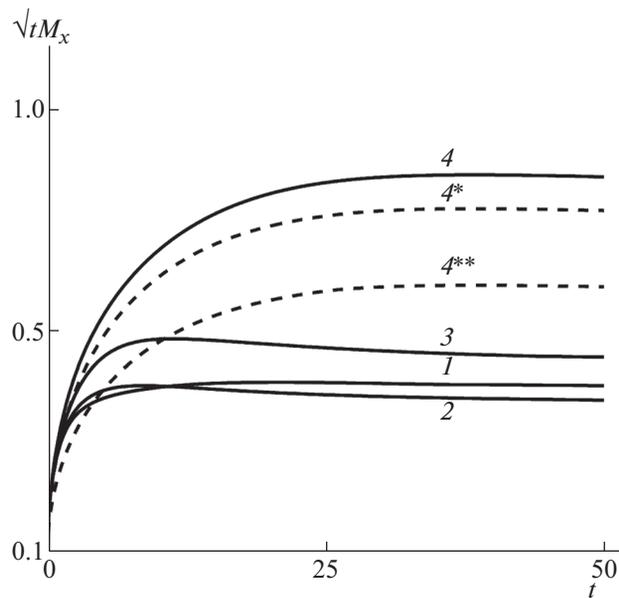
Для сравнения на фиг. 3 представлены такие же распределения плотности для тех же моментов времени и того же числа Кнудсена при зеркальном законе отражения молекул от стенок канала. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют моментам времени $t = 10, 20, 30, 40, 50$. Видно, во-первых, что характер кривых распределения плотности со временем не изменяется и, во-вторых, что скорость распространения волны остается постоянной, в то время как при диффузном отражении явно видно замедление скорости распространения волны.

Замедление фронта волны вследствие торможения газа на стенках канала иллюстрирует фиг. 4, где на плоскости (x, t) изображены зависимости линии равной плотности $n(x, t) = \text{const}$. Сплошными линиями на фиг. 4 обозначены линии равной плотности для диффузного отражения от стенок, пунктирными – для зеркального. Кривые 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 1*, 2*, 3*, 4*, 5*, 6* соответствуют значениям плотности $n = 0.98, 0.465, 0.455, 0.180, 0.175, 0.102$. Координаты фиктивного фронта волны сжатия $x_s(t)$ будем характеризовать поведением координаты на профиле структуры ударной волны, где $n(x, t) = 1/2(n_1 + n_2)$, причем n_2 – газодинамическое значение плотности газа за ударной волной. Со временем ударная волна расширяется. Процесс расширения на фиг. 3 иллюстрируется расхождением кривых равной плотности $n(x, t) = n_2(1 - 0.02) \approx 0.175$ и $n(x, t) = n_1(1 + 0.02) \approx 0.102$. Расширение зоны газодинамического контактного разрыва характеризуется аналогичным образом, именно по расхождению кривых равной плотности $n(x, t) = n_3(1 - 0.02) \approx 0.455$ и $n(x, t) = n_2(1 + 0.02) \approx 0.180$. Видно, что все кривые равной плотности заметно отклоняются от прямых, соответствующих предельному газодинамическому решению, и с ростом времени выходят на кривые, напоминающие параболы, как это имело место при расширении в вакуум (см. [10]). Там же изображены соответствующие линии равной плотности для зеркального отражения от твердой поверхности.

Эффект торможения газа на стенках канала особенно ярко проявляется в поведении со временем потока массы M_x через контрольное сечение $x = 0$. При больших t поток массы убывает почти как $1/\sqrt{t}$, что указывает на диффузионный характер развития процесса. Для того чтобы под-



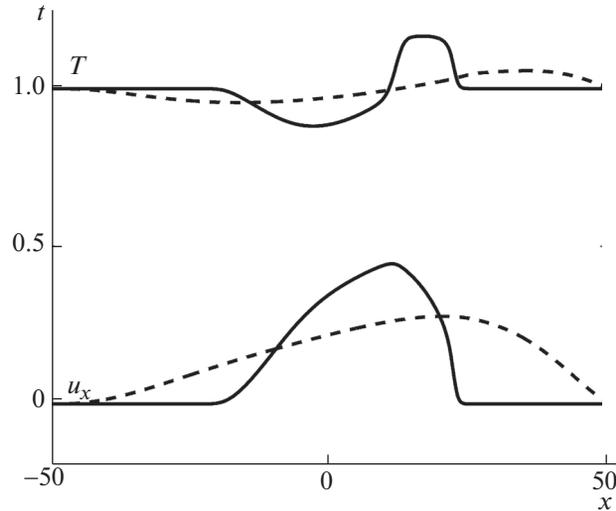
Фиг. 4.



Фиг. 5.

черкнуть эту закономерность, на фиг. 5 нанесены величины произведений $\sqrt{t} M_x$. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют числам Кнудсена $Kn = \infty, 1.0, 0.1, 0.01$. При $t \rightarrow \infty$ эти произведения выходят на константы. Для иллюстрации роли противодавления на той же фиг. 5 штриховыми линиями изображены кривые зависимости $\sqrt{t} M_x$ для $Kn = 0.01$ при $n_1 = 0.2, 0.4$ – кривые 4*, 4** соответственно.

Для полноты картины течения на фиг. 6 представлены распределения скорости потока и температуры газа вдоль оси $y = 0$ для $Kn = 0.01$ в моменты времени $t = 20$ (сплошные линии) и $t = 50$ (штриховые линии).



Фиг. 6.

6. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРИ $t \rightarrow \infty$

При больших t все градиенты становятся малыми, распределения макропараметров по координатам монотонными, а течение медленным. В этих условиях следует ожидать упрощения задачи.

В [4] предложен приближенный метод решения нестационарных задач о течениях разреженного газа в длинных трубках. Метод, названный авторами общим подходом, является распространением метода из [17], приспособленным для расчета стационарных течений в длинных трубках при конечных перепадах давления на концах трубы. Метод из [4] по построению является квазиодномерным диффузионным приближением строгого решения нестационарной задачи. Подобно методу из [17], он не учитывает концевые эффекты и потому может быть рекомендован только для очень длинных труб. Помимо этого, он не описывает начальную стадию процесса и вообще течения, для которых в уравнениях движения существенную роль играют инерционные члены, т.е. течения, подобные тем, что рассмотрены выше. Метод из [4] приспособлен только для медленных изменений течений. Обоснования предложенного метода работа [4] не содержит. Ниже дан вывод этого подхода как результат асимптотического анализа решения задачи при больших временах.

Обратимся к основному уравнению (1.2), записанному в безразмерных переменных, и произведем оценку членов уравнения при условии $t \rightarrow \infty$, когда процесс становится медленным, а градиенты макропараметров малыми.

Пусть t_* , L_* – характерные масштабы времени и протяженности области возмущения по x . Первое слагаемое в левой части уравнения имеет порядок $O(1/t_*)$, второе – $O(c_0/L_*)$, а третье – $O(1)$. При отсутствии стенок $L_* \approx c_0 t_*$. Анализ численных результатов показывает, что вследствие торможения газа имеем $L_* \approx \sqrt{c_0 t_*} \rightarrow 0$ при $t_* \rightarrow \infty$. Таким образом, первые два слагаемых малы по сравнению с третьим, их можно отбросить. В результате кинетическое уравнение становится одномерным стационарным и принимает тот же вид, что и в случае установившихся течений:

$$\xi_y \frac{\partial f}{\partial y} = \delta(f_{(S)} - f).$$

При $\delta < \infty$ это уравнение имеет простейшее решение, удовлетворяющее граничному условию диффузного отражения и соответствующее локальному и мгновенному равновесию со стенкой:

$$f = f^{(S)} = f_w = n_w(x, t) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2), \quad n_w(x, t) = n(x, t).$$

Плотность $n(x, t)$ находится из интегрального закона сохранения массы. Полученное выражение является нулевым приближением к решению задачи по малому параметру $1/L_*$, но не описывает течение. Чтобы ввести в рассмотрение потоки, решение ищем в виде

$$f = f_w(1 + h), \quad |h| \ll 1.$$

Для линейной поправки h получается уравнение

$$\xi_y \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{f_w} \delta(f_{(s)} - f) - \frac{\partial \ln f_w}{\partial t} - \xi_x \frac{\partial \ln f_w}{\partial x}. \quad (6.1)$$

Очевидно, что это уравнение не совпадает с уравнением линейной теории стационарных течений в каналах из-за наличия производной по времени. Однако приведенные выше численные результаты показывают, что $L_* \approx \sqrt{t_*}$. Таким образом, производная по времени имеет более высокий порядок малости при $t_* \gg 1$ по сравнению с производной по x и может быть отброшена. В результате уравнение (6.1) принимает привычный вид для стационарных течений линейной теории:

$$\xi_y \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{f_w} \delta(f_{(s)} - f) - \xi_x \frac{\partial \ln f_w}{\partial x}. \quad (6.2)$$

Однако в этом уравнении имеется не один, а два свободных параметра: x и t . Таким образом, приходим к выводу, что при достаточно больших временах, когда градиенты становятся малыми, в любом сечении x из окрестности $x = 0$ и в любой момент времени из окрестности $t = \infty$ справедлива линейная теория медленных установившихся течений в бесконечно длинном канале. Градиент плотности в уравнении (6.2) считается заданным. В данном случае он находится из уравнения массы (1.6). По теории длинной трубы для расхода массы имеем

$$M_x = M_p \frac{\partial p}{\partial x} = M_n \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.6), получаем для определения плотности уравнение диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} M_n \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (6.3)$$

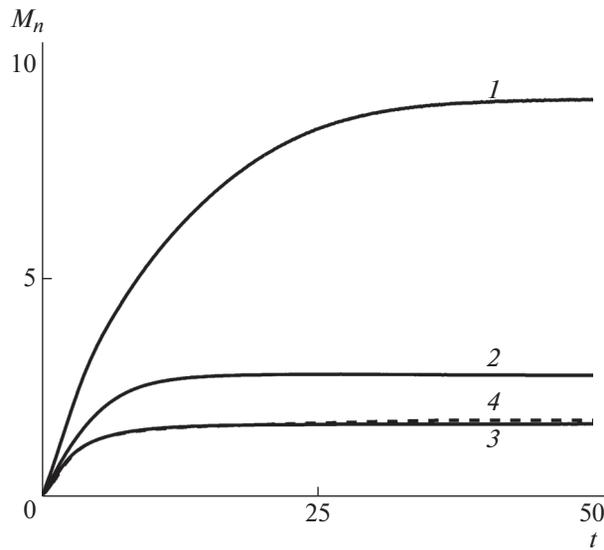
Если коэффициент M_n известен из каких-либо соображений, то распределение плотности находится элементарно путем интегрирования уравнения (6.3).

Выбор коэффициента M_n (или M_p) – принципиальный момент асимптотического анализа. В формуле (6.3) подразумевается, что он определяется локальным числом Кнудсена в момент времени t . В методе из [4] число Кнудсена принимается постоянным и соответствующим теории бесконечно длинного канала. Такой подход не всегда работает. Например, для свободномолекулярного течения в длинном канале этот прием не проходит (M_p для бесконечно длинной трубы обращается в бесконечность), хотя нестационарное течение существует. Причина в том, что приведенный расход зависит не только от параметра разреженности, но и от характерной длины L_* . В рассматриваемой задаче характерный размер течения L_* конечен и растет вместе с ростом характерного времени наблюдения t_* . Таким образом, при определении коэффициента расхода M_p следует обращаться к теории течений в каналах конечной, а не бесконечной длины. Более того, параметром подобия в таких течениях (как в стационарных, так и в нестационарных) является произведение $\text{Kn}L_*$. При малых числах Кнудсена течение можно считать квазиодномерным только при $\text{Kn}L_* \gg 1$, а не просто при $L_* \gg 1$.

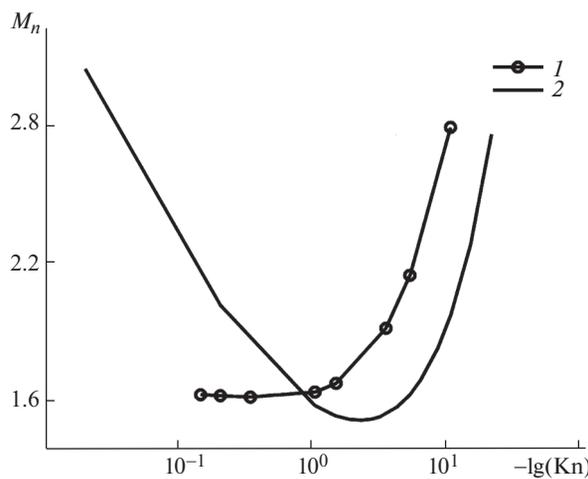
В данной работе, как и в [10], используется простейший способ определения коэффициента диффузии M_n . Эту величину берем из решения полной нестационарной задачи для заданного числа Кнудсена, равной отношению

$$M_n = M_n^0 = \frac{M_x^0}{\partial n / \partial x_0}, \quad (6.4)$$

где индекс 0 означает, что все величины взяты в сечении $x = 0$ при достаточно большом t , когда это отношение выходит практически на константу. Результаты расчетов, представленные на фиг. 7, подтверждают, что такая константа существует. На фигуре изображены зависимости от



Фиг. 7.



Фиг. 8.

времени отношения (6.4) для различных чисел Кнудсена. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют числам Кнудсена $Kn = 0.01, 0.1, 1.0, \infty$. Константа пропорциональности своя для каждого числа Kn , но зависимость от параметра разреженности слабая, так что в первом приближении зависимость от времени масштаба течения можно пренебречь. Таким образом, решение задачи можно продолжить по времени до сколь угодно больших значений t .

Примечательная особенность расположения кривых на фиг. 7 состоит в том, что при больших временах наблюдается немонотонная зависимость от числа Кнудсена: кривая для свободномолекулярного решения лежит выше кривой для $Kn = 1$. Такое расположение соответствует наличию минимума приведенного расхода (минимум Кнудсена). Чтобы подчеркнуть эту особенность поведения величины M_n , на фиг. 8 символами и интерполирующей кривой представлены расчетные значения M_n в сравнении с теоретической кривой приведенного расхода для стационарного течения между параллельными пластинами под действием малого градиента давления (см. [18]). При этом учтено, что число Кнудсена взято в сечении $x = 0$, где вычисляется градиент плотности. Видно, что обе зависимости весьма близки друг к другу, хотя в точности не совпадают. Однако следует иметь в виду, что решение в [18] получено для канала бесконечной длины при линейной

постановке задачи, когда скорость течения мала и постоянна. В рассмотренной нестационарной задаче скорость переменна и при не слишком больших t может достигать значительных величин.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численным методом конечных разностей на основе кинетической S-модели решена задача о нестационарном движении разреженного газа в плоском канале между двумя бесконечными параллельными пластинами при условии, что в начальный момент покоящийся газ разделен перегородкой (мембраной) на две половины с различными значениями давления по каждую сторону от мембраны. Изучено тормозящее действие стенок канала при диффузном законе отражения молекул от поверхности. Расчетами установлено, что при достаточно больших временах имеет место выход на предельный диффузионный режим течения. Асимптотический анализ задачи при $t \rightarrow \infty$ приводит к выводу о существовании квазиодномерного медленного (диффузионного) режима течения, в котором поток массы через сечение канала в каждый момент времени пропорционален градиенту средней плотности газа. Коэффициент пропорциональности определяется как соответствующий локальный коэффициент по теории медленных течений в каналах конечной, а не бесконечной длины. Предложен простой способ асимптотического продолжения решения на большие времена. Сравнение по приведенному расходу с результатами стационарной линейной теории обнаруживает удовлетворительное согласие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sharipov F., Seleznev V.* Data on internal rarefied gas flows // *J. Phys. Chem. Ref. Data.* 1998. V. 27. № 3. P. 657–706.
2. *Шарипов Ф.М., Селезнев В.Н.* Движение разреженного газа в каналах и микроканалах. Екатеринбург: Уральское отделение РАН, 2008. С. 230.
3. *Sharipov F.* Transient flow of rarefied gas through a short tube // *Vacuum* 90. 2013. P. 25–30.
4. *Sharipov F., Graur L.A.* General approach to transient flows of rarefied gas through long capillaries // *Vacuum* 100. 2014. V. 100. P. 22–25.
5. *Клосс Ю.Ю., Черемисин Ф.Г., Шувалов П.В.* Решение уравнения Больцмана для нестационарных течений с ударными волнами в узких каналах // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2010. Т. 50. № 6. С. 1148–1158.
6. *Zeitoun D.E., Graur L.A., Burtshell Y., Ivanov M.S., Kudrayvtsev A.N., Bondar Ye.A.* Continuum and kinetic simulation of shock wave propagation in long microchannel // *Rarefied Gas Dynamics. 26th Intern. Symposium on RGD.* Melville, New York, 2009. AIP Conference Proc. V. 1084. P. 964–969.
7. *Nobuya Mioshi, Shuhei Nagata, Ikuya Kinefuchi, Kazuya Shimizu, Shu Takagi, Yoichiro Matsumoto.* Development of ultra small shock tube for high energy molecular beam source // *26th Internat. Symp. Rarefied Gas Dynamics.* AIP Conf. Proc. 1084. Melville, New York, 2009. P. 557–562.
8. *Ларина И.Н., Рыков В.А., Шахов Е.М.* Развитие течения разреженного газа между параллельными пластинами из-за начального разрыва давления // *Докл. АН.* 1995. Т. 343. № 4. С. 482–485.
9. *Ларина И.Н., Рыков В.А., Шахов Е.М.* Нестационарные течения разреженного газа между параллельными пластинами // *Изв. РАН. Механ. жидк. и газа.* 1997. № 2. С. 165–173.
10. *Конопелько Н.А., Титарев В.А., Шахов Е.М.* Торможение разреженного газа в микроканале при расширении в вакуум // *Изв. РАН. Механ. жидк. и газа.* 2015. № 2. С. 155–167.
11. *Шахов Е.М.* Об обобщении кинетической модели Крука // *Изв. АН СССР. Механ. жидк. и газа.* 1968. № 5. С. 142–145.
12. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: ГИТТЛ, 1957. С. 784.
13. *Колган В. П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений уравнений газовой динамики // *Уч. записки ЦАГИ.* 1972. Т. III. № 6. С. 68–77.
14. *Ларина И.Н., Рыков В.А.* Расчет течений двухатомного разреженного газа через плоский микроканал // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2012. Т. 52. № 4. С. 720–731.
15. *Ларина И.Н., Рыков В.А.* Численное исследование течений двухатомного разреженного газа через плоский канал в вакуум // *Изв. РАН. Механ. жидк. и газа.* 2013. № 3. С. 117–130.
16. *Титарев В.А.* Численный метод расчета двумерных нестационарных течений разреженного газа в областях произвольной формы // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2009. Т. 49. № 7. С. 1255–1270.
17. *Sharipov F., Seleznev V.D.* Rarefied gas flow through a long tube at any pressure ratio // *J. Vac. Sci. Technol. A.* 1994. V. 12. № 5. P. 2933–2935.
18. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.