А. В. Глушко, Е. А. Логинова, В. Е. Петрова, А. С. Рябенко, Изучение стационарного распределения тепла в плоскости с трещиной при переменном коэффициенте внутренней теплопроводности, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2015, том 55, номер 4, 695–703

DOI: 10.7868/S0044466915040055

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2015, том 55, № 4, с. 695–703

УДК 517.9

ИЗУЧЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛА В ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ВНУТРЕННЕЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2015 г. А. В. Глушко, Е. А. Логинова, В. Е. Петрова, А. С. Рябенко

(394006 Воронеж, Университетская пл., 1, ВГУ)

e-mail: mail@angl.ru, vangog2007@list.ru, vera_petrova@math.vsu.ru, alexr-83@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.02.2011 г.

Доказано существование решения задачи, моделирующей стационарное распределение тепла в неоднородной плоскости с трещиной, вычислены явные представления сингулярных членов асимптотического разложения теплового потока в окрестности концов трещины. Библ. 10.

Ключевые слова: трещина, тепловой поток, сингулярность, асимптотики.

DOI: 10.7868/S0044466915040055

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время внимание многих исследователей привлекают математические модели, описывающие физические свойства функционально-градиентных материалов (ФГМ) с трещинами. *ФГМ* называют материалы, свойства которых изменяются вдоль некоторого направления. Существует большое количество работ, посвященных разнообразным задачам, возникающим при исследовании ФГМ, обзор этих работ можно найти в [1]. В частности, активно исследуются задачи, моделирующие как стационарное, так и нестационарное распределение температуры в ФГМ, причем особый интерес представляет исследование решений в окрестности трещины, так как именно эта часть материала наиболее подвержена разрушениям (см. [2]).

В настоящее время достигнут прогресс в численном моделировании ФГМ. Так, в [3] для численного исследования ФГМ использовались методы конечных элементов, граничных интегральных уравнений и их различные модификации. Численные методы исследования ФГМ, опирающиеся на применение интегральных уравнений, основаны на использовании явных фундаментальных решений соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных. Однако такие фундаментальные решения построены только для простейших случаев, когда свойства материала изменяются экспоненциально (см. [4]), что, естественно, является существенным ограничением.

Большой цикл работ (см., например, [5] и список литературы в этой работе) трактует трещину в ФГМ как линию на границе области, в которой рассматривается смешанная задача для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами. Именно на этой линии происходит смена типа краевых условий. Авторам данных работ удалось получить оценку асимптотики решения этой задачи по расстоянию до линии трещины.

В данной работе рассматривается задача, моделирующая стационарное распределение температуры в плоскости с трещиной при переменном коэффициенте внутренней теплопроводности. Коэффициент внутренней теплопроводности задается функцией $G(x_2) = e^{k(x_2)}$, где функция $k(x_2)$ может быть отличной от функции $kx_2 + k_1$ ($k \equiv \text{const} \neq 0$, $k_1 \equiv \text{const}$).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 U(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + k'(x_2)\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash l, \tag{1}$$

где $l = [-1;1]\times\{0\}$, дополненное граничными условиями

$$U(x_1,+0) - U(x_1,-0) = e^{-\frac{k(0)}{2}} q_0(x_1), \tag{2}$$

$$\frac{\partial U(x_1,+0)}{\partial x_2} + \frac{k'(0)}{2}U(x_1,+0) - \frac{\partial U(x_1,-0)}{\partial x_2} - \frac{k'(0)}{2}U(x_1,-0) = e^{-\frac{k(0)}{2}} q_1(x_1), \tag{3}$$

где $x_1 \in (-1;1)$.

Определение. *Решением задачи* (1)–(3) назовем функцию $U(x_1,x_2)$, принадлежащую $C^2(\mathbb{R}^2\backslash l)$ и удовлетворяющую уравнению (1) в области $\mathbb{R}^2\backslash l$, для которой в смысле главного значения при x_1, принадлежащем $(-1;1)$, выполнены граничные условия (2), (3), и такую, что функции $U(x_1,x_2)$, $x_2\dfrac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2}$ и $\dfrac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2} - \dfrac{\partial U(x_1,-x_2)}{\partial x_2}$ ограничены в окрестности трещины l.

Отрезок $l = [-1;1]\times\{0\}$ моделирует трещину, условия (2) и (3) описывают соответственно скачок температуры и нормального теплового потока на берегах трещины. Необходимость выбора именно таких краевых условий для данной задачи обсуждалась в [6].

Целью работы является доказательство существования решения задачи (1)–(3) и построение точных представлений сингулярных членов асимптотических разложений решения $U(x_1, x_2)$ и его производных $\dfrac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_k}$, $k = 1,2$, в окрестностях концов трещин, т.е. асимптотических разложений в точках $(\pm 1, 0) \in \mathbb{R}^2$.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Основным методом решения поставленной задачи будет служить установление связи между решением задачи (1)–(3) и решением вспомогательной задачи с *постоянным коэффициентом*, которая будет описана ниже.

Вспомогательная задача состоит из уравнения

$$\frac{\partial^2\tilde{u}(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + k\frac{\partial\tilde{u}(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\backslash l, \tag{4}$$

дополненного граничными условиями

$$\tilde{u}(x_1,+0) - \tilde{u}(x_1,-0) = q_0(x_1), \tag{5}$$

$$\frac{\partial\tilde{u}(x_1,+0)}{\partial x_2} + \frac{k}{2}\tilde{u}(x_1,+0) - \frac{\partial\tilde{u}(x_1,-0)}{\partial x_2} - \frac{k}{2}\tilde{u}(x_1,-0) = q_1(x_1), \tag{6}$$

где $x_1 \in (-1;1)$.

Отметим, что краевая задача (4)–(6) изучалась в [6], в которой также можно найти достаточный обзор литературы по данной теме. Задача (4)–(6) моделирует стационарное распределение температуры в неоднородной плоскости с трещиной. Неоднородность материала описывается функцией $k(x_2) = G_0 e^{kx_2}$, где $G_0 \equiv \mathrm{const} \neq 0$, $k \equiv \mathrm{const} \neq 0$.

Поскольку результаты настоящей работы развивают и используют результаты из [6], приведем краткую схему исследования задачи (4)–(6).

С помощью замены $\tilde{u}(x_1,x_2) = e^{-\frac{kx_2}{2}}\tilde{V}(x_1,x_2)$ уравнение (4) сводится к уравнению

$$\Delta\tilde{V}(x_1,x_2) - \frac{k^2}{4}\tilde{V}(x_1,x_2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2\backslash l, \tag{7}$$

граничные условия (5), (6) принимают вид

$$\tilde{V}(x_1,+0) - \tilde{V}(x_1,-0) = q_0(x_1), \tag{8}$$

$$\frac{\partial \tilde{V}(x_1,+0)}{\partial x_2} - \frac{\partial \tilde{V}(x_1,-0)}{\partial x_2} = q_1(x_1), \tag{9}$$

где $x_1 \in (-1;1)$.

Определение. Пусть $q(x_1)$ принадлежит пространству $C([-1;1])$. Через $q(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)$ будем обозначать обобщенную функцию из $D'(\mathbb{R}^2)$, действующую по следующему правилу: для любой функции $\varphi(x_1,x_2)$, принадлежащей пространству $D(\mathbb{R}^2)$, имеет место соотношение

$$\left(q(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2), \varphi(x_1,x_2)\right) = \int_{-1}^{1} q(\sigma_1)\varphi(\sigma_1,0)d\sigma_1.$$

Если $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ принадлежит пространству $C([-1;1])$, то стандартным образом (см. [7]) задачу (7)–(9) можно свести к обобщенной задаче Коши:

$$\Delta\tilde{V}(x_1,x_2) - \frac{k^2}{4}\tilde{V}(x_1,x_2) = q_1(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(q_0(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)\right). \tag{10}$$

Замечание 1. Фундаментальным решением оператора $\Delta - \dfrac{k^2}{4}$ в $\mathbb{R}^2$ является функция $E(x_1,x_2) = -\dfrac{1}{2\pi}K_0\left(\dfrac{|k|}{2}|x|\right)$, где $K_0(z)$ – функция Макдональда (см. [8]).

Ниже без доказательства будет приведено несколько утверждений, относящихся к задаче (7)–(9), основная часть которых содержится в [6], где можно прочитать методику их доказательства (некоторые из результатов улучшены по сравнению с результатами из [6]).

Утверждение 1. *Пусть* $q_0(x_1), q_1(x_1) \in C([-1;1])$, *тогда решение задачи* (10) *можно представить в виде* $\tilde{V}(x_1,x_2) = \tilde{V}_1(x_1,x_2) + \tilde{V}_0(x_1,x_2)$, *где*

$$\tilde{V}_0(x_1,x_2) = E(x_1,x_2) * \frac{\partial}{\partial x_2}\left(q_0(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2)\right) = \frac{|k|x_2}{4\pi}\int_{-1}^{1} K_1\left(\frac{|k|}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}\right)\frac{q_0(\sigma_1)}{\sqrt{x_2^2+(x_1-\sigma_1)^2}}d\sigma_1,$$

$$\tilde{V}_1(x_1,x_2) = E(x_1,x_2) * q_1(x_1)\delta_{[-1;1]}(x_1,x_2) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} K_0\left(\frac{|k|}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}\right)q_1(\sigma_1)d\sigma_1,$$

а $K_1(z)$ – *функция Макдональда (см.* [9]).

Утверждение 2. *Пусть* $q_0(x_1), q_1(x_1) \in C^3([-1;1])$, *тогда функция* $\tilde{V}(x_1,x_2)$ *из утверждения* 1 *является решением задачи* (7)–(9) *и* $\tilde{V}(x_1,x_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2\backslash l)$.

Утверждение 3. *Пусть* $q_0(x_1), q_1(x_1) \in C^3([-1;1])$, *а функция* $\tilde{V}(x_1,x_2)$ *из утверждения* 1, *тогда для функций* $\dfrac{\partial\tilde{V}(x_1,x_2)}{\partial x_1}, \dfrac{\partial\tilde{V}(x_1,x_2)}{\partial x_2}$ *при* $(x_1,x_2) \notin l$ *справедливы следующие представления*:

$$\frac{\partial\tilde{V}(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -\frac{q_0(1)}{2\pi}\frac{x_2}{(1-x_1)^2+x_2^2} + \frac{q_0(-1)}{2\pi}\frac{x_2}{(1+x_1)^2+x_2^2} - $$
$$-\frac{q_1(1)}{4\pi}\ln[(1-x_1)^2+x_2^2] + \frac{q_1(-1)}{4\pi}\ln[(1+x_1)^2+x_2^2] + R_1(x_1,x_2),$$

где $R_1(x_1,x_2)$ – *ограниченная на любом компакте функция*;

$$\frac{\partial\tilde{V}(x_1,x_2)}{\partial x_2} = -\frac{q_0(1)}{2\pi}\frac{1-x_1}{(1-x_1)^2+x_2^2} - \frac{q_0(-1)}{2\pi}\frac{1+x_1}{(1+x_1)^2+x_2^2} + $$
$$+\frac{q_0'(1)}{4\pi}\ln[(1-x_1)^2+x_2^2] - \frac{q_0'(-1)}{4\pi}\ln[(1+x_1)^2+x_2^2] + R_2(x_1,x_2),$$

где $R_2(x_1,x_2)$ – *ограниченная на любом компакте функция*.

СВЕДЕ́НИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Перейдем к изложению результатов настоящей работы и схемам их доказательства.

С помощью замены $U(x_1,x_2) = e^{-\frac{k(x_2)}{2}}V(x_1,x_2)$ задачу (1)–(3) можно свести к задаче

$$\Delta V(x_1,x_2) - \frac{\tilde{k}^2(x_2)}{4}V(x_1,x_2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2\backslash l, \tag{11}$$

$$V(x_1,+0) - V(x_1,-0) = q_0(x_1), \tag{12}$$

$$\frac{\partial V(x_1,+0)}{\partial x_2} - \frac{\partial V(x_1,-0)}{\partial x_2} = q_1(x_1), \tag{13}$$

где $x_1 \in (-1;1)$, а $\tilde{k}^2(x_2) = \left(k'(x_2)\right)^2 + 2k''(x_2)$.

В дальнейшем будем считать, что функция $k(x_2)$ принадлежит пространству $C^4(\mathbb{R})$; существуют константы ε_1 и ε_2 такие, что при x_2, принадлежащем $\mathbb{R}$, выполнены оценки $\varepsilon_2 > \left(k'(x_2)\right)^2 + 2k''(x_2) > \varepsilon_1 > 0$, а функции $q_0(x_1)$ и $q_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^3([-1;1])$.

Замечание 2. Очевидно, что функция $k(x_2) = kx_2$, где $k = \mathrm{const} \neq 0$, удовлетворяет сформулированному выше условию. При таком выборе $k(x_2)$ задача (11)–(13) переходит в задачу (7)–(9). Помимо функции kx_2, данному условию, к примеру, будет удовлетворять функция вида

$$k(x_2) = \begin{cases} c_1x_2 + c_2, \quad x_2 \le -h, \\ F(x_2) + c_1x_2 - F'(-h)x_2 + c_2 - F(-h) - F'(-h)h, \quad -h < x_2 < h, \\ (F'(h) + c_1 - F'(-h))x_2 + c_2 + F(h) - F(-h) - F'(-h)h - F'(h)h, \quad x_2 \ge h, \end{cases}$$

где $h = \mathrm{const} > 0$, $c_2 = \mathrm{const}$, $c_1 = \mathrm{const} > \max\limits_{x_2\in[-h;h]}(F'(-h) - F'(x_2))$, $c_1 \neq 0$, а

$$F''(x_2) = \begin{cases} 0, \quad x_2 \le -h, \\ \exp[-h^2\left(h^2 - x_2^2\right)^{-1}], \quad -h < x_2 < -h, \\ 0, \quad x_2 \ge h. \end{cases}$$

Решение задачи (11)–(13) будем искать в виде $V(x_1,x_2) = u(x_1,x_2) + W(x_1,x_2)$, где функция $u(x_1,x_2)$ является решением задачи

$$\Delta u(x_1,x_2) - \frac{\tilde{k}^2(0)}{4}u(x_1,x_2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2\backslash l, \tag{14}$$

$$u(x_1,+0) - u(x_1,-0) = q_0(x_1), \tag{15}$$

$$\frac{\partial u(x_1,+0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u(x_1,-0)}{\partial x_2} = q_1(x_1), \tag{16}$$

где $x_1 \in (-1;1)$, а функция $W(x_1,x_2)$ является решением задачи

$$\Delta W(x_1,x_2) - \frac{\tilde{k}^2(x_2)}{4}W(x_1,x_2) = 0.25\left(\tilde{k}^2(x_2) - \tilde{k}^2(0)\right)u(x_1,x_2), \quad x \in \mathbb{R}^2\backslash l, \tag{17}$$

$$W(x_1,+0) - W(x_1,-0) = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial W(x_1,+0)}{\partial x_2} - \frac{\partial W(x_1,-0)}{\partial x_2} = 0, \tag{19}$$

где $x_1 \in (-1;1)$.

Отметим, что задача (14)–(16) совпадает с задачей (7)–(9) при $k = \tilde{k}(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)–(3), ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИК ТЕПЛОВОГО ПОТОКА В ОКРЕСТНОСТИ КОНЦОВ ТРЕЩИНЫ

Лемма 1. *Пусть функция* $u(x_1,x_2)$ *является решением задачи* (14)–(16), *тогда* $u(x_1,x_2)\in W_2^k(\Omega)$, *где* $k\in\mathbb{N}$, *а* Ω – *любая область из* $\mathbb{R}^2$ *такая, что расстояние от* Ω *до* l *больше некоторого числа* $\delta>0$.

Доказательство. Покажем, что $u(x_1,x_2)\in W_2^k(\mathbb{R}^2\backslash\overline{B}_R(0))$ при достаточно большом R. Из утверждений 1–3 следует, что решение задачи (14)–(16) задается формулой

$$u(x_1,x_2)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}K_0\left(\frac{\tilde{k}(0)}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}\right)q_1(\sigma_1)d\sigma_1+$$

$$+\frac{\tilde{k}(0)}{4\pi}\int_{-1}^{1}K_1\left(\frac{\tilde{k}(0)}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}\right)\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+(x_1-\sigma_1)^2}}q_0(\sigma_1)d\sigma_1.$$

При достаточно большом R и любых натуральных i и j (см. [9]) имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial^{i+j}u(x_1,x_2)}{\partial x_1^i\partial x_2^j}=\sum_{n^0,\,n^1}\int_{-1}^{1}(x_1-\sigma_1)^{\alpha_{n^0}}x_2^{\beta_{n^0}}K_{n^0}\left(\frac{\tilde{k}(0)}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}\right)P_{n^0}\left(\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}\right)q_0(\sigma_1)d\sigma_1+\\+\int_{-1}^{1}(x_1-\sigma_1)^{\alpha_{n^1}}x_2^{\beta_{n^1}}K_{n^1}\left(\frac{\tilde{k}(0)}{2}\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}\right)P_{n^1}\left(\sqrt{(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2}\right)q_1(\sigma_1)d\sigma_1,\end{gathered}\qquad(20)$$

где $\alpha_{n^0},\alpha_{n^1},\beta_{n^0},\beta_{n^1},n^0,n^1$ – целые неотрицательные числа, $K_n(z)$ – функции Макдональда, $P_n(z)$ – рациональные функции.

Если $\sigma_1\in[-1;1]$, то справедливы следующие оценки:

$$(x_1-\sigma_1)^2+x_2^2\geq\begin{cases}(x_1+1)^2+x_2^2, & x_1<-1,\\ x_2^2, & -1\leq x_1\leq 1,\\ (x_1-1)^2+x_2^2, & x_1>1.\end{cases}$$

Для любых $x>1$ и любого n справедлива оценка $|K_n(x)|\leq C\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ (см. [9]).

Из двух последних оценок и равенства (20) получаем, что $u(x_1,x_2)\in W_2^k(\mathbb{R}^2\backslash\overline{B}_R(0))$. Поскольку $u(x_1,x_2)\in C^\infty(\mathbb{R}^2\backslash l)$, то $u(x_1,x_2)\in W_2^k(\Omega)$.

Замечание 3. Пусть функция $u(x_1,x_2)$ является решением задачи (14)–(16), тогда функция $f(x_1,x_2)=$ $=0,25\left(\tilde{k}^2(x_2)-\tilde{k}^2(0)\right)u(x_1,x_2)$ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$, где Ω – любая ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, содержащая l.

Действительно, как отмечено в утверждении 2, функция $u(x_1,x_2)$ является ограниченной в области Ω, откуда следует данное утверждение.

Лемма 2. *Пусть функция* $u(x_1,x_2)$ *является решением задачи* (14)–(16), *тогда функция* $f(x_1,x_2)=$ $=0,25\left(\tilde{k}^2(x_2)-\tilde{k}^2(0)\right)u(x_1,x_2)\in W_2^1(\Omega)$, *где* Ω – *любая ограниченная область в* $\mathbb{R}^2$, *содержащая* l.

Доказательство. Из сформулированного замечания следует, что $f(x_1,x_2)\in L_2(\Omega)$. Покажем, что $\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\in L_2(\Omega)$, утверждение $\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\in L_2(\Omega)$ доказывается аналогично. Как следует из утверждения 3, в Ω за исключением l справедливо представление

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}=\frac{\tilde{k}^2(x_2)-\tilde{k}^2(0)}{4}\left(\frac{-x_2q_0(1)}{2\pi[(1-x_1)^2+x_2^2]}+\frac{x_2q_0(-1)}{2\pi[(1+x_1)^2+x_2^2]}\right)+$$

$$+\frac{\tilde{k}^2(x_2)-\tilde{k}^2(0)}{4}\left(-\frac{q_1(1)\ln[(1-x_1)^2+x_2^2]}{4\pi}+\frac{q_1(-1)\ln[(1+x_1)^2+x_2^2]}{4\pi}\right)+R(x_1,x_2),$$

где $R(x_1,x_2)$ – функция, ограниченная в области Ω.

Через $B_\delta(a;b)$ будем обозначать шар радиуса δ с центром в точке $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Поскольку $\tilde{k}^2(x_2) - \tilde{k}^2(0) = x_2(\tilde{k}^2(\xi))'$ в Ω, где ξ лежит между 0 и x_2, для доказательства леммы достаточно отметить, что функция $x_2^2((1-x_1)^2 + x_2^2)^{-1}$ принадлежит пространству $L_2(B_\delta(1;0))$, функция $x_2^2((1+x_1)^2 + x_2^2)^{-1}$ принадлежит $L_2(B_\delta(-1;0))$, функция $x_2 \ln[(1-x_1)^2 + x_2^2]$ принадлежит $L_2(B_\delta(1;0))$, а функция $x_2 \ln[(1+x_1)^2 + x_2^2]$ принадлежит $L_2(B_\delta(-1;0))$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ дифференциальное уравнение

$$\Delta W(x_1,x_2) - 0.25\tilde{k}^2(x_2)W(x_1,x_2) = f(x_1,x_2), \tag{21}$$

где $f(x_1,x_2) = 0.25(\tilde{k}^2(x_2) - \tilde{k}^2(0))u(x_1,x_2)$.

Из леммы 1 и замечания 3 следует, что $f(x_1,x_2) \in L_2(\mathbb{R}^2)$.

Решением обобщенной задачи для уравнения (21) *в* $\mathbb{R}^2$ назовем такую функцию $W(x_1,x_2) \in W_2^1(\mathbb{R}^2)$, которая для любой функции $\Phi(x_1,x_2) \in W_2^1(\mathbb{R}^2)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial x_2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\tilde{k}^2(x_2)}{4}W\Phi \right) dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^2} f\Phi dx. \tag{22}$$

Стандартным образом через $(\cdot;\cdot)_{W_2^1(\mathbb{R}^2)}$ обозначим скалярное произведение в $W_2^1(\mathbb{R}^2)$, а через $(\cdot;\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Для множества функций, суммируемых в $L_2(\mathbb{R}^2)$ вместе со своими производными первого порядка, введем скалярное произведение $(\cdot;\cdot)_{\tilde{W}_2^1(\mathbb{R}^2)}$:

$$(W;\Phi)_{\tilde{W}_2^1(\mathbb{R}^2)} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial x_2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\tilde{k}^2(x_2)}{4}W\Phi \right) dx. \tag{23}$$

Отметим, что при выполнении сформулированных условий на функцию $k(x_2)$ скалярное произведение (23) эквивалентно стандартному скалярному произведению в $W_2^1(\mathbb{R}^2)$. Получившееся пространство обозначим через $\tilde{W}_2^1(\mathbb{R}^2)$, скалярное произведение в этом пространстве будем обозначать через $(\cdot;\cdot)_{\tilde{W}_2^1(\mathbb{R}^2)}$.

Теорема 1. *У обобщенной задачи для уравнения* (21) *в* $\mathbb{R}^2$ *существует единственное решение из* $W_2^1(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Из эквивалентности скалярных произведений $(\cdot;\cdot)_{W_2^1(\mathbb{R}^2)}$ и $(\cdot;\cdot)_{\tilde{W}_2^1(\mathbb{R}^2)}$, неравенства Коши–Буняковского и того, что $W_2^l(\mathbb{R}^2)$ образуют шкалу пространств, следует, что $-(f;\Phi)$ — непрерывный функционал в $\tilde{W}_2^1(\mathbb{R}^2)$. Тогда из теоремы Рисса и эквивалентности скалярных произведений $(\cdot;\cdot)_{W_2^1(\mathbb{R}^2)}$ и $(\cdot;\cdot)_{\tilde{W}_2^1(\mathbb{R}^2)}$ следует утверждение теоремы.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ ограниченную область Ω с достаточно гладкой границей. Через $\tilde{\tilde{k}}(x_2)$, $\tilde{f}(x_1,x_2)$, $\tilde{W}(x_1,x_2)$ обозначим соответственно сужение функций $\frac{\tilde{k}^2(x_2)}{4}$, $f(x_1,x_2)$, $W(x_1,x_2)$ на область Ω, через $\varphi(x_1,x_2)$ — след решения обобщенной задачи для уравнения (21) в $\mathbb{R}^2$ функции $W(x_1,x_2)$ на $\partial\Omega$. Из теоремы о следах (см. [10]) следует, что $\varphi(x_1,x_2) \in L_2(\partial\Omega)$.

Рассмотрим в области Ω вспомогательную задачу

$$\Delta\tilde{W}(x_1,x_2) - \tilde{\tilde{k}}(x_2)\tilde{W}(x_1,x_2) = \tilde{f}(x_1,x_2), \tag{24}$$

$$\tilde{W}(x_1,x_2)\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x_1,x_2). \tag{25}$$

Определение. Функцию $\tilde{W}(x_1,x_2) \in W_2^1(\Omega)$ будем называть *решением обобщенной задачи* для задачи (24), (25), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_1}\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_2}\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2} + \tilde{\tilde{k}}(x_2)\tilde{W}\tilde{\Phi} \right) dx = -\int_\Omega \tilde{f}\tilde{\Phi}dx \tag{26}$$

при всех $\tilde{\Phi}(x_1,x_2) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и след этой функции в $L_2(\partial\Omega)$ совпадает с $\varphi(x_1,x_2)$.

Сужение решения обобщенной задачи для уравнения (21) в $\mathbb{R}^2$ на область Ω будет решением обобщенной задачи для задачи (24), (25) в области Ω.

Пусть $\tilde{\Omega}$ – область в $\mathbb{R}^n$, функция $F(x)$ финитна в $\tilde{\Omega}$ и принадлежит $L_2(\tilde{\Omega})$. Продолжим ее нулем вне $\tilde{\Omega}$ и рассмотрим при $h \neq 0$ разностное отношение

$$\delta_h^k F(x) = \frac{F(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_k+h,x_{k+1},\ldots,x_n) - F(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)}{h}.$$

Для разностных отношений справедлива следующая теорема (см. [10]).

Теорема 2. *Пусть финитная в $\tilde{\Omega}$ функция $F(x)$ принадлежит $L_2(\tilde{\Omega})$, тогда*:

1) *если существует обобщенная производная F_{x_k} при некотором $k = 1,\ldots,n$, то при всех достаточно малых по модулю $h \neq 0$ имеем $\|\delta_h^k F\|_{L_2(\tilde{\Omega})} \le \|F_{x_k}\|_{L_2(\tilde{\Omega})}$ и $\|\delta_h^k F - F_{x_k}\|_{L_2(\tilde{\Omega})} \to 0$ при $h \to 0$*;

2) *если существует такая постоянная $c > 0$, что при всех достаточно малых по модулю $h \neq 0$ имеет место неравенство $\|\delta_h^k F\|_{L_2(\tilde{\Omega})} \le c$, то в $\tilde{\Omega}$ существует обобщенная производная F_{x_k} функции $F(x)$ и справедливо неравенство $\|F_{x_k}\|_{L_2(\tilde{\Omega})} \le c$ и соотношение $\|\delta_h^k F - F_{x_k}\|_{L_2(\tilde{\Omega})} \to 0$ при $h \to 0$*;

3) *если $g \in L_2(\tilde{\Omega})$, то для h, меньших по модулю, чем расстояние между границей области $\tilde{\Omega}$ и границей области, вне которой $F(x) \equiv 0$, справедливо равенство $(\delta_h^k F; g)_{L_2(\tilde{\Omega})} = -(F; \delta_{-h}^k g)_{L_2(\tilde{\Omega})}$.*

Далее сформулируем и докажем теорему, аналогичную соответствующему утверждению, доказанному в [10] для случая, когда $\tilde{\tilde{k}}(x_2) \equiv 0$.

Пусть $\delta > 0$ достаточно мало, Ω_r – некоторая ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, через $\Omega_{r,\delta}$ обозначим точки области Ω_r, удаленные от своей границы на расстояние большее, чем δ.

Теорема 3. *Пусть $\tilde{f}(x_1,x_2) \in L_2(\Omega) \cap W_{2,\,\mathrm{loc}}^k(\Omega)$, $k = 0,1,2,\ldots$, $\tilde{\tilde{k}}(x_2) \in C^k(\Omega)$, а $\tilde{W}(x_1,x_2) \in W_2^1(\Omega)$ и удовлетворяет интегральному тождеству* (26) *при всех $\tilde{\Phi}(x_1,x_2) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тогда $\tilde{W}(x_1,x_2) \in W_{2,\mathrm{loc}}^{k+2}(\Omega)$ и для любой пары подобластей Ω_1 и Ω_2 области Ω таких, что $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega$ (все вложения областей строгие), имеет место неравенство*

$$\|\tilde{W}\|_{W_2^{k+2}(\Omega_1)} \le c(\|\tilde{f}\|_{W_2^k(\Omega_2)} + \|\tilde{W}\|_{W_2^1(\Omega)})$$

с положительной постоянной $c = c(k,\Omega_1,\Omega_2)$.

Доказательство. Обозначим через δ расстояние между границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. Рассмотрим функцию $\xi(x_1,x_2)$, обладающую следующими свойствами: $\xi(x_1,x_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\xi(x_1,x_2) \equiv 1$ в $\Omega_{2,\delta}$, $\xi(x_1,x_2) \equiv 0$ вне $\Omega_{2,\,2\delta/3}$. Подставим в тождество (26) в качестве функции $\tilde{\Phi}(x_1,x_2)$ функцию $\xi(x_1,x_2)V_0(x_1,x_2)$, где $V_0(x_1,x_2)$ – произвольная функция из $W_2^1(\Omega_2)$, продолженная нулем вне Ω_2. Поскольку

$$\nabla\tilde{W}\cdot\nabla\tilde{\Phi} = \nabla(\xi\tilde{W})\cdot\nabla V_0 + \nabla\tilde{W}\cdot\nabla\xi\cdot V_0 - \tilde{W}\nabla\xi\cdot\nabla V_0,$$

тождество (26) примет вид

$$\int_{\Omega_2}\nabla(\xi\tilde{W})\cdot\nabla V_0 dx + \int_{\Omega_2}\nabla\tilde{W}\cdot\nabla\xi\cdot V_0 dx - \int_{\Omega_2}\tilde{W}\nabla\xi\cdot\nabla V_0 dx + \int_{\Omega_2}\tilde{\tilde{k}}(x_2)\tilde{W}\xi V_0 dx = -\int_{\Omega_2}\tilde{f}\xi V_0 dx,$$

где $x = (x_1,x_2)$.

Последнее равенство перепишем в виде

$$\int_{\Omega_2}\nabla\Theta\cdot\nabla V_0 dx = \int_{\Omega_2} F V_0 dx + \int_{\Omega_2}\tilde{W}\nabla\xi\cdot\nabla V_0 dx, \tag{27}$$

где $\Theta = \xi\tilde{W}$, а $F = -\tilde{f}\xi - \nabla\tilde{W}\cdot\nabla\xi - \tilde{\tilde{k}}(x_2)\tilde{W}\xi$.

Возьмем произвольную функцию $V_1(x_1, x_2)$, принадлежащую $W_2^1(\Omega_2)$, продолженную нулем вне Ω_2. Для любого $i = 1,2$ и произвольного $h: 0 < |h| < \dfrac{\delta}{2}$, рассмотрим конечно-разностное отношение $\delta_{-h}^i V_1(x_1, x_2)$. Положим в равенстве (27) $V_0(x_1, x_2) = \delta_{-h}^i V_1(x_1, x_2)$, тогда оно примет вид

$$\int\limits_{\Omega_2}\nabla\Theta\cdot\nabla\delta_{-h}^i V_1 dx = \int\limits_{\Omega_2} F\cdot\delta_{-h}^i V_1 dx + \int\limits_{\Omega_2}\tilde{W}\nabla\xi\cdot\nabla\delta_{-h}^i V_1 dx.$$

Воспользовавшись пунктом 3 из теоремы 2, последнее равенство можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega_2}\nabla\delta_h^i\Theta\cdot\nabla V_1 dx = -\int\limits_{\Omega_2} F\cdot\delta_{-h}^i V_1 dx + \int\limits_{\Omega_2}\delta_h^i(\tilde{W}\nabla\xi)\cdot\nabla V_1 dx. \tag{28}$$

Докажем утверждение теоремы при $k = 0$.

Поскольку $\tilde{W}(x_1, x_2) \in W_2^1(\Omega_2)$, функция $\xi(x_1, x_2)$ ограничена в $\mathbb{R}^2$ вместе со всеми своими производными, поэтому из вида функции F вытекает следующая оценка:

$$\|F\|_{L_2(\Omega_2)} \le c\left(\|\tilde{f}\|_{L_2(\Omega_2)} + \|\nabla\tilde{W}\|_{L_2(\Omega_2)} + \|\tilde{W}\|_{L_2(\Omega_2)}\right) \le c_1\left(\|\tilde{f}\|_{L_2(\Omega_2)} + \|\tilde{W}\|_{W_2^1(\Omega_2)}\right). \tag{29}$$

Из (28) при помощи неравенства Коши—Буняковского, теоремы 2 и оценки (29) получаем неравенство

$$\left|\int\limits_{\Omega_2}\nabla\delta_h^i\Theta\cdot\nabla V_1 dx\right| \le c\left(\|F\|_{L_2(\Omega_2)} + \|\tilde{W}\|_{W_2^1(\Omega_2)}\right)\|\nabla V_1\|_{L_2(\Omega_2)} \le c_1\left(\|\tilde{f}\|_{L_2(\Omega_2)} + \|\tilde{W}\|_{W_2^1(\Omega_2)}\right)\|\nabla V_1\|_{L_2(\Omega_2)}.$$

Положив в последнем неравенстве $V_1(x_1, x_2) = \delta_h^i\Theta(x_1, x_2)$, получим оценку

$$\|\nabla\delta_h^i\Theta\|_{L_2(\Omega_2)} \le c\left(\|\tilde{f}\|_{L_2(\Omega_2)} + \|\tilde{W}\|_{W_2^1(\Omega_2)}\right) \quad \text{при } i = 1,2, \quad 0 < |h| < \frac{\delta}{2}.$$

Из последней оценки и теоремы 2 следует неравенство

$$\|\Theta\|_{W_2^2(\Omega_2)} \le c\left(\|\tilde{f}\|_{L_2(\Omega_2)} + \|\tilde{W}\|_{W_2^1(\Omega_2)}\right).$$

Так как в области Ω_1 справедливо представление $\Theta(x_1, x_2) = u(x_1, x_2)$, то

$$\|\tilde{W}\|_{W_2^2(\Omega_1)} \le c\left(\|\tilde{f}\|_{L_2(\Omega_2)} + \|\tilde{W}\|_{W_2^1(\Omega_2)}\right). \tag{30}$$

Докажем утверждение теоремы при произвольном k.

Пусть $\tilde{f}(x_1, x_2) \in W_{2,\mathrm{loc}}^{k+1}(\Omega)$. Предположим, что функция $\tilde{W}(x_1, x_2)$ обладает следующими свойствами: функция $\tilde{W}(x_1, x_2)$ принадлежит пространству $W_{2,\mathrm{loc}}^{k+2}(\Omega)$ и для любой пары подобластей Ω_1 и Ω_2 области Ω таких, что $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega$ (все вложения областей строгие), имеет место неравенство

$$\|\tilde{W}\|_{W_2^{k+2}(\Omega_1)} \le c\left(\|\tilde{f}\|_{W_2^k(\Omega_2)} + \|\tilde{W}\|_{W_2^1(\Omega_2)}\right), \tag{31}$$

а для любого $\alpha: |\alpha| \le k$, $i = 1,2$ и $0 < |h| < \dfrac{\delta}{2}$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega_2}\nabla\delta_h^i D^\alpha\Theta\cdot\nabla V_{k+1} dx = -\int\limits_{\Omega_2} D^\alpha F\cdot\delta_{-h}^i V_{k+1} dx + \int\limits_{\Omega_2}\delta_h^i(D^\alpha(\tilde{W}\nabla\xi))\cdot\nabla V_{k+1} dx, \tag{32}$$

где $V_{k+1}(x_1, x_2)$ — произвольная функция из $W_2^1(\Omega_2)$.

При $k = 0$ справедливость (31) и (32) уже установлена. При $\alpha, |\alpha| \le k$ $D^\alpha\Theta(x_1, x_2) \in W_2^2(\Omega_2)$, а $D^\alpha F(x_1, x_2) \in W_2^1(\Omega_2)$.

На основании теоремы 2 в (32) можно перейти к пределу при $h \to 0$. В результате для любых $\alpha, |\alpha| = k$, $i = 1,2$ получим равенство

$$\int\limits_{\Omega_2}\nabla D^\alpha\Theta_{x_i}\cdot\nabla V_{k+1} dx = -\int\limits_{\Omega_2} D^\alpha F\cdot(V_{k+1})_{x_i} dx + \int\limits_{\Omega_2}(D^\alpha(\tilde{W}\nabla\xi))_{x_i}\cdot\nabla V_{k+1} dx.$$

Поскольку $D^\alpha F$ равна нулю вне $\Omega_{2,2\delta/3}$, из последнего равенства получаем, что

$$\int_{\Omega_2} \nabla D^\alpha \Theta_{x_i} \cdot \nabla V_{k+1} dx = \int_{\Omega_2} D^\alpha F_{x_i} \cdot V_{k+1} dx + \int_{\Omega_2} (D^\alpha(\tilde{W}\nabla\xi))_{x_i} \cdot \nabla V_{k+1} dx$$

при всех $V_{k+1}(x_1,x_2) \in W_2^1(\Omega_2)$. Возьмем в последнем равенстве $V_{k+1}(x_1,x_2) = \delta_{-h}^j V_{k+2}(x_1,x_2)$, где $V_{k+2}(x_1,x_2)$ – произвольная функция из $W_2^1(\Omega_2)$, $j = 1, 2$, $h : 0 < |h| < \dfrac{\delta}{2}$, в результате получим, что

$$\int_{\Omega_2} \nabla \delta_h^j D^\alpha \Theta_{x_i} \cdot \nabla V_{k+2} dx = -\int_{\Omega_2} D^\alpha F_{x_i} \cdot \delta_{-h}^j V_{k+2} dx + \int_{\Omega_2} \delta_h^j (D^\alpha(\tilde{W}\nabla\xi)_{x_i}) \cdot \nabla V_{k+2} dx. \tag{33}$$

Из вида функции $F(x_1,x_2)$ следует оценка

$$\|F\|_{W_2^{k+1}(\Omega_2)} \le c\left(\|\tilde{f}\|_{W_2^{k+1}(\Omega_2)} + \|\tilde{W}\|_{W_2^1(\Omega_2)}\right).$$

Взяв $V_{k+2}(x_1,x_2) = \delta_h^j D^\alpha \Theta_{x_i}(x_1,x_2)$ в (33), получаем оценку

$$\|\tilde{W}\|_{W_2^{k+3}(\Omega_1)} \le c\left(\|\tilde{f}\|_{W_2^{k+1}(\Omega_2)} + \|\tilde{W}\|_{W_2^1(\Omega_2)}\right).$$

Теорема 4. *Пусть* $k(x_2) \in C^{k+2}(\mathbb{R})$, *где* $k = 2,\ldots,$ *тогда у задачи* (1)–(3) *существует решение* $U(x_1,x_2)$ *и* $U(x_1,x_2) \in C^k(\mathbb{R}^2 \setminus l)$. *При этом функции* $U(x_1,x_2)$, $\dfrac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2}$ *в окрестности* l *имеют такое же асимптотическое представление, как и функции* $e^{-\frac{k(x_2)}{2}} u(x_1,x_2)$, $e^{-\frac{k(x_2)}{2}} \dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $e^{-\frac{k(x_2)}{2}} \dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}$ *соответственно, где* $u(x_1,x_2)$ – *решение задачи* (14)–(16).

Доказательство. Пусть $W(x_1,x_2)$ – решение обобщенной задачи для уравнения (21) в $\mathbb{R}^2$, Ω – произвольная ограниченная область из $\mathbb{R}^2$, содержащая l, а Ω_1 – произвольная ограниченная область из $\mathbb{R}^2$ такая, что расстояние от Ω_1 до l больше некоторого числа $\delta > 0$. Из леммы 2 и теоремы 3 следует, что $W(x_1,x_2) \in W_2^3(\Omega)$. Тогда из вложения $W_2^r(\Omega) \subset C^k(\Omega)$, где $r - k > n/2$, следует, что $W(x_1,x_2) \in C^1(\Omega)$. Аналогичным образом из леммы 1 и теоремы 3 получаем, что $W(x_1,x_2) \in C^k(\Omega_1)$.

Решение задачи (1)–(3) представимо в виде

$$U(x_1,x_2) = e^{-\frac{k(x_2)}{2}} u(x_1,x_2) + e^{-\frac{k(x_2)}{2}} W(x_1,x_2).$$

Из гладкости функции $W(x_1,x_2)$ в окрестности трещины l и вне трещины l следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Birman V., Byrd L.W.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // ASME Appl. Mech. Rev. 2007. V. 60. P. 195–216.
2. *Партон В.З.* Механика разрушения. М.: Наука, 1990.
3. *Sladek J., Sladek V., Zhan Ch.* An advanced numerical method for computing elastodynamic fracture parameters in functionally graded materials // Computat. Materials Sci. 2005. V. 32. P. 532–543.
4. *Chan Youn-Sha, Gray L.J., Kaplan T., Paulino G.H.* Green's function for a two-dimensional exponentially graded elastic medium // Proc. R. Soc. Lond. A. 2004. V. 460. P. 1689–1706.
5. *Chkadua O., Mikhailov S.E., Natroshvili D.* Analysis of direct boundary-domain integral equations for a mixed BVP with variable coefficient, II : Solution regularity and asymptotics // J. Integral Equations and Applications. 2010. V. 22 (1). P. 19–37.
6. *Глушко А.В., Логинова Е.А.* Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной // Вестник Воронежского гос. ун-та. Сер.: Физика и Математика. 2010. № 2. С. 47–50.
7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
8. *Владимиров В.С., Михайлов В.П., Вашарин А.А. и др.* Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1982.
9. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. М.: Издательство иностр. лит-ры, 1949.
10. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.