



Общероссийский математический портал

К. А. Кириллов, Оценки нормы функционала погрешности на пространствах S_p весовых квадратурных формул, точных для полиномов Хаара, *Выч. мет. программирование*, 2012, том 13, выпуск 2, 324–331

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.145.50.254

9 января 2025 г., 23:39:14



УДК 517.518.87

ОЦЕНКИ НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ НА ПРОСТРАНСТВАХ S_p ВЕСОВЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ, ТОЧНЫХ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ХААРА

К. А. Кириллов¹

Для весовых квадратурных формул получены оценки нормы функционала погрешности на пространствах S_p : нижняя оценка величины $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ для формул, точных на константах, и верхние оценки $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ для формул, обладающих d -свойством Хаара.

Ключевые слова: d -свойство Хаара, функционал погрешности квадратурной формулы, пространства функций S_p .

1. Введение. Задача построения и исследования кубатурных (квадратурных) формул, точных на некотором конечномерном классе функций, характеризует одно из важных направлений теории приближенного интегрирования. Ранее эта задача в основном решалась для вычисления интегралов, точных на алгебраических и тригонометрических многочленах. Кубатурные формулы, точные для конечных сумм Хаара, можно найти в монографии [1]. Описание всех минимальных весовых квадратурных формул, обладающих d -свойством Хаара (формул, точных для полиномов Хаара степеней, не превосходящих заданного числа d), проведено в [2, 3]. В [4] доказаны оценки нормы функционала погрешности $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ и $\|\delta_N\|_{H_\alpha^*}$ квадратурных формул, точных для полиномов Хаара с весовой функцией $g(x) \equiv 1$.

Результаты, полученные в [4] для величины $\|\delta_N\|_{S_p^*}$, в настоящей статье обобщены на случай квадратурных формул с весами: в случае весовой функции $g(x) \in L_1[0, 1]$ выведена нижняя оценка нормы функционала погрешности $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ квадратурных формул, точных на константах, а в случаях $g(x) \in L_\infty[0, 1]$ и $g(x) \in L_q[0, 1]$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$, доказаны верхние оценки нормы функционала погрешности $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ квадратурных формул, обладающих d -свойством Хаара.

Отмечено, что для рассмотренных квадратурных формул величина $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ в случае $N \asymp 2^d$, $d \rightarrow \infty$, имеет наилучший порядок сходимости к нулю при $N \rightarrow \infty$, равный $N^{-1/p}$.

2. Основные определения. В настоящей статье используется оригинальное определение функций $\chi_{m,j}(x)$, введенное Хааром [5], отличное от определения этих функций из [1] в точках разрыва.

Двоичными промежутками $l_{m,j}$ назовем промежутки с концами в точках $(j-1)/2^{m-1}$ и $j/2^{m-1}$, где $m = 1, 2, \dots$ и $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$. Если левый конец двоичного промежутка совпадает с 0, то будем считать этот промежуток замкнутым слева, если правый конец совпадает с 1 — замкнутым справа. Остальные двоичные промежутки считаются открытыми. Левую и правую половины $l_{m,j}$ (без середины этого двоичного промежутка) будем обозначать $l_{m,j}^-$ и $l_{m,j}^+$ соответственно.

Система функций Хаара строится группами: группа номер m содержит 2^{m-1} функций $\chi_{m,j}(x)$, где $m = 1, 2, \dots$ и $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$. Функции Хаара $\chi_{m,j}(x)$ определим следующим образом:

$$\chi_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^{(m-1)/2} & \text{при } x \in l_{m,j}^-, \\ -2^{(m-1)/2} & \text{при } x \in l_{m,j}^+, \\ 0 & \text{при } x \in [0, 1] \setminus \overline{l_{m,j}}, \\ \frac{1}{2} [\chi_{m,j}(x-0) + \chi_{m,j}(x+0)], & \text{если } x \text{ — внутренняя} \\ & \text{точка разрыва.} \end{cases}$$

Здесь $\overline{l_{m,j}} = [\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}}]$, $m = 1, 2, \dots$ и $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$. В систему функций Хаара включают также функцию $\chi_1(x) \equiv 1$, которая остается вне групп.

Полиномами Хаара степени d назовем линейные комбинации с вещественными коэффициентами функций $\chi_1(x)$ и $\chi_{m,j}(x)$, где $m = 1, 2, \dots, d$ и $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$, причем хотя бы один из коэффициентов при функциях Хаара $\chi_{d,j}(x)$ группы с номером d отличен от нуля.

¹ Сибирский Федеральный университет, кафедра “Прикладная математика и компьютерная безопасность”, ул. Киренского, 26, 660074, Красноярск; доцент, e-mail: kkirillov@gambler.ru

Будем рассматривать квадратурную формулу

$$I[f] = \int_0^1 g(x)f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N C_i f(x^{(i)}) = Q_N[f], \tag{1}$$

где $x^{(i)} \in [0, 1]$ — узлы и $C_i > 0$ — коэффициенты этой формулы соответственно. Функция $f(x)$ определена на $[0, 1]$, а функция $g(x)$ такова, что произведение $g(x)f(x)$ суммируемо на $[0, 1]$.

Функционал погрешности квадратурной формулы (1) обозначим через $\delta_N[f]$:

$$\delta_N[f] = \sum_{i=1}^N C_i f(x^{(i)}) - \int_0^1 g(x)f(x) dx. \tag{2}$$

Будем говорить, что квадратурная формула (1) обладает d -свойством Хаара (или просто d -свойством), если она точна для любого полинома Хаара $P_d(x)$ степени, не превосходящей d , т.е. $Q_N[P_d] = I[P_d]$.

3. Оценки нормы функционала погрешности весовых квадратурных формул. Сформулируем определение классов функций S_p , введенное в [1].

Множество функций $f(x)$, определенных на отрезке $[0, 1]$ и представимых в виде ряда Фурье–Хаара

$$f(x) = c_0^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_m^{(j)} \chi_{m,j}(x) \tag{3}$$

с вещественными коэффициентами $c_0^{(1)}, c_m^{(j)}$ ($m = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$), которые удовлетворяют условию

$$A_p(f) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{(m-1)/2} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_m^{(j)}|^p \right]^{1/p} \leq A, \tag{4}$$

где $p \geq 1$ и A — вещественная константа, определяется как класс $S_p(A)$. Множество функций $f(x)$, принадлежащих всем классам $S_p(A)$ (со всевозможными A , значение $1 \leq p < \infty$ фиксировано), является линейным пространством, обозначаемым через S_p , на котором норма вводится по формуле

$$\|f\|_{S_p} = A_p(f). \tag{5}$$

При этом все функции $f(x)$, отличающиеся постоянными слагаемыми, считаются за одну функцию.

В [6] вводится понятие пространства $L_\infty[0, 1]$, состоящего из всех измеримых почти всюду конечных функций $g(x)$, для каждой из которых найдется число C_g , такое, что $|g(x)| \leq C_g$ почти всюду. Такие функции называют существенно ограниченными. Мы будем рассматривать функции, существенно ограниченные на $[0, 1]$. Для функции $g \in L_\infty[0, 1]$ определен истинный (существенный) супремум ее модуля

$$\text{vrai sup}_{x \in [0,1]} |g(x)|$$

как инфимум множества чисел $\alpha \in \mathbb{R}$, таких, что мера множества

$$\{x \in [0, 1] : |g(x)| > \alpha\}$$

равна нулю. Здесь $L_\infty[0, 1]$ — линейное подмножество в множестве измеримых почти всюду конечных функций. Норма в $L_\infty[0, 1]$ вводится по формуле

$$\|g\|_{L_\infty[0,1]} = \text{vrai sup}_{x \in [0,1]} |g(x)|. \tag{6}$$

Лемма 1. [2] *Функции*

$$\kappa_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^m & \text{при } x \in l_{m+1,j}, \\ 2^{m-1} & \text{при } x \in \overline{l_{m+1,j}} \setminus l_{m+1,j}, \\ 0 & \text{при } x \in [0, 1] \setminus \overline{l_{m+1,j}}, \end{cases} \tag{7}$$

$j = 1, 2, \dots, 2^m$, являются полиномами Хаара степени m и образуют базис в линейном пространстве полиномов Хаара степеней, не превосходящих m , $m = 1, 2, \dots$

Лемма 2. Имеют место равенства

$$\chi_{m,j}(x) = 2^{-(m+1)/2} [\kappa_{m,2j-1}(x) - \kappa_{m,2j}(x)], \quad m = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}, \quad (8)$$

$$\kappa_{m,2j-1}(x) + \kappa_{m,2j}(x) = 2\kappa_{m-1,j}(x), \quad m = 2, 3, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}. \quad (9)$$

Соотношения (8), (9) непосредственно следуют из определения функций Хаара и равенства (7). Зафиксируем $p > 1$. Пусть q — число, связанное с p следующим соотношением:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Лемма 3. Для любого целого неотрицательного $k \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{2^m} \left(\int_{I_{m+1,j}} |g(x)| dx + 2^{-m} Q[\kappa_{m,j}] \right)^q \leq \sum_{j=1}^{2^{m-k}} \left(\int_{I_{m-k+1,j}} |g(x)| dx + 2^{-m+k} Q[\kappa_{m-k,j}] \right)^q. \quad (10)$$

Доказательство. Доказательство леммы проведем индукцией по k .

При $k = 0$ неравенство (10) обращается в равенство.

Исходя из индуктивного предположения об истинности неравенства

$$\sum_{j=1}^{2^m} \left(\int_{I_{m+1,j}} |g(x)| dx + 2^{-m} Q[\kappa_{m,j}] \right)^q \leq \sum_{j=1}^{2^{m-k+1}} \left(\int_{I_{m-k+2,j}} |g(x)| dx + 2^{-m+k-1} Q[\kappa_{m-k+1,j}] \right)^q, \quad (11)$$

докажем неравенство (10). Легко видеть, что при $a, b > 0$ и $q > 1$ имеет место неравенство

$$a^q + b^q \leq (a + b)^q. \quad (12)$$

Применяя неравенство (12) и равенство (9), получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2^{m-k+1}} \left(\int_{I_{m-k+2,j}} |g(x)| dx + \frac{Q[\kappa_{m-k+1,j}]}{2^{m-k+1}} \right)^q &\leq \sum_{j=1}^{2^{m-k}} \left[\left(\int_{I_{m-k+2,2j}} |g(x)| dx + \frac{Q[\kappa_{m-k+1,2j}]}{2^{m-k+1}} \right)^q + \right. \\ &\left. + \left(\int_{I_{m-k+2,2j-1}} |g(x)| dx + \frac{Q[\kappa_{m-k+1,2j-1}]}{2^{m-k+1}} \right)^q \right] \leq \sum_{j=1}^{2^{m-k}} \left(\int_{I_{m-k+1,j}} |g(x)| dx + \frac{Q[\kappa_{m-k,j}]}{2^{m-k}} \right)^q. \end{aligned} \quad (13)$$

Из неравенств (11) и (13) следует (10). Лемма доказана.

Введем в рассмотрение величины

$$\Psi_q(m) = \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left| - \int_{I_{m,j}^-} g(x) dx + \int_{I_{m,j}^+} g(x) dx + 2^{-(m-1)/2} Q[\chi_{m,j}] \right|^q \right]^{1/q}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Лемма 4. Если $f \in S_p$ и $g \in L_1[0, 1]$, то для квадратурной формулы (1) все величины $\Psi_q(m)$ ограничены, при этом для значений $m = d + 1, d + 2, \dots$ выполняются неравенства

$$|\Psi_q(m)| \leq 2 \left[\sum_{j=1}^{2^d} \left(\int_{I_{d+1,j}} |g(x)| dx \right)^q \right]^{1/q}. \quad (15)$$

Доказательство. Из (14) с учетом (8) и (9) получим

$$\begin{aligned} |\Psi_q(m)|^q &\leq \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left[\int_{I_{m,j}^-} |g(x)| dx + \int_{I_{m,j}^+} |g(x)| dx + 2^{-m} |Q[\kappa_{m,2j-1}] - Q[\kappa_{m,2j}]| \right]^q \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left[\int_{I_{m,j}} |g(x)| dx + |2^{-m} Q[\kappa_{m,2j-1} + \kappa_{m,2j}]| \right]^q = \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left[\int_{I_{m,j}} |g(x)| dx + 2^{-m+1} Q[\kappa_{m-1,j}] \right]^q. \end{aligned} \quad (16)$$

Имеют место неравенства

$$\int_{l_{d+1,j}} g(x) dx \geq 0, \tag{17}$$

так как в силу леммы 1 и положительности коэффициентов формулы (1) имеем

$$\int_{l_{d+1,j}} g(x) dx = 2^{-d} \int_0^1 g(x) \kappa_{d,j}(x) dx = 2^{-d} \sum_{i=1}^N C_i \kappa_{d,j}(x^{(i)}) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2^d.$$

Применяя лемму 3 и учитывая лемму 1, а также неравенство (17), при $m = d + 1, d + 2, \dots$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left[\int_{l_{m,j}} |g(x)| dx + 2^{-m+1} Q[\kappa_{m-1,j}] \right]^q &\leq \sum_{j=1}^{2^d} \left[\int_{l_{d+1,j}} |g(x)| dx + 2^{-d} Q[\kappa_{d,j}] \right]^q \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{2^d} \left[\int_{l_{d+1,j}} |g(x)| dx + \int_{l_{d+1,j}} g(x) dx \right]^q \leq \sum_{j=1}^{2^d} \left[2 \int_{l_{d+1,j}} |g(x)| dx \right]^q. \end{aligned} \tag{18}$$

Из неравенств (16), (18) следует (15).

Ограниченность всех величин $\Psi_q(m)$ следует из неравенства

$$|\Psi_q(m)| \leq \max \left\{ \Psi_q(1), \Psi_q(2), \dots, \Psi_q(d), 2 \left[\sum_{j=1}^{2^d} \left(\int_{l_{d+1,j}} |g(x)| dx \right)^q \right]^{1/q} \right\}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Лемма доказана.

Лемма 5. Если $g \in L_1[0, 1]$, то для нормы функционала погрешности квадратурной формулы (1), точной на константах, имеет место равенство

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} = \sup_{1 \leq m < \infty} \Psi_q(m). \tag{19}$$

Если при выполнении вышеперечисленных условий формула (1) обладает d -свойством, то

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} = \sup_{d < m < \infty} \Psi_q(m). \tag{20}$$

Доказательство. Подставив (3) в (2), с учетом точности формулы (1) на константах приходим к следующему выражению для функционала ее погрешности:

$$\delta_N[f] = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_m^{(j)} \left[\sum_{i=1}^N C_i \chi_{m,j}(x^{(i)}) - \int_0^1 g(x) \chi_{m,j}(x) dx \right]. \tag{21}$$

Принимая во внимание определение функций Хаара, равенство (21) запишем в виде

$$\delta_N[f] = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{(m-1)/2} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left\{ c_m^{(j)} \left[- \int_{l_{m,j}^-} g(x) dx + \int_{l_{m,j}^+} g(x) dx + 2^{-(m-1)/2} Q[\chi_{m,j}] \right] \right\}. \tag{22}$$

В силу абсолютной сходимости ряда в правой части равенства (22) имеет место неравенство

$$|\delta_N[f]| \leq \sum_{m=1}^{\infty} 2^{(m-1)/2} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left\{ \left| c_m^{(j)} \right| \left| - \int_{l_{m,j}^-} g(x) dx + \int_{l_{m,j}^+} g(x) dx + 2^{-(m-1)/2} Q[\chi_{m,j}] \right| \right\}. \tag{23}$$

Оценивая с помощью неравенства Гельдера сумму по j в правой части (23), получим неравенство

$$|\delta_N[f]| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 2^{(m-1)/2} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_m^{(j)}|^p \right]^{1/p} \Psi_q(m) \right\}. \tag{24}$$

Учитывая равенства (4) и (5), из (24) получаем следующую оценку величины $|\delta_N[f]|$:

$$|\delta_N[f]| \leq \|f\|_{S_p} \sup_{1 \leq m < \infty} \Psi_q(m). \quad (25)$$

Для того чтобы установить неулучшаемость этого неравенства, воспользуемся техникой доказательств, примененной в [7]. Зафиксируем значение $m = m_0 \in \mathbb{N}$ и рассмотрим функцию

$$f_{m_0}(x) = \sum_{j=1}^{2^{m_0-1}} \left\{ \left| - \int_{l_{m_0,j}^-} g(x) dx + \int_{l_{m_0,j}^+} g(x) dx + 2^{-(m_0-1)/2} Q[\chi_{m_0,j}] \right|^{q-1} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sgn} \left[- \int_{l_{m_0,j}^-} g(x) dx + \int_{l_{m_0,j}^+} g(x) dx + 2^{-(m_0-1)/2} Q[\chi_{m_0,j}] \right] \chi_{m_0,j}(x) \right\}.$$

Очевидно, что коэффициенты Фурье–Хаара этой функции определяются равенствами

$$c_{m_0}^{(j)} = \left| - \int_{l_{m_0,j}^-} g(x) dx + \int_{l_{m_0,j}^+} g(x) dx + 2^{-(m_0-1)/2} Q[\chi_{m_0,j}] \right|^{q-1} \times \\ \times \operatorname{sgn} \left[- \int_{l_{m_0,j}^-} g(x) dx + \int_{l_{m_0,j}^+} g(x) dx + 2^{-(m_0-1)/2} Q[\chi_{m_0,j}] \right], \quad j = 1, 2, \dots, 2^{m_0-1},$$

$c_0^{(0)} = 0$, $c_m^{(j)} = 0$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{m_0\}$, $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$. Следовательно, в силу (22) имеем

$$|\delta_N[f_{m_0}]| = 2^{(m_0-1)/2} \sum_{j=1}^{2^{m_0-1}} \left| - \int_{l_{m_0,j}^-} g(x) dx + \int_{l_{m_0,j}^+} g(x) dx + 2^{-(m_0-1)/2} Q[\chi_{m_0,j}] \right|^q = \|f_{m_0}\|_{S_p} \Psi_q(m_0). \quad (26)$$

Поскольку рассматриваемую функцию $f_{m_0}(x)$ можно построить для любого значения $m_0 \in \mathbb{N}$, из (26) следует равенство (19). Конечность нормы вытекает из леммы 4.

Если квадратурная формула (1) обладает d -свойством, то в силу ее точности на полиномах Хаара степеней, не превосходящих d , в равенствах (21), (22) и неравенстве (24) нижний индекс в сумме по m будет равен $d+1$, и неравенство (25) переписется в виде

$$|\delta_N[f]| \leq \|f\|_{S_p} \sup_{d < m < \infty} \Psi_q(m).$$

Тогда из существования для любого $m_0 > d$ функции $f_{m_0}(x)$, удовлетворяющей равенству (26), следует (20). Лемма доказана.

Пусть

$$G = \int_0^1 g(x) dx. \quad (27)$$

Теорема 1. Если $g \in L_1[0, 1]$, то для нормы функционала погрешности квадратурной формулы (1), точной на константах, имеет место нижняя оценка

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \geq 2^{-1/p} G N^{-1/p}, \quad (28)$$

где константа G определяется согласно (27).

Доказательство. Выберем ε , удовлетворяющее условию

$$0 < \varepsilon < \min_{1 \leq i \leq N} \left\{ \frac{C_i}{2} \right\}. \quad (29)$$

Существует такое число $m_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $m \geq m_0$ выполняются неравенства

$$\left| \int_{l_{m+1,j}} g(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}.$$

Пусть m_1 — минимальное из чисел m , удовлетворяющих следующему условию: каждый из отрезков $\overline{l_{m+1,1}, \dots, l_{m+1,2^m}}$ содержит не более одного узла формулы (1).

Если каждый из узлов формулы (1) отличен от точек $\frac{2j-1}{2^{m_1}}$, $j = 1, 2, \dots, 2^{m_1-1}$, то положим $m_2 = m_1$. В противном случае положим

$$m_2 = 1 + \max\{m : \text{существует } x_r = \frac{2j_r - 1}{2^m}, j_r \in \{1, 2, \dots, 2^{m-1}\}\}.$$

Пусть $m' = \max\{m_0, m_2\}$. Тогда для всех значений $m \geq m'$ выполняются следующие три условия:

– для всех $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$ выполнено неравенство

$$\left| \int_{l_{m,j}^-} g(x) dx - \int_{l_{m,j}^+} g(x) dx \right| \leq \varepsilon; \tag{30}$$

– каждый отрезок $\overline{l_{m+1,j}}$ содержит не более одного узла квадратурной формулы (1), $j = 1, 2, \dots, 2^m$;

– узлы формулы (1) не являются точками вида $\frac{2j-1}{2^m}$, $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$.

Из (14) с учетом (8) получим

$$\Psi_q(m') = \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m'-1}} \left| - \int_{l_{m',j}^-} g(x) dx + \int_{l_{m',j}^+} g(x) dx + 2^{-m'} \sum_{i=1}^N C_i \left(\kappa_{m',2j-1}(x^{(i)}) - \kappa_{m',2j}(x^{(i)}) \right) \right|^q \right\}^{1/q}. \tag{31}$$

По определению числа m' узлы квадратурной формулы (1) не являются точками вида

$$\left\{ \frac{2j-1}{2^{m'}} \right\} = \text{supp} \{ \kappa_{m',2j-1} \} \cap \text{supp} \{ \kappa_{m',2j} \}$$

и каждый отрезок $\overline{l_{m'+1,j}}$ содержит не более одного узла формулы. Тогда равенство (31) можно записать в следующем виде:

$$\Psi_q(m') = \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m'}} \left| \pm 2^{-m'} \sum_{i=1}^N C_i \kappa_{m',j}(x^{(i)}) - \left(\int_{l_{m',j}^-} g(x) dx - \int_{l_{m',j}^+} g(x) dx \right) \right|^q \right\}^{1/q}, \tag{32}$$

причем перед выражением $2^{-m'} \sum_{i=1}^N C_i \kappa_{m',j}(x^{(i)})$ будет стоять знак "+", если $x^{(i)} \in l_{m',j}^-$, и знак "-", если $x^{(i)} \in l_{m',j}^+$.

Принимая во внимание (29) и (30), из (32) получим

$$\begin{aligned} \Psi_q(m') &= \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m'}} \left| 2^{-m'} \sum_{i=1}^N C_i \kappa_{m',j}(x^{(i)}) - \left[\pm \left(\int_{l_{m',j}^-} g(x) dx - \int_{l_{m',j}^+} g(x) dx \right) \right] \right|^q \right\}^{1/q} \geq \\ &\geq \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m'}} \left| 2^{-m'} \sum_{i=1}^N C_i \kappa_{m',j}(x^{(i)}) \right|^q \right\}^{1/q}. \end{aligned} \tag{33}$$

Обозначим через N_1 число узлов квадратурной формулы (1), лежащих на границах отрезков $\overline{l_{m'+1,j}} = \text{supp} \{ \kappa_{m',j} \}$ и отличных от 0 и 1, т.е. в точках $\left\{ \frac{j}{2^{m'}} \right\}$ ($j = 1, \dots, 2^{m'} - 1$). Для определенности будем считать, что это узлы $x^{(1)}, \dots, x^{(N_1)}$ формулы. С учетом того, что каждый отрезок $\overline{l_{m'+1,j}}$ содержит не более одного узла формулы (1), из (33) получим неравенство

$$\Psi_q(m') \geq \left\{ \sum_{i=N_1+1}^N C_i^q + 2 \sum_{i=1}^{N_1} \left(\frac{C_i}{2} \right)^q \right\}^{1/q}. \tag{34}$$

Из точности квадратурной формулы (1) на константах следует равенство

$$C_1 + C_2 + \dots + C_N = G, \tag{35}$$

где G определяется согласно (27). В силу положительности коэффициентов при узлах квадратурной формулы (1) из (35), в частности, вытекает, что $G > 0$.

Несложно показать, что при условии (35), т.е. $C_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, функция

$$\varphi(C_1, C_2, \dots, C_N) = 2 \sum_{i=1}^{N_1} \left(\frac{C_i}{2}\right)^q + \sum_{i=N_1+1}^N C_i^q$$

достигает своего наименьшего значения, равного $G^q(N + N_1)^{1-q}$, когда

$$C_1 = C_2 = \dots = C_{N_1} = 2G(N + N_1)^{-1}, \quad C_{N_1+1} = C_{N_1+2} = \dots = C_N = G(N + N_1)^{-1}.$$

Тогда из (34) получим

$$\Psi_q(m') \geq G(N + N_1)^{-1/p} \geq 2^{-1/p} G N^{-1/p}.$$

В силу равенства (19) отсюда следует (28). Теорема доказана.

Введем следующее обозначение:

$$G_0 = \int_0^1 |g(x)| dx. \quad (36)$$

Теорема 2. Если $g \in L_\infty[0, 1]$, то для нормы функционала погрешности квадратурной формулы (1), обладающей d -свойством, имеет место оценка

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leq 2(2^{-d})^{1/p} G_0^{1/q} \|g\|_{L_\infty[0,1]}^{1/p}, \quad (37)$$

где константа G_0 определяется согласно (36).

Доказательство. Учитывая определение (6) нормы в пространстве $L_\infty[0, 1]$ и равенство (36), имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2^d} \left(\int_{l_{d+1,j}} |g(x)| dx \right)^q &= \sum_{j=1}^{2^d} \left[\left(\int_{l_{d+1,j}} |g(x)| dx \right)^{q-1} \int_{l_{d+1,j}} |g(x)| dx \right] \leq \\ &\leq (2^{-d} \|g\|_{L_\infty[0,1]})^{q-1} \sum_{j=1}^{2^d} \int_{l_{d+1,j}} |g(x)| dx \leq (2^{-d} \|g\|_{L_\infty[0,1]})^{q-1} G_0. \end{aligned} \quad (38)$$

Из равенства (20), неравенств (15), (38) следует оценка (37). Теорема доказана.

Теорема 3. Если $g \in L_q[0, 1]$, то для нормы функционала погрешности квадратурной формулы (1), обладающей d -свойством, имеет место следующая оценка:

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leq 2(2^{-d})^{1/p} \|g\|_{L_q[0,1]}. \quad (39)$$

Доказательство. Применяя интегральное неравенство Гельдера, приходим к неравенствам

$$\int_{l_{d+1,j}} |g(x)| dx \leq (2^{-d})^{1/p} \left(\int_{l_{d+1,j}} |g(x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad j = 1, 2, \dots, 2^d. \quad (40)$$

Из (15), (40) следует, что

$$|\Psi_q(m)| \leq 2 \left[\sum_{j=1}^{2^d} (2^{-d})^{q/p} \int_{l_{d+1,j}} |g(x)|^q dx \right]^{1/q} = 2(2^{-d})^{1/p} \left[\int_0^1 |g(x)|^q dx \right]^{1/q} = 2(2^{-d})^{1/p} \|g\|_{L_q[0,1]}.$$

Отсюда с учетом равенства (20) получаем оценку (39). Теорема доказана.

4. Заключение. В [7] для в случая $g(x) \geq 0$ построена формула с положительными коэффициентами при узлах, удовлетворяющая условию

$$\sum_{i=1}^N C_i = \int_0^1 g(x) dx = G,$$

для нормы функционала погрешности которой выполняются неравенства

$$GN^{-1/p} \leq \|\delta_N\|_{S_p^*} \leq 2GN^{-1/p}.$$

Следовательно, для такой формулы имеем $\|\delta_N\|_{S_p^*} \asymp N^{-1/p}$, $N \rightarrow \infty$.

Как в случае $g \in L_\infty[0, 1]$, так и в случае $g \in L_q[0, 1]$, в силу теорем 1–3 при $N \asymp 2^d$, $d \rightarrow \infty$, для формул, рассмотренных в настоящей статье, порядок величины $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ так же в точности равен $N^{-1/p}$, $N \rightarrow \infty$.

Условию $N \asymp 2^d$, $d \rightarrow \infty$, удовлетворяют построенные в [2] минимальные весовые квадратурные формулы, обладающие d -свойством. В то же время указанные квадратурные формулы, будучи минимальными формулами приближенного интегрирования, обеспечивают наилучшую поточечную сходимость $\delta_N[f]$ к нулю при $N \rightarrow \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболь И.М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969.
2. *Кириллов К.А., Носков М.В.* Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2002. **42**, № 6. 791–799.
3. *Noskov M.V., Kirillov K.A.* Minimal cubature formulas exact for Haar polynomials // J. of Approximation Theory. 2010. **162**, N 3. 615–627.
4. *Кириллов К.А.* Об оценках погрешности квадратурных формул, точных для полиномов Хаара // Вычислительные методы и программирование. 2011. **12**, № 2. 94–101.
5. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. 1910. **69**. 331–371.
6. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
7. *Соболь И.М.* О весовых квадратурных формулах // Сиб. матем. журн. 1978. **19**, № 5. 1196–1200.

Поступила в редакцию
28.03.2012