Ш. М. Нагиев, Функция Вигнера для релятивистской частицы в зависящем от времени линейном потенциале, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 1, 76–84

DOI: 10.4213/tmf9014

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 188, № 1
июль, 2016

 Ш. М. Нагиев*

ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ВРЕМЕНИ ЛИНЕЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Построены фазовые представления для релятивистской частицы при наличии как постоянного, так и зависящего от времени линейного потенциала. Получены явные выражения для функций распределения Вигнера данных систем и найдены корректные нерелятивистские пределы и пределы свободной частицы для этих функций. Выведены релятивистское динамическое уравнение, которое управляет временны́м развитием функции распределения Вигнера, и релятивистское уравнение, определяющее функцию распределения Вигнера стационарных состояний. Вычислены амплитуды переходов между энергетическими состояниями.

Ключевые слова: релятивистская частица, линейный потенциал, функция Вигнера, динамическое уравнение.

DOI: 10.4213/tmf9014

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то что в течение последних нескольких десятилетий нестационарным нерелятивистским квантовым системам уделялось много внимания, только в нескольких случаях временны́е уравнения Шредингера можно решить точно. Гармонический осциллятор, зависящий от времени, представляет собой хороший пример точно решаемой модели и применений во многих областях физики (см., например, статью [1]).

Другая точно решаемая модель – зависящий от времени линейный потенциал в нерелятивистской квантовой механике [2]–[9]. Она привлекла к себе внимание, поскольку является хорошим и простым примером точно решаемой модели и применима во многих областях физики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при президенте Республики Азербайджан (грант EIF-2012-2(6)-39/08/1).

*Институт физики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан.
E-mail: smnagiyev@physics.ab.az

Недавно мы построили точно решаемую релятивистскую модель зависящего от времени линейного потенциала [10], которая была сформулирована в рамках конечно-разностной версии релятивистской квантовой механики (см., например, работу [11]). Конечно-разностная релятивистская квантовая механика имеет много общих черт с нерелятивистской квантовой механикой, но ее существенная особенность заключается в том, что волновая функция относительного движения удовлетворяет конечно-разностному уравнению с шагом, равным комптоновской длине волны $\lambdabar = \hbar/mc$ частицы. Например, в одномерном случае уравнение для волновой функции в релятивистском конфигурационном x-пространстве имеет вид

$$[H_0 + V(x)]\psi(x) = E\psi(x),$$

где конечно-разностный оператор $H_0 = mc^2 \operatorname{ch}(i\lambdabar\partial_x)$ является релятивистским свободным гамильтонианом.

Переход в одномерное релятивистское конфигурационное x-пространство

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(p,x)\phi(p)\, d\Omega_p$$

осуществляется с помощью разложения по матричным элементам унитарного представления одномерной группы Лоренца

$$\xi(p,x) = \left(\frac{p_0 - p}{mc}\right)^{-ix/\lambdabar}. \tag{1.1}$$

Пространством импульсов p в нашем случае является одномерное пространство Лобачевского, реализованное на массовой гиперболе $p_0^2 - p^2 = m^2c^2$, $p_0 > 0$. В гиперболических координатах $p_0 = mc \operatorname{ch}\chi$, $p = mc \operatorname{sh}\chi$, $d\Omega_p = mc\, dp/p_0 = mc\, d\chi$, и мы имеем равенство $\xi(p,x) = e^{ix\chi/\lambdabar}$, в котором $\chi = \ln[(p_0+p)/mc]$ – быстрота. Функции (1.1) подчиняются условиям полноты и ортогональности:

$$\frac{1}{2\pi\lambdabar} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(p,x)\xi^*(p,x')\, d\Omega_p = \delta(x - x'),$$

$$\frac{1}{2\pi\lambdabar} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(p,x)\xi^*(p',x)\, dx = \delta(p(-)p') = \frac{1}{mc}\delta(\chi - \chi').$$

Целью настоящей статьи является вычисление функции распределения Вигнера [12] и амплитуды переходов между энергетическими состояниями для релятивистской частицы, движущейся в зависящем от времени линейном потенциале [10]. Функция распределения Вигнера W зависит от импульса p, координаты частицы x и в общем случае от времени t: $W = W(p,x,t)$, и играет центральную роль при построении фазовой картины квантовой механики. Представление квантовой механики в фазовом пространстве является альтернативой обычному описанию с помощью координатных или импульсных волновых функций. Впервые введенная в 1932 г., функция Вигнера с тех пор широко применялась для описания различных физических систем (см., например, работы [13]–[16]). Как известно, она выражается через нерелятивистскую волновую функцию Шредингера $\psi_{\mathrm{N}}(x,t)$:

$$W_{\mathrm{N}}(p,x,t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\mathrm{N}}^*\left(x + \frac{x'}{2}, t\right)\psi_{\mathrm{N}}\left(x - \frac{x'}{2}, t\right) e^{ipx'/\hbar}\, dx'.$$

Данная статья построена следующим образом. В разделах 2 и 4 мы проводим краткий обзор результатов статей [17] и [10] соответственно. В разделах 3 и 5 представлены явные выражения для функций распределения Вигнера для релятивистской квантовой частицы при наличии как постоянного, так и нестационарного линейных потенциалов соответственно. Раздел 6 посвящен выводу релятивистских уравнений для зависящей от времени функции Вигнера и для функции Вигнера стационарных состояний. Амплитуды переходов между энергетическими уровнями найдены в разделе 7. В приложении к настоящей статье приведены выводы некоторых формул, используемых в тексте.

2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА ПРИ НАЛИЧИИ ПОСТОЯННОГО ЛИНЕЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Движение релятивистской частицы при наличии постоянного линейного потенциала описывается в конфигурационном x-пространстве посредством конечно-разностного уравнения [17]:

$$(H_0 - F_0 x)\psi^{(0)}(x) = E\psi^{(0)}(x), \tag{2.1}$$

где F_0 является постоянной силой, действующей на частицу. В нерелятивистском пределе уравнение (2.1) переходит в соответствующее уравнение Шредингера. Решения уравнения (2.1), отвечающие энергии E, выражаются через функции Макдональда

$$\psi_E^{(0)}(x) = c_0 e^{\pi x_1/2\lambdabar} K_{ix_1/\lambdabar}(z_0), \tag{2.2}$$

где $c_0 = (\pi\lambdabar\sqrt{F_0})^{-1}$, $x_1 = x + E/F_0$, $z_0 = mc^2/\lambdabar F_0$. Функции (2.2) подчиняются условиям полноты и ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_E^{(0)*}(x)\psi_E^{(0)}(x')\,dE = \delta(x-x'),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_E^{(0)*}(x)\psi_{E'}^{(0)}(x)\,dx = \delta(E-E').$$

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВИГНЕРА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В МОДЕЛИ ПОСТОЯННОГО ЛИНЕЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Для наших расчетов мы используем следующее определение функции Вигнера для релятивистских систем [18], [19]:

$$W(p,x,t) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\left(x + \frac{1}{2}x'; t\right)\psi\left(x - \frac{1}{2}x'; t\right)e^{i\chi x'/\lambdabar}\,dx'. \tag{3.1}$$

После подстановки выражения (2.2) в (3.1) можно провести интегрирование с помощью формулы [20]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} K_{\nu+ix}(b) K_{\nu-ix}(c)\,dx = \pi\left(\frac{b+ce^p}{be^p+c}\right) K_{2\nu}(\sqrt{b^2+c^2+2bc\,\mathrm{ch}\,p}),$$
$$|\arg b\,| + |\arg c\,| + |\operatorname{Im} p\,| < \pi,$$

и мы получаем функцию Вигнера для релятивистской частицы при наличии постоянного линейного потенциала (2.1):

$$W_E^{(0)}(p,x) = \frac{mc}{\pi^2\hbar^2 F_0} e^{\pi x_1/\lambda\!\!\bar{}} K_{2ix_1/\lambda\!\!\bar{}}(2z_0 \operatorname{ch}\chi). \tag{3.2}$$

Как обычно, функция Вигнера (3.2) является вещественной, но не строго положительной. Однако она обладает следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_E^{(0)}(p,x)\, d\Omega_p = |\psi_E^{(0)}(x)|^2, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} W_E^{(0)}(p,x)\, dx = |\phi_E^{(0)}(p)|^2, \tag{3.3}$$

где $\phi_E^{(0)}(p)$ – волновая функция в импульсном представлении. Чтобы вывести соотношение (3.3), мы использовали интегральные формулы [20]

$$\int_0^{\infty} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2}\right) K_{ix}(c)\, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} K_{2\nu}(2a \operatorname{ch} x)\, dx = |K_\nu(a)|^2.$$

В пределе свободной частицы при $F_0 \to 0$ функция (3.2) благодаря формуле (П.3) преобразуется в функцию

$$\widetilde{W}_E^{(0)}(p,x) = \frac{1}{2\pi\hbar}\delta(mc^2 \operatorname{ch}\chi - E). \tag{3.4}$$

Используя уравнения (П.2) и (П.4), можно показать, что при $c \to \infty$ релятивистская функция Вигнера (3.2) определяется следующим выражением (см. статью [15]):

$$\lim_{c\to\infty} W_E^{(0)}(p,x) = \frac{\sigma_{\mathrm{B}}}{2\pi\hbar} \operatorname{Ai}\left[\sigma_{\mathrm{B}}\left(\frac{p^2}{2m} - F_0 x - E_{\mathrm{N}}\right)\right]. \tag{3.5}$$

Нерелятивистский предел формулы (3.4) записывается как

$$\lim_{c\to\infty} \widetilde{W}_E^{(0)}(p,x) = \frac{1}{2\pi\hbar}\delta\left(\frac{p^2}{2m} - E_{\mathrm{N}}\right).$$

4. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ЧАСТИЦА ПРИ НАЛИЧИИ ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ВРЕМЕНИ ЛИНЕЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Движение релятивистской квантовой частицы при наличии зависящего от времени линейного потенциала описывается уравнением [10]

$$i\hbar\,\partial_t\psi(x,t) = [H_0 - F(t)x]\psi(x,t). \tag{4.1}$$

Запишем формальное решение уравнения (4.1) с помощью оператора временно́й эволюции рассматриваемой системы: $\psi(x,t) = U(x,t)\psi_0(x)$, где $\psi_0(x) = \psi(x,0)$ – начальная волновая функция. Используя явное выражение для оператора $U(x,t)$, приведенное в статье [10], мы можем написать следующее представление для зависящей от времени волновой функции:

$$\psi(x,t) = e^{ix\delta_{\mathrm{R}}(t)/\lambda\!\!\bar{}} \exp(-i[\sigma(t)\operatorname{ch}(i\lambda\!\!\bar{}\,\partial_x) - \gamma_0(t)\operatorname{sh}(i\lambda\!\!\bar{}\,\partial_x)])\psi_0(x). \tag{4.2}$$

Здесь

$$\delta_{\rm R}(t)=\frac{1}{mc}\int_0^t F(t')\,dt',\quad \sigma(t)=\frac{mc^2}{\hbar}\int_0^t \operatorname{ch}\delta_{\rm R}(t')\,dt',\quad \gamma_0(t)=\frac{mc^2}{\hbar}\int_0^t \operatorname{sh}\delta_{\rm R}(t')\,dt'.$$

Таким образом, выбирая различные начальные волновые функции $\psi_0(x)$, мы получаем из формулы (4.2) различные зависящие от времени волновые функции $\psi(x,t)$, и, следовательно, используя выражение (3.1), находим различные зависящие от времени функции Вигнера для рассматриваемых релятивистских систем. Здесь и далее в качестве начальной волновой функции мы выбираем волновую функцию (2.2) стационарной задачи. В этом случае волновая функция $\psi(x,t)$, описывающая движение релятивистской квантовой частицы при наличии зависящего от времени линейного потенциала, записывается как

$$\psi_E(x,t)=c_0e^{ix\delta_{\rm R}(t)/\lambda\!\!\!^-}e^{x_1[\pi/2-iq(t)]/\lambda\!\!\!^-}K_{ix_1/\lambda\!\!\!^-}\big(\sqrt{\gamma^2(t)-\sigma^2(t)}\big),\qquad |\gamma(t)|>|\sigma(t)|,\quad (4.3)$$

где $\gamma(t)=\gamma_0(t)+z_0$ и $\operatorname{th}q(t)=\sigma(t)/\gamma(t)$. Система функций (4.3) является полной и ортогональной. Если положить $t=0$ (или $F(t)=F_0=\mathrm{const}$), то мы видим, что функция (4.3) совпадает с (2.2). Сравнивая эти выражения, мы заключаем, что, как и в нерелятивистском случае [2], в релятивистском случае плотность вероятности $|\psi_E(x,t)|^2$ с течением времени сохраняет свой вид.

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВИГНЕРА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ВРЕМЕНИ ЛИНЕЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Как и в разделе 3, интегрирование после подстановки выражения (4.3) в (3.1) дает следующее выражение для одной из функций Вигнера релятивистской квантовой частицы при наличии зависящего от времени линейного потенциала, соответствующее начальной волновой функции (2.2):

$$W_E(p,x,t)=\frac{mc}{\pi^2\hbar^2F_0}e^{\pi x_1/\lambda\!\!\!^-}K_{2ix_1/\lambda\!\!\!^-}(\omega(t)),\tag{5.1}$$

где

$$\omega(t)=2[\sigma(t)\operatorname{sh}(\chi-\delta_{\rm R}(t))+\gamma(t)\operatorname{ch}(\chi-\delta_{\rm R}(t))].$$

Функция Вигнера (5.1) удовлетворяет свойствам, аналогичным (3.3). Очевидно, что при $t=0$ (или $F(t)=F_0=\mathrm{const}$) функция (5.1) совпадает с (3.2). В пределе $F_0\to 0$ функция (5.1) благодаря формуле (П.3) преобразуется в функцию

$$\widetilde{W}_E(p,x,t)=\frac{1}{2\pi\hbar}\delta(mc^2\operatorname{ch}[\chi-\delta_{\rm R}(t)]-E).\tag{5.2}$$

В нерелятивистском пределе из (5.1) мы получаем функцию Вигнера для нерелятивистской частицы, движущейся при наличии зависящего от времени линейного потенциала (ср. со статьей [4]):

$$\lim_{c\to\infty}W_E(p,x,t)=\frac{\sigma_{\rm B}}{2\pi\hbar}\operatorname{Ai}\biggl(\sigma_{\rm B}\biggl[\frac{(p-\delta(t))^2}{2m}+\frac{(p-\delta(t))F_0t}{m}+\frac{F_0\delta_1(t)}{m}-F_0x-E_{\rm N}\biggr]\biggr).\tag{5.3}$$

Для вывода предельного соотношения (5.3) мы должны учесть формулы (П.2), (П.4). В том же пределе для функции (5.2) имеем соотношение

$$\lim_{c\to\infty} \widetilde{W}_E(p,x,t) = \frac{1}{2\pi\hbar}\delta\left(\frac{[p-\delta(t)]^2}{2m} - E_{\mathrm{N}}\right).$$

6. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ ФУНКЦИИ ВИГНЕРА

Теперь построим релятивистское уравнение эволюции для зависящей от времени функции Вигнера $W(p,x,t)$ (3.1). Так как динамика релятивистской квантовой системы в этом случае определяется конечно-разностным уравнением вида

$$i\hbar\,\partial_t\psi(x,t) = [H_0 + V(x,t)e^{i\alpha\lambda\!\!\!{}^{-}\partial_x}]\psi(x,t),$$

функция Вигнера также удовлетворяет конечно-разностному уравнению эволюции:

$$i\hbar\,\frac{\partial W}{\partial t} = \left\{-2mc^2\,\mathrm{sh}\,\chi\,\mathrm{sh}\left(\frac{i\lambda\!\!\!{}^{-}}{2}\partial_x\right) + [V(\widehat{X}^*,t)e^{i\alpha\lambda\!\!\!{}^{-}\partial_x/2} - V^*(\widehat{X},t)e^{-i\alpha\lambda\!\!\!{}^{-}\partial_x/2}]e^{-\alpha\chi}\right\}W, \tag{6.1}$$

где $\widehat{X} = x - i\lambda\!\!\!{}^{-}\partial_\chi/2$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Функцию Вигнера стационарных состояний $W_E(p,x)$ можно определить из выражения

$$\left\{2mc^2\,\mathrm{ch}\,\chi\,\mathrm{ch}\left(\frac{i\lambda\!\!\!{}^{-}}{2}\partial_x\right) + [V(\widehat{X}^*)e^{i\alpha\lambda\!\!\!{}^{-}\partial_x/2} + V^*(\widehat{X})e^{-i\alpha\lambda\!\!\!{}^{-}\partial_x/2}]e^{-\alpha\chi}\right\}W_E = 2EW_E, \tag{6.2}$$

где параметр E обозначает энергию системы (ср. с работами [21], [22]).

Если $c\to\infty$, то уравнения (6.1) и (6.2) переходят в следующие нерелятивистские уравнения:

$$i\hbar\frac{\partial W_{\mathrm{N}}}{\partial t} = \left[-i\hbar\frac{p}{m}\partial_x + V\left(x + \frac{i\hbar}{2}\partial_p, t\right) - V\left(x - \frac{i\hbar}{2}\partial_p, t\right)\right]W_{\mathrm{N}}(p,x,t),$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{4m}\partial_x^2 + \frac{p^2}{m} + V\left(x + \frac{i\hbar}{2}\partial_p\right) - V\left(x - \frac{i\hbar}{2}\partial_p\right)\right]W_{\mathrm{N}E} = 2E_{\mathrm{N}}W_{\mathrm{N}E}(p,x).$$

Следует заметить, что, как и в нерелятивистском случае [21], релятивистская функция Вигнера стационарных состояний, которая является решением (6.2), должна одновременно удовлетворять (6.1). Другими словами, решая совместно уравнения (6.1) и (6.2), мы можем найти собственные функции и собственные значения уравнения (6.2).

В случае зависящего от времени линейного потенциала $V(x,t) = -F(t)x$ уравнение эволюции (6.1) принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{2mc^2}{i\hbar}\,\mathrm{sh}\,\chi\,\mathrm{sh}\left(\frac{i\lambda\!\!\!{}^{-}}{2}\partial_x\right)W - \frac{1}{mc}F(t)\,\partial_\chi W. \tag{6.3}$$

Легко проверить, что функция Вигнера (5.1) ему удовлетворяет. В случае не зависящего от времени линейного потенциала $V(x,t) = -F_0x$ соотношение (6.2) упрощается:

$$\left[mc^2\,\mathrm{ch}\,\chi\,\mathrm{ch}\left(\frac{i\lambda\!\!\!{}^{-}}{2}\partial_x\right) - F_0x\right]W_E = EW_E. \tag{6.4}$$

Функция Вигнера стационарных состояний (3.2) является решением уравнений (6.3) и (6.4), которые в нерелятивистском пределе преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial W_{\mathrm{N}}}{\partial t} = -\frac{p}{m}\frac{\partial W_{\mathrm{N}}}{\partial x} - F(t)\frac{\partial W_{\mathrm{N}}}{\partial p}, \tag{6.5}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{8m}\partial_x^2 + \frac{p^2}{2m} - F_0 x\right]W_{\mathrm{N}E} = E_{\mathrm{N}} W_{\mathrm{N}E}. \tag{6.6}$$

Функция (5.3) является решением уравнения (6.5), а функция (3.5) – решением обоих уравнений (6.5) и (6.6).

7. АМПЛИТУДЫ ПЕРЕХОДОВ

То, что мы знаем оператор эволюции, дает нам возможность вычислить амплитуды переходов между энергетическими состояниями $|E_{\mathrm{i}}\rangle$ и $|E_{\mathrm{f}}\rangle$, соответствующими постоянным значениям сил F_{i} для $t \leqslant 0$ и F_{f} при $t \to \infty$:

$$K(E_{\mathrm{f}}, E_{\mathrm{i}}; t) = \langle E_{\mathrm{f}}, t|\widehat{U}(t)|E_{\mathrm{i}}, t = 0\rangle = \frac{1}{2\pi\lambda\!\!\!^{-}\sqrt{F_{\mathrm{i}}F_{\mathrm{f}}}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(E_{\mathrm{f}}t - \frac{E_{\mathrm{i}}}{F_{\mathrm{f}}}\delta(t)\right)\right]J, \tag{7.1}$$

где

$$J = \begin{cases} i\pi e^{\nu[\pi/2 - q_1(t)]} H_{i\nu}^{(m)}\left(\sqrt{\mu^2(t) - \lambda^2(t)}\right) & \text{при } |\mu| > |\lambda|, \\ 2e^{\nu[\pi/2 - q_2(t)]} K_{i\nu}\left(\sqrt{\lambda^2(t) - \mu^2(t)}\right) & \text{при } |\lambda| > |\mu|, \end{cases}$$

$\operatorname{th} q_1 = \lambda/\mu$, $\operatorname{th} q_2 = \mu/\lambda$, $m = (3 - \operatorname{sgn}\mu)/2$ и $H_\nu^{(1,2)}(z)$ – функции Ханкеля. Здесь мы применили обозначения

$$\nu = \frac{1}{\lambda\!\!\!^{-}}\left(\frac{E_{\mathrm{i}}}{F_{\mathrm{i}}} - \frac{E_{\mathrm{f}}}{F_{\mathrm{f}}}\right),$$

$$\mu = \frac{mc^2}{\lambda\!\!\!^{-} F_{\mathrm{i}}}\operatorname{sh}(\delta_{\mathrm{R}}(t)) - \frac{mc^2}{\hbar}\int_0^t \operatorname{ch}(\delta_{\mathrm{R}}(t) - \delta_{\mathrm{R}}(t'))\,dt',$$

$$\lambda = \frac{mc^2}{\lambda\!\!\!^{-} F_{\mathrm{f}}} - \frac{mc^2}{\lambda\!\!\!^{-} F_{\mathrm{i}}}\operatorname{ch}(\delta_{\mathrm{R}}(t)) + \frac{mc^2}{\hbar}\int_0^t \operatorname{sh}(\delta_{\mathrm{R}}(t) - \delta_{\mathrm{R}}(t'))\,dt'.$$

Если $F_{\mathrm{i}} = F_{\mathrm{f}} = 0$, но $F(t) \neq 0$, то амплитуда перехода из состояния

$$\delta(p(-)p_{\mathrm{i}}) = \delta(mc(\chi - \chi_{\mathrm{i}}))$$

в состояние

$$\delta(p(-)p_{\mathrm{f}})\exp\left(\frac{-iE_{\mathrm{f}}}{\hbar}t\right) = \exp\left[-\frac{imc^2}{\hbar}t\operatorname{ch}\chi_{\mathrm{f}}\right]\delta(mc(\chi - \chi_{\mathrm{f}}))$$

равна

$$K(p_{\mathrm{f}}, p_{\mathrm{i}}; t) = \exp\left[i\left(\frac{mc^2}{\hbar}t\operatorname{ch}\chi_{\mathrm{f}} - \sigma\operatorname{ch}\chi_{\mathrm{i}} - \gamma_0\operatorname{sh}\chi_{\mathrm{i}}\right)\right]\delta(mc(\chi_{\mathrm{f}} - \chi_{\mathrm{i}}) - \delta(t)). \tag{7.2}$$

Уравнения (7.1) и (7.2) при $c \to \infty$ совпадают с соответствующими формулами статьи [4].

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено представление Вигнера для релятивистской частицы, движущейся при наличии как постоянного, так и зависящего от времени линейного потенциала. Хотя системы управляются конечно-разностным уравнением, волновые функции и их функции Вигнера являются непрерывными. Показано, что выражения для функций Вигнера имеют корректный нерелятивистский предел. В результате получены две предельные формулы для функции Макдональда и явный вид функции Вигнера для нерелятивистской квантовой частицы при наличии зависящего от времени линейного потенциала. Также выведены релятивистские уравнения эволюции для зависящей от времени функции Вигнера и для функции Вигнера стационарных состояний. Найдены явные формулы для амплитуд переходов, связывающих энергетические состояния.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. С помощью интегральных представлений для функций Макдональда и Эйри

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z\,\mathrm{sh}\,y-py)}\,dy = 2e^{\pi p/2}K_{ip}(z), \qquad \mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(ux+u^3/3)}\,du \tag{П.1}$$

можно показать, что для этих функций имеет место следующее предельное соотношение:

$$\lim_{a\to\infty} ae^{\pi(a^3+ac)}K_{2i(a^3+ac)}(2(a^3+ab)) = \pi\,\mathrm{Ai}(2(b-c)). \tag{П.2}$$

Действительно, в интеграле (П.1), определяющем функцию Макдональда, существенна только та область значений параметра интегрирования y, в которой экспонента имеет порядок единицы. Если в (П.1) $z = 2(a^3+ab)$ и $p = 2(a^3+ac)$, то при $a\to\infty$ является существенной только область малых y, для которых справедливо выражение $\varphi = z\,\mathrm{sh}\,y - py \simeq 2(b-c)u + u^3/3$ для фазы, совпадающее с выражением для фазы в представлении (П.1) для функции Эйри при $u = ay$.

2. Подобно тому, как получено (П.2), мы можем доказать другое предельное соотношение:

$$\lim_{a\to\infty} ae^{\pi ac/2}K_{iac}(ab) = \pi\delta(b-c), \tag{П.3}$$

где $\delta(b-c)$ является δ-функцией Дирака.

3. В нерелятивистском пределе при $c\to\infty$ мы имеем следующие выражения:

$$\begin{gathered}
\frac{2x_1}{\lambda} \simeq 2a^3 + a\sigma_{\mathrm{B}}(F_0x+E_{\mathrm{N}}), \qquad 2z_0\,\mathrm{ch}\,\chi \simeq 2a^3 + \frac{a\sigma_{\mathrm{B}}p^2}{2m},\\
\sigma(t) \simeq \frac{mc^2}{\hbar}t + \frac{\delta_2(t)}{2m\hbar}, \qquad \gamma_0(t) \simeq \frac{c\delta_1(t)}{\hbar}, \qquad \mathrm{sh}(\chi-\delta_{\mathrm{R}}(t)) \simeq \frac{p-\delta(t)}{mc},\\
\mathrm{ch}(\chi-\delta_{\mathrm{R}}(t)) \simeq 1 + \frac{[p-\delta(t)]^2}{2m^2c^2},\\
\omega(t) \simeq 2a^3 + a\sigma_{\mathrm{B}}\left\{\frac{[p-\delta(t)]^2}{2m} + \frac{F_0t[p-\delta(t)]}{m} + \frac{F_0\delta_1(t)}{m}\right\},\\
\lambda(t) \simeq c^3\varepsilon + \beta_0(t), \qquad \nu \simeq c^3\varepsilon + c\beta_1, \qquad \mu(t) \simeq c^2\beta_2(t),\\
\sqrt{\lambda^2-\mu^2} \simeq c^3\varepsilon - \frac{c\beta_2^2(t)}{2\varepsilon},
\end{gathered} \tag{П.4}$$

где

$$a = c\left(\frac{m^2}{\hbar F_0}\right)^{1/3}, \qquad \sigma_{\mathrm{B}} = 2\left(\frac{m}{\hbar^2 F_0^2}\right)^{1/3}, \qquad \delta(t) = \int_0^t F(t')\,dt',$$

$$\delta_1(t) = \int_0^t \delta(t')\,dt', \qquad \delta_2(t) = \int_0^t \delta^2(t')\,dt', \qquad E_{\mathrm{N}} = \lim_{c\to\infty}(E - mc^2),$$

$$\beta_0(t) = \frac{\delta^2(t)/2F_{\mathrm{f}} - \delta_1(t)}{\hbar}, \qquad \beta_1 = \frac{[E_{\mathrm{Ni}}/F_{\mathrm{i}} - E_{\mathrm{Nf}}/F_{\mathrm{f}}]m}{\hbar},$$

$$\beta_2(t) = \frac{[\delta(t)/F_{\mathrm{f}} - t]m}{\hbar}, \qquad \varepsilon = \frac{[1/F_{\mathrm{f}} - 1/F_{\mathrm{i}}]m^2}{\hbar}.$$

Список литературы

[1] I. A. Pedrosa, *Phys. Rev. A*, **55**:4 (1997), 3219–3221.

[2] M. V. Berry, N. L. Balazs, *Am. J. Phys.*, **47**:3 (1979), 264–267.

[3] M. A. Gregório, A. S. de Castro, *Am. J. Phys.*, **52**:6 (1984), 557–559.

[4] V. V. Dodonov, V. I. Manko, O. V. Shakhmistova, *Phys. Lett. A*, **102**:7 (1984), 295–297.

[5] I. Guedes, *Phys. Rev. A*, **63**:3 (2001), 034102, 3 pp.

[6] M. Feng, *Phys. Rev. A*, **64**:3 (2002), 034101, 3 pp.

[7] P.-G. Luan, C.-S. Tang, *Phys. Rev. A*, **71**:1 (2005), 014101, 4 pp., arXiv: quant-ph/0309174.

[8] J.-Q. Shen, *Solutions of the Schrödinger equation for the time-dependent linear potential*, arXiv: quant-ph/0310179.

[9] G. Dattoli, K. Zhukovsky, "Linear potential, Airy wave pakets and Airy transform", unpublished.

[10] Sh. M. Nagiyev, K. Sh. Jafarova, *Phys. Lett. A*, **377**:10–11 (2013), 747–752.

[11] E. D. Kagramanov, R. M. Mir-Kasimov, Sh. M. Nagiyev, *J. Math. Phys.*, **31**:7 (1990), 1733–1738.

[12] E. P. Wigner, *Phys. Rev.*, **40**:5 (1932), 749–759.

[13] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, E. P. Wigner, *Phys. Rep.*, **106**:3 (1984), 121–167.

[14] H. W. Lee, *Phys. Rep.*, **259**:3 (1995), 147–211.

[15] N. L. Balazs, B. K. Jennings, *Phys. Rep.*, **104**:6 (1984), 347–391.

[16] В. Н. Татарский, *УФН*, **139**:4 (1983), 587–619.

[17] Sh. M. Nagiyev, S. I. Guliyeva, *Phys. Lett. A*, **373**:32 (2009), 2810–2813.

[18] Н. М. Атакишиев, Ш. М. Нагиев, К. Б. Вольф, *ТМФ*, **114**:3 (1998), 410–425.

[19] Sh. M. Nagiyev, G. H. Guliyeva, E. I. Jafarov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:45 (2009), 454015, 10 pp., arXiv: 0907.4427.

[20] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, т. 1: *Элементарные функции*, 1981; т. 2: *Специальные функции*, Наука, М., 1983.

[21] Ю. Л. Климонтович, *Докл. АН СССР*, **108** (1956), 1033–1036.

[22] Е. П. Богданов, В. И. Горшенков, В. Л. Коньков, *Изв. вузов СССР. Физика*, 1970, № 7, 94–101.

Поступила в редакцию 23.07.2015