



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Масина, О. В. Дружинина, И. И. Васильева, Исследование популяционной динамической модели «три конкурента – три ареала миграции», *Ученые записки УлГУ. Серия «Математика и информационные технологии»*, 2023, выпуск 2, 61–71

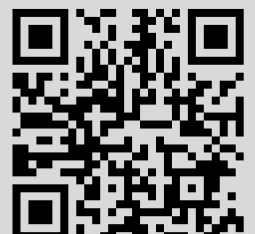
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 13.58.147.19

8 января 2025 г., 06:54:25





Ссылка на статью:

// Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. 2023, №. 2, с. 61-71.

Поступила: 11.11.2023

Окончательный вариант: 11.11.2023

© УлГУ

УДК 519.6

## Исследование популяционной динамической модели «три конкурента – три ареала миграции»

Масина О.Н.<sup>1</sup>, Дружинина О.В.<sup>1,2</sup>,

Васильева И.И.<sup>1,\*</sup>

[\\*irinavsl@yandex.ru](mailto:irinavsl@yandex.ru)

<sup>1</sup>ЕГУ им. И.А. Бунина, Елец, Россия

<sup>2</sup>ФИЦ ИУ РАН, ИПУ РАН, Москва, Россия

---

Статья посвящена компьютерному исследованию популяционной динамической модели «три конкурента – три ареала миграции». Построение указанной модели осуществлено на основе перехода от конечномерной популяционной модели « $k$  конкурентов –  $k$  ареалов миграции», где  $k=n/2$ , четное число  $n$  – размерность модели,  $n \geq 4$ . Модель «три конкурента – три ареала миграции» учитывает межвидовую конкуренцию в трех популяциях попарно, двунаправленную неравномерную миграцию всех популяций с учетом трех убежищ. Посредством дифференциальной эволюции найдены наборы параметров, удовлетворяющие выбранным критериям оптимальности. Для изучаемой шестимерной популяционно-миграционной модели построены графики популяционных плотностей при полученных наборах параметров. Компьютерные эксперименты позволили выяснить изменение характера траекторий популяционных плотностей. Дана интерпретация проведенных вычислительных экспериментов и дан сравнительный анализ результатов, полученных с помощью двух критериев оптимальности. Полученные результаты могут найти применение в задачах математического моделирования многомерных экологических и социально-экономических систем.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, системы дифференциальных уравнений, многомерные модели популяционной динамики, конкуренция, миграционные потоки, дифференциальная эволюция, компьютерные эксперименты.

---

### Введение

Построение и исследование популяционных моделей с миграционными потоками представляют существенный теоретический и прикладной интерес (см., например, [1–9]). В частности, в [4] для изучения условий синхронизации миграционно-связанных сообществ представлена и исследована модификация динамической модели «ресурс-

потребитель». Проведено аналитическое и качественное исследование построенной модели, определены условия синхронизации колебаний рассматриваемых сообществ, изучено влияние миграционного взаимодействия между сообществами на динамику каждой популяции. В [6] предложено несколько математических моделей динамики популяций рыб с дискретным временем с учетом частичной миграции. Для этих моделей изучены условия сосуществования мигрирующих особей и особей из основного ареала обитания. В [9] представлена и изучена модель миграционных сетей в различных популяциях фауны, обобщающая систему дифференциальных уравнений Лотки–Вольтерры.

Как известно, многие популяционные модели с миграцией базируются на использовании обобщенных конечномерных моделей Лотки–Вольтерры, в которых учитываются взаимодействия внутривидовой и межвидовой конкуренции, естественный прирост популяций и миграционные потоки с одинаковыми и различными скоростями миграции (равномерная и неравномерная миграция). Одной из важных работ по изучению этого типа моделей является статья [10], в которой авторами рассмотрена такая модель с равномерной миграцией, которая задается системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этой модели изучены эффекты использования линейной и нелинейной функций, описывающих миграцию, получены условия глобальной асимптотической устойчивости.

Детерминированные и стохастические миграционно-популяционные модели изучены в [11] и в других работах. В [11] предложена четырехмерная модель с конкуренцией и миграционными потоками («три конкурента–один ареал миграции»), проведен сравнительный анализ трехмерного и четырехмерного случаев, построены соответствующие стохастические модели. Сравнительный анализ исследуемых моделей проведен с учетом изменения скоростей миграции, а также коэффициентов внутривидового и межвидового взаимодействия. В этой работе использован метод построения стохастических самосогласованных моделей [12, 13].

В [14] предложено построение четырехмерной модели динамики популяций с учетом конкуренции и миграционных потоков. Методом дифференциальной эволюции с применением критерия оптимальности найдены приближенные значения модельных параметров в условиях конкуренции двух видов в основном ареале с учетом миграции этих видов, что позволило идентифицировать модель, для которой выполнены условия существования положительного состояния равновесия. Изучена траекторная динамика с учетом найденного набора параметров. В [15] дан анализ четырехмерной модели динамики популяций с учетом варьирования скоростей миграции при неизменных коэффициентах воспроизводства видов. Указанная модель принимает во внимание межвидовую конкуренцию в двух популяциях, двунаправленную миграцию обеих популяций и изменение скоростей миграции.

В [16] проведено моделирование процессов взаимодействия видов в условиях конкуренции и миграционных потоков. Выполнены серия компьютерных экспериментов, построены проекции фазовых портретов, выявлены качественные эффекты и дан сравнительный анализ полученных результатов для такой модификации модели «два конкурента

– два ареала миграции», которая связана с вариативностью коэффициентов естественного воспроизводства видов. В [17] рассмотрены различные модификации модели «два конкурента – два ареала миграции». Получены наборы модельных параметров, обеспечивающие сосуществование двух видов в основном ареале обитания и положительную динамику видов в убежищах, на основе применения метода дифференциальной эволюции. Выполнен переход к четырехмерным стохастическим популяционно-миграционным моделям на основе применения метода построения самосогласованных стохастических моделей и проведен сравнительный анализ траекторной динамики для детерминированного и стохастического случаев.

Настоящая работа является продолжением [14–17]. Далее мы рассматриваем построение моделей более высокой размерности с учетом конкуренции и миграции. Предложено формализованное описание динамической модели « $k$  конкурентов –  $k$  ареалов миграции», где  $k=n/2$ , а четное число  $n$  соответствует размерности модели. Для частного случая модели «три конкурента – три ареала миграции» посредством дифференциальной эволюции найдены наборы параметров, удовлетворяющие выбранным критериям оптимальности. Компьютерные эксперименты позволили выяснить характер траекторий популяционных плотностей и провести сравнительный анализ результатов.

## 1. Описание конечномерных моделей с конкуренцией и миграцией

Рассмотрим  $n$ -мерную популяционную динамическую модель, учитывающую конкуренцию и миграционные потоки. Эта модель может быть задана с помощью системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_i \cdot a_i - x_i \cdot \sum_{j=1}^{n/2} p_{i(2j-1)} \cdot x_{2j-1} + \mu_{i+1} \cdot x_{i+1} - \mu_i \cdot x_i, \quad i = 1, 3, \dots, 2m-1, \\ \dot{x}_i &= x_i \cdot (a_i - p_{ii} \cdot x_i) + \mu_{i-1} \cdot x_{i-1} - \mu_i \cdot x_i, \quad i = 2, 4, \dots, 2m, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m = 1, 2, \dots, n/2$ ,  $x_i$  с нечетными индексами – плотности конкурирующих популяций,  $x_i$  с четными индексами – плотности соответствующих популяций с учетом миграции в убежища. Модель (1) представляет собой модель типа « $k$  конкурентов –  $k$  ареалов миграции», где  $k=n/2$ , а четное число  $n$  соответствует размерности модели, при этом  $n \geq 4$ . Параметры, фигурирующие в модели (1), представлены в табл. 1.

**Таблица 1.** Переменные и параметры модели (1)

Переменные / параметры	Пояснение переменных / параметров
$x_i$ ( $i = 1, 3, 5, \dots, 2m-1$ )	плотности конкурирующих популяций в основном ареале
$x_i$ ( $i = 2, 4, 6, \dots, 2m$ )	плотности популяций в убежищах
$a_i$ ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )	коэффициенты естественного прироста

$p_{qr} (q \neq r)$	коэффициенты межвидовой конкуренции
$p_{qr} (q = r)$	коэффициенты внутривидовой конкуренции
$\mu_i (i = 2, 4, 6, \dots, 2m)$	коэффициенты миграции из основного ареала в убежища
$\mu_i (i = 1, 3, 5, \dots, 2m-1)$	коэффициенты миграции из убежищ в основной ареал

Таким образом, модель (1) описывает такие взаимодействия, при которых число конкурирующих видов совпадает с количеством ареалов миграции. Частные случаи модели (1) при  $n=4$  изучались в [14–17].

Рассмотрим далее случай  $n=6$ , в котором модель задается системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= a_1x_1 - p_{11}x_1^2 - p_{13}x_1x_3 - p_{15}x_1x_5 + \beta x_2 - \gamma x_1, \\
 \dot{x}_2 &= a_2x_2 - p_{22}x_2^2 + \gamma x_1 - \beta x_2, \\
 \dot{x}_3 &= a_3x_3 - p_{33}x_3^2 - p_{31}x_1x_3 - p_{35}x_3x_5 + \varepsilon x_4 - \delta x_3, \\
 \dot{x}_4 &= a_4x_4 - p_{44}x_4^2 + \delta x_3 - \varepsilon x_4, \\
 \dot{x}_5 &= a_5x_5 - p_{55}x_5^2 - p_{51}x_1x_5 - p_{53}x_3x_5 + \xi x_6 - \eta x_5, \\
 \dot{x}_6 &= a_6x_6 - p_{66}x_6^2 + \eta x_5 - \xi x_6,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $x_1, x_3$  и  $x_5$  – плотности трех популяций конкурирующих видов в ареале совместного обитания,  $x_2$  – плотность первой популяции в убежище,  $x_4$  – плотность второй популяции в убежище,  $x_6$  – плотность третьей популяции в убежище,  $p_{ij} (i \neq j)$  – коэффициенты межвидовой конкуренции,  $p_{ii} (i=1, \dots, 6)$  – коэффициенты внутривидовой конкуренции,  $a_i (i=1, \dots, 6)$  – коэффициенты естественного прироста,  $\beta, \gamma$  – коэффициенты миграции вида между ареалом совместного обитания и убежищем первой популяции,  $\delta, \varepsilon$  – коэффициенты миграции вида между ареалом совместного обитания и убежищем второй популяции,  $\eta, \xi$  – коэффициенты миграции вида между ареалом совместного обитания и убежищем третьей популяции.

Таким образом, мы рассматриваем случай, когда каждый вид с плотностью  $x_i$ , где  $i=1, 3, 5$ , имеет возможность мигрировать в отдельное убежище, при этом в первом убежище плотность популяции первого вида соответствует фазовой переменной  $x_2$ , во втором убежище плотность популяции второго вида соответствует фазовой переменной  $x_4$ , а в третьем убежище плотность популяции третьего вида соответствует переменной  $x_6$ .

Интерес для изучения представляют различные частные случаи модели (2). Для упрощения исследования и для сокращения времени вычислений целесообразно рассмотреть на первом этапе модели с меньшим количеством параметров по сравнению с моделью (2). В частности, рассмотрим модель, задаваемую системой шести дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= ax_1 - px_1^2 - rx_1x_3 - rx_1x_5 + \beta x_2 - \gamma x_1, \\
\dot{x}_2 &= ax_2 - px_2^2 + \gamma x_1 - \beta x_2, \\
\dot{x}_3 &= ax_3 - px_3^2 - rx_1x_3 - rx_3x_5 + \varepsilon x_4 - \delta x_3, \\
\dot{x}_4 &= ax_4 - px_4^2 + \delta x_3 - \varepsilon x_4, \\
\dot{x}_5 &= ax_5 - px_5^2 - rx_1x_5 - rx_3x_5 + \xi x_6 - \eta x_5, \\
\dot{x}_6 &= ax_6 - px_6^2 + \eta x_5 - \xi x_6,
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $a_i = a, (i=1, \dots, 6), p_{ii} = p, (i=1, \dots, 6), p_{ij} = r, (i=1, 3, 5; j=1, 3, 5; i \neq j)$ . В данной модели рассматривается случай неоднородной миграции с учетом того, что коэффициенты миграции  $\beta, \gamma, \varepsilon, \delta, \xi, \eta$  различны, при этом,  $\beta$  и  $\gamma$  – миграционные параметры, отвечающие первому убежищу,  $\varepsilon$  и  $\delta$  – миграционные параметры, отвечающие второму убежищу,  $\xi$  и  $\eta$  – миграционные параметры, отвечающие третьему убежищу. В модели (3) имеет место соответственное совпадение коэффициентов внутривидовой и межвидовой конкуренции, а также коэффициентов естественного роста популяций. При этом несомненный интерес для дальнейшего изучения представляют более сложные модели, например, случаи, когда коэффициенты естественного роста популяции различны в основном ареале и в убежищах.

В разделе 2 описаны вычислительные эксперименты, связанные с поиском оптимальных параметров и с построением траекторий модели (3), представлен сравнительный анализ результатов использования двух различных критериев оптимизации на основе дифференциальной эволюции.

## 2. Поиск параметров на основе дифференциальной эволюции и изучение траекторной динамики

Мы предлагаем использовать два критерия оптимальности: критерий I и критерий II. Критерий I связан с максимизацией интеграла от произведения функций, характеризующих плотности популяций, при этом указанная максимизация обеспечивает выполнение условия сосуществования популяций. Критерий II включает в себя проверку предположения о существовании четырехмерного положительного вектора, компоненты которого соответствуют приближенному состоянию равновесия. Эти критерии базируются на дифференциальной эволюции [18–21] и применяются поэтапно, с учетом следующих шагов.

*Шаг 1.* Реализация алгоритма согласно критерию I.

*Шаг 2.* Реализация алгоритма поиска приближенных компонент 6-мерного вектора  $S^*$ , отвечающего стационарному состоянию.

*Шаг 3.* Реализация алгоритма согласно критерию II.

На шаге 1 осуществляется выбор начальных условий и нахождение приближенных значений коэффициентов с учетом выполнения условия совместного существования всех трех популяций. На шаге 2 нахождение вектора  $S^*$  выполняется путем приравнивания правых частей системы дифференциальных уравнений к нулю с использованием полученных

на первом этапе набора модельных коэффициентов. На шаге 3 используется условие оптимальности, связанное с проверкой предположения о существовании такого шестимерного положительного вектора, который является достаточно близким к состоянию равновесия. В качестве компонент такого вектора целесообразно выбрать округленные до целого числа значения плотностей популяций, полученные на втором этапе. После применения шагов 1–3 можно перейти к изучению траекторной динамики и поведения системы в окрестности состояния равновесия, а также к построению проекций фазовых портретов.

Что касается использования инструментального обеспечения для реализации шагов, то подходящим выбором является функция `differential_evolution` из библиотеки `scipy.optimize` языка Python (шаги 1 и 3), а также команда `solve` системы компьютерной математики Maple (шаг 2). Для решения систем дифференциальных уравнений и графического представления траекторий можно использовать различные инструментальные средства (например, пакет `scipy.integrate` и пакет `matplotlib` соответственно).

Примеры реализации критерия I и критерия II для четырехмерной модели «два конкурента – два ареала миграции» рассмотрены в [14–17]. В настоящей работе рассмотрено обобщение критериев оптимальности на случай  $n=6$ .

В рамках использования критерия I мы рассматриваем оптимизационную задачу коэволюции видов в системе (3). Условие оптимальности имеет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} x_1(t)x_2(t)x_3(t)x_4(t)x_5(t)x_6(t)dt \rightarrow \max, \quad (4)$$

где  $t_0$  – предполагаемое время выхода системы (3) на стационарный режим. В случае вымирания одного из двух видов (как в ареале с межвидовой конкуренцией, так и в трех убежищах) подынтегральное выражение обращается в нуль. При реализации алгоритма дифференциальной эволюции от условия максимизации (4) сделан переход к соответствующему условию минимизации.

Критерий II реализуется с помощью алгоритма поиска параметров на основе дифференциальной эволюции с применением численного критерия, характеризующего устойчивость заданного состояния равновесия системы и отклонение от него. Выполняется поиск таких значений параметров, которые идентифицируют систему (3) в качестве системы с положительным состоянием равновесия  $S^* = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, \hat{x}_5, \hat{x}_6]$ .

Для шестимерной модели (3) разработано алгоритмическое и программное обеспечение для реализации шагов 1–3. В результате работы этого программного обеспечения получены модельные параметры и компоненты вектора  $S^*$  (см. табл.2). Набор параметров модели (3), полученный с помощью первого критерия оптимальности, обозначим через 3-I. Набор параметров, полученный с помощью второго критерия оптимальности, обозначим через 3-II.

**Таблица 2.** Результаты реализации шагов 1–3 для модели (3)

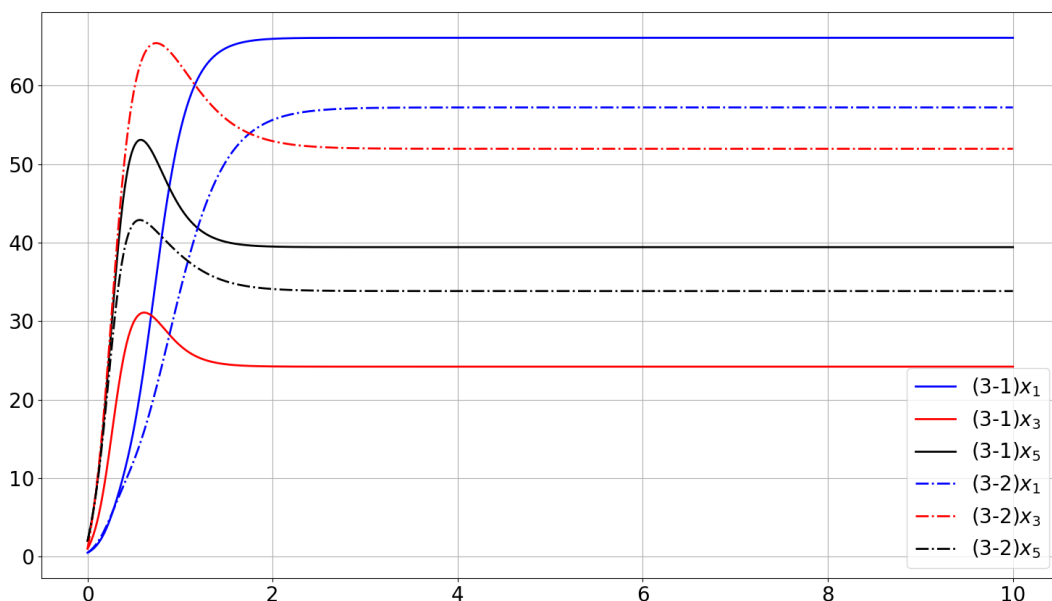
Начальные условия	$(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0), x_5(0), x_6(0)) = (0.5, 0.5, 1, 7, 2, 9)$
-------------------	---



Вектор $S^*$	Набор параметров 3-I
$x_1 = 66,$ $x_2 = 73,$ $x_3 = 24,$ $x_4 = 92,$ $x_5 = 39,$ $x_6 = 86.$	$a=10.00, p = 0.10, r=0.10, \beta=5.10, \delta=7.51, \gamma=2.68, \varepsilon=2.75, \xi=5.73, \eta=9.60.$
Состояние равновесия	Набор параметров 3-II
$x_1=57.14,$ $x_2=43.51,$ $x_3=51.90,$ $x_4=66.28,$ $x_5=33.80,$ $x_6=82.26.$	$a=10.00, p = 0.10, r=0.10, \beta=9.96, \delta=8.03, \gamma=3.29, \varepsilon=9.65, \xi=5.84, \eta=9.92.$

Траектории системы (3) для плотностей популяций  $x_1, x_3, x_5$  представлены на рис. 1 с учетом указанных в табл. 2 начальных условий и наборов параметров 3-I и 3-II. Горизонтальная ось соответствует изменению времени.

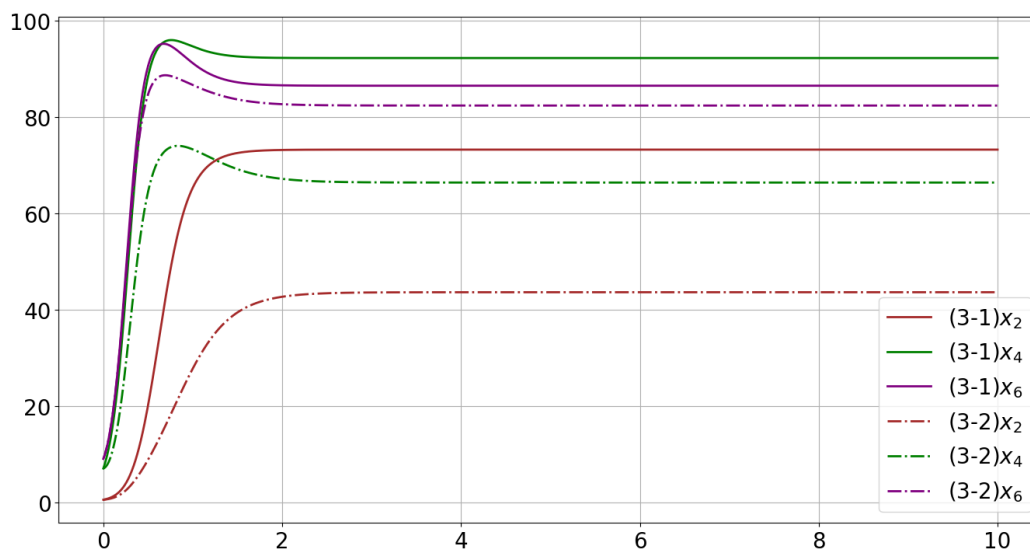
На рис. 1 запись вида  $x_i(3-I), i = 1, 3, 5$ , обозначает траекторию, соответствующую фазовой переменной  $x_i$  для модели (3) с набором параметров 3-I:  $a=10.00, p = 0.10, r=0.10, \beta=5.10, \delta=7.51, \gamma=2.68, \varepsilon=2.75, \xi=5.73, \eta=9.60$ . Запись вида  $x_i(3-II)$  обозначает траекторию, соответствующую фазовой переменной  $x_i$  для модели (3) с учетом набора параметров 3-II:  $a=10.00, p = 0.10, r=0.10, \beta=9.96, \delta=8.03, \gamma=3.29, \varepsilon=9.65, \xi=5.84, \eta=9.92$ .



**Рис. 1.** Траектории системы (3) для плотностей популяций  $x_1, x_3, x_5$  с учетом наборов параметров 3-I ( $a=10.00, p = 0.10, r=0.10, \beta=5.10, \delta=7.51, \gamma=2.68, \varepsilon=2.75, \xi=5.73, \eta=9.60$ ) и 3-II ( $a=10.00, p = 0.10, r=0.10, \beta=9.96, \delta=8.03, \gamma=3.29, \varepsilon=9.65, \xi=5.84, \eta=9.92$ ).



На рис. 2 представлены траектории системы (3) для плотностей популяций  $x_2, x_4, x_6$  с учетом начальных условий и наборов параметров 3-I и 3-II из табл. 2.



**Рис. 2.** Траектории системы (3) для плотностей популяций  $x_2, x_4, x_6$  с учетом наборов параметров 3-I ( $a=10.00, p = 0.10, r=0.10, \beta=5.10, \delta=7.51, \gamma=2.68, \varepsilon=2.75, \zeta=5.73, \eta=9.60$ ) и 3-II ( $a=10.00, p = 0.10, r=0.10, \beta=9.96, \delta=8.03, \gamma=3.29, \varepsilon=9.65, \zeta=5.84, \eta=9.92$ ).

На рис. 2 запись вида  $x_i(3-I), i = 2, 4, 6$ , обозначает траекторию, соответствующую фазовой переменной  $x_i$  для модели (3) с набором параметров 3-I:  $a=10.00, p = 0.10, r=0.10, \beta=5.10, \delta=7.51, \gamma=2.68, \varepsilon=2.75, \zeta=5.73, \eta=9.60$ . Запись вида  $x_i(3-II)$  обозначает траекторию, соответствующую фазовой переменной  $x_i$  для модели (3) с учетом набора параметров 3-II:  $a=10.00, p = 0.10, r=0.10, \beta=9.96, \delta=8.03, \gamma=3.29, \varepsilon=9.65, \zeta=5.84, \eta=9.92$ .

Сравнительный анализ поведения траекторий модели (3) с учетом наборов параметров 3-I и 3-II согласно рис. 1 и 2 показывает, что:

- 1) наблюдается соответствующее стационарному режиму сосуществование всех видов в основном ареале, так и существование мигрирующих видов в убежищах;
- 2) выбор критерия оптимальности существенно влияет на характер траекторий, при этом плотность популяции  $x_3$  при наборе параметров 3-I меньше по сравнению с плотностью популяции  $x_3$  при наборе параметров 3-II, а плотность популяции  $x_2$  при наборе параметров 3-I больше по сравнению с плотностью популяции  $x_2$  при наборе параметров 3-II;
- 3) плотности популяций  $x_1, x_4, x_5, x_6$  изменяются незначительно при переходе от одного критерия к другому.

Интерес для дальнейшего изучения представляет получение параметров модели (2) с применением критериев оптимальности и построение траекторий для модели (2). Однако следует отметить, что в связи с увеличением числа параметров может потребоваться привлечение высокопроизводительных компьютерных систем с возможностью гетерогенных вычислений [22, 23].

## Заключение

В настоящей работе разработан подход к построению конечномерных популяционно-миграционных динамических моделей типа « $k$  конкурентов –  $k$  ареалов миграции», где  $k=n/2$ , четное число  $n$  – размерность модели,  $n \geq 4$ . В рамках этого подхода предложено описание и проведено изучение модели «три конкурента – три ареала миграции», для которой найдены наборы параметров в соответствии с двумя критериями оптимальности. Проведенный анализ показал, что использованные критерии оптимальности обеспечивают для модели (3) нахождение режимов, при которых сосуществует  $k$  конкурирующих видов в основном ареале и существует каждый из  $k$  видов в соответствующем убежище, где  $k=3$ .

Проведенные компьютерные исследования позволили выяснить характер поведения системы в зависимости от выбранного критерия оптимальности и полученных наборов параметров. В качестве инструментального программного средства исследования моделей использован программный комплекс, разработанный с помощью языка Python 3 и системы компьютерной математики Maple.

Перспективными направлениями исследований являются построение и анализ различных частных случаев модели (1), а также построение и анализ таких моделей, в которых количество конкурентов и ареалов миграции не совпадает (например, моделей вида «три конкурента – два ареала миграции»). Следует отметить, что теоретический и прикладной интерес представляет переход от моделей вида (1)–(3) к соответствующим детерминированным моделям с управлением, а также к стохастическим моделям.

## Список литературы

1. Cui J., Takeuchi Y., Lin Z. Permanence and extinction for dispersal population systems // *J. Math. Anal. Appl.* 2004. V. 298, p. 73–93.
2. Zou X., Wang K. A robustness analysis of biological population models with protection zone // *Appl. Math. Model.* 2011. V. 35, p. 5553–5563.
3. Dingle H. *Migration: The Biology of Life on the Move*. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 2014.
4. Курилова Е.В., Кулаков М.П. Условия синхронизации численности двух взаимосвязанных сообществ (на основе модели Лотки–Вольтерра) // *Региональные проблемы*. 2014. Т. 17, № 1, с. 5–8.
5. Liu M., Deng M., Du B. Analysis of a stochastic logistic model with diffusion. // *Appl. Math. Comput.* 2015. V. 266, p. 169–182.
6. Mohapatra A., Ohms H. A., Lytle D. A., De Leenheer P. Population models with partial migration // *Journal of Difference Equations and Applications*. 2016. V. 22:2, p. 316–329.
7. Wei F.Y., Wang C.J. Survival analysis of a single-species population model with fluctuations and migrations between patches // *Appl. Math. Model.* 2020. V. 81, p. 113–127.

8. Dai X., Jiao H., Jiao J., Quan Q. Survival analysis of a predator–prey model with seasonal migration of prey populations between breeding and non-breeding regions // *Mathematics*. 2023. V. 11, p. 3838.
9. Patel S., Taylor C.M. Habitat distribution affects connectivity and population size in migratory networks // *Theoretical Ecology*. 2023. V. 16, p. 93–103.
10. Zhang Xin-an, Chen L. The linear and nonlinear diffusion of the competitive Lotka–Volterra model // *Nonlinear Analysis*. 2007. V. 66, p. 2767–2776.
11. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Masina O.N., Tarova E.D. Computer research of nonlinear stochastic models with migration flows // *CEUR Workshop Proceedings*. 2019. V. 2407, p. 26–37.
12. Gevorkyan M., Velieva T., Korolkova A., Kulyabov D., Sevastyanov L. Stochastic Runge–Kutta software package for stochastic differential equations // *Dependability Engineering and Complex Systems* / Ed. By W. Zamojski, J. Mazurkiewicz, J. Sugier, T. Walkowiak, J. Kacprzyk. Cham: Springer International Publishing, 2016. P. 169–179.
13. Gevorkyan M., Demidova A., Velieva T., Korolkova A., Kulyabov D., Sevastyanov L. Implementing a method for stochastization of one-step processes in a computer algebra system // *Programming and Computer Software*. 2018. V. 44, p. 86–93.
14. Петров А.А., Дружинина О.В., Масина О.Н., Васильева И.И. Построение и анализ четырехмерных моделей динамики популяций с учетом миграционных потоков // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии*. 2022. № 1, с. 43–55.
15. Васильева И.И. Компьютерное моделирование системы популяционной динамики с учетом варьирования миграционных параметров // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии*. 2022. № 2, с. 21–30.
16. Васильева И.И., Дружинина О.В., Масина О.Н. Построение и исследование популяционных динамических моделей типа «два конкурента – два ареала миграции» // *Нелинейный мир*. 2022. Т. 20, № 4, с. 60–68.
17. Vasilyeva I.I., Demidova A.V., Druzhinina O.V., Masina O.N. Construction, stochastization and computer study of dynamic population models “two competitors – two migration areas” // *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*. 2023. V. 31, №. 1, p. 27–45.
18. Das S., Suganthan P.N. Differential evolution: A survey of the state-of-the-art // *IEEE Trans. Evol. Comput.* 2011. V. 15, p. 4–31.
19. Eltaeib T., Mahmood A. Differential evolution: A survey and analysis // *Applied Sciences*. 2018. V. 8(10), 1945.
20. Simon D. *Evolutionary optimization algorithms. Biologically-inspired and population-based approaches to computer Intelligence*. Cleveland: Cleveland State University, 2019.
21. Brownlee J. *Optimization for machine learning*. Machine Learning Mastery, 2021.

22. Сухорослов О. В. Организация вычислений в гетерогенных распределенных средах // *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2016. № 12(185), с. 115–130.
23. Петров А. А., Черномордов С. В., Кабанов М. А. Анализ инструментального обеспечения гетерогенных вычислений // *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*. 2023. Т.25, № 2, с. 21–29.

## Research of the population dynamic model "three competitors – three migration areas"

*Masina, O.N.<sup>1</sup>, Druzhinina, O.V.<sup>1,2</sup>, Vasilyeva, I.I.<sup>1,\*</sup>*

*\*[irinavsl@yandex.ru](mailto:irinavsl@yandex.ru)*

<sup>1</sup>I. A. Bunin Elets State University, Russia

<sup>2</sup>Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

**Abstract.** The paper is devoted to a computer research of the population dynamic model "three competitors – three migration areas". The construction of this model is based on the transition from the finite-dimensional population model "k competitors – k migration areas", where  $k=n/2$ ,  $n$  is the dimension of the model,  $n \geq 4$ . The model "three competitors – three migration areas" takes into account interspecific competition in three populations in pairs, bidirectional uneven migration of all populations taking into account three shelters. By means of differential evolution, sets of parameters satisfying the selected optimality criteria are found. For the studied six-dimensional population-migration model, graphs of population densities are constructed for the obtained sets of parameters. Computer experiments made it possible to find out the change in the nature of the trajectories of population densities. The interpretation of the conducted computational experiments is given and a comparative analysis of the results obtained using two optimality criteria is given. The results obtained can be used in the problems of mathematical modeling of multidimensional ecological and socio-economic systems.

**Keywords:** *mathematical modeling, systems of differential equations, multidimensional models of population dynamics, competition, migration flows, differential evolution, computer experiments*