Дж. Харнад, Й. В. ван де Лёр, А. Ю. Орлов, Кратные суммы и интегралы как тау-функции нейтральной иерархии Кадомцева–Петвиашвили, *ТМФ*, 2011, том 168, номер 1, 112–124

DOI: 10.4213/tmf6667

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 168, № 1
июль, 2011

 Дж. Харнад[*][†], Й. В. ван де Лёр[‡], А. Ю. Орлов[§]

КРАТНЫЕ СУММЫ И ИНТЕГРАЛЫ КАК ТАУ-ФУНКЦИИ НЕЙТРАЛЬНОЙ ИЕРАРХИИ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ

Кратные суммы и кратные интегралы рассмотрены как тау-функции так называемой нейтральной иерархии Кадомцева–Петвиашвили на решетке корней типа B; для их вывода в качестве простейшего средства использованы нейтральные фермионы. Суммы берутся по проективным функциям Шура Q_α для строгих разбиений α. Рассмотрено два типа таких сумм: взвешенные суммы Q_α по строгим разбиениям α и суммы по произведениям $Q_\alpha Q_\gamma$. Таким способом получаются дискретные аналоги бета-ансамблей ($\beta = 1, 2, 4$). Непрерывные аналоги представлены в виде кратных интегралов, которые интересны с точки зрения их применения в ряде задач математики и физики.

Ключевые слова: интегрируемые системы, симметрические функции, проективные функции Шура, случайные разбиения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются кратные суммы и кратные интегралы, представляющие интерес с точки зрения некоторых задач математики и физики. Кратные суммы появляются в моделях случайных разбиений (как было показано в обзорной работе [1]) и случайных движений частиц [2] (см. также работу [3]). Кратные интегралы дают некоторые аналоги бета-ансамблей случайных матриц, $\beta = 1, 2, 4$, а также аналог двухматричных моделей [4]. Мы рассматриваем деформации меры, определяемые в терминах четырех полубесконечных наборов параметров, и связываем производящую функцию Z со сдвоенной и двухкомпонентной иерархией Кадомцева–Петвиашвили на решетке корней типа B (иерархией 2B-КП). Основной прием заключается в использовании одно- и двухкомпонентных нейтральных фермионов, которые обеспечивают связь с интегрируемыми системами, известными

[*]Centre de recherches mathématiques, Université de Montréal, Montréal, Canada. E-mail: harnad@crm.umontreal.ca

[†]Department of Mathematics and Statistics, Concordia University, Montréal, Canada

[‡]Mathematical Institute, University of Utrecht, Utrecht, The Netherlands. E-mail: J.W.vandeLeur@uu.nl

[§]Институт океанологии, Москва, Россия. E-mail: orlovs55@mail.ru

как нейтральные иерархии B-КП [5], [6]. Одна из версий таких иерархий была впервые введена в работах [5], [6], в настоящей работе мы используем другую версию, введенную в работе [7].

2. СУММЫ ПО ПРОЕКТИВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ШУРА

Мы рассматриваем суммы по строгим разбиениям, разбиения будем обозначать греческими буквами α, β. Напомним [8], что строгое разбиение α представляет собой набор целых чисел (частей) $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ при $\alpha_1>\dots>\alpha_k\geqslant 0$. Длина разбиения α, обозначаемая через $\ell(\alpha)$, равна числу ненулевых частей, таким образом, в данном случае $\ell(\alpha)=k$ или $\ell(\alpha)=k-1$. Пусть DP – множество строгих разбиений (т. е. разбиений с различными частями). Нам также потребуется подмножество множества DP, которое мы обозначим как DP^2, состоящее из всех разбиений вида $(\alpha_1,\alpha_1-1,\alpha_3,\alpha_3-1,\dots,\alpha_{k-1},\alpha_{k-1}-1)$. Рассмотрим следующие суммы (при $L\in\mathbb{N}^+$, $t:=(t_1,t_3,\dots)$, $\mathbf{t}^*:=(t_1^*,t_3^*,\dots)$, $\bar{\mathbf{t}}:=(\bar t_1,\bar t_3,\dots)$):

$$S_0(\mathbf{t},L):=\sum_{\substack{\alpha\in DP,\\ \alpha_1\leqslant L}} Q_\alpha\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right), \tag{1}$$

$$S_1(\mathbf{t},\mathbf{t}^*):=\sum_{\alpha\in DP} e^{-U_\alpha(\mathbf{t}^*)}Q_\alpha\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right), \tag{2}$$

$$S_2(\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}},\mathbf{t}^*):=\sum_{\alpha\in DP} e^{-U_\alpha(\mathbf{t}^*)}Q_\alpha\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right)Q_\alpha\left(\frac{\bar{\mathbf{t}}}{2}\right), \tag{3}$$

$$S_{00}(\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}},L):=\sum_{\substack{\alpha\in DP,\\ \alpha_1\leqslant L}} Q_\alpha\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right)Q_\alpha\left(\frac{\bar{\mathbf{t}}}{2}\right), \tag{4}$$

$$S_3(\mathbf{t},A^{\mathrm{c}}):=\sum_{\alpha\in DP} A^{\mathrm{c}}_\alpha Q_\alpha\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right), \tag{5}$$

$$S_4(\mathbf{t},\mathbf{t}^*):=\sum_{\alpha\in DP^2} e^{-U_\alpha(\mathbf{t}^*)}Q_\alpha\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right), \tag{6}$$

$$S_5(\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}},D):=\sum_{\substack{\alpha,\beta\in DP,\\ \ell(\alpha)=\ell(\beta)}} Q_\alpha\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right)D_{\alpha,\beta}Q_\beta\left(\frac{\bar{\mathbf{t}}}{2}\right). \tag{7}$$

Здесь *проективные функции Шура* Q_α являются взвешенными многочленами по переменным $\mathbf{t}=(t_1,t_3,t_5,\dots)$, $\deg t_m=m$, занумерованными строгими разбиениями (их подробное определение см. в работе [8]). Известно, что каждая функция $Q_\alpha(\mathbf{t}/2)$ представляет собой тау-функцию иерархии B-КП [5], [6]. Это изящное наблюдение было сделано в работах [9], [10]. Тот факт, что в высших временах t_{2m-1} иерархии B-КП появляются только нечетные нижние индексы, связан с тем, что она получается редукцией из иерархии КП. Коэффициенты U_α определяются как

$$U_\alpha:=\sum_{i=1}^{k}U_{\alpha_i},\qquad U_n:=U_n^{(0)}-\sum_{\substack{m\neq 0,\\ n\ \text{нечетное}}} n^m t_m^*-\ln n!,\quad n\in\mathbb{N}^+, \tag{8}$$

для некоторого набора постоянных $\{U_n^{(0)}\}$.

Коэффициенты A^{c}_α в правой части (5) определены в терминах пар (A,a), где A – бесконечная кососимметричная матрица, a – бесконечный вектор. Для строгого разбиения $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$, где $\alpha_k>0$, число A^{c}_α определяется как пфаффиан антисимметричной $(2n\times 2n)$-матрицы $\tilde A$,

$$A^{\mathrm{c}}_\alpha := \mathrm{Pf}[\tilde A], \tag{9}$$

где для четных $k=2n$

$$\tilde A_{ij} = -\tilde A_{ji} := A_{\alpha_i,\alpha_j}, \qquad 1\leqslant i<j\leqslant 2n,$$

а для нечетных $k=2n-1$

$$\tilde A_{ij} = -\tilde A_{ji} := \begin{cases} A_{\alpha_i,\alpha_j}, & \text{если } 1\leqslant i<j\leqslant 2n-1,\\ a_{\alpha_i}, & \text{если } 1\leqslant i<j=2n. \end{cases} \tag{10}$$

Кроме того, мы полагаем $A^{\mathrm{c}}_0=1$.

Коэффициенты $D_{\alpha,\beta}$ в (7) определяются как $D_{\alpha,\beta}=\det(D_{\alpha_i,\beta_j})$, где D – заданная постоянная бесконечная матрица.

Замечание 1. Ряды (1)–(4) могут быть получены путем специализации A^{c} в ряде (5). Если положить

$$A_{nm} = \frac{1}{2}e^{-U_m-U_n}\,\mathrm{sgn}(n-m), \qquad a_n = e^{-U_n},$$

то получим (2). Если далее выбрать $U_n=0$ и $U_n=+\infty$ для $n\leqslant L$ и $n>L$ соответственно, то получим (1). Если положить

$$A_{nm} = \frac{1}{2}e^{-U_m-U_n}Q_{(n,m)}\left(\frac{\bar{\mathbf{t}}}{2}\right), \qquad a_n = e^{-U_n}Q_{(n)}\left(\frac{\bar{\mathbf{t}}}{2}\right),$$

то получим (3). Снова выбирая $U_n=0$ и $U_n=+\infty$ для $n\leqslant L$ и $n>L$ соответственно, получаем (4). Ряд (6) получается из (5), если взять $A_{nm}=\delta_{n+1,m}-\delta_{m+1,n}$. Суммы (4) и (3) также можно получить как частные случаи (7): если положить $D_{nm}=e^{-U_m-U_n}\delta_{n,m}$, то мы получаем (3).

Все эти суммы представляют собой частные примеры тау-функций иерархии B-КП, введенных в работе [5] и определяющих решения того, что в работе [7] было названо нейтральной иерархией B-КП. Их можно далее конкретизировать, если выбрать $\mathbf{t}=\mathbf{t}_\infty:=(1,0,0,\dots)$. Тогда

$$Q_\alpha\left(\frac{\mathbf{t}_\infty}{2}\right) = \Delta^*(\alpha)\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{\alpha_i!}, \qquad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k),$$

где

$$\Delta^*(\alpha)=\Delta^*_k(\alpha) := \prod_{0<i<j\leqslant k}\frac{\alpha_i-\alpha_j}{\alpha_i+\alpha_j}.$$

Для этого случая получаем

$$
\begin{aligned}
S_1(\mathbf{t}_\infty,\mathbf{t}^*) &= \sum_{\alpha\in DP} \Delta^*(\alpha)\prod_{i=1}^{k}\frac{e^{-U_{\alpha_i}(\mathbf{t}^*)}}{\alpha_i!},\\
S_2(\mathbf{t}_\infty,\mathbf{t}_\infty,\mathbf{t}^*) &= \sum_{\alpha\in DP} \bigl(\Delta^*(\alpha)\bigr)^2\prod_{i=1}^{k}\frac{e^{-U_{\alpha_i}(\mathbf{t}^*)}}{(\alpha_i!)^2},\\
S_4(\mathbf{t}_\infty,\mathbf{t}^*) &= \sum_{\alpha\in DP'} \bigl(\widetilde{\Delta}^*(\alpha)\bigr)^4\prod_{i=1}^{k}\frac{e^{-U_{\alpha_i}(\mathbf{t}^*)-U_{\alpha_i+1}(\mathbf{t}^*)}}{\alpha_i!(\alpha_i+1)!},\\
S_5(\mathbf{t}_\infty,\mathbf{t}_\infty,\mathbf{t}^*) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{\alpha,\beta\in DP,\\ \ell(\alpha)=\ell(\beta)=k}} \Delta^*(\alpha)\Delta^*(\beta)\prod_{i=1}^{k}\frac{D_{\alpha_i,\beta_i}}{\alpha_i!\beta_i!}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Здесь DP' – множество всех строгих разбиений $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N)$, $\alpha_N>0$, в которых $\alpha_i>\alpha_{i+1}+1$, $i=1,\dots,N-1$, и

$$
(\widetilde{\Delta}^*(\alpha))^4 := \prod_{i<j\leqslant N}\frac{(\alpha_i-\alpha_j)^2\bigl((\alpha_i-\alpha_j)^2-1\bigr)}{(\alpha_i+\alpha_j)^2\bigl((\alpha_i+\alpha_j)^2-1\bigr)}.
$$

Если в приведенных выше выражениях заменить Δ^* на определитель Вандермонда Δ, то в результате полученные суммы (11) можно рассматривать как дискретные аналоги матричных моделей (см. работу [11]).

2.1. Примеры. Приведем несколько примеров применения выписанных выше сумм.

Пример 1. Сумма (4) впервые была рассмотрена в работе [12] при исследовании сдвинутой меры Шура.

Пример 2. Суммы (2) и (3) можно рассматривать как обобщения гипергеометрических функций на случай многих переменных. Например, обобщение гипергеометрической функции типа ${}_pF_r$ можно получить из выражений (2) и (3), если определить параметры U_n в терминах гамма-функций,

$$
U_n = \ln\frac{\prod_{i=1}^{p}\Gamma(n+a_i)}{\prod_{i=1}^{r}\Gamma(n+b_i)},
$$

для некоторого набора $p+r$ постоянных $\{a_i,b_i\}$. Суммы типа (3) были рассмотрены в работе [13], а суммы типа (2) являются новыми (подробному рассмотрению последнего случая будет посвящена отдельная работа). Можно показать, что и ряд (2), и ряд (3) записываются как пфаффианы матриц, элементы которых выражаются через функции ${}_pF_r$ и обладают многими свойствами обычных гипергеометрических функций ${}_pF_r$. Аналоги базисных (q-деформированных) гипергеометрических функций можно получить схожим образом.

Пример 3. Рассмотрим модели случайных строгих разбиений α, где относительный вес W_α определяется одним из следующих выражений:

$$
W_\alpha = A^{\mathrm{c}}_\alpha Q_\alpha\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right), \tag{12}
$$

где $A^{\mathrm{c}} = (A, a)$ и $\mathbf{t} = (t_1, t_3, \ldots)$ – параметры модели; или

$$W_\alpha = e^{-U_\alpha(\mathbf{t}^*)} Q_\alpha\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right), \tag{13}$$

где параметры имеют вид $\mathbf{t} = (t_1, t_3, \ldots)$ и $U = (U_0, U_1, \ldots)$; или

$$W_\alpha = e^{-U_\alpha(\mathbf{t}^*)} Q_\alpha\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right) Q_\alpha\left(\frac{\bar{\mathbf{t}}}{2}\right), \tag{14}$$

где $\mathbf{t} = (t_1, t_3, \ldots)$, $\bar{\mathbf{t}} = (\bar{t}_1, \bar{t}_3, \ldots)$ и $U = (U_0, U_1, \ldots)$ – независимые параметры. Заметим, что модели (13) и (14) являются частными случаями модели (12). Ряды S_3, S_1 и S_2 можно рассматривать как нормировочные множители (статистические суммы) соответственно для моделей (12), (13) и (14). Аналогично ряд S_5 представляет собой статистическую сумму для модели строгих биразбиений.

Пример 4. Ряды S_1 и S_2 использовались в работе [14], где рассматривались случайные осциллирующие диаграммы Юнга, связанные со строгими разбиениями.

Замечание 2. Фермионное представление этих моделей позволяет вычислить их корреляционные функции стандартным способом (см., например, работы [15]–[18]).

2.2. Нейтральные фермионы. Чтобы построить тау-функции иерархии В-КП и двухкомпонентной иерархии В-КП [6], [7], а также тау-функции их сдвоенных версий (2В-КП), которые мы вводим ниже, нам потребуются *нейтральные свободные фермионы* $\{\phi_i^{(1)}, \phi_i^{(2)}\}_{i\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющие антикоммутационным соотношениям

$$\left[\phi_n^{(a)}, \phi_m^{(b)}\right]_+ = (-1)^n \delta_{n,-m}\delta_{a,b}, \qquad a, b = 1, 2.$$

Для однокомпонентых иерархий В-КП и 2В-КП используется только первая компонента $\phi_n := \phi_n^{(1)}$, $n \in \mathbb{Z}$. Выберем фермионное пространство Фока, как в работе [7] (в отличие от работы [6]). А именно, действие нейтральных фермионов на вакуумные состояния определим формулами

$$\phi_n^{(a)}|0\rangle = 0, \qquad\qquad \langle 0|\phi_{-n}^{(a)} = 0, \qquad n < 0, \tag{15}$$

$$\phi_0^{(a)}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle, \qquad\qquad \langle 0|\phi_0^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|, \tag{16}$$

где соотношения (16) выбраны в соответствии с работой [7] (некоторые подробности связи между работами [6] и [7] можно также найти в приложении А.1 к версии работы [14], находящейся в электронном архиве).

Для линейных комбинаций $w_k = \sum_a \sum_n c_{k,n}^{(a)} \phi_n^{(a)}$, $k = 1, 2, \ldots$, из теоремы Вика следует, что для произвольных произведений четного числа полей w_k

$$\langle w_1 w_2 \ldots w_{2n-1} w_{2n}\rangle = \sum_{\sigma\in S_{2n}} \operatorname{sgn}(\sigma)\langle w_{\sigma(1)} w_{\sigma(2)}\rangle \ldots \langle w_{\sigma(2n-1)} w_{\sigma(2n)}\rangle =: \\ =: \operatorname{Pf}\left((\langle w_i w_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant 2n}\right),$$

где сумма берется по всем перестановкам из группы перестановок S_{2n}.

Нам также потребуются фермионные поля

$$\phi^{(a)}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n^{(a)} z^n, \qquad a = 1, 2. \tag{17}$$

Для вычисления интегралов воспользуемся формулой

$$\langle 0|\phi^{(b)}(z_1)\phi^{(a)}(z_2)|0\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)\delta_{ab}.$$

Для $m \in \mathbb{N}^+$ из теоремы Вика следует, что

$$\langle 0|\phi^{(a)}(z_1)\phi^{(a)}(z_2)\dots\phi^{(a)}(z_m)|0\rangle = \left(\frac{1}{2}\right)^{m/2}\Delta_m^*(z). \tag{18}$$

Заметим, что вследствие соотношений (16) это вакуумное среднее отлично от нуля при нечетных m.

2.3. Тау-функции иерархии B-КП. Тау-функция сдвоенной двухкомпонентной иерархии 2B-КП может быть определена как

$$\tau^{\text{2c-2B-КП}}(\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, \bar{\mathbf{t}}^{(1)}, \bar{\mathbf{t}}^{(2)}, A) = \\ = \left\langle 0\middle|\Gamma^{(1)}(\mathbf{t}^{(1)})\Gamma^{(2)}(\mathbf{t}^{(2)})\exp\left\{\sum_{a,b}\sum_{n,m} A_{nm}^{a,b}\phi_n^{(a)}\phi_m^{(b)}\right\}\overline{\Gamma}^{(1)}(\bar{\mathbf{t}}^{(1)})\overline{\Gamma}^{(2)}(\bar{\mathbf{t}}^{(2)})\middle|0\right\rangle, \tag{19}$$

где

$$\Gamma^{(a)}(\mathbf{t}^{(a)}) := \exp\Bigg\{\sum_{\substack{n\geqslant 1,\\ n \text{ нечетное}}} B_n^a t_n^{(a)}\Bigg\}, \qquad \overline{\Gamma}^{(a)}(\bar{\mathbf{t}}^{(a)}) := \exp\Bigg\{\sum_{\substack{n\geqslant 1,\\ n \text{ нечетное}}} B_{-n}^{(a)}\bar{t}_n^{(a)}\Bigg\},$$
$$B_n^{(a)} := \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^{i+1}\phi_i^{(a)}\phi_{-i-n}^{(a)}.$$

Последовательность чисел $A = \{A_{nm}^{a,b},\ a, b = 1, 2;\, n, m \in \mathbb{Z}\}$ представляет собой данные, определяющие тау-функцию двухкомпонентной иерархии 2B-КП. Двойка перед обозначением B-КП означает, что мы рассматриваем сдвоенную иерархию, что подразумевает, что тау-функция зависит как от левых, так и от правых наборов времен, обозначаемых соответственно $\mathbf{t}^{(a)}$ $\bar{\mathbf{t}}^{(a)}$, в то время как индекс $a = 1, 2$ помечает номер компоненты времени. Четыре набора независимых параметров, $\mathbf{t}^{(a)} = (t_1^{(a)}, t_3^{(a)}, \dots)$, $\bar{\mathbf{t}}^{(a)} = (\bar{t}_1^{(a)}, \bar{t}_3^{(a)}, \dots)$, $a = 1, 2$, называются высшими временами иерархии. Если зафиксировать любые три набора, то четвертый будет представлять собой высшие времена обычной иерархии B-КП [7]. В этом смысле (19) можно рассматривать как тау-функцию четырех связанных копий иерархии B-КП. Если положить $\bar{\mathbf{t}}^{(1)} = \bar{\mathbf{t}}^{(2)} = 0$, то мы получим двухкомпонентную иерархию B-КП, как это описано в работе [7].

В однокомпонентном случае мы опускаем вторую компоненту и верхние индексы. Тогда тау-функция иерархии 2B-КП принимает вид

$$\tau^{\text{2B-КП}}(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \left\langle 0\middle|\Gamma(\mathbf{t})\exp\left\{\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} A_{nm}\phi_n\phi_m\right\}\overline{\Gamma}(\bar{\mathbf{t}})\middle|0\right\rangle, \tag{20}$$

а тау-функцию обычной нейтральной иерархии B-КП можно записать как

$$\tau^{\text{B-КП}}(\mathbf{t}) = \left\langle 0 \middle| \Gamma(\mathbf{t}) \exp\left\{ \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} A_{nm}\phi_n\phi_m \right\} \middle| 0 \right\rangle.$$

Замечательный пример тау-функций иерархии B-КП был получен в работе [9], а именно Q-функции Шура Q_α [8]. Их можно выразить через фермионы:

$$\langle 0|\Gamma(\mathbf{t})\phi_{\alpha_1}\phi_{\alpha_2}\dots\phi_{\alpha_{2N}}|0\rangle = 2^{-\ell(\alpha)/2} Q_\alpha\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right),$$

где $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_{2N} \geqslant 0$. Набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2N})$ и разбиение α связаны следующим образом: в случае $\alpha_{2N} > 0$ мы имеем $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2N})$ и $\ell(\alpha) = 2N$, а в случае $\alpha_{2N} = 0$ мы имеем $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2N-1})$ и $\ell(\alpha) = 2N - 1$.

2.4. Фермионные представления для сумм. Приведенные выше формулы показывают, что суммы (1)–(6) являются тау-функциями иерархии B-КП. Прежде всего,

$$\begin{aligned} S_3(\mathbf{t}, A^{\mathrm{c}}) &= \sum_{\alpha\in DP} A^{\mathrm{c}}_\alpha Q_\alpha\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right) = \\ &= \left\langle 0 \middle| \Gamma(\mathbf{t}) \exp\left\{ 2\sum_{n>m>0} A_{nm}\phi_n\phi_m + 2\sum_{n>0} a_n\phi_n\phi_0 \right\} \middle| 0 \right\rangle. \end{aligned} \tag{21}$$

В соответствии с замечанием 1 мы получаем фермионные представления для сумм (1)–(4). В частности,

$$S_0(\mathbf{t}, L) = \sum_{\substack{\alpha\in DP,\\ \alpha_1\leqslant L}} Q_\alpha\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right) = \left\langle 0 \middle| \Gamma(\mathbf{t}) \exp\left\{ 2\sum_{L\geqslant n>m\geqslant 0} \phi_n\phi_m \right\} \middle| 0 \right\rangle, \tag{22}$$

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) &= \sum_{\alpha\in DP} e^{-U_\alpha(\mathbf{t}^*)} Q_\alpha\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right) = \\ &= \left\langle 0 \middle| \Gamma(\mathbf{t})\mathbb{T}(\mathbf{t}^*) \exp\left\{ 2\sum_{n>m\geqslant 0} \phi_n\phi_m \right\} \middle| 0 \right\rangle, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} S_4(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) &= \sum_{\alpha\in DP^2} e^{-U_\alpha(\mathbf{t}^*)} Q_\alpha\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right) = \\ &= \left\langle 0 \middle| \Gamma(\mathbf{t})\mathbb{T}(\mathbf{t}^*) \exp\left\{ 2\sum_{n>0} \phi_n\phi_{n+1} \right\} \middle| 0 \right\rangle, \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\mathbb{T}(\mathbf{t}^*) := \exp\left\{ -\sum_{n>0} (-1)^n U_n(\mathbf{t}^*)\phi_n\phi_{-n} \right\}.$$

Вычисление при $\mathbf{t} = \mathbf{t}_\infty$ дает “солитонное” представление для $S_1(\mathbf{t}_\infty, \mathbf{t}^*)$:

$$\begin{aligned} &S_1(\mathbf{t}_\infty, \mathbf{t}^*) = \\ &\quad = \frac{1}{c}\left\langle 0 \middle| \Gamma(\mathbf{t}^*_+) \exp\left\{ 2\sum_{n>m>0} e^{-U^{(0)}_m - U^{(0)}_n}\phi(m) + 2\sum_{n>0} e^{-U^{(0)}_n}\phi(n)\phi_0 \right\} \Gamma(\mathbf{t}^*_-) \middle| 0 \right\rangle, \end{aligned}$$

где $\phi(n)$ обозначает фермионное поле (17) (доказательство см. в работе [14]). Это показывает, что данный ряд есть тау-функция иерархии 2B-КП относительно высших времен $\mathbf{t}^*_\pm$, определяемых как $\mathbf{t}^*_+ := (t^*_1, t^*_3, \ldots)$ и $\mathbf{t}^*_- := (-t^*_{-1}, -t^*_{-3}, \ldots)$. Здесь c – нормировочный множитель, задаваемый соотношением $\langle 0|\Gamma(\mathbf{t}^*_+)\Gamma(\mathbf{t}^*_-)|0\rangle = b(\mathbf{t}^*_-, \mathbf{t}^*_+)$.

Замечание 3. Еще одно фермионное представление для (3), (4) было получено в работе [13].

Наконец, получаем

$$S_5(\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, D) = \left\langle 0 \middle| \Gamma^{(1)}(\mathbf{t}^{(1)})\Gamma^{(2)}(\mathbf{t}^{(2)}) \exp\left\{ 2 \sum_{n,m>0} \phi^{(1)}_n \phi^{(2)}_m \right\} \middle| 0 \right\rangle. \tag{25}$$

3. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть $d\nu$ – мера с носителем на контуре γ на комплексной плоскости. Выберем в качестве γ один их следующих двух контуров: интервал $0 \leqslant z < \infty$ на вещественной оси или дуга единичной окружности, задаваемая как $z = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \theta$, где $0 < \theta < \pi$.

Рассмотрим следующие N-кратные интегралы:

$$I_1(N) := \int_\gamma \ldots \int_\gamma |\Delta^*(z)| \prod_{i=1}^N d\nu(z_i), \qquad I_2(N) := \int_\gamma \ldots \int_\gamma |\Delta^*(z)|^2 \prod_{i=1}^N d\nu(z_i),$$

$$I_3(N) := \int_\gamma \ldots \int_\gamma \Delta^*(z) a^{\mathrm{c}}(\mathbf{z}) \prod_{i=1}^N d\nu(z_i), \qquad I_4(N) := \int_\gamma \ldots \int_\gamma |\Delta^*(z)|^4 \prod_{i=1}^N d\nu(z_i),$$

где, как и ранее,

$$\Delta^*(z) = \prod_{i>j}^N \frac{z_i - z_j}{z_i + z_j}.$$

Аналогично (9) через $a^{\mathrm{c}}(\mathbf{z})$ обозначен пфаффиан $\mathrm{Pf}[\tilde{a}]$ антисимметричной матрицы $\tilde{a}$, элементы которой определяются в зависимости от четности N в терминах кососимметричного ядра $a(z, w)$ (возможно, распределения) и функции (или распределения) $a(z)$ следующим образом: для четных $N = 2n$

$$\tilde{a}_{ij} = -\tilde{a}_{ji} := a(z_i, z_j), \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant 2n;$$

для нечетных $N = 2n - 1$

$$\tilde{a}_{ij} = -\tilde{a}_{ji} := \begin{cases} a(z_i, z_j), & \text{если } 1 \leqslant i < j \leqslant 2n-1, \\ a(z_i), & \text{если } 1 \leqslant i < j = 2n. \end{cases}$$

Кроме того, положим $a^{\mathrm{c}}_0 = 1$.

Интегралы I_1, I_2 и I_4 можно рассматривать как аналоги бета-ансамблей при $\beta = 1, 2, 4$ [4]. Их можно получить как частные случаи I_3 следующим образом. Интеграл $I_1(N)$ является частным случаем $I_3(N)$, где в случае контура γ, заданного как интервал $0 \leqslant z < \infty$, следует положить $a(z_i, z_j) = \mathrm{sgn}(z_i - z_j)$ и $a(z) = 1$; в случае контура γ, заданного как дуга единичной окружности $z = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \theta$, следует взять $a(z_k, z_j) = e^{-\pi i/2} \mathrm{sgn}(\varphi_k - \varphi_j)$ и $a(z) = e^{-\pi i/4}$, где $\varphi_i = \arg z_i$. Чтобы доказать это, можно воспользоваться следующим утверждением.

Лемма. *Справедливы равенства*

$$\operatorname{Pf}\left[\operatorname{sgn}(z_k - z_j)\right] = \operatorname{sgn}\Delta^*(z), \qquad z_k \in \mathbb{R},$$
$$\operatorname{Pf}\left[\operatorname{sgn}(\varphi_k - \varphi_j)\right] = \operatorname{sgn}\left(e^{-\pi i(N^2-N)/4}\Delta^*(z)\right), \qquad z_k = e^{i\varphi_k},$$

где $k, j = 1, \ldots, N$.

Интеграл $I_2(N)$ получается из $I_3(N)$, если положить $a(z_i, z_j) = (z_i - z_j)/(z_i + z_j)$ и $a(z) = 1$. В этом случае мы пользуемся тем фактом, что

$$\Delta^*(z) = \operatorname{Pf}\left[\frac{z_i - z_j}{z_i + z_j}\right].$$

Интеграл $I_4(N)$ получается из $I_3(2N)$ следующим образом. В случае контура γ, заданного как интервал $0 \leqslant z < \infty$, полагаем

$$a(z_i, z_j) = \frac{1}{2}\left(z_j \frac{\partial}{\partial z_j}\delta(z_i - z_j) - (z_i \leftrightarrow z_j)\right), \tag{26}$$

а в случае контура γ, заданного как дуга единичной окружности $z = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \theta$, полагаем

$$a(z_i, z_j) = \frac{\partial}{\partial \varphi_j}\delta(\varphi_i - \varphi_j). \tag{27}$$

Интегралы, содержащие Δ^*, можно сравнить с интегралами, определяющими функции разбиения так называемых суперсимметричных матричных интегралов [19]. Интеграл I_2 определяет статистическую сумму так называемой модели $\widehat{A}_0$ [20], модели кулоновского газа с отражением [21], одномерной модели Изинга [22] и корреляционные функции в двумерной модели Изинга [23].

Чтобы связать данные интегралы с иерархией 2В-КП, мы введем деформации $I_i(N) \mapsto I_i(N; \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$ посредством следующей деформации меры:

$$d\nu(z) \mapsto d\nu(z|\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = b(\mathbf{t}, \{z\})\, b(-\bar{\mathbf{t}}, \{z^{-1}\})\, d\nu(z),$$

где

$$b(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \exp\left\{\sum_{n\ \text{нечетное}} \frac{n}{2} s_n t_n\right\}, \qquad \{z\} = \left(2z, \frac{2z^3}{3}, \frac{2z^5}{5}, \ldots\right). \tag{28}$$

Ниже будет показано, что производящий ряд, полученный путем пуассонизации (статистическая сумма большого канонического ансамбля)

$$Z_i(\mu; \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = b(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) \sum_{N=0}^{\infty} I_i(N; \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) \frac{\mu^N}{N!}, \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

представляет собой частный случай тау-функций (20) иерархии 2В-КП.

Рассмотрим также следующие $2N$-кратные интегралы:

$$I_5(N; \mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, \bar{\mathbf{t}}^{(1)}, \bar{\mathbf{t}}^{(2)}) := \int \Delta_N^*(z)\Delta_N^*(y) \prod_{i=1}^{N} d\nu(z_i, y_i \,|\, \mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, \bar{\mathbf{t}}^{(1)}, \bar{\mathbf{t}}^{(2)}),$$

где

$$d\nu(z,y\,|\,\mathbf{t}^{(1)},\mathbf{t}^{(2)},\bar{\mathbf{t}}^{(1)},\bar{\mathbf{t}}^{(2)}) = \\ = b(\mathbf{t}^{(1)},\{z\})\,b(-\bar{\mathbf{t}}^{(1)},\{z^{-1}\})\,b(\mathbf{t}^{(2)},\{y\})\,b(-\bar{\mathbf{t}}^{(2)},\{y^{-1}\})\,d\nu(z,y)$$

(здесь $d\nu(z,y)$ – произвольная бимера), и покажем, что производящий ряд

$$Z_5(\mu;\mathbf{t}^{(1)},\mathbf{t}^{(2)},\bar{\mathbf{t}}^{(1)},\bar{\mathbf{t}}^{(2)}) = b(\mathbf{t}^{(1)},\bar{\mathbf{t}}^{(1)})\,b(\mathbf{t}^{(2)},\bar{\mathbf{t}}^{(2)})\sum_{N=0}^{\infty} I_5(N;\mathbf{t}^{(1)},\mathbf{t}^{(2)},\bar{\mathbf{t}}^{(1)},\bar{\mathbf{t}}^{(2)})\frac{\mu^N}{N!}$$

является частным случаем тау-функции (19) двухкомпонентной иерархии 2B-КП.

Замечание 4. Если

$$d\nu(z,y) = \delta(z-y)\,d\nu(z)\,d\nu(y), \qquad \mathbf{t} = \mathbf{t}^{(1)}+\mathbf{t}^{(2)}, \qquad \bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{t}}^{(1)}+\bar{\mathbf{t}}^{(2)},$$

то

$$Z_2(\mu;\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}}) = Z_5(\mu;\mathbf{t}^{(1)},\mathbf{t}^{(2)},\bar{\mathbf{t}}^{(1)},\bar{\mathbf{t}}^{(2)}).$$

Интегралы $Z_1(\mu;\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}})$, $Z_2(\mu;\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}})$, $Z_4(\mu;\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}})$ и $Z_5(\mu;\mathbf{t}^{(1)},\mathbf{t}^{(2)},\bar{\mathbf{t}}^{(1)},\bar{\mathbf{t}}^{(2)})$ можно получить как пределы по непрерывности сумм $S_1(\mathbf{t}_\infty,\mathbf{t}^*)$, $S_2(\mathbf{t}_\infty,\mathbf{t}_\infty,\mathbf{t}^*)$, $S_4(\mathbf{t}_\infty,\mathbf{t}^*)$ и $S_5(\mathbf{t}_\infty,\mathbf{t}_\infty,\mathbf{t}^*)$ соответственно.

Фермионное представление интегралов. Чтобы получить фермионное представление для приведенных выше интегралов, применим соотношение (18). Разлагая экспоненты и применяя теорему Вика к каждому слагаемому в сумме, получаем

$$Z_3(\mu;\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}}) = \left\langle 0\middle|\Gamma(\mathbf{t})\exp\left\{\mu^2\int_\gamma\int_\gamma a(z,y)\phi(z)\phi(y)\,d\nu(z)\,d\nu(y)\right\}\times\right.\\ \left.\times\exp\left\{2\mu\int_\gamma a(z)\phi(z)\phi_0\,d\nu(z)\right\}\overline{\Gamma}(\bar{\mathbf{t}})\middle|0\right\rangle. \tag{29}$$

Заметим, что выражение

$$Z_3(0;\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}}) = b(\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}}) = \langle 0|\Gamma(\mathbf{t})\,\overline{\Gamma}(\bar{\mathbf{t}})|0\rangle$$

было выписано выше в (28). В частности, получаем

$$Z_1(\mu;\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}}) = \left\langle 0\middle|\Gamma(\mathbf{t})\exp\left\{\mu^2q^2\int_\gamma\int_\gamma \operatorname{sgn}(\varsigma(z)-\varsigma(y))\phi(z)\phi(y)\,d\nu(z)\,d\nu(y)\right\}\times\right.\\ \left.\times\exp\left\{2\mu q\int_\gamma \phi(z)\phi_0\,d\nu(z)\right\}\overline{\Gamma}(\bar{\mathbf{t}})\middle|0\right\rangle, \tag{30}$$

где в случае, когда контуром интегрирования является $\mathbb{R}_+$, имеем $q=1$ и $\varsigma(z)=z$, $z\in\gamma$; а в случае, когда контур интегрирования есть дуга $z=e^{i\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\theta$, мы имеем $q=e^{-\pi i/4}$ и $\varsigma(z)=\varphi$.

Аналогично получаем

$$Z_2(\mu;\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}}) = \left\langle 0\middle|\Gamma(\mathbf{t})\exp\left\{\mu^2\int_\gamma\int_\gamma \frac{z-y}{z+y}\phi(z)\phi(y)\,d\nu(z)\,d\nu(y)\right\}\times\right.\\ \left.\times\exp\left\{2\mu\int_\gamma \phi(z)\phi_0\,d\nu(z)\right\}\overline{\Gamma}(\bar{\mathbf{t}})\middle|0\right\rangle.$$

В качестве конкретизации выражения (29), выбрав $a(z,w)$ аналогично (26) и положив $a(z)=0$, имеем

$$Z_4(\mu;\mathbf{t},\bar{\mathbf{t}}) = \left\langle 0\middle|\Gamma(\mathbf{t})\exp\left\{4\mu\int_\gamma z\frac{\partial\phi(z)}{\partial z}\phi(z)\,d\nu(z)\right\}\overline{\Gamma}(\bar{\mathbf{t}})\middle|0\right\rangle. \tag{31}$$

Наконец, в терминах двухкомпонентных фермионов получаем

$$Z_5(\mu;\mathbf{t}^{(1)},\mathbf{t}^{(2)},\bar{\mathbf{t}}^{(1)},\bar{\mathbf{t}}^{(2)}) = \frac{1}{c}\Big\langle 0\Big|\Gamma^{(1)}(\mathbf{t}^{(1)})\Gamma^{(2)}(\mathbf{t}^{(2)})\times \\ \times\exp\left\{2\mu\iint\phi^{(1)}(z)\phi^{(2)}(y)\,d\nu(z,y)\right\}\overline{\Gamma}^{\,(1)}(\bar{\mathbf{t}}^{(1)})\overline{\Gamma}^{\,(2)}(\bar{\mathbf{t}}^{(2)})\Big|0\Big\rangle, \tag{32}$$

где $c:=Z_5(0;\mathbf{t}^{(1)},\mathbf{t}^{(2)},\bar{\mathbf{t}}^{(1)},\bar{\mathbf{t}}^{(2)})$ – нормировочный множитель.

Формулы (29), (30), (31) и (32) нужно сравнить с формулами (21), (23), (24) и (25) соответственно. Фермионные представления интегралов Z_1 и Z_4 аналогичны результатам, полученным в работе [24] для ансамблей вещественных симметричных и самодуальных кватернионных случайных матриц. Фермионное представление (32) следует сравнить с фермионным представлением для статистической суммы двухматричной модели, полученным в работе [25].

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Представлены пять типов кратных сумм и кратных интегралов, связаных с тау-функциями иерархий B-КП (с тау-функциями иерархии B-КП и двухкомпонентной иерархии B-КП для кратных сумм, с тау-функциями иерархии 2B-КП и двухкомпонентной иерархии 2B-КП для кратных интегралов). Известно, что некоторые из этих сумм и интегралов имеют применения в математике и физике; мы полагаем, что все их можно использовать в различных вероятностных моделях. Технику вычислений свободных фермионов и интегрируемых систем можно применить для изучения различных свойств этих сумм и интегралов. Тау-функции многокомпонентной иерархии B-КП [7] можно затем использовать для построения моделей пфаффиановых процессов (ср. [26]). Результаты настоящей работы следует сравнить с аналогичными результатами для случая так называемой заряженной иерархии B-КП [7], исследованного в работе [24]. Это также будет предметом наших дальнейших исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Применение интеграла $Z_2(N)$

Исследовать некоторые вопросы, рассмотренные в настоящей работе, нас побудили следующие наблюдения, сообщенные нам Г. Браденом [23].

Применение интегралов Z_2 относится к модели Изинга для корреляционной функции, когда имеется возмущение относительно критической температуры. В скейлинговом пределе это описывается системой майорановских фермионов и устанавливает связь с рассматриваемым фермионным представлением. Маккой, Трейси и Ву показали, что этот предел описывается теорией массивного ($m=T-T_{\mathrm{c}}$) поля, корреляции которого подчиняются радиальному уравнению sh-Гордон, представляющему собой при замене параметров уравнение Пенлеве III. Другой подход к тому же коррелятору заключается в использовании формфактора. Этот подход дает коррелятор в терминах бесконечной суммы кратных интегралов. Для рассматриваемого случая мы имеем евклидову корреляционную функцию типа

$$G(r) := \langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\int \frac{\prod_{i=1}^{n} d\beta_i}{n!(2\pi)^n}\langle 0|\mathcal{O}(x)|\beta_1\dots\beta_n\rangle\langle\beta_n\dots\beta_1|\mathcal{O}(0)|0\rangle = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\int \frac{\prod_{i=1}^{n} d\beta_i}{n!(2\pi)^n}|F_n(\beta_1\dots\beta_n)|^2 \exp\biggl(-mr\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ch}\beta_i\biggr).$$

Здесь β_i – быстроты, $x=(x_0,x_1)$, $r=\sqrt{x_0^2+x_1^2}$. Если использовать минимальный формфактор

$$F_n^{\min}(\beta_1\dots\beta_n) = \prod_{i<j}\operatorname{th}\biggl(\frac{\beta_i-\beta_j}{2}\biggr)$$

и подходящие нормировки, то получим

$$G\biggl(\frac{r}{m}\biggr) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\biggl(\frac{dx_i}{x_i}\,e^{-r(x_i+1/x_i)}\biggr)\prod_{i<j}\biggl(\frac{x_i-x_j}{x_i+x_j}\biggr)^2.$$

Поскольку коррелятор никак не конкретизирован, нас также интересует

$$G_{\pm}\biggl(\frac{r}{m}\biggr) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{(\pm1)^n}{(2\pi)^n}\int_0^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\biggl(\frac{dx_i}{x_i}\,e^{-r(x_i+1/x_i)}\biggr)\prod_{i<j}\biggl(\frac{x_i-x_j}{x_i+x_j}\biggr)^2. \tag{33}$$

Тождество

$$\det\biggl(\frac{1}{x_i+x_j}\biggr) = \frac{1}{2^n\,x_1\dots x_n}\prod_{i<j}\biggl(\frac{x_i-x_j}{x_i+x_j}\biggr)^2$$

дает связь с определителем Фредгольма. Трудность заключается в том, чтобы получить сходящееся разложение выражения (33). Первое слагаемое записывается в терминах $K_0(r)$. Такое разложение даст (частное) решение уравнения Пенлеве.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Т. Шиоте и Дж. Дж. С. Ниммо за полезные обсуждения. А. Ю. Орлов благодарит А. Одзиевича за гостеприимство во время его пребывания в Белостоке в июне 2005 года. А. Ю. Орлов и Й. В. ван де Лёр благодарят Centre de recherches mathématiques, Université de Montréal (Montréal, Canada) за гостеприимство во время их пребывания там в январе 2006 года, когда была написана основная часть настоящей работы. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Евросоюза в рамках Программы FP6 Marie Curie RTN ENIGMA (контракт № MRTN-CT-2004-5652) и Программы MISGAM 8 Европейского научного фонда, а также Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada и Fonds FCAR du Québec (Canada); поддержана Программой РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики” и РФФИ (гранты № 09-01-92437-КЕ_а и 08-01-00501).

Список литературы

[1] A. Okounkov, "The uses of random partitions", *XIVth International Congress on Mathematical Physics*, eds. J.-C. Zambrini, World Sci., Hackensack, NJ, 2005, 379–403, arXiv: math-ph/0309015.

[2] M. E. Fisher, *J. Stat. Phys.*, **34**:5–6 (1984), 667–729.

[3] P. J. Forrester, *Log-Gases and Random Matrices*, London Math. Soc. Monogr. Ser., **34**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2010.

[4] M. L. Mehta, *Random Matrices*, Pure Appl. Math., **142**, Elsevier, Amsterdam, 2004.

[5] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, *Physica D*, **4**:3 (1982), 343–365.

[6] M. Jimbo, T. Miwa, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, **19**:3 (1983), 943–1001.

[7] V. G. Kac, J. van de Leur, "The geometry of spinors and the multicomponent BKP and DKP hierarchies", *The Bispectral Problem*, CRM Proc. Lect. Notes, **14**, eds. J. Harnad, A. Kasman, AMS, Providence, RI, 1998, 159–202.

[8] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985.

[9] Y. You, "Polynomial solutions of the BKP hierarchy and projective representations of symmetric groups", *Infinite-dimensional Lie Algebras and Groups*, Adv. Ser. Math. Phys., **7**, eds. V. G. Kac, World Sci., Teaneck, NJ, 1989, 449–464.

[10] J. J. C. Nimmo, *J. Phys. A*, **23**:5 (1990), 751–760.

[11] A. Yu. Orlov, T. Shiota, *Phys. Lett. A*, **343**:5 (2005), 384–396, arXiv: math-ph/0501017.

[12] C. A. Tracy, H. Widom, *Duke Math. J.*, **123**:1 (2004), 171–208, arXiv: math.PR/0210255.

[13] А. Ю. Орлов, *ТМФ*, **137**:2 (2003), 253–270, arXiv: math-ph/0302011.

[14] J. W. van de Leur, A. Yu. Orlov, *Phys. Lett. A*, **373**:31 (2009), 2675–2681, arXiv: 0801.0066.

[15] A. Okounkov, "SL(2) and z-measures", *Random Matrix Models and Their Applications*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **40**, eds. P. Bleher, A. Its, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, 407–420, arXiv: math.RT/0002135.

[16] O. Foda, M. Wheeler, M. Zuparic, *J. Algebra*, **321**:11 (2009), 3249–3273, arXiv: 0808.2737.

[17] M. Vuletić, *Int. Math. Res. Not.*, **2007**:14 (2007), 043, 53 pp., arXiv: math-ph/0702068.

[18] Дж. Харнад, А. Ю. Орлов, *ТМФ*, **158**:1 (2009), 23–48.

[19] T. Guhr, *J. Math. Phys.*, **32**:2 (1991), 336–347.

[20] I. K. Kostov, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, **45**:1 (1996), 13–28, arXiv: hep-th/9509124.

[21] I. Loutsenko, V. Spiridonov, *J. Stat. Phys.*, **99**:3–4 (2000), 751–767, arXiv: cond-mat/9909308.

[22] I. M. Loutsenko, V. P. Spiridonov, *SIGMA*, **3** (2007), 059, 11 pp., arXiv: 0704.3173.

[23] Г. Браден, *частное сообщение*, 2006.

[24] J. van de Leur, *J. Nonlin. Math. Phys.*, **8**:2 (2001), 288–311, arXiv: solv-int/9909028.

[25] J. Harnad, A. Yu. Orlov, *J. Phys. A*, **39**:28 (2006), 8783–8809, arXiv: math-ph/0512056.

[26] Дж. Харнад, А. Ю. Орлов, *ТМФ*, **152**:2 (2007), 265–277, arXiv: 0704.1145.