И. Д. Серова, Исследование краевой задачи для дифференциального включения, *Вестник российских университетов. Математика*, 2023, том 28, выпуск 144, 395–405

DOI: 10.20310/2686-9667-2023-28-144-395-405

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 144 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-395-405

УДК 517.911.5, 517.922, 517.927.4, 517.988.6

Исследование краевой задачи для дифференциального включения

Ирина Дмитриевна СЕРОВА

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»

392026, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Рассматривается краевая задача относительно абсолютно непрерывной функции $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ для дифференциального включения

$$F(t, x, \dot{x}, \dot{x}) \ni 0, \quad t \in [a, b],$$

с условием $\alpha x(a) + \beta x(b) = \widetilde{\gamma}$, при дополнительном ограничении на производную искомой функции $(\mathcal{L}x)(t) \doteq \dot{x}(t) - \lambda x(t) \in B(t)$, $t \in [a, b]$. Предполагается, что краевая задача с теми же условиями для линейного дифференциального уравнения $\mathcal{L}x = y$ однозначно разрешима для любой суммируемой функции y. С использованием функции Грина этой «вспомогательной» линейной краевой задачи исходная задача приведена к эквивалентному интегральному включению относительно суммируемой функции $\dot{x}$. К полученному включению применяются результаты об операторном включении с упорядоченно накрывающим многозначным отображением.

Используемые в данном исследовании сведения о многозначных отображениях частично упорядоченных пространств приведены в первом разделе работы.

Во втором основном разделе работы получены условия существования и оценки решений исследуемой краевой задачи в виде утверждения типа теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве. Эти результаты проиллюстрированы примером исследования периодической краевой задачи для неразрешенного относительно производной дифференциального уравнения.

Ключевые слова: краевая задача, дифференциальное включение, упорядоченно накрывающее отображение, дифференциальное неравенство типа Чаплыгина

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00772, https://rscf.ru/project/22-21-00772/).

Для цитирования: *Серова И.Д.* Исследование краевой задачи для дифференциального включения // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 144. С. 395–405. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-395-405

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-395-405

Study of the boundary value problem for a differential inclusion

Irina D. SEROVA
Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. The boundary value problem with respect to an absolutely continuous function $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ for the differential inclusion

$$F(t,x,\dot{x},\dot{x})\ni 0,\quad t\in[a,b],$$

with the condition $\alpha x(a)+\beta x(b)=\widetilde{\gamma}$ and additional restriction on the derivative of the desired function $(\mathcal{L}x)(t)\doteq\dot{x}(t)-\lambda x(t)\in B(t),\ \ t\in[a,b]$ is under discussion. It is assumed that the boundary value problem with the same conditions for the linear differential equation $\mathcal{L}x=y$ is uniquely solvable for any summable function y. Using Green's function of this «auxiliary» linear boundary value problem, the original problem is reduced to an equivalent integral inclusion with respect to the summable function $\dot{x}$. To the inclusion obtained, the results on operator inclusion with an orderly covering multivalued mapping are applied.

In the first section of the work, the information about multivalued mappings of partially ordered spaces used in this study is given.

In the main section of the work, conditions for the existence and estimates of solutions to the boundary value problem under investigation are obtained in the form of a statement similar to Chaplygin's theorem on differential inequality. These results are illustrated by an example of studying a periodic boundary value problem for a differential equation which is not resolved with respect to the derivative.

Keywords: boundary value problem, differential inclusion, ordered covering map, differential inequality of Chaplygin's type

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00772, https://rscf.ru/en/project/22-21-00772/).

Mathematics Subject Classification: 34A60, 34B15, 34A09.

For citation: Serova I.D. Study of the boundary value problem for a differential inclusion. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 395–405. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-395-405 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Неявные (не разрешенные относительно старшей производной) дифференциальные уравнения в течение многих лет привлекают исследователей сложными теоретическими проблемами и уже привели к созданию эффективных методов не только теории таких уравнений, но и других направлений математики (в том числе, ряда методов теории динамических систем, основы которых заложены В. И. Арнольдом [1], и которые развиты благодаря работам А. А. Давыдова [2,3], Л. Дара [4], А. О. Ремизова [5,6] и др. авторов). Неявные дифференциальные уравнения продолжают быть источником новых идей и результатов, востребованных в различных разделах математики и ее приложений. Одним из малоизученных вопросов теории таких уравнений является вопрос об условиях разрешимости и оценках решений краевых задач.

В исследовании многих вопросов теории дифференциальных уравнений важны оценки их решений. Но если для разрешенных относительно производной уравнений способы получения таких оценок разработаны и успешно применяются (см., например, [7–9], в частности, такие оценки строятся с использованием дифференциальных неравенств, восходящих к известной теореме Чаплыгина [10]), то для неявных уравнений подобные результаты пока фрагментарны (отметим статьи [11–13]). Полученные в настоящее время в этих направлениях результаты существенно используют теоремы о накрывающих отображениях частично упорядоченных пространств, доказанные в работах А. В. Арутюнова, Е. С. Жуковского, С. Е. Жуковского [14–18]. На основе этих теорем для неявных дифференциальных уравнений были получены оценки решений задачи Коши (см. [19,20]) и краевых задач (см. [11,13]).

Изучение краевых задач для неявных дифференциальных уравнений мотивировано, в том числе, описанием некоторых физических процессов (см., например [1, § 3 гл. 1], [21, § 6 гл. 1], [22]). В связи с изучением задач управления такими процессами, а также в связи с необходимостью учитывать погрешности определения их параметров актуальной является проблема исследования краевых задач для неявных дифференциальных включений и, в частности, проблема получения оценок их решений. Данная работа посвящена именно этим проблемам. Исследование использует результаты [23] об антитонных возмущениях упорядоченно накрывающего многозначного отображения.

1. Операторные включения в частично упорядоченных пространствах

Пусть заданы частично упорядоченные пространства $(X,\preceq)$, $(Y,\preceq)$. Для элементов $u,v\in X$ и множества $U\subset X$ обозначим

$$[u,v]_X \doteq \{x\in X:\, v\preceq x\preceq u\},\quad \mathcal{O}_X(u)\doteq\{x\in X:\, x\preceq u\},\quad \mathcal{O}_X(U)\doteq\bigcup_{\forall u\in U}\mathcal{O}_X(u).$$

Рассмотрим многозначное отображение $G: X\rightrightarrows Y$, т. е. отображение, сопоставляющее каждому элементу $x\in X$ непустое множество $G(x)\subset Y$.

Напомним определения некоторых используемых в данной работе свойств многозначных отображений.

Определение 1.1. Отображение $G: X\rightrightarrows Y$ называют *изотонным* (*антитонным*) на множестве $U\subset X$, если для любых $x,u\in U$ таких, что $x\preceq u$, и для любого $z\in G(u)$ существует $y\in G(x)$, удовлетворяющий неравенству $y\preceq z$ (соответственно,

$y \succeq z$). Антитонное (*изотонное*) на всем X отображение называют *изотонным* (*антитонным*).

О п р е д е л е н и е 1.2. Отображение $G : X \rightrightarrows Y$ называют *упорядоченно накрывающим множество* $V \subset Y$ (см. [15, 18]), если

$$\forall u \in X \ \ \mathcal{O}_Y\big(G(u)\big) \cap V \subset G\big(\mathcal{O}_X(u)\big). \tag{1.1}$$

Заметим, что если V — одноэлементное множество, т. е. $V = \{\widehat{y}\}$, то соотношение (1.1) равносильно импликации

$$\forall u \in X \ \ \widehat{y} \in \mathcal{O}_Y\big(G(u)\big) \ \ \Rightarrow \ \ \widehat{y} \in G\big(\mathcal{O}_X(u)\big).$$

Таким образом, свойство упорядоченного накрывания множества $\{\widehat{y}\}$ означает, что для любого $u \in X$ такого, что во множестве $G(u)$ содержится элемент $v \succeq \widehat{y}$, включение $\widehat{y} \in G(x)$ имеет решение $x \in X$, удовлетворяющее неравенству $x \preceq u$.

Пусть задано отображение $\Upsilon : X \times X \rightrightarrows Y$, которое по одному аргументу упорядоченно накрывает множество $\{\widehat{y}\}$, а по другому является антитонным. Определим отображение $F : X \rightrightarrows Y$ соотношением

$$\forall x \in X \ \ F(x) = \Upsilon(x, x)$$

и рассмотрим включение

$$\widehat{y} \in F(x) \tag{1.2}$$

относительно неизвестного $x \in X$.

Сформулируем условия существования решения включения (1.2).

Пусть $U \subset X$, $\widehat{y} \in Y$. Определим множество $\mathcal{S}(\Upsilon, U, \widehat{y})$ всех цепей $S \subset U$ таких, что имеют место соотношения:

$$\begin{aligned}&\forall x \in S \ \ \exists y \in \Upsilon(x, x) \ \ y \succeq \widehat{y},\\ &\forall x, u \in S \ \ x \prec u \ \ \Rightarrow \ \ \exists \xi \in [x, u] \ \ \widehat{y} \in \Upsilon(\xi, u).\end{aligned}$$

Теорема 1.1 (см. [23, теорема 2.1])**.** *Пусть существуют* $u_0 \in X$ *и* $y_0 \in Y$ *такие, что*

$$y_0 \in \Upsilon(u_0, u_0), \quad y_0 \succeq \widehat{y}, \tag{1.3}$$

и выполнены условия:

(1.a) *при любом* $x \in \mathcal{O}_X(u_0)$ *отображение* $\Upsilon(\cdot, x) : X \rightrightarrows Y$ *упорядоченно накрывает множество* $\{\widehat{y}\}$;

(1.b) *при любом* $x \in \mathcal{O}_X(u_0)$ *отображение* $\Upsilon(x, \cdot) : X \rightrightarrows Y$ *является антитонным на множестве* $[x, u_0]_X$;

(1.c) *любая бесконечная цепь* $S \in \mathcal{S}\big(\Upsilon, \mathcal{O}_X(u_0), \widehat{y}\big)$ *ограничена снизу, и для некоторой ее нижней границы* $\omega \in X$ *существует элемент* $z \in \Upsilon(\omega, \omega)$, *удовлетворяющий неравенству* $z \succeq \widehat{y}$.

Тогда включение (1.2) *имеет решение, во множестве решений существует минимальный элемент и он принадлежит множеству* $\mathcal{O}_X(u_0)$.

2. Краевая задача для неявного дифференциального включения

Обозначим через $\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ множества всех непустых замкнутых и, соответственно, непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Полагаем, что в $\mathbb{R}^n$ задан стандартный покомпонентный порядок.

Обозначим через W^n пространство измеримых функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с «обычным» порядком, т. е. для его элементов x,u выполнено неравенство $x\leq u$, если $x(t)\leq u(t)$ при п. в. $t\in[a,b]$. Пусть задано измеримое многозначное отображение $B:[a,b]\to\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим $L(B)$ — подпространство W^n, содержащее все суммируемые сечения отображения B, $AC(B)$ — множество таких абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, что $\dot{x}\in L(B)$. В случае $B(t)\equiv\mathbb{R}^n$ будем обозначать $L^n\doteq L(\mathbb{R}^n)$ и $AC^n\doteq AC(\mathbb{R}^n)$, соответственно.

Напомним, что многозначное отображение $g:\mathbb{R}\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ называется *непрерывным справа (слева) в точке* $x_0\in\mathbb{R}$ (см. [23]), если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех $x\in(x_0,x_0+\delta)$ (соответственно для $x\in(x_0-\delta,x_0)$) выполнено $h_{\mathbb{R}^m}\big(G(x_0),G(x)\big)<\varepsilon$. Здесь символом $h_{\mathbb{R}^m}$ обозначено расстояние по Хаусдорфу между множествами в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Множество $U\in W^n$ называют *интегрально ограниченным снизу* (*сверху*), если существует такое число C, что для любой измеримой функции $u\in U$ справедливо неравенство $\int_a^b u(t)dt\geq C$ (соответственно, $\int_a^b u(t)dt\leq C$). Множество U называется *интегрально ограниченным*, если оно интегрально ограничено и сверху, и снизу.

Теперь сформулируем основной результат статьи. Пусть заданы: многозначная функция $f:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$, диагональные $n\times n$ матрицы $\alpha:=\mathrm{diag}\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$, $\beta:=\mathrm{diag}\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$, $\lambda:=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$, вектор $\widetilde{\gamma}\in\mathbb{R}^n$.

Будем рассматривать краевую задачу для дифференциального включения

$$F(t,x,\dot{x},\dot{x})\ni 0,\quad t\in[a,b],\tag{2.1}$$

с условием

$$\alpha x(a)+\beta x(b)=\widetilde{\gamma},\tag{2.2}$$

при дополнительном ограничении на производную искомой функции

$$(\mathcal{L}x)\doteq\dot{x}(t)-\lambda x(t)\in B(t),\quad t\in[a,b].\tag{2.3}$$

Решение этой краевой задачи будем искать в классе абсолютно непрерывных функций, т. е. решением называем функцию $x\in AC^n$, для которой при п. в. $t\in[a,b]$ выполнено (2.1), (2.2), (2.3).

Рассмотрим порождаемое включением (2.1) отображение

$$(t,x,v,w)\in[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\mapsto F(t,x,v,w)\in\mathrm{K}(\mathbb{R}^m).$$

Сделаем в нем замену переменных

$$v=z+\lambda x,\quad w=y+\lambda x$$

и, таким образом, по отображению F определим отображение $G^\lambda:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$, формулой

$$G^\lambda(t,x,z,y)=F(t,x,z+\lambda x,y+\lambda x).\tag{2.4}$$

Будем предполагать, что при п. в. $t\in[a,b]$, любых $x,z,y\in\mathbb{R}^n$ многозначное отображение (2.4) как функция каждого аргумента удовлетворяет следующим условиям:

(a) *отображение* $G^\lambda(\cdot, x, z, y) : [a, b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *измеримо,*

(b) *отображение* $G^\lambda(t, \cdot, \cdot, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *непрерывно справа по каждому скалярному аргументу* $x_1, \ldots, x_n$ *и* $z_1, \ldots, z_n$*,*

(c) *отображение* $G^\lambda(t, x, z, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *непрерывно.*

Отметим, что для отображения G^λ не требуется выполнение условий Каратеодори. Пусть для некоторой функции $\eta \in AC^n$ выполнены соотношения:

$$F_j(t, \eta(t), \dot\eta(t), \dot\eta(t)) \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset, \quad t \in [a, b], \quad j = \overline{1, m}, \tag{2.5}$$

$$\alpha\eta(a) + \beta\eta(b) \geq \widetilde{\gamma}, \tag{2.6}$$

$$(\mathcal{L}\eta)(t) \in B(t), \quad t \in [a, b]. \tag{2.7}$$

Обозначим $\widetilde{B}(t) \doteq B(t) \cap \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}\big((\mathcal{L}\eta)(t)\big)$, $t \in [a, b]$. Очевидно, $\widetilde{B} : [a, b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^m)$. Определим множество $\Omega \doteq \big\{(t, x, z, y) : t \in [a, b],\ x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \widetilde{B}(t),\ y \in \widetilde{B}(t)\big\}$ и определим сужение $G^\lambda_\Omega : \Omega \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^m)$ многозначного отображения G^λ на множество Ω.

Теорема 2.1. *Пусть множество измеримых сечений многозначного отображения* $\widetilde{B} : [a, b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^m)$ *интегрально ограничено и существует функция* $\eta \in AC^n$*, удовлетворяющая соотношениям* (2.5)*,* (2.6)*,* (2.7) *и неравенствам*

$$\alpha_i > 0, \quad \beta_i < 0, \quad \lambda_i \neq \ln\Big(-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\Big), \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.8}$$

Пусть также выполнены следующие условия:

(2.a) *при п. в.* $t \in [a, b]$ *и всех* $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \widetilde{B}(t)$ *отображение* $G^\lambda_\Omega(t, x, z, \cdot) : \widetilde{B}(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *упорядоченно накрывает множество* $\{0\} \subset \mathbb{R}^m$*;*

(2.b) *для п. в.* $t \in [a, b]$*, любых* $z, y \in \mathbb{R}^n$*, при* $i = \overline{1, n}$ *таких, что* $\lambda_i > \ln\big(-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\big)$*, отображение* $G^\lambda(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \ldots, z, y) : \mathbb{R} \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *изотонно, а при* $i = \overline{1, n}$ *таких, что* $\lambda_i < \ln\big(-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\big)$*, отображение* $G^\lambda(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \ldots, z, y) : \mathbb{R} \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *антитонно;*

(2.c) *при п. в.* $t \in [a, b]$*, любых* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *отображение* $G^\lambda(t, x, \cdot, y) : \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *антитонно.*

Тогда существует решение $x \in AC^n$ *краевой задачи* (2.1)*,* (2.2)*,* (2.3)*, удовлетворяющее неравенству*

$$\mathcal{L}x \leq \mathcal{L}\eta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем задачу (2.1), (2.2), (2.3) в виде системы интегральных включений. Для этого рассмотрим вспомогательную линейную краевую задачу

$$\mathcal{L}x = q, \quad q = (q_1, \ldots, q_n) \in L^n \tag{2.9}$$

с краевым условием

$$\alpha x(a) + \beta x(b) = \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^n.$$

В силу предположения (2.8) эта задача при любых $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $q \in L^n$ имеет единственное решение $x = (x_1, \ldots, x_n) \in AC^n$, которое определяется формулой

$$x = W(q, \gamma),$$

где отображение $W : L^n \times \mathbb{R}^n \to AC^n$ — это интегральный оператор

$$W(q,\gamma) = (W_1(q_1,\gamma_1),\ldots,W_n(q_n,\gamma_n)),$$

компоненты которого определяются соотношениями

$$(W_i(q_i,\gamma_i))(t) = X_i(t)\gamma_i + \int_0^1 \mathcal{W}_i(t,s)q_i(s)ds,$$

$$X_i(t) = \frac{e^{\lambda_i t}}{\alpha_i + \beta_i e^{\lambda}},$$

$$\mathcal{W}_i(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_i e^{\lambda_i(t-s)}}{\alpha_i+\beta_i e^{\lambda_i}}, & 0 \le s \le t \le 1, \\ \dfrac{-\beta_i e^{\lambda_i(t-s+1)}}{\alpha_i+\beta_i e^{\lambda_i}}, & 0 \le t < s \le 1, \end{cases} \qquad i = \overline{1,n}.$$

Легко проверить, что в случае

$$\lambda_i > \ln\big(-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\big)$$

выполнено $\mathcal{W}_i(t,s) < 0$ при п. в. $(t,s) \in [a,b]\times[a,b]$ и $X_i(t) < 0$ при п. в. $t \in [a,b]$, а в случае

$$\lambda_i < \ln\big(-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\big)$$

выполнено $\mathcal{W}_i(t,s) > 0$ при п. в. $(t,s) \in [a,b]\times[a,b]$ и $X_i(t) > 0$ при п. в. $t \in [a,b]$. Поэтому из условия (2.b) получаем, что отображение $G^\lambda_\Omega(t, W(\cdot,\cdot), z, y) : L^n\times\mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ антитонное (по каждому аргументу).

Используя формулу (2.4) и вспомогательную задачу (2.9), запишем краевую задачу (2.1), (2.2), (2.3) относительно неизвестной функции $q \in L(B)$ в виде следующего эквивалентного включения

$$G^\lambda_\Omega(t, (W(q,\widetilde{\gamma}))(t), q(t), q(t)) \ni 0, \quad t \in [a,b]. \tag{2.10}$$

Покажем, что включение (2.10) представимо в виде операторного включения (1.2), к исследованию которого применима теорема 1.1.

Согласно [23, теорема 3.1], принятые относительно многозначной функции G^λ предположения (a), (b), (c) обеспечивают ее суперпозиционную измеримость, что позволяет определить отображение $\Upsilon : L(B)\times L(B) \rightrightarrows W^m$, как множество измеримых сечений измеримой многозначной функции

$$G^\lambda(\cdot, (W(q,\widetilde{\gamma}))(\cdot), q(\cdot), z(\cdot)) : [a,b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m),$$

и соответствующее отображение $F : L(B) \rightrightarrows W^m$, $F(q) \doteq \Upsilon(q,q)$, $q \in L(B)$. Проверим для этих отображений условия теоремы 1.1 Будем полагать $\widehat{y} = 0 \in W^m$.

Для функции $q_0 = \mathcal{L}\eta \in L(B)$ выполнено

$$G^\lambda_j\big(t, (W(q_0,\gamma))(t), q_0(t), q_0(t)\big) \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset, \quad j = \overline{1,m},$$

где $\gamma = \alpha\eta(a) - \beta\eta(b) \geq \widetilde{\gamma}$. А так как отображение $G_\Omega^\lambda(t, W(\cdot,\cdot), z, y) : L \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ антитонное, получаем, что

$$G_j^\lambda\big(t, (W(q_0, \widetilde{\gamma}))(t), q_0(t), q_0(t)\big) \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset, \quad j = \overline{1, m}.$$

В силу условий (a), (b), (c) отсюда следует, что существует измеримое сечение $y_0 \geq 0$ отображения $G_j^\lambda(t, (W(q_0, \widetilde{\gamma}))(t), q_0(t), q_0(t))$, $j = \overline{1, m}$, и для отображения Υ выполнено включение $\Upsilon(q_0, q_0) \ni y_0$, т. е. имеют место соотношения (1.3).

Определим многозначную функцию $g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ формулой

$$g(t, y) \doteq G^\lambda(t, (Wv)(t), v(t), y), \quad t \in [a, b], \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Для любого $v \in L(B)$ отображение $\Upsilon(\cdot, v) : L(B) \rightrightarrows W^m$ — это оператор Немыцкого, порождаемый сужением g_Δ на множество $\Delta = \big\{(t, y) : t \in [a, b], \ y \in B(t)\big\}$ функции $g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$. Из предположения (2.a) теоремы следует, что при п. в. $t \in [a, b]$ функция $g_\Delta(t, \cdot) : B(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ упорядоченно накрывает множество $\{0\} \in \mathbb{R}^m$. Поэтому согласно [23, теорема 3.1] при любом $v \in L(B)$ отображение $\Upsilon(\cdot, v) : L(B) \rightrightarrows W^m$ упорядоченно накрывает множество $\{0\} \in W^m$. Таким образом, условие (1.a) теоремы 1.1 выполнено.

В силу антитонности отображения $G_\Omega^\lambda(t, W(\cdot,\cdot), z, y) : L \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$, при любом $u \in L(B)$ отображение $\Upsilon(u, \cdot) : L(B) \rightrightarrows W^m$ является антитонным, и условие (1.b) теоремы 1.1 также выполнено.

Проверка условия (1.c) теоремы 1.1 производится аналогично рассуждениями, приведенными в доказательстве теоремы 4.1 работы [23] (в цитируемой теореме были получены условия существования о оценка решения дифференциального включения вида (2.1)).

Таким образом, согласно теореме 1.1, существует решение $x \in AC^m$ краевой задачи (2.1), (2.2), (2.3), удовлетворяющее неравенству $\mathcal{L}x \leq \mathcal{L}\eta$. □

Приведем пример, иллюстрирующий применение теоремы 2.1 к исследованию периодической краевой задачи для дифференциального уравнения.

П р и м е р 2.1. Рассмотрим при $t \in [0, 1]$ краевую задачу

$$(\dot{x}(t) + x(t))^2 + \mathrm{arctg}(\dot{x}(t)) - 2\pi = 0, \tag{2.11}$$

$$x(0) - x(1) = 0, \tag{2.12}$$

$$\dot{x}(t) - x(t) \in [-1; 1]. \tag{2.13}$$

Определим соответствующие рассматриваемой здесь задаче константы $\widetilde{\gamma} \doteq 0$, $\lambda \doteq 1$, $\alpha \doteq 1$, $\beta \doteq -1$ и отображение $B : [0, 1] \to \mathrm{C}(\mathbb{R})$, $B(t) \doteq [-1, 1]$. Для того чтобы к задаче (2.11), (2.12), (2.13) применить теорему 2.1, вначале умножим на -1 уравнение (2.11) и определим соответствующее полученному таким образом уравнению отображение $F : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(t, x, v, w) = -(w + x)^2 - \mathrm{arctg}(v) + 2\pi, \quad t \in [0, 1], \quad x, v, w \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Уравнение (2.11) — это частный случай включения (2.1), в котором отображение F определено соотношениями (2.14).

Применяя (2.4), определим отображение $G^\lambda : [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ формулой

$$G^\lambda(t,x,z,y) \doteq -y^2 - \operatorname{arctg}(z+x) + 2\pi.$$

Покажем, что выполнены условия теоремы 2.1.

Прежде всего, отображение $B : [0,1]\to \mathrm{C}(\mathbb{R})$, очевидно, интегрально ограниченное. Далее, положим $\eta_0(t) \doteq -t$, $t\in[0,1]$. Для такой функции выполнено

$$\dot\eta_0(t)\equiv -1,\quad f(t,\eta_0(t),\dot\eta_0(t),\dot\eta_0(t)) \equiv -(-1-t)^2 - \operatorname{arctg}(-1) + 2\pi \geq 0,$$

$$\eta(0)-\eta(1) = 0-(-1) = 1 \geq 0,$$

$$\dot\eta(t) - \lambda\eta(t) = -1-(-t) = -1+t\in[-1,1]\ \ \forall t\in[0,1].$$

Итак, соотношения (2.5)–(2.7) справедливы.

Рассмотрим свойства отображения G^λ как функции второго, третьего и четвертого аргументов. Отображение $G^\lambda(t,x,v,\cdot) : B(t)\to\mathbb{R}$ накрывает множество $\{0\}$ (т. е. выполнено условие (2.a) теоремы 2.1). Действительно, для $y\in[-1,1]$ из неравенства $-y^2-\operatorname{arctg}(z+x)+2\pi\geq 0$ следует существование $\tilde y\in[-1,1]$ такого, что $\tilde y\leq y$ и $-\tilde y^2-\operatorname{arctg}(z+x)+2\pi = 0$ (например, можно положить $\tilde y = -\sqrt{2\pi-\operatorname{arctg}(z+x)}$). Отображение $G^\lambda(t,\cdot,\cdot,w) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — антитонное по каждому аргументу (в силу убывания функции $-\operatorname{arctg}$), следовательно, условия (2.b) и (2.c) теоремы 2.1 выполнены.

Итак, все условия теоремы 2.1 выполнены и, таким образом, рассматриваемая периодическая краевая задача разрешима, и существует решение x, производная которого удовлетворяет неравенству $\dot x - \lambda x \leq 1-t$, $t\in[0,1]$.

References

[1] В. И. Арнольд, *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978. [V. I. Arnold, *Additional Chapters of the Theory of Ordinary Differential Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russian)].

[2] А. А. Давыдов, “Особенности предельных направлений типичных неявных ОДУ высших порядков”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Труды МИАН, **236**, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2002, 134–141; англ. пер.:A. A. Davydov, “Singularities of Limiting Directions of Generic Higher Order Implicit ODEs”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **236** (2002), 124–131.

[3] А. А. Давыдов, “Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки”, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:2 (1985), 1–10; англ. пер.:A. A. Davydov, “Normal form of a differential equation, not solvable for the derivative, in a neighborhood of a singular point”, *Funct. Anal. Appl.*, **19**:2 (1985), 81–89.

[4] L. Dara, “Singularites generiques des equations differentielles multiformes”, *Bol. Soc. Bras. Mat.*, **6**:2 (1975), 95–128.

[5] А. О. Ремизов, “Многомерная конструкция Пуанкаре и особенности поднятых полей для неявных дифференциальных уравнений”, *Оптимальное управление*, СМФН, **19**, РУДН, М., 2006, 131–170; англ. пер.:A. O. Remizov, “Many-dimensional poincaré construction and singularities of lifted fields for implicit differential equations”, *Journal of Mathematical Sciences*, **151**:6 (2008), 3561–3602.

[6] А. О. Ремизов, “Неявные дифференциальные уравнения и векторные поля с неизолированными особыми точками”, *Матем. сб.*, **193**:11 (2002), 105–124; англ. пер.:A. O. Remizov, “Implicit differential equations and vector fields with non-isolated singular points”, *Sb. Math.*, **193**:11 (2002), 1671–1690.

[7] W. Walter, "Differential and integral inequalities", *Journal of Fluid Mechanics*, **48**:2 (1970), 710–713.

[8] Э. Беккенбах, Р. Беллман, *Неравенства*, Мир, М., 1965. [E. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities*, Mir Publ., Moscow, 1965 (In Russian)].

[9] Я. Д. Мамедов, С. Аширов, С. Атдаев, *Теоремы о неравенствах*, Ылым, Ашхабад, 1980. [Ya. D. Mammadov, S. Ashirov, S. Atdaev, *Inequality theorems*, Ylym Publ., Ashkhabad, 1980 (In Russian)].

[10] С. А. Чаплыгин, "Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений", *Собрание сочинений.* Т. I, Гостехиздат, М., 1948, 348–368. [S. A. Chaplygin, "Foundations of a New Method of Approximate Integration of Differential Equations", *Collected works.* V. I, Gostekhizdat, M., 1948, 348–368 (In Russian)].

[11] Е. С. Жуковский, "Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах", *Дифференц. уравнения*, **52**:12 (2016), 1610–1627; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, "On ordered-covering mappings and implicit differential inequalities", *Differ. Equ.*, **52**:12 (2016), 1539–1556.

[12] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, "Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями", *Автомат. и телемех.*, 2015, № 1, 31–56; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, E. A. Pluzhnikova, "On controlling objects whose motion is defined by implicit nonlinear differential equations", *Autom. Remote Control*, **76**:1 (2015), 24–43.

[13] С. Бенараб, "Двусторонние оценки решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений", *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:134 (2021), 216–220. [S. Benarab, "Two-sided estimates for solutions of boundary value problems for implicit differential equations", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:134 (2021), 216–220 (In Russian)].

[14] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах", *Доклады Академии наук*, **453**:5 (2013), 475–478; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "On coincidence points of mappings in partially ordered spaces", *Doklady Mathematics*, **88**:3 (2013), 710–713.

[15] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах", *Доклады Академии наук*, **453**:6 (2013), 595–598; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points of set-valued mappings in partially ordered spaces", *Doklady Mathematics*, **88**:3 (2013), 727–729.

[16] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "О мощности множества точек совпадения отображений метрических, нормированных и частично упорядоченных пространств", *Матем. сб.*, **209**:8 (2018), 3–28; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "On the cardinality of the coincidence set for mappings of metric, normed and partially ordered spaces", *Sb. Math.*, **209**:8 (2018), 1107–1130.

[17] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces", *Topology and its Applications*, **179**:1 (2015), 13–33.

[18] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces", *Topology and its Applications*, **179** (2016), 330–343.

[19] И. Д. Серова, А. А. Репин, "О существовании и оценках решений неявного дифференциального уравнения с авторегулируемым отклонением аргумента", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:123 (2018), 566–574. [I. D. Serova, A. A. Repin, "About Existence and Estimates of Solutions of the Implicit Differential Equation With Autoadjustable Deviation Argument", *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:123 (2018), 566–574 (In Russian)].

[20] И. Д. Серова, "Об оценках решения неявного функционально-дифференциального уравнения", *Прикладная математика и вопросы управления*, 2017, № 2, 85–93. [I. D. Serova, "On estimates of the solution of an implicit functional differential equation", *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2017, № 2, 85–93 (In Russian)].

[21] А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, *Теория колебаний*, 2-е изд., Гос. изд-во физ.-мат. литературы, М., 1959. [A. A. Andronov, A. A. Vitt, S. E. Hajkin, *Oscillation Theory*, 2nd. ed., Gos. Izd-vo Fiz.-Mat. Literatury Publ., M., 1959 (In Russian)].

[22] А. Д. Пилия, В. И. Федоров, “Особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью”, *ЖЭТФ*, **60**:1 (1971), 389–399; англ. пер.:A. D. Piliya, V. I. Fedorov, “Singularities of the field of an electromagnetic wave in a cold anisotropic plasma with two-dimensional inhomogeneity”, *JETP*, **33**:1 (1971), 210–215.

[23] E. O. Burlakov,E. S. Zhukovskiy, E. A. Panasenko, I. D. Serova, “On order covering set-valued mappings and their applications to the investigation of implicit differential inclusions and dynamic models of economic processes”, *Advances in Systems Science and Applications*, **22**:1 (2022), 176–191.

Информация об авторе

Серова Ирина Дмитриевна, аспирант, кафедра функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: irinka_36@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4224-1502

Поступила в редакцию 30.06.2023 г.
Поступила после рецензирования 16.11.2023 г.
Принята к публикации 23.11.2023 г.

Information about the author

Irina D. Serova, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation.
E-mail: irinka_36@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4224-1502

Received 30.06.2023
Reviewed 16.11.2023
Accepted for press 23.11.2023