Б. С. Дарховский, Обнаружение разладки случайной последовательности при минимальной априорной информации, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2013, том 58, выпуск 3, 585–590

DOI: 10.4213/tvp4528

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том 58 И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
2013

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

 ДАРХОВСКИЙ Б. С.*

ОБНАРУЖЕНИЕ РАЗЛАДКИ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРИ МИНИМАЛЬНОЙ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Рассматривается задача о скорейшем обнаружении момента скачкообразного изменения среднего случайной последовательности в условиях, когда известны лишь минимальная (по модулю) величина возможного скачка и интервал, в котором среднее значение находится до момента изменения. Предлагается алгоритм детектирования, который при дополнительных предположениях является асимптотически оптимальным.

Ключевые слова и фразы: разладка случайной последовательности.

1. Введение. Мы рассматриваем задачу о «скорейшем обнаружении» скачкообразного изменения среднего случайной последовательности (в принятой терминологии, задачу о разладке). Не останавливаясь на подробном анализе имеющихся в этой области работ, отсылаем читателя к тематическому выпуску журнала «Теория вероятностей и ее применения» (2008, т. 53, в. 3) под редакцией А. Н. Ширяева (см. также статьи [1], [2]).

В отличие от известных работ, мы ставим целью построение такого метода обнаружения, который использует минимальную априорную информацию о наблюдениях, что важно для различных приложений.

Рассмотрение изменения лишь среднего значения не уменьшает общность, поскольку, во-первых, к этому всегда можно свести задачу о разладке и, во-вторых, в ряде приложений, о которых стало известно автору, именно обнаружение изменения среднего значения представляет наибольший интерес.

Статья организована следующим образом. В п. 2 приведена постановка задачи и сформулированы предположения, в п. 3 приводится описание алгоритма, а в п. 4 изучаются его оперативные характеристики. В п. 5 указаны возможные обобщения.

2. Постановка задачи. Предположения. Рассматриваемая модель наблюдаемой случайной последовательности $\{x_n\}$ (на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$) имеет вид

$$x_n = a + h\mathbf{I}(n \geqslant m) + \xi_n. \tag{1}$$

Здесь ξ_n — последовательность случайных величин с нулевым математическим ожиданием ($\mathbf{E}\,\xi_n \equiv 0$), $\mathbf{I}(A)$ — индикаторная функция множества A, m — *неизвестный* момент разладки, a — *неизвестное* значение математического ожидания x_n до момента разладки, h — *неизвестная* величина скачка математического ожидания.

* Институт системного анализа РАН, Москва, Россия; e-mail: darbor2004@mail.ru

Задача состоит в «скорейшем обнаружении» момента разладки m по наблюдениям x_n. Ниже, при определении оперативных характеристик метода обнаружения, мы укажем смысл термина «скорейшее обнаружение».

Формулируемые далее предположения на последовательность $\{\xi_n\}$ *не используются* в предлагаемом алгоритме обнаружения момента разладки, а нужны лишь для оценки оперативных характеристик этого алгоритма.

Для формирования алгоритма детектирования нам требуется *только одно условие*:

R) будем считать, что $-\infty < A \leqslant a \leqslant B < \infty$, $B - A = d \geqslant 0$, $|h| > d + \Delta$, причем величины A, B, Δ *известны*.

Условие R) означает, что мы хотели бы обнаруживать («скорейшим образом») только такие скачки математического ожидания наблюдаемой последовательности, которые выводят его из *известного отрезка* $[A, B]$ либо в сторону уменьшения (т.е. в интервал $(-\infty, A - \Delta)$), либо в сторону увеличения (т.е. в интервал $(B + \Delta, \infty)$). Таким образом, мы считаем интервал $[A, B]$, содержащий математическое ожидание наблюдаемой последовательности, областью «нормального режима», и хотели бы детектировать только нарушения этого режима в результате скачков, выводящих среднее значение наблюдений из $[A, B]$. В частности, отрезок $[A, B]$ может состоять из одной точки, и тогда разладка (в нашей постановке) заключается в возникновении скачка среднего значения, модуль которого больше, чем Δ.

Иными словами, изменения среднего наблюдаемой последовательности, при котором оно не выходит из известного отрезка $[A, B]$ (или, при вырождении этого отрезка в точку, меньше некоторой известной величины) не должны приниматься во внимание алгоритмом детектирования.

На наш взгляд, использование только условия R) для формирования алгоритма позволяет говорить, что речь идет об обнаружении разладки *при минимальной априорной информации*.

Всюду ниже мы будем обозначать через $\mathbf{P}_m$ и $\mathbf{E}_m$ меру и математическое ожидание, соответствующие последовательности $\{x_n\}$ с разладкой в момент времени m. Символы $\mathbf{P}_\infty$ и $\mathbf{E}_\infty$ соответствуют последовательности без разладки.

Приведем теперь условия, которые будут использоваться для оценки оперативных характеристик метода детектирования.

I. Последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет равномерному условию Крамера: существует $T > 0$ такое, что для всех $|t| \leqslant T$ имеет место неравенство

$$\sup_n \mathbf{E} \exp(t\xi_n) < \infty.$$

II. Функция

$$\kappa(t) = -|b|t + \ln \sup_n \mathbf{E} \exp(t\xi_n), \qquad b \neq 0,$$

непрерывна на $0 \leqslant t \leqslant T$ (T — из условия Крамера) и имеет только два нуля: 0 и $t^*(|b|) > 0$.

III. Последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию ψ-перемешивания.

IV. Существует предел $\sigma^2 = \lim_{N\to\infty} N^{-1}\, \mathbf{E}\,(\sum_{k=1}^N \xi_k)^2$.

V. Справедливо соотношение

$$\sum_k \sqrt{\rho(2^k)} < \infty,$$

где $\rho(k)$ — коэффициент ρ-перемешивания (определение условий и коэффициентов перемешивания можно найти, например, в [3]).

Отметим, что все разумные методы детектирования момента разладки (и соответствующие им моменты остановки) должны содержать некоторый «большой параметр» C, смысл которого в том, что с его увеличением вероятность ложного решения (т.е. остановки наблюдений в момент, когда разладки еще не было) стремится к нулю.

Обычно роль такого параметра выполняет порог (например, в методе кумулятивных сумм (CUSUM)), но возможны и другие варианты.

Обозначим через $d(C,n)$ решающую функцию некоторого метода детектирования с «большим параметром» C (т.е. измеримую по отношению к естественному потоку σ-алгебр функцию, порожденную наблюдениями и такую, что значение $d(C,n)$, равное единице (нулю), соответствует решению о наличии (отсутствии) разладки в момент времени n). В частности, для метода CUSUM при обнаружении в последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин момента изменения плотности распределения с функции $f_0(\cdot)$ на функцию $f_1(\cdot)$ решающая функция имеет вид

$$\mathbf{D}(C,n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \max\limits_{1\leqslant s\leqslant n} \sum\limits_{u=s}^{n} \ln \dfrac{f_1(x_u)}{f_0(x_u)} > C, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Момент остановки наблюдений, соответствующий решающей функции $d(C,n)$, будем обозначать τ_C, т.е. $\tau_C = \inf\{n\colon d(C,n)=1\}$.

Определим теперь *максимальную вероятность ложного решения* $\alpha(\tau_C)$ для момента остановки τ_C, порожденного произвольной решающей функцией $d(C,n)$:

$$\alpha(\tau_C) \overset{\text{def}}{=} \sup_n \mathbf{P}_\infty\{d(C,n)=1\}.$$

Заметим, что эта вероятность, вообще говоря, не совпадает с обычно используемой в задачах о «разладке» вероятностью ложной тревоги.

Можно показать (см. [4]), что наименьшее среднее время до первого ложного решения $\mathbf{E}_\infty\tau_C$ эквивалентно $(2\alpha(\tau_C))^{-1}$ при $\alpha(\tau_C)\to 0$.

Оперативными характеристиками произвольного метода обнаружения разладки с «большим параметром» C служат среднее время запаздывания $\mathbf{E}_m(\tau_C - m)^+$ (здесь и далее $a^+ = \max(a,0)$) и наименьшее (т.е. наихудшее в смысле качества детектирования) среднее время до первой ложной тревоги, т.е. величина $(2\alpha(\tau_C))^{-1}$.

Теперь можно уточнить смысл термина «скорейшее обнаружение» момента разладки: мы хотели бы найти такой метод детектирования, который обеспечивает наименьшее отношение (в подходящем масштабе) среднего времени запаздывания к наихудшему среднему времени до первой ложной тревоги (подходящий масштаб означает в данном случае использование величины $|\ln\alpha(\tau_C)|$, поскольку вероятность ложного решения обычно экспоненциально убывает к нулю с ростом «большого параметра» метода).

Указанный критерий качества метода обнаружения использовался в наших работах (см., например, [4]) и, на наш взгляд, в содержательном смысле не хуже обычно рассматриваемых в литературе критериев. Кроме того, для этого критерия можно (во многих случаях — см., например, [5]) указать неасимптотическую нижнюю границу. Это обстоятельство позволяет для широкого класса методов детектирования оценивать их по величине отклонения от теоретического предела качества.

Отметим, что в данной работе мы не стремимся найти оптимальный (в смысле принятого критерия) метод детектирования, а предлагаем конкретный метод (с оценкой его оперативных характеристик), который при дополнительных предположениях о распределениях будет асимптотически оптимальным. Это дает основание считать предлагаемый метод разумным.

3. Описание алгоритма детектирования. Введем в рассмотрение последовательности

$$\begin{aligned} v_n &= x_n - B - \frac{\Delta}{2}, \\ u_n &= x_n - A + \frac{\Delta}{2} \end{aligned} \tag{2}$$

и рассмотрим следующие статистики:

$$w_n = (w_{n-1} + v_n)^+, \quad w_0 = 0,$$
$$z_n = (z_{n-1} - u_n)^+, \quad z_0 = 0.$$

Из (1) следует, что до момента разладки математическое ожидание последовательности v_n принадлежит отрезку $[-\Delta/2 - d,\ -\Delta/2]$, а последовательности u_n — отрезку $[\Delta/2,\ d+\Delta/2]$.

Статистика $w_n(z_n)$ есть непараметрический вариант метода CUSUM (см. [10]), настроенного на изменение знака математического ожидания последовательности $\{v_n\}$ ($\{u_n\}$) с минуса на плюс (с плюса на минус).

В силу предположения R) положительный скачок математического ожидания x_n в момент разладки приведет к смене знака математического ожидания последовательности v_n с минуса на плюс, а положительный знак математического ожидания последовательности u_n при этом не изменится. Если в момент разладки произошел отрицательный скачок математического ожидания x_n, то, по той же причине, произойдет смена знака математического ожидания последовательности u_n с плюса на минус, а отрицательный знак математического ожидания v_n при этом не изменится.

Если скачок математического ожидания x_n в момент разладки таков, что $(a+h) \in [A,B]$ (или $|h| < \Delta$ в случае $A = B$), то знак математического ожидания v_n (u_n) меняться не будет, и поэтому CUSUM-статистика w_n (z_n) не будет на такой скачок «реагировать». В этом состоит основная идея предлагаемого метода детектирования.

Рассмотрим следующие моменты остановки:

$$\tau_C^- = \min\{n\colon w_n > C\}, \quad \tau_C^+ = \min\{n\colon z_n > C\}.$$

Момент остановки предлагаемого метода детектирования имеет вид

$$\tau_C = \min(\tau_C^-,\ \tau_C^+).$$

З а м е ч а н и е 1. В качестве диапазона $[A,B]$ можно использовать доверительный интервал для среднего, который следует оценить до включения в работу алгоритма детектирования.

З а м е ч а н и е 2. Двусторонняя CUSUM-статистика предлагалась и ранее (см., например, [6]–[9]). При этом в работах [8], [9] установлена оптимальность такой статистики в смысле классического критерия Лордена. Однако во всех известных автору работах для вычисления статистики использовалась информация о распределениях (в дискретном времени функции распределения независимых случайных величин до и после разладки, в непрерывном времени предполагалась модель винеровского процесса с линейным сносом после разладки). Существенным отличием данной работы является то обстоятельство, что мы *не используем информацию о распределениях* (поскольку применяется предложенный в наших работах *непараметрический аналог* CUSUM-статистики) и, кроме того, мы рассматриваем нестационарную случайную последовательность достаточно общего вида (при этом до момента разладки среднее значение наблюдаемой последовательности может быть произвольной функцией, принимающей значения из известного интервала). Хотя оптимальность предлагаемого метода в общем случае установить не удается, однако при дополнительных предположениях (см. ниже) она имеет место, а приводимые далее оперативные характеристики позволяют оценивать качество обнаружения, если есть дополнительная априорная информация.

4. Оперативные характеристики метода детектирования. Заметим сначала, что в силу (2) последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ можно переписать так:

$$v_n = b_- + h\mathbf{I}(n \geqslant m) + \xi_n, \quad u_n = b_+ + h\mathbf{I}(n \geqslant m) + \xi_n, \tag{3}$$

где $\Delta/2 \leqslant b_+ \leqslant d + \Delta/2$, $-d - \Delta/2 \leqslant b_- \leqslant -\Delta/2$.

Поскольку предлагаемый метод представляет собой комбинацию двух непараметрических CUSUM-статистик, его оперативные характеристики можно извлечь из анализа такой статистики, проведенного в [10]. Приведем соответствующие результаты, вытекающие из теорем 5.2.2 и 5.2.13 в [10]:

a) если разладка отсутствует, то

$$\begin{aligned} \lim_{C\to\infty} \frac{|\ln\alpha(\tau_C^+)|}{C} &= t^*(b_+), \\ \lim_{C\to\infty} \frac{|\ln\alpha(\tau_C^-)|}{C} &= t^*(|b_-|) \end{aligned} \tag{4}$$

($b_\pm$ — из соотношений (3), $t^*(\cdot)$ определено в условии II);

b) если $h > d+\Delta$, то для любого фиксированного $m > 0$

$$\begin{gathered} \lim_{C\to\infty} \frac{(\tau_C^+ - m)^+}{C} = (h - |b_-|)^{-1} \quad \mathbf{P}_m\text{-п.н.}, \\ \limsup_{C\to\infty} \mathbf{E}_m \left[\sqrt{C}\left(\frac{(\tau_C^+ - m)^+}{C} - \frac{1}{h-|b_-|}\right)\right]^2 \leqslant \frac{\sigma^2}{(h-|b_-|)^3}; \end{gathered} \tag{5}$$

c) если $h < -d-\Delta$, то для любого фиксированного $m > 0$

$$\begin{gathered} \lim_{C\to\infty} \frac{(\tau_C^- - m)^+}{C} = (|h| - b_+)^{-1} \quad \mathbf{P}_m\text{-п.н.}, \\ \limsup_{C\to\infty} \mathbf{E}_m \left[\sqrt{C}\left(\frac{(\tau_C^- - m)^+}{C} - \frac{1}{|h|-b_+}\right)\right]^2 \leqslant \frac{\sigma^2}{(|h|-b_+)^3}. \end{gathered} \tag{6}$$

Из (4)–(6) непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* I–V *и условие* R). *Тогда*:

i) *выполнено неравенство*

$$\lim_{C\to\infty} \frac{|\ln\alpha(\tau_C)|}{C} \geqslant \min_{\Delta/2\leqslant b\leqslant d+\Delta/2} t^*(b);$$

ii) *для любого фиксированного* $m > 0$ *имеют место соотношения*

$$\frac{(\tau_C - m)^+}{C} \xrightarrow{\mathbf{P}_m\text{-п.н.}} X \quad \text{при } C \to \infty,$$

$$\lim_{C\to\infty} \frac{\mathbf{E}_m(\tau_C - m)^+}{C} = X,$$

$$\limsup_{C\to\infty} \mathbf{E}_m \left[\sqrt{C}\left(\frac{(\tau_C - m)^+}{C} - X\right)\right]^2 \leqslant \frac{\sigma^2}{(|h| - d - \Delta/2)^3}.$$

Здесь X *— неслучайная величина,*

$$X = \begin{cases} (h - |b_-|)^{-1}, & \text{если } h > d+\Delta, \\ (|h| - b_+)^{-1}, & \text{если } h < -d-\Delta. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 3. Если в модели (1) последовательность $\{\xi_n\}$ состоит из независимых одинаково распределенных нормальных случайных величин, то, как следует из [4], описанный метод будет асимптотически (при $C \to \infty$) оптимальным.

З а м е ч а н и е 4. В силу соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m(\tau_C - m)^+ &\leqslant \mathbf{E}_m(\tau_C - m \,|\, \tau_C \geqslant m) \\ &= \frac{\mathbf{E}_m(\tau_C - m)^+}{1 - \mathbf{P}_\infty(\tau_C < m)} \leqslant \frac{\mathbf{E}_m(\tau_C - m)^+}{1 - m\alpha(\tau_C)} \end{aligned}$$

использование в качестве меры запаздывания величины $\mathbf{E}_m(\tau_C - m)^+$ при произвольном, *но фиксированном* m асимптотически (при $\alpha(\tau_C) \to 0$) эквивалентно использованию условного среднего $\mathbf{E}_m(\tau_C - m \,|\, \tau_C \geqslant m)$.

5. Возможные обобщения. Описанный метод детектирования можно приспособить к обнаружению скачкообразного изменения каких-либо вероятностных характеристик наблюдаемой последовательности. Рассмотрим, например, задачу обнаружения изменения одномерной функции распределения наблюдаемой последовательности $\{x_n\}$. Допустим (для простоты), что распределение сосредоточено в конечном числе точек $u_1, \ldots, u_k$. Сформируем по наблюдениям $\{x_n\}$ последовательности $\{y_n(s) = \mathbf{I}(x_n = u_s)\}$, $s = 1, \ldots, k$. Каждая из последовательностей $\{y_n(s)\}$ устроена точно так же, как (1), поскольку изменение одномерного распределения наблюдений означает изменение математического ожидания хотя бы в одной такой последовательности. Если известны границы, в которых находятся вероятности значений u_s, $s = 1, \ldots, k$, до разладки, а также известна минимальная величина скачка таких вероятностей после разладки (либо требуется обнаруживать такие изменения этих вероятностей, модуль которых превосходит некоторую величину), то для каждой из последовательностей $\{y_n(s)\}$ можно построить момент остановки $\tau_C(s)$, аналогичный τ_C для последовательности (1), и тогда моментом остановки метода будет $\min_{1 \leqslant s \leqslant k} \tau_C(s)$.

Еще одно обобщение: описанный метод детектирования остается прежним и в том случае, когда математическое ожидание до момента разладки не является константой, но находится в известном интервале, т.е. $a = a_n$, $A \leqslant a_n \leqslant B$.

Автор искренне благодарен А. Н. Ширяеву за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* О стохастических моделях и оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 3, с. 417–436.
2. *Shiryaev A. N.* Quickest detection problems: fifty years later. — Sequential Anal., 2010, v. 29, № 4, p. 345–385.
3. *Peligrad M.* Invariance principles for mixing sequences of random variables. — Ann. Probab., 1982 v. 10, № 4, p. 968–981.
4. *Brodsky B.*, *Darkhovsky B.* Minimax methods for multihypothesis sequential testing and change-point detection problems. — Sequential Anal., 2008, v. 27, № 2, p. 141–173.
5. *Darkhovsky B.* Change-point problem for high-order Markov chain. — Sequential Anal., 2011, v. 30, № 1, p. 41–51.
6. *Yashchin E.* On a unified approach to the analysis of two-sided cumulative sum control schemes with headstarts. — Adv. in Appl. Probab., 1985, v. 17, № 3, p. 562–593.
7. *Dragalin V. P.* The design and analysis of 2-CUSUM procedure. — Comm. Statist. Simulation Comput., 1997, v. 26, № 1, p. 67–81.
8. *Hadjiliadis O.*, *Moustakides G. V.* Optimal and asymptotically optimal CUSUM rules for change point detection in the Brownian motion model with multiple alternatives. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 1, с. 131–144.
9. *Hadjiliadis O.*, *Poor H. V.* On the best 2-CUSUM stopping rule for quiskest detection of two-sided alternatives in a Brownian motion model. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 3, с. 610–622.
10. *Brodsky B. E.*, *Darkhovsky B. S.* Non-Parametric Statistical Diagnosis: Problems and Methods. Dordrecht: Kluwer, 2000, 452 p.

Поступила в редакцию
5.XII.2011

Исправленный вариант
23.III.2013