А. Б. Хасанов, М. М. Матякубов, Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега–де Фриза с дополнительным членом, *ТМФ*, 2020, том 203, номер 2, 192–204

DOI: 10.4213/tmf9693

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 203, № 2
май, 2020**

 А. Б. Хасанов*, М. М. Матякубов*

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЧЛЕНОМ

Метод обратной спектральной задачи применяется к интегрированию нелинейного уравнения Кортевега–де Фриза с дополнительным членом в классе периодических функций.

Ключевые слова: уравнения Кортевега–де Фриза с дополнительным членом, пара Лакса, формулы следов, обратная спектральная задача, операторы Штурма–Лиувилля, система уравнений Дубровина.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9693

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1967 г. Гарднер, Грин, Крускал и Миура [1] обнаружили глубокую связь между хорошо известным нелинейным уравнением Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x, \qquad q(x,0) = q_0(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

и спектральной теорией операторов Штурма–Лиувилля

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Им удалось найти глобальное решение задачи Коши для уравнения КдФ сведением ее к обратной задаче теории рассеяния. Обратная задача теории рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля на всей прямой изучалась в работах Фаддеева [2], Марченко [3], Левитана [4] и др. В статье [5] Лакс показал универсальность метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) и обобщил уравнение КдФ, вводя понятие высшего уравнения КдФ. В своей оригинальной работе [6] Захаров и Шабат показали, что нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$iu_t \pm 2u|u|^2 + u_{xx} = 0$$

*Ургенчский государственный университет им. Аль-Хорезми, Ургенч, Узбекистан.
E-mail: ahasanov2002@mail.ru, mmm2210410@mail.ru

также можно включить в формализм МОЗР. Используя прием, предложенный Лаксом, они нашли решение НУШ для заданных начальных функций $u(x,0)$, достаточно быстро убывающих при $|x| \to \infty$. Вскоре Вадати [7], опираясь на идеи работы Захарова и Шабата, предложил метод решения модифицированного уравнения КдФ (уравнения мКдФ)

$$u_t \pm 6uu^2 u_x + u_{xxx} = 0.$$

Захаров, Тахтаджян и Фаддеев [8], а также Абловиц, Кауп, Ньюэлл и Сигур [9] показали, что МОЗР можно применить и к решению уравнения синус-Гордон

$$u_{xt} = \sin u.$$

Применение МОЗР к НУШ, уравнениям мКдФ и синус-Гордон опирается на задачу рассеяния для оператора Дирака на всей оси

$$L = i \begin{pmatrix} d/dx & -q(x) \\ r(x) & -d/dx \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Обратная задача рассеяния для оператора Дирака на всей оси изучалась в работах [6], [10], [11] и др. Известно, что оператор L не является самосопряженным, в случае “быстрого убывания” имеет конечное число кратных комплексных собственных значений и может иметь спектральные особенности, которые лежат в непрерывном спектре. Данные рассеяния несамосопряженного оператора Дирака, кроме характеристик непрерывного спектра, включают в себя дискретный спектр и спектральные особенности. В работах [6]–[9] в случае, когда все собственные значения соответствующего оператора Дирака L простые, а спектральные особенности отсутствуют, были проинтегрированы такие нелинейные эволюционные уравнения, как НУШ, уравнения мКдФ, синус-Гордон. В связи с этим является актуальным поиск решения нелинейных эволюционных уравнений без источника и с самосогласованным источником, соответствующим кратным собственным значениям оператора Дирака. Этим задачам посвящены статьи [12]–[16].

С помощью МОЗР для оператора Хилла, когда в спектре имеется только конечное число нетривиальных лакун, в работах [17], [18] была доказана полная интегрируемость уравнения КдФ в классе конечнозонных периодических и квазипериодических функций. Замечательная часть этих работ заключается в том, что решение обратной задачи для случая конечнозонных потенциалов было сведено в них к проблеме обращения Якоби абелевых интегралов на двулистной римановой поверхности с конечным числом действительных точек ветвления. Кроме того, для конечнозонных потенциалов (т. е. и для решения уравнения КдФ) была выведена явная формула через тета-функции Римана. Более подробно эта теория изложена в монографиях [3], [4] и [11], [19], [20].

Известно, что если $q(x) = 2a\cos 2x$, $a \neq 0$, то открыты все лакуны в спектре оператора Хилла $Ly = -y'' + q(x)y$, $x \in \mathbb{R}$, иначе говоря, $q(x)$ – бесконечнозонный периодический потенциал. В связи с этим мы изучаем задачу Коши для нелинейного уравнения КдФ с дополнительным членом в классе периодических (не обязательно конечнозонных) функций.

В этом случае решение обратной задачи по спектральным данным уравнения Хилла, когда бесконечное число лакун открыты, можно свести к проблеме обращения абелевых интегралов на двулистной римановой поверхности с бесконечным числом действительных точек ветвления [21]–[23]. Для такой задачи авторам не удалось найти аналоги формулы из работ [17], [21]–[23]. Однако к данной задаче можно применить метод статьи [24]. При этом решение уравнения КдФ получается в виде равномерно сходящегося функционального ряда. Следует отметить, что решения в классе периодических функций для нелинейных эволюционных уравнений изучались в работах [25]–[30] в различных постановках. В настоящей работе мы излагаем простой метод построения уравнения КдФ высокого порядка и вывод аналога системы дифференциальных уравнений Дубровина. Отметим, что существует несколько методов построения высших уравнений КдФ. Важно также заметить, что найденное нами высшее уравнение КдФ включает в себя и уравнение КдФ с дополнительным членом.

2. ВЫВОД НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КДФ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение:

$$q_t = P[q], \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$q(x,0) = q_0(x). \tag{2}$$

Здесь $q = q(x,t)$ – достаточно гладкая, π – периодическая по x функция, а $P[q]$ – многочлен от q и его производных по x.

Построим многочлен $P[q]$ таким образом, чтобы задача Коши (1), (2) интегрировалась при помощи обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля с периодическим потенциалом $q(x,t)$

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x,t)y = \lambda y, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Обозначим через $y_n = y_n(x,t)$, $n \geqslant 1$, ортонормированные собственные функции, соответствующие собственным значениям $\xi_n = \xi_n(t)$, $n \geqslant 1$, задачи Дирихле ($y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$) для уравнения (3).

Дифференцируя по t тождество

$$(L(t)y_n, y_n) = \xi_n$$

и используя симметричность оператора $L(t)$, имеем

$$\dot{\xi}_n(t) = \int_0^\pi q_t y_n^2\,dx. \tag{4}$$

Подставляя выражение (1) в формулу (4), получаем равенство

$$\dot{\xi}_n = \int_0^\pi P[q] y_n^2\,dx.$$

Ищем далее первообразную подынтегральной функции в виде квадратичной формы от y_n и y_n', т. е. пусть

$$(a y_n^2 + b y_n y_n' + c {y_n'}^2)' = P[q] y_n^2, \tag{5}$$

где функции $a = a(x,t,\xi_n)$, $b = b(x,t,\xi_n)$, $c = c(x,t,\xi_n)$ не зависят от y_n и y_n'. Используя равенство $y_n'' = (q-\xi_n)y_n$ и приравнивая соответствующие коэффициенты, из (5) получаем, что

$$b = -c', \qquad a = \frac{1}{2}c'' - c(q-\xi_n),$$
$$P[q] = \frac{1}{2}c''' - 2c'(q-\xi_n) - cq_x. \tag{6}$$

Левая часть равенства (6) не зависит от ξ_n, поэтому правая часть также не должна зависеть от ξ_n. Функцию $c(x,t,\xi_n)$ будем искать в виде многочлена от ξ_n:

$$c(x,t,\xi_n) = \sum_{k=0}^{N} c_k(x,t)\xi_n^{N-k}. \tag{7}$$

Подставляя выражение (7) в равенство (6), имеем

$$P[q] = 2c_0'(x,t)\xi_n^{N+1} + \sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2}c_k'''(x,t) - 2qc_k'(x,t) - q_xc_k(x,t) + 2c_{k+1}'(x,t)\right]\xi_n^{N-k} + \\ + \frac{1}{2}c_N'''(x,t) - 2qc_N'(x,t) - q_xc_N(x,t).$$

Используя независимость многочлена $P[q]$ от ξ_n, из последнего равенства получаем соотношения

$$c_0'(x,t) = 0, \quad c_{k+1}'(x,t) = -\frac{1}{4}[c_k'''(x,t) - 4qc_k'(x,t) - 2q_xc_k(x,t)], \quad k = 0,1,\ldots,N-1,$$
$$P[q] = \frac{1}{2}c_N'''(x,t) - 2qc_N'(x,t) - q_xc_N(x,t).$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$q_t = \frac{1}{2}c_N''' - 2qc_N' - q_xc_N, \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad t>0, \tag{8}$$

где функция $c_N = c_N(x,t)$ выражается через $q = q(x,t)$ следующим образом: по заданным непрерывным функциям $d_k = d_k(t)$, $k = 0,1,\ldots,N$, строим последовательность функций

$$c_0(x,t) = d_0(t), \quad c_{k+1}(x,t) = -\frac{1}{4}c_k'' + qc_k - \frac{1}{2}\int_0^x q_xc_k\,dx + d_{k+1}, \quad k = 0,1,\ldots,N-1.$$

Так, например,

$$c_1 = \frac{1}{2}d_0[q + q(0,t)] + d_1,$$
$$c_2 = \frac{1}{8}d_0[-q_{xx} + 3q^2 + 2qq(0,t) + 3q^2(0,t)] + \frac{1}{2}d_1[q + q(0,t)] + d_2$$

и т. д.

Нелинейное уравнение (8) называется высшим уравнением Кортевега–де Фриза. В случае $N = 1$ это уравнение принимает вид

$$q_t = \frac{1}{4}[q_{xxx} - 6qq_x]d_0 - \frac{1}{2}[2d_1 + d_0q(0,t)]q_x.$$

В частности, при $d_0 = 0$, $d_1 = -1$ отсюда получаем уравнение

$$q_t = q_x,$$

а при $d_0 = 4$, $d_1 = -2q(0,t)$ выводим уравнение Кортевега–де Фриза

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x.$$

При $d_0 = 4$, $d_1 = 0$ мы получаем нелинейное уравнение с дополнительным членом вида

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x - 2q(0,t)q_x,$$

а при $d_0 = 4$, $d_1(t) = c(t)q(0,t)$ – уравнение

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t)q(0,t)q_x. \tag{9}$$

Точно так же можно найти и другие уравнения Кортевега–де Фриза с дополнительным членом.

В случае $N = 2$ уравнение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} q_t = &-\frac{1}{16}d_0(q_{xxxxx} - 10qq_{xxx} - 20q_xq_{xx} + 30q^2q_x) + \\ &+ \frac{1}{8}[d_0q(0,t) + 2d_1](q_{xxx} - 6qq_x) - \frac{1}{8}[3d_0q^2(0,t) + 4d_1q(0,t) + 8d_2]q_x. \end{aligned}$$

В частности, из этого уравнения при $d_0 = -16$, $d_1 = 8q(0,t)$, $d_2 = 2q^2(0,t)$ получаем нелинейное уравнение

$$q_t = q_{xxxxx} - 10qq_{xxx} - 20q_xq_{xx} + 30q^2q_x.$$

3. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

Рассмотрим в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ оператор Штурма–Лиувилля

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

где $q(x) \in C^1(\mathbb{R})$ – действительная π-периодическая непрерывная функция, $\lambda \in C$ – комплексный параметр.

Обозначим через $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ решения уравнения (10), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda) = 1$, $c'(0,\lambda) = 0$ и $s(0,\lambda) = 0$, $s'(0,\lambda) = 1$. Функция $\Delta(\lambda) = c(\pi,\lambda) + s'(\pi,\lambda)$ называется функцией Ляпунова. Функция

$$\psi_\pm(x,\lambda) = c(x,\lambda) + \frac{s'(\pi,\lambda) - c(\pi,\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi,\lambda)}s(x,\lambda)$$

называется решением Флоке уравнения (10).

Спектр оператора L представляет собой следующее множество [31]:

$$\sigma(L) \equiv E = \{\lambda \in \mathbb{R}\colon\ -2 \leqslant \Delta(\lambda) \leqslant 2\} = \mathbb{R}\backslash\left\{(-\infty,\lambda_0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})\right\},$$

при этом интервалы $(-\infty,\lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})$, $n=1,2,\dots$, называются лакунами, где λ_0, λ_{4k-1}, λ_{4k} – собственные значения периодической задачи ($y(0)=y(\pi)$, $y'(0)=y'(\pi)$), а λ_{4k+1}, λ_{4k+2} – собственные значения антипериодической задачи ($y(0)=-y(\pi)$, $y'(0)=-y'(\pi)$) для уравнения (10).

Через ξ_n, $n=1,2,\dots$, обозначим собственные значения задачи Дирихле ($y(0)=0$, $y(\pi)=0$) для уравнения (10), при этом имеют место включения $\xi_n\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, $n=1,2,\dots$.

Определение 1. Числа ξ_n, $n=1,2,\dots$, вместе со знаками

$$\sigma_n=\operatorname{sgn}\{s'(\pi,\xi_n)-c(\pi,\xi_n)\}=\pm 1,\qquad n=1,2,\dots,$$

называются спектральными параметрами оператора L.

Определение 2. Спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n=1,2,\dots$, и границы λ_n, $n=0,1,\dots$, спектра называются спектральными данными оператора L.

Задача нахождения спектральных данных оператора L называется прямой спектральной задачей, а восстановление потенциала $q(x)$ по спектральным данным – обратной спектральной задачей для оператора L.

Потенциал $q(x)$ определяется единственным образом по спектральным данным $\{\lambda_{n-1},\,\xi_n,\,\sigma_n=\pm1,\,n\geqslant 1\}$ (см. монографию [32]).

Если в уравнении (10) вместо $q(x)$ использовать $q(x+\tau)$, то спектр получаемого оператора $L(\tau)=-d^2/dx^2+q(x+\tau)$ не будет зависеть от параметра τ: $\sigma(L(\tau))=\sigma(L)$, $\lambda_n(\tau)\equiv\lambda_n$, $n=0,1,\dots$, а спектральные параметры зависят от параметра τ: $\xi_n=\xi_n(\tau)$, $\sigma_n=\sigma_n(\tau)$, $n=1,2,\dots$. Эти спектральные параметры удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина

$$\begin{gathered}\dot\xi_n=2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\,h_n(\xi),\\ h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}},\qquad n\geqslant 1,\end{gathered}\tag{11}$$

где знак $\sigma_n(\tau)=\pm1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$.

Система дифференциальных уравнений Дубровина и формула первого следа

$$q(\tau)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau)),\tag{12}$$

приводят к методу решения обратной задачи.

Обратные задачи для конечнозонных потенциалов впервые были рассмотрены Ахиезером [33]. В работе Ахиезера решение обратной задачи было сведено к проблеме обращения Якоби абелевых интегралов. В статье [17] Итс и Матвеев нашли явную формулу для конечнозонных потенциалов. В случае конечнозонных потенциалов система дифференциальных уравнений (11) впервые была получена Дубровиным [24], в случае периодических потенциалов – Трубовицем [34], а для почти периодических бесконечнозонных потенциалов – Левитаном [4].

Отметим, что впервые формула типа (12) была получена Хохштадтом [35] в случае, когда в спектре оператора L имеется конечное число лакун. Позже аналогичные формулы следов удалось получить МакКину и Мойербеке [36], Флашке [37], Левитану [4] и др.

В процессе изучения обратной спектральной задачи для оператора L в работах Хохштадта [38], Марченко [3], Левитана, Гусейнова [39], Трубовица [34] и др. найдена связь между гладкостью потенциала $q(x)$ и длиной лакун.

Теорема 1 (Марченко [3]). *Если $q(x) \in \widetilde{W}_2^n[0,\pi]$ и $\operatorname{Im} q(x) = 0$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи для оператора L удовлетворяют равенствам*

$$\sqrt{\lambda_{2k-1}}, \sqrt{\lambda_{2k}} = k + \sum_{1\leqslant 2j+1 \leqslant n+2} \frac{a_{2j+1}}{(2k)^{2j+1}} \mp \frac{|e_n(2k)|}{(2k)^{n+1}} + \frac{\gamma_k^{\mp}}{k^{n+2}}, \tag{13}$$

где a_{2j+1}, b_{2j+1} не зависят от k,

$$a_1 = b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt, \qquad e_n(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q^{(n)}(x)e^{-ipx}\,dx$$

и $\sum_{k=0}^\infty |\gamma_k^\pm|^2 < \infty$. Здесь $\widetilde{W}_2^n[0,\pi]$ – подпространство пространства Соболева $W_2^n[0,\pi]$, состоящее из функций $f(x) \in W_2^n[0,\pi]$, удовлетворяющих периодическим краевым условиям $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(\pi)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$. Заметим, что $W_2^0[0,\pi] = \widetilde{W}_2^0[0,\pi] = L_2(0,\pi)$.

Из асимптотических формул (13) вытекает следующая оценка для длин лакун:

$$\gamma_k \equiv \lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = \frac{1}{2^{n-1}}k^{-n}|e_n(2k)| + \frac{\alpha_k}{k^{n+1}}, \qquad \sum_{k=1}^\infty \alpha_k^2 < \infty. \tag{14}$$

Теорема 2 (Трубовиц [34]). *Для экспоненциального убывания длины лакун оператора L с π-периодическим действительным потенциалом $q(x)$ необходима и достаточна аналитичность $q(x)$.*

Теорема 3 (Хохштадт [40]). *Для того чтобы число π/n, $n \geqslant 2$, было периодом потенциала $q(x)$ оператора L, необходимо и достаточно исчезновение всех лакун, номера которых не кратны n.*

Эта теорема была доказана Боргом [41] в 1946 г. для $n = 2$.

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЧЛЕНОМ

Легко заметить, что нелинейное уравнение КдФ с дополнительным членом (9) является условием совместности следующих уравнений:

$$\phi_{xx} = (q(x,t) - \lambda)\phi,$$
$$\phi_t = 2(q(x,t) + 2\lambda)\phi_x - q_x(x,t)\phi - 2q(0,t)\phi'(x,\lambda) + 2q(0,t)\phi''(0,\lambda)s(x,\lambda).$$

Рассмотрим уравнение

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t)q(0,t)q_x, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0, \tag{15}$$

с начальным условием

$$q(x,0) = q_0(x), \tag{16}$$

где $\gamma(t)$ – заданная действительная непрерывная функция. Требуется найти действительную функцию $q(x,t)$, которая является π-периодической по переменной x:

$$q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \geqslant 0, \tag{17}$$

и удовлетворяет условиям гладкости

$$q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geqslant 0). \tag{18}$$

Наша цель – построение решения $q(x,t)$ задачи (15)–(18) в рамках обратной спектральной задачи для оператора Хилла L.

Основной результат заключается в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть* $q(x,t)$ *– решение задачи* (15)–(18). *Тогда границы спектра* λ_n, $n \geqslant 0$, *оператора*

$$L(\tau,t)y \equiv -y'' + q(x+\tau,t)y = \lambda y, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

не зависят от параметров τ *и* t, *а спектральные параметры* $\xi_n(\tau,t)$, $n \geqslant 1$, *удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина*

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t)[2q(\tau,t) - \gamma(t)q(0,t) + 4\xi_n]\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)}\,h_n(\xi), \quad n \geqslant 1, \tag{20}$$

где знак $\sigma_n(\tau,t)$ *меняется на противоположный при каждом столкновении точки* $\xi_n(\tau,t)$ *с границами своей лакуны* $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$. *Кроме того, выполняются следующие начальные условия*:

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \qquad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \qquad n \geqslant 1, \tag{21}$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \geqslant 1$, *– спектральные параметры оператора Штурма–Лиувилля с коэффициентом* $q_0(x+\tau)$.

Доказательство. Обозначим через $y_n = y_n(x,\tau,t)$, $n \geqslant 1$, ортонормированные собственные функции задачи Дирихле ($y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$) для уравнения (19), соответствующие собственным значениям $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$, $n \geqslant 1$.

Дифференцируя по t тождество $(L(\tau,t)y_n, y_n) = \xi_n$ и используя симметричность оператора $L(\tau,t)$, имеем

$$\dot{\xi}_n = \int_0^\pi q_t y_n^2\,dx. \tag{22}$$

Уравнение (15) можно переписать в виде

$$q_t(x+\tau,t) = q_{xxx}(x+\tau,t) - 6q(x+\tau,t)q_x(x+\tau,t) + \gamma(t)q(0,t)q_x(x+\tau,t).$$

Используя эти выражения, из формулы (22) получаем, что

$$\dot{\xi}_n = \int_0^\pi [q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t)q(0,t)q_x]y_n^2\,dx.$$

Найдем первообразную подынтегральной функции в виде квадратичной формы от y_n и y_n', т. е. пусть

$$(ay_n^2 + by_ny_n' + cy_n'^{\,2}) = [q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t)q(0,t)q_x]y_n^2, \tag{23}$$

где функции a, b, c не зависят от y_n и y_n'. Используя равенство $y_n'' = (q - \xi_n)y_n$ и приравнивая соответствующие коэффициенты, из (23) имеем

$$\begin{gathered} b = -c', \qquad a = \frac{1}{2}c'' - c(q - \xi_n), \\ \frac{1}{2}c''' - 2c'(q - \xi_n) - cq_x = q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t)q(0,t)q_x. \end{gathered} \tag{24}$$

Нетрудно видеть, что при $c = 2q + \alpha$, где $\alpha = 4\xi_n - \gamma(t)q(0,t)$, выполняется равенство (23). Значит,

$$\dot{\xi}_n = (ay_n^2 + by_ny_n' + cy_n'^{\,2})|_0^\pi = [2q(\tau,t) - \gamma(t)q(0,t) + 4\xi_n][y_n'^{\,2}(\pi,\tau,t) - y_n'^{\,2}(0,\tau,t)]. \tag{25}$$

Обозначим через $s(x,\lambda,\tau,t)$ решение уравнения (25), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,\tau,t) = 0$, $s'(0,\lambda,\tau,t) = 1$. Тогда

$$y_n(x,\tau,t) = \frac{1}{c_n(\tau,t)}s(x,\xi_n,\tau,t),$$

где

$$c_n^2(\tau,t) \equiv \int_0^\pi s^2(x,\xi_n,\tau,t)\,dx = s'(\pi,\xi_n,\tau,t)\frac{\partial s(\pi,\xi_n,\tau,t)}{\partial\lambda}.$$

Используя эти равенства, имеем

$$y_n'^{\,2}(\pi,\tau,t) - y_n'^{\,2}(0,\tau,t) = \frac{1}{\partial s(\pi,\xi_n,\tau,t)/\partial\lambda}\left(s'(\pi,\xi_n,\tau,t) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n,\tau,t)}\right).$$

Подставляя в последнее равенство выражение

$$s'(\pi,\xi_n,\tau,t) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n,\tau,t)} = \sigma_n(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n) - 4},$$

получаем формулу

$$y_n'^{\,2}(\pi,\tau,t) - y_n'^{\,2}(0,\tau,t) = \frac{\sigma_n(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n) - 4}}{\partial s(\pi,\xi_n,\tau,t)/\partial\lambda}.$$

Здесь

$$\sigma_n(\tau,t) = \operatorname{sgn}\left\{s'(\pi,\xi_n,\tau,t) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n,\tau,t)}\right\}.$$

Из разложений

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = 4\pi^2(\lambda_0 - \lambda)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\lambda)(\lambda_{2k}-\lambda)}{k^4}, \qquad s(\pi,\lambda,\tau,t) = \pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k - \lambda}{k^2}$$

следует равенство

$${y'_n}^2(\pi,\tau,t) - {y'_n}^2(0,\tau,t) = 2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi).$$

Подставляя его в (25), получаем систему (20).

Теперь докажем независимость от τ и t собственных значений $\lambda_n(\tau,t)$, $n \geqslant 0$, периодической и антипериодической задачи для уравнения (19). Обозначим через $v_n(x,\tau,t)$ нормированную собственную функцию, соответствующую собственному значению $\lambda_n(\tau,t)$, периодической или антипериодической задачи для уравнения (19). Действуя вышеприведенным образом, получаем равенства

$$\dot\lambda_n(\tau,t) = [2q(\tau,t) - \gamma(t)q(0,t) + 4\lambda_n][v_n^2(\pi,\tau,t) - v_n^2(0,\tau,t)], \qquad n \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что $\dot\lambda_n(\tau,t) = 0$, $n \geqslant 0$. Таким образом, $\lambda_n(\tau,t) = \lambda_n(\tau,0)$, $n \geqslant 0$. Теперь в уравнении (19) положим $t = 0$. Так как собственные значения $\lambda_n(\tau) = \lambda_n(\tau,0)$, $n \geqslant 0$, периодической или антипериодической задачи для уравнения Хилла

$$-y'' + q(x+\tau,0)y = \lambda y$$

не зависят от параметра τ, имеем $\lambda_n(\tau,t) = \lambda_n(\tau,0) = \lambda_n$, $n \geqslant 0$. Это означает независимость спектра оператора $L(\tau,t)$ от параметров τ и t. Теорема доказана.

Замечание 1. Используя формулу следов

$$q(\tau,t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau,t)), \tag{26}$$

можно переписать систему дифференциальных уравнений (20) в “замкнутой” форме.

Замечание 2. Эта теорема дает метод решения задачи (15)–(18). Для этого сначала найдём спектральные данные λ_n, $n \geqslant 0$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \geqslant 1$, для оператора

$$L(\tau)y \equiv -y'' + q_0(x+\tau)y = \lambda y, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через λ_n, $n \geqslant 0$, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$, $n \geqslant 1$, спектральные данные оператора $L(\tau,t)$. Теперь, решая задачу Коши (20), (21) при $\tau = 0$, находим $\xi_n(0,t)$, $n \geqslant 1$. Затем из формулы (26) определяем $q(0,t)$. После этого подставляем эти данные в систему уравнений (20) и, решая задачу Коши при произвольном значении τ, находим $\xi_n(\tau,t)$, $n \geqslant 1$. Из формул следов (26) получаем $q(\tau,t)$, т.е. решение задачи (15)–(18).

Замечание 3. Покажем, что построенная функция $q(\tau,t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению (15). Для этого используем систему уравнений Дубровина

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial\tau} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)}\,h_n(\xi), \qquad n \geqslant 1, \tag{27}$$

и вторую формулу следов

$$q^2(\tau,t)-\frac{1}{2}q_{\tau\tau}(\tau,t)=\lambda_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2-2\xi_k^2(\tau,t)). \tag{28}$$

Из систем Дубровина (20) и (27) имеем

$$\frac{\partial\xi_k}{\partial t}=-[2q(\tau,t)-\gamma(t)q(0,t)+4\xi_k]\,\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau},\qquad k\geqslant 1. \tag{29}$$

Дифференцируя формулы первого следа (26) по t и учитывая (29), находим

$$q_t=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\xi_k}{\partial t}=4q\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}-2\gamma(t)q(0,t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}+8\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\,\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}. \tag{30}$$

Далее, дифференцируя формулы (26) и (28) по τ, получаем, что

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}=-q_\tau,\qquad 4\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\,\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}=\frac{1}{2}q_{\tau\tau\tau}-2qq_\tau.$$

Используя эти равенства, из (30) выводим выражения

$$\begin{aligned} q_t&=-2qq_\tau+\gamma(t)q(0,t)q_\tau+q_{\tau\tau\tau}-4qq_\tau,\\ q_t&=q_{\tau\tau\tau}-6qq_\tau+\gamma(t)q(0,t)q_\tau. \end{aligned}$$

Замечание 4. Равномерная сходимость рядов в вышеуказанных формулах следует из (14) и оценки (см. работы [4], [34])

$$c_1n\leqslant|h_n(\xi)|\leqslant c_2n,\qquad n=1,2,\dots,$$

где $c_1>0$ и $c_2>0$ не зависят от n.

Следствие 1. *Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной π-периодической аналитической функцией, то решение $q(x,t)$ задачи Коши (15)–(18) тоже является действительной аналитической функцией по x.*

Это утверждение следует из теоремы Трубовица. Так как длины лакун, соответствующие потенциалу $q_0(x)$, убывают экспоненциально, а потенциалу $q(x,t)$ соответствуют те же лакуны, то $q(x,t)$ является действительной аналитической функцией по x.

Следствие 2. *Если число π/n является периодом начальной функции $q_0(x)$, то лакуны, номера которых не делятся на n, исчезают. Потенциалу $q(x,t)$ соответствуют те же лакуны, значит, по теореме Хохштадта число π/n является периодом и для функции $q(x,t)$ по переменной x. Здесь $n\geqslant 2$ – натуральное число, а лакуна $(\lambda_{2k-1},\lambda_{2k})$ имеет номер k.*

Список литературы

[1] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, "Method for solving the Korteweg–de Vries equation", *Phys. Rev. Lett.*, **19**:19 (1967), 1095–1097.

[2] Л. Д. Фаддеев, "Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера", *Тр. МИАН СССР*, **73** (1964), 314–336.

[3] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977.

[4] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, М., 1984.

[5] П. Д. Лэкс, "Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны", *Математика*, **13**:5 (1969), 128–150.

[6] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, "Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах", *ЖЭТФ*, **61**:1 (1971), 118–134.

[7] M. Wadati, "The exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation", *J. Phys. Soc. Japan*, **32**:6 (1972), 1681.

[8] В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, "Полное описание решений "sin-Gordon" уравнения", *Докл. АН СССР*, **219**:6 (1974), 1334–1337.

[9] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, "Method for solving the sine-Gordon equation", *Phys. Rev. Lett.*, **30**:25 (1973), 1262–1264.

[10] И. С. Фролов, "Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси", *Докл. АН СССР*, **207**:1 (1972), 44–47.

[11] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.

[12] А. Б. Хасанов, Г. У. Уразбоев, "Об уравнении sin-Гордон с самосогласованным источником, соответствующем кратным собственным значениям", *Дифференц. уравнения*, **43**:4 (2007), 544–552.

[13] А. Б. Хасанов, Г. У. Уразбоев, "Об интегрировании уравнения sine-Гордон с самосогласованным источником интегрального типа в случае кратных собственных значений", *Изв. вузов. Матем.*, 2009, № 3, 55–66.

[14] А. Б. Хасанов, А. А. Рейимберганов, "О конечно плотном решении высшего нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным источником", *Уфимск. матем. журн.*, **1**:4 (2009), 133–143.

[15] А. Б. Хасанов, У. А. Хоитметов, "Об интегрировании уравнения Кортевега–де Фриза в классе быстроубывающих комплекснозначных функций", *Изв. вузов. Матем.*, 2018, № 3, 79–90.

[16] А. Б. Хасанов, К. А. Мамедов, "О модифицированном уравнении Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником интегрального типа, соответствующего кратным собственным значениям", *Узб. матем. журн.*, 2007, № 4, 81–93.

[17] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, "Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриса", *ТМФ*, **23**:1 (1975), 51–68.

[18] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, "Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега–де Фриза", *ЖЭТФ*, **67**:6 (1974), 2131–2144.

[19] Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко, *Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты*, Наукова думка, Киев, 1987.

[20] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.

[21] H. McKean, E. Trubowitz, "Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branchpoints", *Commun. Pure Appl. Math.*, **29**:2 (1976), 143–226.

[22] H. McKean, E. Trubowitz, "Hill's surfaces and their theta functions", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **84**:6 (1978), 1052–1085.

[23] M. U. Schmidt, *Integrable Systems and Riemann Surfaces of Infinite Genus*, Memoirs of the American Mathematical Society, **122**, no. 581, AMS, Providence, RI, 1996, arXiv: solv-int/9412006.

[24] Б. А. Дубровин, “Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечнозонных потенциалов”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:3 (1975), 41–51.

[25] P. G. Grinevich, I. A. Taimanov, “Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type”, *Geometry, Topology and Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc. transl. Ser. 2, no. 224, eds. V. M. Buchstaber, I. M. Krichever, AMS, Providence, RI, 2008, 125–138.

[26] А. Б. Хасанов, А. Б. Яхшимуратов, “Об уравнении Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций”, *ТМФ*, **164**:2 (2010), 214–221.

[27] A. Yakshimuratov, “The nonlinear Schrödinger equation with a self-consistent source in the class of periodic functions”, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **14**:2 (2011), 153–169.

[28] А. О. Смирнов, “Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза”, *Матем. сб.*, **185**:8 (1994), 103–114.

[29] P. D. Lax, “Almost periodic solutions of the KdV equation”, *SIAM Rev.*, **18**:3 (1976), 438–462.

[30] А. В. Домрин, “Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:3 (2010), 23–44.

[31] Э. Ч. Титчмарш, *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*, т. 1, 2, ИЛ, М., 1960, 1961.

[32] И. В. Станкевич, “Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла”, *Докл. АН СССР*, **192**:1 (1970), 34–37.

[33] Н. И. Ахиезер, “Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов”, *Докл. АН СССР*, **141**:2 (1961), 263–266.

[34] E. Trubowitz, “The inverse problem for periodic potentials”, *Commun. Pure. Appl. Math.*, **30** (1977), 321–337.

[35] H. Hochstadt, “On the determination of Hill’s equation from its spectrum”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **19** (1965), 353–362.

[36] H. P. McKean, P. van Moerbeke, “The spectrum of Hill’s equation”, *Invent. Math.*, **30**:3 (1975), 217–274.

[37] H. Flaschka, “On the inverse problem for Hill’s operator”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **59**:4 (1975), 293–309.

[38] H. Hochstadt, “Estimates on the stability intervals for the Hill’s equation”, *Proc. AMS*, **14** (1963), 930–932.

[39] Б. М. Левитан, Г. Ш. Гусейнов, “Вычисление главного члена асимптотики длины лакуны периодической задачи Штурма–Лиувилля”, *Сердика Българско математическо списание*, **3** (1977), 273–280.

[40] H. Hochstadt, “A generalization of Borg’s inverse theorem for Hill’s equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **102**:2 (1984), 599–605.

[41] G. Borg, “Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillschen Eigenwertaufgabe, Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte”, *Acta Math.*, **78** (1946), 1–96.

Поступила в редакцию 7.01.2019,
после доработки 1.06.2019,
принята к публикации 21.11.2019