Ю. Амари, М. Иида, Н. Савадо, Статистическая природа моделей Скирма–Фаддеева в $2+1$ измерениях и нормируемые фермионы, *ТМФ*, 2019, том 200, номер 3, 381–398

DOI: 10.4213/tmf9673

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 200, № 3
сентябрь, 2019

Ю. Амари[*], М. Иида[*], Н. Савадо[*]

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРИРОДА МОДЕЛЕЙ СКИРМА–ФАДДЕЕВА В $2+1$ ИЗМЕРЕНИЯХ И НОРМИРУЕМЫЕ ФЕРМИОНЫ

Модель Скирма–Фаддеева обладает плоскими солитонными решениями с таргет-пространством $\mathbb{C}P^N$. С точки зрения статистических свойств решений решающую роль играет абелев член Черна–Саймонса (член Хопфа) в лагранжиане модели. Так как $\Pi_3(\mathbb{C}P^1)=\mathbb{Z}$, при $N=1$ этот член равен целому числу. С другой стороны, при $N>1$ он становится пертурбативным, потому что группа $\Pi_3(\mathbb{C}P^N)$ тривиальна. Множитель Θ перед членом Хопфа не квантуется, и его значение зависит от физической системы. Изучается спектральный поток нормируемых фермионов, взаимодействующих с так называемой baby-моделью Скирма ($\mathbb{C}P^N$-моделью Скирма–Фаддеева). Обсуждается, можно ли объяснить статистическую природу солитонов с помощью их составляющих, т. е. кварков.

Ключевые слова: топологические солитоны, скирмионы, спиновая статистика, спектральный поток.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9673

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Скирма–Фаддеева является примером теории поля, которая допускает решения в виде заузленных солитонов с конечной энергией. Классические солитонные решения модели Скирма–Фаддеева могут оказаться полезными для описания сектора сильной связи теории Янга–Миллса. В работе [1] было показано, что и в случае комплексного проективного таргет-пространства $\mathbb{C}P^N$ модель типа Скирма–Фаддеева обладает бесконечным числом точных солитонных решений в интегрируемом секторе, если константы связи удовлетворяют специальному соотношению. В работе [2] было получено численное подтверждение существования вихревых решений этой модели вне интегрируемого сектора при соответствующем выборе потенциалов. Заметим, что данная модель по существу эквивалентна так называемой baby-модели Скирма [3], которая является $(2+1)$-мерным аналогом модели Скирма.

[*]Department of Physics, Tokyo University of Science, Noda, Japan.
E-mail: amari.yuki.ph@gmail.com, sawadoph@rs.tus.ac.jp

Хорошо известно, что с квантовой точки зрения солитонные решения обладают особым свойством (имеют “дробную” спиновую статистику), если в действие модели включается член Хопфа (тета-член) [4]. Поскольку $\Pi_3(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{Z}$, такой член является инвариантом Хопфа и поэтому может быть представлен как полная производная, которая не влияет на классические уравнения движения. С другой стороны, поскольку $\Pi_4(\mathbb{C}P^1)$ тривиальна, константа связи Θ (множитель перед членом Хопфа) не квантуется. Как показано в работе [4] в модели с лагранжианном Хопфа солитоны с единичным топологическим зарядом обладают спином $\Theta/2\pi$, который может быть дробным. Для фермионной модели, взаимодействующей с $\mathbb{C}P^1$-значным полем, величину Θ можно найти, например, с помощью теории возмущений [5], [6].

При $N > 1$ группа $\Pi_3(\mathbb{C}P^N)$ тривиальна, а тогда член Хопфа пертурбативен, т. е. он не является гомотопическим инвариантом, и это в общем случае означает, что вклад от этого члена может быть всегда дробным, даже если выбрать целым число n в анионном угле $\Theta = n\pi$. В статье [7] было указано, что в $\mathbb{C}P^N$-значном поле возникает аналог члена Весса–Зумино–Виттена, который играет роль, аналогичную члену Хопфа при $N = 1$ [8]. В результате солитон может быть квантован как анион со статистическим углом Θ и таким аналогичным хопфовому членом.

В настоящей статье мы находим решения для фермионной модели, взаимодействующей с baby-моделью Скирма или $\mathbb{C}P^N$-моделью Скирма–Фаддеева. Основное свойство локализующей фермионной моды на топологическом солитоне понимается в терминах базиса из теоремы Атьи–Зингера об индексе [9]. Индекс оператора Дирака D можно определить как $\dim\ker D - \dim\ker D^\dagger$, он связан с энергией Казимира фермионов. Анализ спектрального потока в кирально-инвариантной модели (модели Скирма) представляет собой просто реализацию теоремы Атьи–Зингера [10]. Меняя форму и амплитуду фонового скирмионного поля, можно добиться того, чтобы B одночастичных состояний перешли из положительного континуума в отрицательный. В результате энергия Казимира имеет B состояний, и это соответствует солитонам. В модели Скирма член Весса–Зумино–Виттена топологический и является источником топологической природы солитонов (скирмионов) и фермионов. Поэтому мы полагаем, что статистическая природа солитона связана с локализующими фермионами. Поскольку член Хопфа $\mathbb{C}P^N$-модели не является топологическим, мы полагаем, что нарушается согласованность между статистической природой солитона и природой локализующих фермионов. Анализ аргумента спектрального потока дает нам новую информацию о такой согласованности (или несогласованности).

Мы рассматриваем только случай $N = 2$, но обобщение на бо́льшие N можно провести непосредственно.

2. BABY-МОДЕЛЬ СКИРМА

2.1. Модель и топологический заряд. Введем $\mathbb{C}P^1$-модель, или так называемую baby-модель Скирма. Полное каноническое квантование этой модели уже изучалось в работе [11], но с действием без члена Хопфа. Имеется много исследований фермионов, взаимодействующих с нелинейной сигма-моделью [5], [6], [8], включая анализ спектрального потока (см., например, недавнюю работу [12]). Лагранжиан данной модели записывается как

$$\mathcal{L}_{\text{baby}} = M^2\, \partial_\mu \vec{n} \cdot \partial^\mu \vec{n} + \frac{1}{e^2}(\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n}\,) \cdot (\partial^\mu \vec{n} \times \partial^\nu \vec{n}\,) - \mu^2 V, \tag{1}$$

где вектор $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ определяет сферическую поверхность единичного радиуса, $\vec{n}\cdot\vec{n} = 1$. Положительный параметр M^2 – константа связи, имеющая размерность массы, а константа связи e^{-2} имеет размерность обратной массы (для положительности гамильтониана e^2 должна быть выбрана отрицательной). Через $\mu^2 V$ обозначено потенциальное слагаемое, не содержащее производной, при этом μ^2 задает силу взаимодействия. Граничное условие $\vec{n}_\infty = (0, 0, 1)$ допускает одноточечную компактификацию пространства: $\mathbb{R}^2 \to S^2$. Следовательно, при отображении $\vec{n}\colon S^2 \to S^2$ возникают скирмионы. Это отображение принадлежит классу эквивалентности, который задается гомотопической группой $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$. Решения, называющиеся baby-скирмионами, получаются в результате решения уравнений Эйлера–Лагранжа для лагранжиана (1), если ввести подходящий анзац или упростить гамильтониан, используя численные алгоритмы, например алгоритм имитации отжига. В численных расчетах мы используем стандартную подстановку через переменные ежа,

$$\vec{n} = \bigl(\sin f(r) \cos n\varphi,\, \sin f(r) \sin n\varphi,\, \cos f(r)\bigr), \tag{2}$$

с граничными условиями

$$f(0) = \pi, \qquad f(\infty) = 0, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Топологический инвариант имеет вид

$$Q_{\mathrm{top}} = -\frac{1}{4\pi} \int d^2x\, \vec{n} \cdot (\partial_1 \vec{n} \times \partial_2 \vec{n}\,). \tag{4}$$

В терминах переменных (2) с граничным условием (3) мы без труда получаем, что $Q_{\mathrm{top}} \equiv n$. При обсуждении квантования удобнее использовать $SU(2)$-значное поле $U := \vec{\tau} \cdot \vec{n}$. Тогда лагранжиан можно переписать как

$$\mathcal{L}_{\mathrm{baby}} = \frac{M^2}{2} \operatorname{Tr}(\partial_\mu U\, \partial^\mu U) - \frac{1}{8e^2} \operatorname{Tr}([\partial_\mu U, \partial_\nu U]^2) - \mu^2 V. \tag{5}$$

Топологический ток в терминах поля U задается формулой

$$j^\mu(U) = \frac{i}{16\pi}\, \epsilon^{\mu\nu\lambda} \operatorname{Tr}(U\, \partial_\nu U\, \partial_\lambda U), \tag{6}$$

а топологический заряд (4) выражается как

$$Q_{\mathrm{top}} = \frac{i}{16\pi} \int d^2x\, j^0(U) = \frac{i}{16\pi} \int d^2x\, \epsilon_{ij} \operatorname{Tr}(U\, \partial_i U\, \partial_j U). \tag{7}$$

Еще раз повторим, что аналог члена Весса–Зумино-Виттена для baby-скирмионов уже обсуждался в литературе [7], [8]. Он задается формулой

$$S^{(3)}_{\mathrm{wzw}} = \frac{\Theta}{128\pi^2} \int_{M_4} d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \operatorname{Tr}[U\, \partial_\mu U\, \partial_\nu U\, \partial_\alpha U\, \partial_\beta U] \tag{8}$$

или, в более удобном виде, который легко получается из (8), формулой

$$S^{(3)}_{\mathrm{wzw}} = \Theta \int_{\partial M_4} d^3x\, \mathcal{L}_{\mathrm{Hopf}}, \qquad \mathcal{L}_{\mathrm{Hopf}} := \frac{1}{4\pi^2}\, \epsilon^{\mu\nu\alpha} a_\mu\, \partial_\nu a_\alpha, \tag{9}$$

где $a_\mu := -iZ^\dagger \partial_\mu Z$. Эти комплексные координаты и поле U связаны соотношением $U := 1 - 2Z \otimes Z^\dagger$. Поскольку $\Pi_4(\mathbb{C}P^1)$ тривиальна, множитель Θ не нуждается в квантовании. Данный коэффициент иногда называют анионным углом, поскольку он связан с дробным моментом импульса baby-скирмионов.

Для последующего анализа введем безразмерные координаты (t, ρ, φ) с помощью формул

$$x^0 = r_0 t, \quad x^1 = r_0 \rho \cos\varphi, \qquad x^2 = r_0 \rho \sin\varphi, \tag{10}$$

где масштаб длины r_0 определяется через константы связи, $r_0^2 = 4/(M^2|e^2|)$, и мы полагаем скорость света $c = 1$ в естественных единицах. Элемент длины ds^2 имеет вид

$$ds^2 = r_0^2(dt^2 - d\rho^2 - \rho^2\, d\varphi^2).$$

2.2. Нормируемые фермионы. Система фермионных вихрей впервые изучалась Джакивом и Росси [14]. Хорошо известно, что эффективная модель фермионов со взаимодействием с baby-скирмионом, имеющая спектральную щель mU, приводит посредством интегрирования фермионного поля к эффективному лагранжиану, который содержит члены типа лагранжиана baby-модели Скирма и некоторые топологические члены, включая член Хопфа [5], [6].

Рассмотрим калибровочную модель

$$\mathcal{L}_{\mathrm{ferm}} = i\bar\psi\gamma^\alpha(\partial_\alpha - iA_\alpha)\psi - m\bar\psi U\psi \equiv i\bar\psi\,\mathcal{D}_A\psi, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{11}$$

где m – константа связи baby-скирмионов и фермионов. Матрицы γ^α задаются стандартным образом: $\gamma^1 = -i\sigma_1$, $\gamma^2 = -i\sigma_2$, $\gamma^3 = \sigma_3$, где σ_α – матрицы Паули. После подходящей перенормировки в лагранжиане, $\psi \to r_0^{-1}\psi$, $A_\alpha \to r_0^{-1}A_\alpha$, $m \to r_0^{-1}m$, система становится безразмерной. Евклидова статистическая сумма задается как

$$\mathcal{Z} = e^{\omega(U)} = \int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar\psi\, \exp(i\bar\psi\mathcal{D}_A\psi) = (\det i\mathcal{D}_A)^{n_{\mathrm{c}}}, \tag{12}$$

где n_{c} – степень вырождения фермионов. Выделим в эффективном действии $\omega(U)$ вещественную и мнимую части:

$$\omega(U) = n_{\mathrm{c}} \operatorname{Sp}\ln(i\mathcal{D}_A) = \operatorname{Re}\omega(U) + i\operatorname{Im}\omega(U), \tag{13}$$

$$\operatorname{Re}\omega(U) = \frac{n_{\mathrm{c}}}{2}\operatorname{Sp}\ln\mathcal{D}_A^\dagger\mathcal{D}_A, \qquad \operatorname{Im}\omega(U) = \frac{n_{\mathrm{c}}}{2i}\operatorname{Sp}\ln\frac{i\mathcal{D}_A}{(i\mathcal{D}_A)^\dagger}; \tag{14}$$

здесь и далее Sp обозначает полный след, включающий функциональный и матричный, а также след по индексам аромата и спинорным индексам, Tr – обычный след матрицы.

Имеется много работ, посвященных расчету эффективного действия $\omega(U) = \ln\mathcal{Z}$ с помощью разложения по степеням производных. Результат содержит как действие модели (в вещественной части), так и топологические члены (в мнимой части). После длительных вычислений (см. приложение) получаем эффективное действие в пространстве-времени Минковского:

$$\operatorname{Re}\omega(U)\big|_{A=0} = n_{\mathrm{c}}\frac{|m|}{16\pi}\int d^3x\ \operatorname{Tr}(\partial_\mu U\,\partial^\mu U) + \begin{pmatrix}\text{члены, содержащие}\\ \text{высшие производные}\end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\operatorname{Im}\omega(U) = -n_{\mathrm{c}}\int d^3x\,\bigl(j^\mu(U)A_\mu + \pi\ \operatorname{sgn}(m)\mathcal{L}_{\mathrm{Hopf}}(U)\bigr). \tag{16}$$

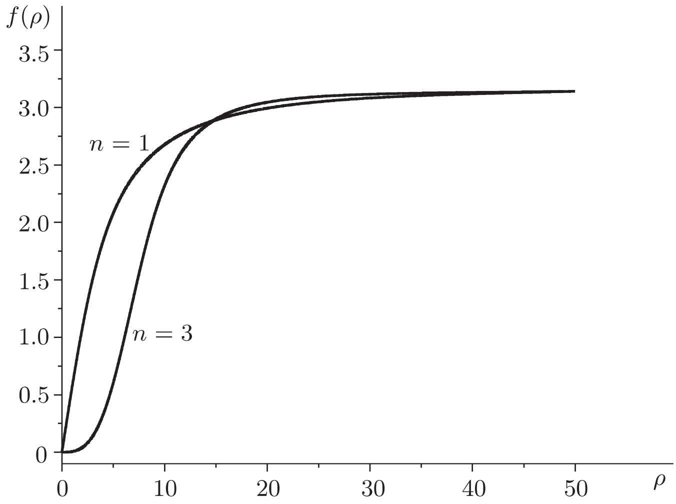

Рис. 1. Профиль $f(\rho)$ baby-скирмионов с $Q_{\text{top}} = n$ для $n = 1, 3$. Потенциал задан стандартным образом: $V := 1 - n_3$. Параметр $\tilde{\mu} := (r_0^2/M^2)\mu^2$ выбран равным 0.005.

Если рассматривать эффективное действие как действие модели типа baby-модели Скирма, то анионный угол Θ можно определить как $\Theta \equiv n_c \pi \operatorname{sgn}(m)$, и тогда он квантуется как обычная спиновая статистика. Таким образом, как и в случае модели Скирма, фермионное число baby-скирмиона совпадает с его топологическим зарядом. В самом деле, инвариантность эффективного действия $\omega(U)$ относительно изосинглетного преобразования приводит к сохранению фермионного тока [13]. Анализ можно провести методами теории возмущений, т. е. пертурбативное разложение справедливо только при импульсах, малых по сравнению с физическим уровнем обрезания.

Существует другое определение фермионного числа на скирмионном фоне – через “деформированный дираковский вакуум” [15], [16]:

$$N_{\text{Cas}} := -\frac{1}{2}\sum_{\mu}[\operatorname{sgn}(\epsilon_\mu) - \operatorname{sgn}(\epsilon_\mu^0)], \tag{17}$$

где ϵ_μ – собственное значение гамильтониана

$$i\mathcal{D}\big|_{A=0} := \gamma_3(i\partial_3 - \mathcal{H}_{\text{ferm}}), \qquad \mathcal{H}_{\text{ferm}} = -i\gamma_3\gamma_k\partial_k + \gamma_3 mU, \tag{18}$$

а ϵ_μ^0 – аналогичное собственное значение при $U = 1$. Число N_{Cas} есть энергия Казимира, которая равна количеству отрицательных энергетических уровней за вычетом количества тех же уровней при вакуумном фоне. Выражение (17) напрямую получается из эффективного действия $\omega(U)$. Поэтому, по крайней мере в рамках пертурбативного подхода, оба результата должны совпадать, $N_{\text{Cas}} \equiv Q_{\text{top}}$. Далее мы численно подтверждаем это совпадение, анализируя спектральный поток.

2.3. Численный анализ. Типичные baby-скирмионы с топологическими зарядами $Q_{\mathrm{top}} = 1, 3$ представлены на рис. 1. Гамильтониан имеет следующий явный вид:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ferm}} = \begin{pmatrix} mU & -e^{-i\varphi}\big(\partial_\rho - \frac{i\partial_\varphi}{\rho}\big) \\ e^{i\varphi}\big(\partial_\rho + \frac{i\partial_\varphi}{\rho}\big) & -mU \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Можно показать, что гамильтониан $\mathcal{H}_{\mathrm{ferm}}$ коммутирует с оператором момента импульса, который мы называем *большим спином*:

$$\mathcal{K} = \ell_3 + \frac{\sigma_3}{2} + \frac{\tau_3}{2}, \tag{20}$$

где $\ell_3 = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_3 = -i\,\partial/\partial\varphi$ есть третья компонента момента импульса, а τ_3 – третья изоспиновая матрица Паули.

Вкратце опишем численный метод расчета спектра таких фермионов. Согласно вариационному принципу Рэлея–Ритца, для каждого $\mathcal{K}$ верхнюю границу спектра можно получить из векового уравнения

$$\det(\mathcal{A} - \epsilon\mathcal{B}) = 0, \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{k'^{(p)}k^{(q)}} &= \int d^3x\, \phi^{(p)}_{\mathcal{K}}(k'^{(p)}, \mathbf{x})^\dagger \mathcal{H}_{\mathrm{ferm}} \phi^{(q)}_{\mathcal{K}}(k^{(q)}, \mathbf{x}), \\ \mathcal{B}_{k'^{(p)}k^{(q)}} &= \int d^3x\, \phi^{(p)}_{\mathcal{K}}(k'^{(p)}, \mathbf{x})^\dagger \phi^{(q)}_{\mathcal{K}}(k^{(q)}, \mathbf{x}). \end{aligned} \tag{22}$$

Базис плоских волн задается как

$$\begin{aligned} \phi^{(u)}_{\mathcal{K}}(k^{(u)}_i, \mathbf{x}) &:= \langle \mathbf{x}|(u)\mathcal{K}; i\rangle = \mathcal{N}^{(u)}_i \begin{pmatrix} \omega^{(u)-}_{i,\epsilon} J_{\mathcal{K}-\frac12-\frac n2}(k^{(u)}_i\rho) e^{i(\mathcal{K}-\frac12-\frac n2)\varphi} \\ \omega^{(u)+}_{i,\epsilon} J_{\mathcal{K}+\frac12-\frac n2}(k^{(u)}_i\rho) e^{i(\mathcal{K}+\frac12-\frac n2)\varphi} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \phi^{(d)}_{\mathcal{K}}(k^{(d)}_i, \mathbf{x}) &:= \langle \mathbf{x}|(d)\mathcal{K}; i\rangle = \mathcal{N}^{(d)}_i \begin{pmatrix} \omega^{(d)+}_{i,\epsilon} J_{\mathcal{K}-\frac12+\frac n2}(k^{(d)}_i\rho) e^{i(\mathcal{K}-\frac12+\frac n2)\varphi} \\ \omega^{(d)-}_{i,\epsilon} J_{\mathcal{K}+\frac12+\frac n2}(k^{(d)}_i\rho) e^{i(\mathcal{K}+\frac12+\frac n2)\varphi} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\omega^{(p)+}_{i,\epsilon} = \omega^{(p)-}_{i,-\epsilon} = 1, \qquad \omega^{(p)+}_{i,-\epsilon} = \omega^{(p)-}_{i,\epsilon} = \frac{-\operatorname{sgn}(\epsilon) k^{(p)}_i}{|\epsilon| + m}, \qquad \epsilon > 0, \qquad p = u, d. \tag{24}$$

Базис плоских волн мы строим в круге большого радиуса D. В результате наложения граничных условий

$$J_{\mathcal{K}+\frac12-\frac n2}(k^{(u)}_i D) = 0, \qquad J_{\mathcal{K}-\frac12+\frac n2}(k^{(d)}_i D) = 0 \tag{25}$$

получается дискретный набор волновых чисел $k^{(u)}$, $k^{(d)}$. Имеют место условия ортогональности

$$\int_0^D d\rho\, \rho J_\nu(k^{(p)}_i\rho) J_\nu(k^{(p)}_j\rho) = \int_0^D d\rho\, \rho J_{\nu\pm1}(k^{(p)}_i\rho) J_{\nu\pm1}(k^{(p)}_j\rho) = \delta_{ij}\frac{D^2}{2}[J_{\nu\pm1}(k^{(p)}_i D)]^2, \tag{26}$$

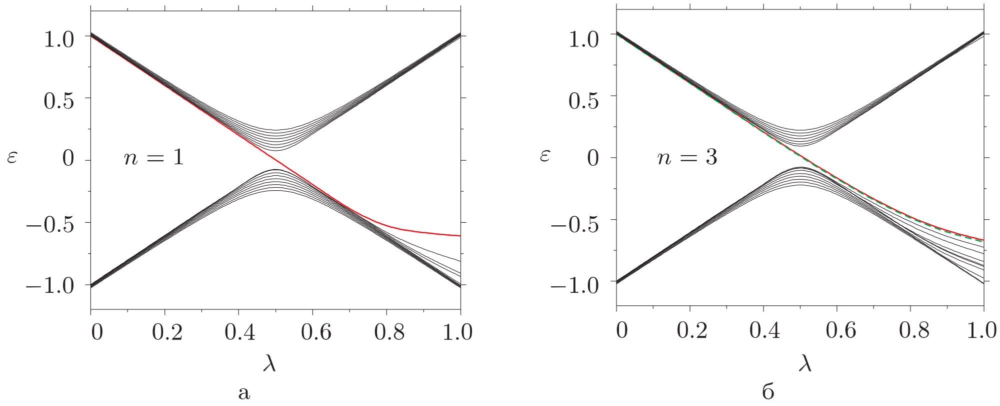

Рис. 2. Спектральный поток, соответствующий решениям, приведенным на рис. 1, для $n = 1$ (а) и $n = 3$ (б). При $\lambda = 0$ фоновое поле совпадает с вакуумом U_∞, при $\lambda = 1$ оно совпадает с полем солитона U. На рисунке показаны первые 18 энергетических уровней (9 положительных и 9 отрицательных в точке вакуума $\lambda = 0$). Константа связи выбрана как $m = 1.0$, а параметр потенциала $\tilde{\mu}^2 = 0.005$.

в которых $\nu = \mathcal{K} \pm \frac{1}{2} \mp \frac{n}{2}$. Уравнение (21) можно решить численно. Если взять всё бесконечное множество волновых чисел (что означает бесконечный размер матриц), то собственное значение ϵ становится точным. Нормировочные постоянные для базисных векторов равны

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_i^{(u)} &= \left[\frac{2\pi D^2|\epsilon|}{|\epsilon| + m}\big(J_{\mathcal{K}-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}}(k_i^{(u)}D)\big)^2\right]^{-1/2}, \\ \mathcal{N}_i^{(d)} &= \left[\frac{2\pi D^2|\epsilon|}{|\epsilon| + m}\big(J_{\mathcal{K}+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}}(k_i^{(d)}D)\big)^2\right]^{-1/2}. \end{aligned} \tag{27}$$

Чтобы получить спектральный поток, используем линейную интерполяцию поля

$$U(x, \lambda)_{\text{intp}} = (1 - \lambda)U_\infty + \lambda U(x), \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

где $U(x)$ – поле с нетривиальной топологией и U_∞ – асимптотическое поле. Для задания параметра λ мы гладко сшиваем вакуумное и солитонное состояние. Далее подставляем $U_{\text{intp}}(x, \lambda)$ в гамильтониан (19) и решаем задачу (21) на собственные значения с помощью стандартного алгоритма диагонализации матрицы `LAPACK`.

На рис. 2 представлено несколько типичных спектральных потоков. Некоторые выделенные энергетические уровни опускаются из положительного континуума в отрицательный. Число фермионных уровней, пересекающих ноль, всегда равно топологическому заряду поля $U(x)$. Как мы увидим, эти уровни являются нормируемыми модами, и тогда их поведение описывается теоремой об индексе.

Собственная функция $\psi(\mathbf{x})$ гамильтониана (19) в терминах собственных состояний уравнения (21) имеет вид

$$\psi_{\mathcal{K},\mu}(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}|\mathcal{K};\mu\rangle = \sum_i \big[\langle \mathbf{x}|(u)\mathcal{K};i\rangle\langle (u)\mathcal{K};i|\mu\rangle + \langle \mathbf{x}|(d)\mathcal{K};i\rangle\langle (d)\mathcal{K};i|\mu\rangle\big]. \tag{28}$$

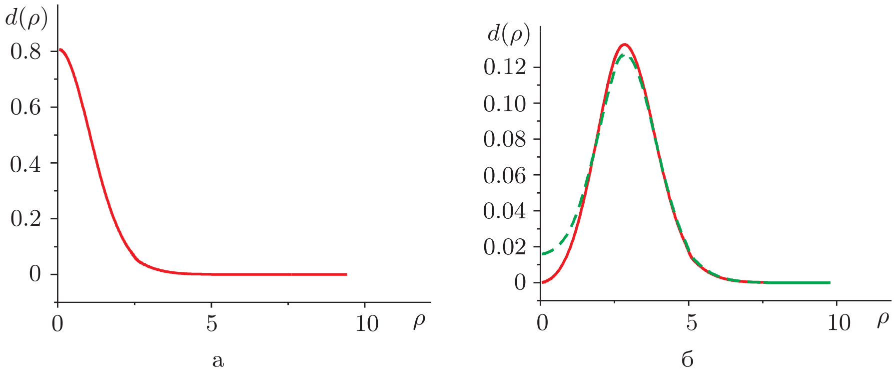

Рис. 3. Фермионная плотность (29). Собственные функции рассчитаны с солитонным фоном при $\lambda = 1$. Кривые соответствуют жирным линиям на рис. 2 (на рис. 2б две линии практически слились). Параметр потенциала выбран равным $\tilde{\mu}^2 = 0.1$.

Заметим, что большой спин $\mathcal{K}$ является удачным квантовым числом, матрицы (22) блочно-диагональные. Следовательно, для каждого $\mathcal{K}$ суммирование в (28) ведется только по i. Отсюда можно вычислить нормированную плотность фермионной моды

$$d_{\mathcal{K}}(\rho) = \frac{1}{2\pi n_{\mathrm{c}}} \int d\varphi\, \bar{\psi}_{\mathcal{K},0}(\mathbf{x})\gamma_3\psi_{\mathcal{K},0}(\mathbf{x}), \tag{29}$$

где $\psi_{\mathcal{K},0}$ – мода спектрального потока. Графики плотности показаны на рис. 3. При численных расчетах мы выбрали радиус круга $D = 50.0$ и 512 точек для дискретизации импульса. Данные моды спектрального потока локализуются сначала на солитоне, а затем становятся нормируемыми модами. Расчеты показывают, что анионный угол $\Theta \equiv n_{\mathrm{c}}\pi\,\mathrm{sgn}(m)$ определяется числом нормируемых фермионных мод. Таким образом, природа спиновой статистики baby-скирмиона согласуется с природой локализованных фермионов.

3. $\mathbb{C}P^N$-МОДЕЛЬ

3.1. Модель и полевые уравнения. Вкратце опишем модель Скирма–Фаддеева на таргет-пространстве $\mathbb{C}P^N$. Введем лагранжиан

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{SF}} = \frac{M^2}{2}\,\mathrm{Tr}(\partial_\mu\Phi\,\partial^\mu\Phi) + \frac{1}{e^2}\,\mathrm{Tr}([\partial_\mu\Phi, \partial_\nu\Phi]^2) \,+ \\ + \frac{\beta}{2}\big(\mathrm{Tr}(\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi)\big)^2 + \gamma\big(\mathrm{Tr}(\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi)\big)^2 - \mu^2 V(\Phi),\end{aligned} \tag{30}$$

где, как и выше, константа связи M^2 имеет размерность массы, а константы связи e^{-2}, β, γ – размерность обратной массы. Через V обозначен потенциальный член, который не содержит производной и не разрушает локальную симметрию модели. Для поля Φ мы рассматриваем следующую параметризацию N комплексными полями $u := \{u_i\}$, $i = 1, \ldots, N$:

$$\Phi = I_{(N+1)\times(N+1)} + \frac{2}{\vartheta^2}\begin{pmatrix} -u\otimes u^\dagger & iu \\ -iu^\dagger & -1 \end{pmatrix}, \qquad \vartheta := \sqrt{1 + u^\dagger\cdot u}. \tag{31}$$

В терминах этих полей лангранжиан (30) записывается как

$$\mathcal{L}_{\text{SF}} = -\frac{1}{2}[M^2\eta_{\mu\nu} + C_{\mu\nu}]\tau^{\nu\mu} - \mu^2 V, \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{\mu\nu} &:= -\frac{4}{\vartheta^4}[\vartheta^2\,\partial_\nu u^\dagger\cdot\partial_\mu u - (\partial_\nu u^\dagger\cdot u)(u^\dagger\cdot\partial_\mu u)], \\ C_{\mu\nu} &:= M^2\eta_{\mu\nu} - \frac{4}{e^2}\big[(\beta e^2-1)\tau^\rho_\rho\eta_{\mu\nu} + (\gamma e^2-1)\tau_{\mu\nu} + (\gamma e^2+2)\tau_{\nu\mu}\big]. \end{aligned} \tag{33}$$

Вариация по полю u_i^* приводит к уравнениям, которые после умножения на функции, обратные к Δ_{ij}^2, т. е. на

$$\Delta_{ij}^{-2} = \frac{1}{1+u^\dagger\cdot u}(\delta_{ij} + u_i u_j^*),$$

могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} (1+u^\dagger\cdot u)\partial^\mu(C_{\mu\nu}\,\partial^\nu u_i) - C_{\mu\nu}[(u^\dagger\cdot\partial^\mu u)\partial^\nu u_i + (u^\dagger\cdot\partial^\nu u)\partial^\mu u_i] +{}& \\ + \frac{\mu^2}{4}(1+u^\dagger\cdot u)^2\sum_{k=1}^N\left[(\delta_{ik}+u_i u_k^*)\frac{\delta V}{\delta u_k^*}\right] = 0.& \end{aligned} \tag{34}$$

Далее мы рассмотрим некоторые примеры потенциала. В простейшем случае, когда потенциал является функцией абсолютных значений поля, $V(|u_1|^2,\ldots,|u_N|^2)$, вклад, связанный с этим потенциалом, принимает вид

$$\sum_{k=1}^N\left[(\delta_{ik}+u_i u_k^*)\frac{\delta V}{\delta u_k^*}\right] = u_i\left[\frac{\delta V}{\delta|u_i|^2} + \sum_{k=1}^N |u_k|^2\frac{\delta V}{\delta|u_k|^2}\right].$$

Рассмотрим замену переменных, заданную как

$$u_j = f_j(\rho)e^{in_j\varphi}. \tag{35}$$

Постоянные n_i образуют множество целых чисел. Чтобы упростить дальнейшие формулы, зададим диагональную матрицу $\lambda \equiv \operatorname{diag}(n_1,\ldots,n_N)$. Тогда $\tau_{\mu\nu}$ принимают вид

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\rho} &\equiv \theta(\rho) = -\frac{4}{\vartheta^4}\,[\vartheta^2 f'^{\,\mathrm{T}}.f' - (f'^{\,\mathrm{T}}.f)(f^{\mathrm{T}}.f')], \\ \tau_{\varphi\varphi} &\equiv \omega(\rho) = -\frac{4}{\vartheta^4}\,[\vartheta^2 f^{\mathrm{T}}.\lambda^2.f - (f^{\mathrm{T}}.\lambda.f)^2], \\ \tau_{\varphi\rho} &= -\tau_{\rho\varphi} \equiv i\zeta(\rho) = -i\frac{4}{\vartheta^4}\,[\vartheta^2 f'^{\,\mathrm{T}}.\lambda.f - (f^{\mathrm{T}}.\lambda.f)(f'^{\,\mathrm{T}}.f)], \end{aligned} \tag{36}$$

где штрихом обозначена производная по ρ и индекс T означает транспонирование. В безразмерных координатах уравнения движения записываются как

$$\begin{aligned} (1+f^{\mathrm{T}}.f)\left[\frac{1}{\rho}(\rho\widetilde{C}_{\rho\rho}f_k')' + \frac{i}{\rho}\left(\frac{\widetilde{C}_{\rho\varphi}}{\rho}\right)'(\lambda.f)_k - \frac{1}{\rho^4}\widetilde{C}_{\varphi\varphi}(\lambda^2.f)_k\right] -{}& \\ - 2\left[\widetilde{C}_{\rho\rho}(f^{\mathrm{T}}.f')f_k' - \frac{1}{\rho^4}\widetilde{C}_{\varphi\varphi}(f^{\mathrm{T}}.\lambda.f)(\lambda.f)_k\right] +{}& \\ + \tilde{\mu}^2\frac{f_k}{4}(1+f^{\mathrm{T}}.f)^2\left[\frac{\delta V}{\delta f_k^2} + \sum_{i=1}^N f_i^2\frac{\delta V}{\delta f_i^2}\right] = 0& \end{aligned} \tag{37}$$

для каждого $k = 1, \dots, N$, где мы положили $\widetilde{C}_{\mu\nu} := C_{\mu\nu}/M^2$ и $\tilde{\mu}^2 := (r_0^2/M^2)\mu^2$. Величины $\widetilde{C}_{\mu\nu}$, появляющиеся в уравнениях движения, имеют вид

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}_{\rho\rho} &= -1 + (\beta e^2 - 1)\left(\theta + \frac{\omega}{\rho^2}\right) + (2\gamma e^2 + 1)\theta, \\
\widetilde{C}_{\varphi\varphi} &= -\rho^2 + \rho^2(\beta e^2 - 1)\left(\theta + \frac{\omega}{\rho^2}\right) + (2\gamma e^2 + 1)\omega, \\
\widetilde{C}_{\varphi\rho} &= -\widetilde{C}_{\rho\varphi} = -3i\zeta.
\end{aligned} \tag{38}$$

При численных расчетах полезно ввести масштабированную координату y и переменные g_j с помощью формул

$$\rho = \sqrt{\frac{1-y}{y}}, \qquad f_j = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{1-g_j}{g_j}}, \qquad y \in (0,1], \quad g_j \in (0,1]. \tag{39}$$

С учетом результатов работ [17], а также обсуждения в работе [1] можно определить топологический заряд в рассматриваемой модели. Поле u_i задает отображение из плоскости (x^1, x^2) в пространство $\mathbb{C}P^N$. Однако, чтобы энергия была конечной, поле должно стремиться к константе на пространственной бесконечности. Тогда плоскость (x^1, x^2) топологически компактифицируется в S^2, а конфигурация поля с конечной энергией определяет отображение $S^2 \to \mathbb{C}P^N$, которое классифицируется по гомотопическим классам группы $\pi_2(\mathbb{C}P^N)$. Существует теорема [17], согласно которой $\pi_2(G/H) = \pi_1(H)_G$, где $\pi_1(H)_G$ – подмножество в $\pi_1(H)$, образованное замкнутыми путями в H, которые могут быть стянуты в точку в группе G. Таким образом, в данном случае гомотопическая группа задается как

$$\pi_2(\mathbb{C}P^N) = \pi_1(SU(N) \otimes U(1))_{SU(N+1)} = \mathbb{Z}. \tag{40}$$

Топологический заряд как элемент гомотопической группы задается интегралом от топологического тока, который в терминах поля Φ имеет вид

$$j^\mu(\Phi) = \frac{i}{16\pi}\,\epsilon^{\mu\nu\lambda}\,\mathrm{Tr}(\Phi\,\partial_\nu\Phi\,\partial_\lambda\Phi). \tag{41}$$

Как было отмечено в работах [1], [18], фактически топологический заряд равен числу полюсов функции u_i включая полюс на бесконечности. Решения вблизи границ ведут себя, как голоморфные функции, т. е. $u_i \sim \rho^{n_i} e^{in_i\varphi}$ (где $n_i \in \mathbb{Z}$) в окрестности начала координат и на пространственной бесконечности, следовательно, топологический заряд $Q_{\mathrm{top}} = n_{\max} + |n_{\min}|$, где $n_{\max}$ и $n_{\min}$ – наибольшее положительное и наименьшее отрицательное число в множестве $n_1, \dots, n_N$.

Теперь зададим в явном виде потенциальный член. В общем случае потенциалы являются функцией полей, которые должны исчезать на пространственной бесконечности и сохранять локальные симметрии модели. В нашей модели самый простой выбор – это потенциал “old baby”-типа $\mathrm{Tr}(1 - \Phi_\infty^{-1}\Phi)$, где Φ_∞ – значение поля на пространственной бесконечности, $\Phi_\infty := \lim_{\rho\to\infty}\Phi(\rho)$. Предположив, что решение и его голоморфный аналог имеют одинаковое асимптотическое поведение на пространственной бесконечности, получаем, что обратная к основной переменной Φ стремится к $\Phi_\infty^{-1} := \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$ при $\rho \to \infty$ для $n_1 > n_2 > 0$. Заметим, что та же обратная стремится к $\Phi_0^{-1} := \mathrm{diag}(1,1,-1)$ при $\rho \to 0$, поэтому $\mathrm{Tr}(1-\Phi_0^{-1}\Phi)$ можно рассматривать как “new baby”-потенциал с двумя вакуумами [19]. Итак, рассмотрим следующий общий вид потенциала:

$$\begin{aligned} V &= [\mathrm{Tr}(1-\Phi_0^{-1}\Phi)]^a[\mathrm{Tr}(1-\Phi_\infty^{-1}\Phi)]^b = \\ &= \frac{(|u_1|^2+|u_2|^2)^a(1+|u_2|^2)^b}{(1+|u_1|^2+|u_2|^2)^{a+b}} = \frac{(g_1+g_2-2g_1g_2)^a g_1^b(1+g_2)^b}{(g_1+g_2)^{a+b}}, \end{aligned} \tag{42}$$

где целые числа $a \geqslant 0$, $b > 0$.

Предположим, что при $n_2 < 0$ поле u_2 в нуле ведет себя так же, как голоморфный аналог, т. е. как ρ^{n_2}, следовательно, оно расходится при $\rho \to 0$. Тогда обратная к основной переменной Φ стремится к $\Phi_0^{-1} := \mathrm{diag}(1,-1,1)$ при $\rho \to 0$. При этом потенциал приобретает следующий общий вид:

$$V = \frac{(1+|u_1|^2)^a(1+|u_2|)^b}{(1+|u_1|^2+|u_2|^2)^{a+b}} = \frac{g_1^b g_2^a(1+g_1)^a(1+g_2)^b}{(g_1+g_2)^{a+b}} \tag{43}$$

с целыми $a \geqslant 0$, $b > 0$.

3.2. Нормируемые фермионные моды. Для таргет-пространства $\mathbb{C}P^N$ кирально-симметричные фермионы, взаимодействующие с солитоном, впервые обсуждались в работе [17]. Было подтверждено, что нормируемая нулевая фермионная мода возникает в силу теоремы об индексе.

Рассмотрим отвечающую лагранжиану (30) калибровочную модель

$$\mathcal{L}_{\mathrm{ferm}} = i\bar\psi\gamma^\alpha(\partial_\alpha - iA_\alpha)\psi - m\bar\psi\Phi\psi \equiv i\bar\psi\mathcal{D}_A\psi, \qquad \alpha = 1,2,3. \tag{44}$$

Евклидова статистическая сумма определяется как

$$\mathcal{Z} = e^{\omega(\Phi)} = \int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar\psi\,\exp(i\bar\psi\mathcal{D}_A\psi) = (\det i\mathcal{D}_A)^{n_{\mathrm{c}}}. \tag{45}$$

Получаем вещественную и мнимую части эффективного действия:

$$\mathrm{Re}\,\omega(\Phi)\big|_{A=0} = n_{\mathrm{c}}\frac{|m|}{16\pi}\int d^3x\ \mathrm{Tr}(\partial_\mu\Phi\,\partial^\mu\Phi) + \begin{pmatrix}\text{члены, содержащие}\\ \text{высшие производные}\end{pmatrix}, \tag{46}$$

$$\mathrm{Im}\,\omega(\Phi) = -n_{\mathrm{c}}\int d^3x\,\big(j^\mu(\Phi)A_\mu + \pi\ \mathrm{sgn}(m)\mathcal{L}_{\mathrm{Hopf}}(\Phi)\big). \tag{47}$$

Явный вид тока j^μ совпадает с (41). Следовательно, как указано в работах [5], [6], [8], в таком фермионном контексте можно задать анионный угол Θ в виде $\Theta \equiv n_{\mathrm{c}}\pi\,\mathrm{sgn}(m)$, если вихри взаимодействуют с фермионным полем. Однако, поскольку $\Pi_3(\mathbb{C}P^N)$ тривиальна, сам по себе член Хопфа $\mathcal{L}_{\mathrm{Hopf}}$ пертурбативен, а интеграл зависит от фоновых классических решений. Поэтому нельзя ожидать, что этот интеграл будет равен целому числу. В результате солитоны всегда являются анионами, даже если $\Theta = n\pi$, где $n \in \mathbb{Z}$ [20].

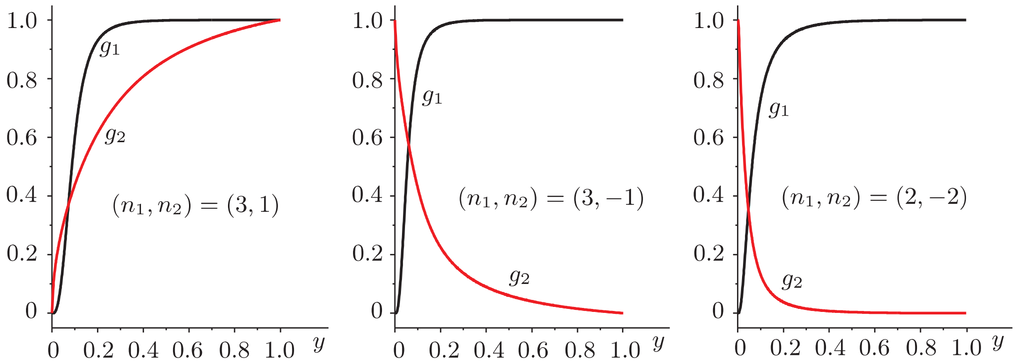

Рис. 4. Решения g_1, g_2 для потенциала с параметрами $(a, b) = (0, 2)$. Прочие параметры $(\beta e^2, \gamma e^2, \tilde{\mu}^2) = (5.0, 5.0, 1.0)$.

3.3. Численный анализ. На рис. 4 представлены графики типичных солитонных решений для топологического заряда $Q_{\mathrm{top}} = 3, 4$. Параметры потенциала в (42) или (43) выбраны как $a = 0$, $b = 2$.

Гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ferm}} = -i\gamma_3\gamma_k\,\partial_k + \gamma_3 m\Phi = \begin{pmatrix} m\Phi & -e^{-i\varphi}\big(\partial_\rho - \frac{i\partial_\varphi}{\rho}\big) \\ e^{i\varphi}\big(\partial_\rho + \frac{i\partial_\varphi}{\rho}\big) & -m\Phi \end{pmatrix}, \tag{48}$$

где $iD_A\big|_{A=0} := \gamma_3(i\partial_3 - \mathcal{H}_{\mathrm{ferm}})$. Можно показать, что $\mathcal{H}_{\mathrm{ferm}}$ коммутирует с оператором момента импульса, который мы, как и выше, называем *большим спином*:

$$\mathcal{K} = \ell_3 + \frac{\sigma_3}{2} - \frac{n_1}{2}\Big(\lambda_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8\Big) + \frac{n_2}{2}\Big(\lambda_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8\Big), \tag{49}$$

где $\ell_3 = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_3 = -i\,\partial/\partial\varphi$ и λ_3, λ_8 – матрицы Гелл-Мана.

Базис плоских волн имеет вид

$$\phi_{\mathcal{K}}^{(u)}(k_i^{(u)}, \mathbf{x}) = \mathcal{N}_i^{(u)} \begin{pmatrix} \omega_{i,\epsilon}^{(u)-} J_{\mathcal{K}-\frac12+\frac{2n_1-n_2}{3}}(k_i^{(u)}\rho) e^{i(\mathcal{K}-\frac12+\frac{2n_1-n_2}{3})\varphi} \\ \omega_{i,\epsilon}^{(u)+} J_{\mathcal{K}+\frac12+\frac{2n_1-n_2}{3}}(k_i^{(u)}\rho) e^{i(\mathcal{K}+\frac12+\frac{2n_1-n_2}{3})\varphi} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_{\mathcal{K}}^{(d)}(k_i^{(d)}, \mathbf{x}) = \mathcal{N}_i^{(d)} \begin{pmatrix} \omega_{i,\epsilon}^{(d)+} J_{\mathcal{K}-\frac12-\frac{n_1-2n_2}{3}}(k_i^{(d)}\rho) e^{i(\mathcal{K}-\frac12-\frac{n_1-2n_2}{3})\varphi} \\ \omega_{i,\epsilon}^{(d)-} J_{\mathcal{K}+\frac12-\frac{n_1-2n_2}{3}}(k_i^{(d)}\rho) e^{i(\mathcal{K}+\frac12-\frac{n_1-2n_2}{3})\varphi} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_{\mathcal{K}}^{(s)}(k_i^{(s)}, \mathbf{x}) = \mathcal{N}_i^{(s)} \begin{pmatrix} \omega_{i,\epsilon}^{(s)+} J_{\mathcal{K}-\frac12-\frac{n_1+n_2}{3}}(k_i^{(s)}\rho) e^{i(\mathcal{K}-\frac12-\frac{n_1+n_2}{3})\varphi} \\ \omega_{i,\epsilon}^{(s)-} J_{\mathcal{K}+\frac12-\frac{n_1+n_2}{3}}(k_i^{(s)}\rho) e^{i(\mathcal{K}+\frac12-\frac{n_1+n_2}{3})\varphi} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\omega_{i,\epsilon}^{(p)+} = \omega_{i,-\epsilon}^{(p)-} = 1, \qquad \omega_{i,-\epsilon}^{(p)+} = \omega_{i,\epsilon}^{(p)-} = \frac{-\operatorname{sgn}(\epsilon) k_i^{(p)}}{|\epsilon| + m}, \qquad \epsilon > 0, \qquad p = u, d, s. \tag{50}$$

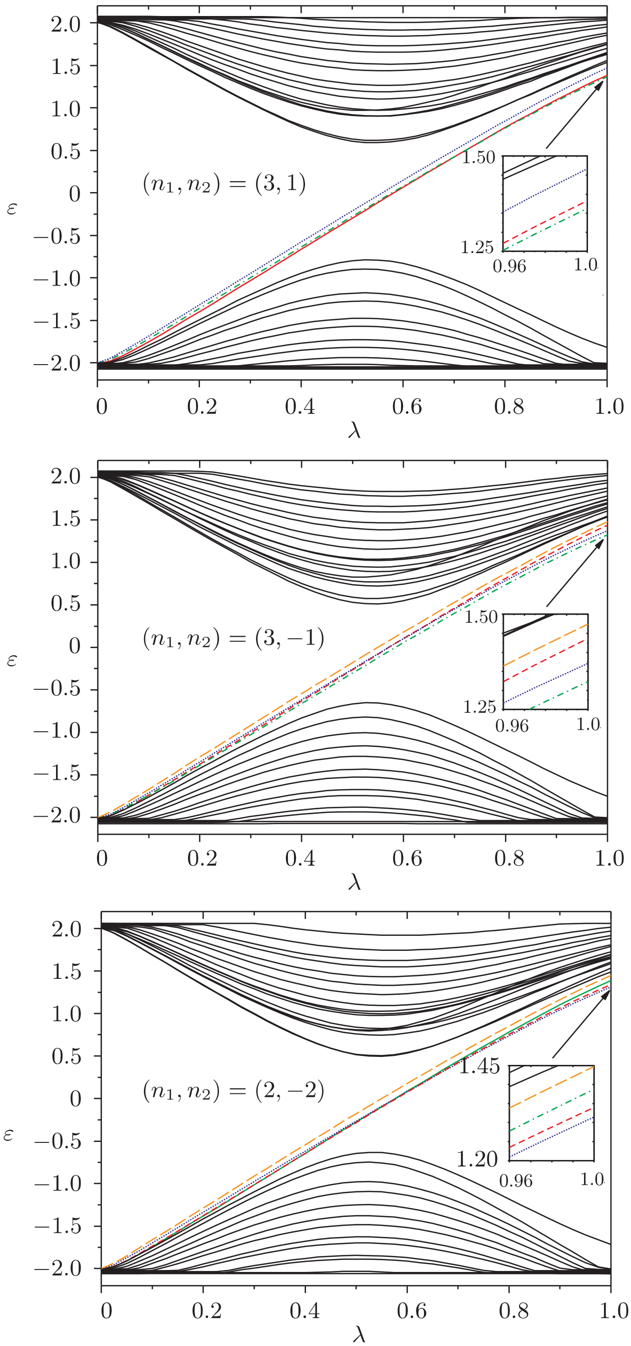

Рис. 5. Спектральный поток, отвечающий решениям на рис. 4. Изображены первые 34 энергетических уровня (17 положительных и 17 отрицательных для вакуумного фона $\lambda = 0$). Константа связи выбрана как $m = 2.0$.

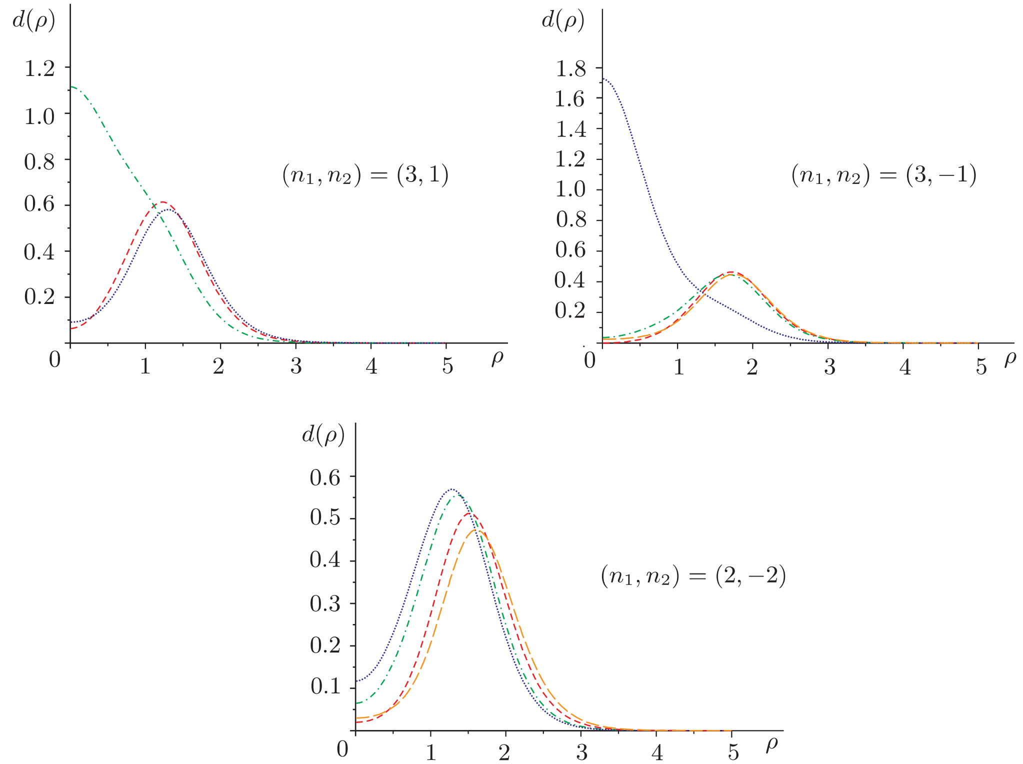

Рис. 6. Фермионная плотность (29) для модели с потенциалом (42) с параметрами $(a, b) = (0, 2)$, прочие параметры $(\beta e^2, \gamma e^2, \tilde{\mu}^2) = (1.1, 1.1, 1.0)$. Собственные функции рассчитаны с солитонным фоном при $\lambda = 1$. Типы кривых отвечают кривым на врезке на рис. 5.

Базис плоских волн мы строим в круге большого радиуса $\rho = D$. В результате наложения граничных условий

$$J_{\mathcal{K}-\frac{1}{2}+\frac{2n_1-n_2}{3}}(k_i^{(u)}D) = 0, \quad J_{\mathcal{K}-\frac{1}{2}-\frac{n_1-2n_2}{3}}(k_i^{(d)}D) = 0, \quad J_{\mathcal{K}-\frac{1}{2}-\frac{n_1+n_2}{3}}(k_i^{(s)}D) = 0$$

получается дискретный набор волновых чисел $k^{(u)}$, $k^{(d)}$, $k^{(s)}$. Условия ортогональности задаются соотношениями

$$\int_0^D d\rho\, \rho J_\nu(k_i^{(p)}\rho) J_\nu(k_j^{(p)}\rho) = \int_0^D d\rho\, \rho J_{\nu\pm1}(k_i^{(p)}\rho) J_{\nu\pm1}(k_j^{(p)}\rho) = \delta_{ij}\frac{D^2}{2}[J_{\nu\pm1}(k_i^{(p)}D)]^2, \tag{51}$$

в которых

$$\nu = \mathcal{K} - \frac{1}{2} + \frac{2n_1 - n_2}{3},\ \mathcal{K} - \frac{1}{2} - \frac{n_1 - 2n_2}{3},\ \mathcal{K} - \frac{1}{2} - \frac{n_1 + n_2}{3}.$$

Задачу на собственные значения можно решить численно. Если взять всё бесконечное множество волновых чисел (что означает бесконечный размер матриц), то собственное значение ϵ становится точным. Нормировочные постоянные для базисных векторов равны

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_i^{(u)} &= \left[\frac{2\pi D^2|\epsilon|}{|\epsilon|+m}\left(J_{\mathcal{K}+\frac{1}{2}+\frac{2n_1-n_2}{3}}(k_i^{(u)}D)\right)^2\right]^{-1/2},\\ \mathcal{N}_i^{(d)} &= \left[\frac{2\pi D^2|\epsilon|}{|\epsilon|+m}\left(J_{\mathcal{K}+\frac{1}{2}-\frac{n_1-2n_2}{3}}(k_i^{(d)}D)\right)^2\right]^{-1/2},\\ \mathcal{N}_i^{(s)} &= \left[\frac{2\pi D^2|\epsilon|}{|\epsilon|+m}\left(J_{\mathcal{K}+\frac{1}{2}-\frac{n_1+n_2}{3}}(k_i^{(s)}D)\right)^2\right]^{-1/2}.\end{aligned} \tag{52}$$

Чтобы получить спектральный поток, используем линейную интерполяцию поля

$$\Phi(x,\lambda)_{\text{intp}} = (1-\lambda)\Phi_\infty + \lambda\Phi(x), \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

где $\Phi(x)$ – поле с нетривиальной топологией и $\Phi_\infty(x)$ – асимптотическое поле. На рис. 5 представлены несколько типичных графиков спектральных потоков. Некоторые выделенные энергетические уровни опускаются из положительного континуума в отрицательный. Число фермионных уровней, пересекающих ноль, всегда равно топологическому заряду поля $\Phi(x)$. Как мы увидим, эти уровни являются нормируемыми модами, и тогда их поведение описывается теоремой об индексе.

Нормируемая фермионная плотность задана в (29). Ее графики показаны на рис. 6. При численных расчетах в целях экономии компьютерного времени мы выбрали радиус круга $D = 20.0$ и 192 точки для дискретизации импульса.

4. ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ БОЛЬШИХ N

Мы рассмотрели случаи $N = 1, 2$, но наш анализ непосредственным образом обобщается на бóльшие N. Фактически солитонные уравнения движения (37) записаны для произвольного N; кроме того, некоторые результаты можно найти в работе [2]. Поэтому мы сосредоточимся на обсуждении того, как в случае больших N следует работать с фермионной частью модели. Нетрудно показать, что при произвольном N сохраняющееся квантовое число, которое коммутирует с гамильтонианом (48), есть

$$\mathcal{K} = \ell_3 + \frac{\sigma_3}{2} + \sum_{k=1}^{N} n_k\left[\frac{1}{3}I_{(N+1)\times(N+1)} - \tilde{I}_k\right], \tag{53}$$

где $\tilde{I}_k = \mathrm{diag}(\underbrace{0,\ldots,1}_{k}, 0,\ldots,0)$. Разумеется, (53) при $N = 2$ совпадает с (49).

Базис плоских волн записывается как

$$\phi_{\mathcal{K}}^{(1)}(k_i^{(1)},\mathbf{x}) = \mathcal{N}_i^{(1)}\begin{pmatrix}\omega_{i,\epsilon}^{(1)-}J_{\mathcal{P}}(k_i^{(1)}\rho)e^{i\mathcal{P}\varphi}\\ \omega_{i,\epsilon}^{(1)+}J_{\mathcal{P}+1}(k_i^{(1)}\rho)e^{i(\mathcal{P}+1)\varphi}\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\phi_{\mathcal{K}}^{(k)}(k_i^{(k)},\mathbf{x}) = \mathcal{N}_i^{(k)}\begin{pmatrix}\omega_{i,\epsilon}^{(k)+}J_{\mathcal{P}-n_1+n_k}(k_i^{(k)}\rho)e^{i(\mathcal{P}-n_1+n_k)\varphi}\\ \omega_{i,\epsilon}^{(k)-}J_{\mathcal{P}+1-n_1+n_k}(k_i^{(k)}\rho)e^{i(\mathcal{P}+1-n_1+n_k)\varphi}\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

(где $k = 2, \ldots, N-1$ и в матрице-столбце единица стоит на k-м месте),

$$\phi_{\mathcal{K}}^{(N)}(k_i^{(N)}, \mathbf{x}) = \mathcal{N}_i^{(N)} \begin{pmatrix} \omega_{i,\epsilon}^{(N)+} J_{\mathcal{P}-n_1}(k_i^{(N)}\rho) e^{i(\mathcal{P}-n_1)\varphi} \\ \omega_{i,\epsilon}^{(N)-} J_{\mathcal{P}+1-n_1}(k_i^{(N)}\rho) e^{i(\mathcal{K}+1-n_1)\varphi} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

здесь

$$\omega_{i,\epsilon}^{(p)+} = \omega_{i,-\epsilon}^{(p)-} = 1, \qquad \omega_{i,-\epsilon}^{(p)+} = \omega_{i,\epsilon}^{(p)-} = \frac{-\operatorname{sgn}(\epsilon) k_i^{(p)}}{|\epsilon| + m}, \quad \epsilon > 0, \qquad p = 1, \ldots, N, \tag{54}$$

и введено обозначение

$$\mathcal{P} := \mathcal{K} - \frac{1}{2} + \frac{2n_1 - \sum_{k=2}^{N} n_k}{3}. \tag{55}$$

В результате наложения граничных условий

$$J_{\mathcal{P}-n_1+n_k}(k_i^{(k)} D) = 0, \quad k = 1, \ldots, N-1, \qquad J_{\mathcal{P}-n_1}(k_i^{(N)} D) = 0 \tag{56}$$

получается дискретный набор волновых чисел $k^{(k)}$. Условия ортогональности задаются соотношениями

$$\int_0^D d\rho\, \rho J_\nu(k_i^{(p)}\rho) J_\nu(k_j^{(p)}\rho) = \int_0^D d\rho\, \rho J_{\nu\pm1}(k_i^{(p)}\rho) J_{\nu\pm1}(k_j^{(p)}\rho) = \delta_{ij} \frac{D^2}{2} [J_{\nu\pm1}(k_i^{(p)} D)]^2, \tag{57}$$

в которых $\nu = \mathcal{P} - n_1 + n_k$, $\mathcal{P} - n_1$ (здесь $k = 1, \ldots, N-1$). Нормировочные постоянные для базисных векторов равны

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_i^{(k)} &= \left[\frac{2\pi D^2 |\epsilon|}{|\epsilon| + m} \big(J_{\mathcal{P}+1-n_1+n_k}(k_i^{(k)} D)\big)^2 \right]^{-1/2}, \qquad k = 1, \ldots, N-1, \\ \mathcal{N}_i^{(N)} &= \left[\frac{2\pi D^2 |\epsilon|}{|\epsilon| + m} \big(J_{\mathcal{P}+1-n_1}(k_i^{(N)} D)\big)^2 \right]^{-1/2}. \end{aligned} \tag{58}$$

В терминах данного базиса уравнение (21) можно решить численно.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной статье мы изучили спектр фермионов, взаимодействующих с baby-моделью Скирма или $\mathbb{C}P^N$-моделью типа Скирма–Фаддеева. Мы нашли спектральный поток фермионного одночастичного состояния, дающий картину пересечения уровней. Предполагается, что baby-скирмионы являются анионами, поскольку $\Pi_4(\mathbb{C}P^1)$ тривиальна. Однако анионный угол $\Theta = n_c \pi \operatorname{sgn}(m)$ должен быть целым числом, соответствующим числу Q_{top} нормируемых фермионных мод. Решения $\mathbb{C}P^N$-модели представляют собой анионы, потому что член Хопфа пертурбативен. С другой стороны, Q_{top} нормируемых мод локализованы на солитонном решении. Таким образом, в случае таргет-пространства $\mathbb{C}P^N$ имеется несогласованность статистической природы фермионов и солитонов. Возможно, удастся преодолеть это несоответствие; мы посвятим этому наши следующие статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В данном приложении мы используем обозначения из работы [15]. Статистическая сумма задается как интеграл

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\exp\biggl\{\int d^3x\, i\bar{\psi}\mathcal{D}_A\psi\biggr\} = (\det i\mathcal{D}_A)^{n_\mathrm{c}}, \tag{59}$$

где ψ и $\bar{\psi}$ – поля Дирака и $i\mathcal{D}_A = i\gamma_\alpha(\partial_\alpha - iA_\alpha) - mU$, где A_α – $U(1)$-калибровочное поле. Матрицы γ_α задаются как $\gamma_\alpha = -i\sigma_\alpha$. В эффективном действии $\omega = n_\mathrm{c}\ln\det i\mathcal{D}_A$ выделяются действительная и мнимая части

$$\operatorname{Re}\omega = \frac{n_\mathrm{c}}{2}\ln\det\mathcal{D}_A^\dagger\mathcal{D}_A, \qquad \operatorname{Im}\omega = \frac{n_\mathrm{c}}{2i}\ln\det\frac{i\mathcal{D}_A}{-i\mathcal{D}_A^\dagger}. \tag{60}$$

Нетрудно видеть, что при $A_\mu \to 0$ (и $\mathcal{D}_A \to \mathcal{D}$)

$$\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D} = -\partial^2 + m^2 + im\gamma_\alpha\,\partial_\alpha U, \qquad \mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger = -\partial^2 + m^2 - im\gamma_\alpha\,\partial_\alpha U. \tag{61}$$

Проводя подходящее вычитание вакуумного состояния $U = 1$, имеем

$$\operatorname{Re}\omega = \frac{n_\mathrm{c}}{2}\operatorname{Sp}\ln\biggl(1 + \frac{im\gamma_\alpha\,\partial_\alpha U}{-\partial^2 + m^2}\biggr) = \frac{n_\mathrm{c}}{2}\int d^3x\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,e^{-ikx}\operatorname{Tr}\ln\biggl(1 + \frac{im\gamma_\alpha\,\partial_\alpha U}{-\partial^2 + m^2}\biggr)e^{ikx} =$$
$$= \frac{n_\mathrm{c}}{2}\int d^3x\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\operatorname{Tr}\ln\biggl(1 + \frac{im\gamma_\alpha\,\partial_\alpha U}{k^2 + m^2 - 2ik\partial - \partial^2}\biggr).$$

Разложим данное выражение по степеням $2ik\partial + \partial^2$ и $\gamma_\alpha\,\partial_\alpha U$, первый ненулевой член равен

$$\operatorname{Re}\omega^{(2)} = -n_\mathrm{c}\frac{|m|}{16\pi}\int d^3x\,\operatorname{Tr}(\partial_\mu U\,\partial_\mu U). \tag{62}$$

После взятия следа по спинорным индексам и перехода к метрике Минковского получаем действие (15).

Взяв вариацию $\mathcal{D} \to \mathcal{D} + \delta\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^\dagger \to \mathcal{D}^\dagger + \delta\mathcal{D}^\dagger$ при $A_\mu \to 0$, получим вариацию мнимой части действия:

$$\delta\operatorname{Im}\omega = \frac{n_\mathrm{c}}{2i}\operatorname{Tr}\biggl(\frac{1}{\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}}\mathcal{D}^\dagger\,\delta\mathcal{D} - \frac{1}{\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger}\mathcal{D}\,\delta\mathcal{D}^\dagger\biggr). \tag{63}$$

Она содержит тройное произведение производных:

$$\delta\operatorname{Im}\omega^{(3)} = -n_\mathrm{c}\frac{\operatorname{sgn}(m)}{32\pi}\int d^3x\,\epsilon^{\mu\nu\lambda}\operatorname{Tr}(\partial_\mu U\,\partial_\nu U\,\partial_\lambda U U\delta U). \tag{64}$$

В терминах новой переменной $a_\mu := -iZ^\dagger\,\partial_\mu Z$ последняя формула записывается как

$$\operatorname{Im}\delta\omega^{(3)} = n_\mathrm{c}\frac{\operatorname{sgn}(m)}{2\pi}\int d^3x\,\epsilon^{\mu\nu\lambda}\delta a_\mu\,\partial_\nu a_\lambda. \tag{65}$$

Можно показать, что данное выражение совпадает с вариацией действия (9). При $A_\mu \neq 0$ мы, кроме того, имеем компоненту с двумя производными:

$$\operatorname{Im}\delta\omega^{(2)}\big|_{A_\mu\neq 0} = -\frac{n_\mathrm{c}}{16\pi i}\,\delta A_\mu\int d^3x\,\epsilon^{\mu\nu\lambda}\operatorname{Tr}(\partial_\nu U\,\partial_\lambda U U). \tag{66}$$

Эти две компоненты вносят вклад в итоговое выражение (16).

Благодарности. Н. Савадо благодарит организаторов конференции "Модели квантовой теории поля" (MQFT 2018) за гостеприимство.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] L. A. Ferreira, P. Klimas, "Exact vortex solutions in a CP^N Skyrme–Faddeev type model", *JHEP*, **10** (2010), 008, 19 pp., arXiv: 1007.1667.

[2] Y. Amari, P. Klimas, N. Sawado, Y. Tamaki, "Potentials and the vortex solutions in the CP^N Skyrme–Faddeev model", *Phys. Rev. D*, **92**:4 (2015), 045007, 15 pp., arXiv: 1504.02848.

[3] B. M. A. G. Piette, B. J. Schroers, W. J. Zakrzewski, "Multi-solitons in a two-dimensional Skyrme model", *Z. Phys. C*, **65**:1 (1995), 165–174, arXiv: hep-th/9406160.

[4] F. Wilczek, A. Zee, "Linking numbers, spin, and statistics of solitons", *Phys. Rev. Lett.*, **51**:25 (1983), 2250–2252.

[5] A. G. Abanov, "Hopf term induced by fermions", *Phys. Lett. B*, **492**:3–4 (2000), 321–323, arXiv: hep-th/0005150.

[6] A. G. Abanov, P.B. Wiegmann, "On the correspondence between fermionic number and statistics of solitons", *JHEP*, **10** (2001), 030, 12 pp., arXiv: hep-th/0105213.

[7] O. Bar, M. Imboden, U. J. Wiese, "Pions versus magnons: from QCD to antiferromagnets and quantum Hall ferromagnets", *Nucl. Phys. B*, **686**:3 (2004), 347–376, arXiv: cond-mat/0310353.

[8] T. Jaroszewicz, "Induced topological terms, spin and statistics in (2+1)-dimensions", *Phys. Lett. B*, **159**:4–6 (1985), 299–302.

[9] М. Ф. Атья, И. М. Зингер, "Индекс эллиптических операторов. I", *УМН*, **23**:5(143) (1968), 99–142.

[10] S. Kahana, G. Ripka, "Baryon density of quarks coupled to a chiral field", *Nucl. Phys. A*, **429**:3 (1984), 462–476.

[11] A. Acus, E. Norvaisas, Ya. Shnir, "Baby Skyrmions stabilized by canonical quantization", *Phys. Lett. B*, **682**:1 (2009), 155–162, arXiv: 0909.5281.

[12] C.-C. Liu, P. Goswami, Q. Si, "Skyrmion defects of antiferromagnet and competing singlet orders of a Kondo–Heisenberg model on honeycomb lattice", *Phys. Rev. B*, **96**:12 (2017), 125101, 14 pp., arXiv: 1704.07818.

[13] E. Witten, "Global aspects of current algebra", *Nucl. Phys. B*, **223**:2 (1983), 422–432.

[14] R. Jackiw, P. Rossi, "Zero modes of the vortex-fermion system", *Nucl. Phys. B*, **190**:4 (1981), 681–691.

[15] D. I. Diakonov, V. Yu. Petrov, P. V. Pobylitsa, "A chiral theory of nucleons", *Nucl. Phys. B*, **306**:4 (1988), 809–848.

[16] R. Alkofer, H. Reinhardt, *Chiral Quark Dynamics*, Lecture Notes in Physics Monographs, **33**, Springer, Berlin, 1995.

[17] A. D'Adda, A. C. Davis, "Chiral symmetry restoration in the $\mathrm{CP}^{(n-1)}$ in two-dimensions model with fermions", *Phys. Lett. B*, **101**:1–2 (1981), 85–88.

[18] A. D'Adda, M. Luscher, P. Di Vecchia, "A $1/n$ expandable series of nonlinear σ models with instantons", *Nucl. Phys. B*, **146**:1 (1978), 63–76.

[19] A. E. Kudryavtsev, B. M. A. G. Piette, W. J. Zakrzewski, "Skyrmions and domain walls in $(2+1)$-dimensions", *Nonlinearity*, **11**:4 (1998), 783–795, arXiv: hep-th/9709187.

[20] Y. Amari, P. Klimas, N. Sawado, "Collective coordinate quantization, spin statistics of the solitons in the $\mathbb{C}P^N$ Skyrme–Faddeev model", *Phys. Rev. D*, **94**:2 (2016), 025032, 18 pp., arXiv: 1604.06125.

Поступила в редакцию 13.12.2018,
после доработки 19.02.2019,
принята к публикации 11.03.2019