

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Б. Соболева, Влияние конечных возмущений плотности на развитие неустойчивости Рэля–Тейлора в пористой среде, *ТМФ*, 2022, том 211, номер 2, 333–346

DOI: 10.4213/tmf10251

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.142.251.204

28 декабря 2024 г., 21:44:11



© 2022 г.

Е. Б. Соболева\*

## ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛОТНОСТИ НА РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ–ТЕЙЛОРА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Выполнено численное моделирование конвекции Рэля–Тейлора в пористой среде при наличии начальных флуктуаций плотности на границе между слоями жидкости. Рассмотрены смешивающиеся жидкости: нижний слой образован однокомпонентной жидкой средой, а верхний слой – такой же средой с растворенной в ней примесью. Исследовано влияние амплитуды флуктуаций плотности на начало и развитие конвективного движения. Получено, что при уменьшении амплитуды флуктуаций конвекция начинается существенно позже, ширина образующихся конвективных “пальцев” оказывается больше, а скорость их движения – меньше. Влияние начальных флуктуаций прослеживается и в переходном течении при разрушении исходной квазипериодической структуры конвекции.

**Ключевые слова:** конвекция Рэля–Тейлора, смешивающиеся жидкости, пористая среда, флуктуации плотности, квазипериодическая конвекция, переходный режим.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf10251>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о неустойчивости Рэля–Тейлора является одной из классических в гидродинамике [1]. Имеются два контактирующих слоя жидкости, граница между которыми перпендикулярна вектору силы тяжести; верхний слой более плотный. Благодаря наличию в системе флуктуаций физических величин механическое равновесие нарушается, происходит развитие неустойчивости. Флуктуации, которые возникают из-за молекулярного строения вещества и движения молекул, обычно называют тепловыми. Учет тепловых флуктуаций в гидродинамических моделях сводится к введению соответствующих дополнительных членов, описывающих спонтанное появление локальных напряжений, потоков тепла и массы [2], [3]. Влияние тепловых флуктуаций на динамику жидкостей наиболее заметно в микромасштабах [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 21-11-00126).

---

\*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: soboleva@ipmnet.ru

Однако в реальных системах (например, в экспериментах) присутствуют возмущения, обусловленные малыми движениями, которые вызваны случайными толчками, недостаточно тщательным перемешиванием жидкости и т. д. Такие возмущения, которые можно назвать механическими флуктуациями, не зависят от физической природы вещества и являются “скрытым параметром” системы. Обычно масштаб механических флуктуаций существенно больше, чем тепловых.

Предметом исследования в настоящей работе является неустойчивость Рэлея–Тейлора в пористой среде. Нижний слой образован однокомпонентной жидкостью, верхний слой состоит из этой же жидкости и растворенной в ней примеси. Это система смешивающихся жидкостей, в которой примесь распространяется за счет диффузии и конвекции. На начальном этапе, когда конвекции еще нет, между слоями формируется диффузионная зона, расширяющаяся со временем. Данная задача близка к задаче об устойчивости диффузионного слоя, образующегося под источником примеси в пористой среде, которая рассматривалась в приложении к технологиям захоронения углекислоты в подземных геологических образованиях [5], [6]. В ряде работ теоретически определялось время начала конвекции (критическое время  $\tau$ ) [7]–[9]. Как отмечалось в работе [9], особенностью задачи является то, что базовое состояние (соответствующее механическому равновесию) нестационарно из-за расширения со временем диффузионного слоя. В силу этой особенности авторы используют различные приближения и методы, например квазистационарное приближение (quasi-steady-state approximation) в рамках линейной теории устойчивости [7] или безмодовую теорию устойчивости (non-modal stability theory) [8], по-разному дают определение времени начала конвекции и, соответственно, получают неодинаковые значения  $\tau$ . В работе [9] было также проведено численное моделирование и продемонстрирована зависимость величины  $\tau$  от флуктуаций пористости и проницаемости твердого скелета и от флуктуаций концентрации на источнике примеси. Следует заметить, что если в численном решении флуктуации физических величин не задаются, то неустойчивость развивается из-за погрешности численного метода и ошибок округления.

Литературные данные [9] показывают, что время начала конвекции в системе с нестационарным базовым состоянием зависит от типа и размера начальных возмущений. Однако вопрос о влиянии флуктуаций на потерю устойчивости в задаче Рэлея–Тейлора для смешивающихся жидкостей недостаточно изучен и требует дальнейших исследований. Метод математического моделирования позволяет вводить в систему конечные механические флуктуации, что, во-первых, приближает постановку задачи к реальным условиям, во-вторых, при вариации масштаба флуктуаций дает представление об отклонении экспериментальных результатов от аналитических. В работе [10] были начаты исследования в этом направлении и продемонстрировано влияние начальных флуктуаций плотности на границе между слоями на начало и раннюю (квазипериодическую) стадию конвекции; при этом учитывалось увеличение вязкости раствора с количеством примеси. В настоящей работе мы продолжаем это исследование и в случае постоянной вязкости рассматриваем существенно более поздние времена, находим признак начала перехода от квазипериодического к стохастическому движению, а также пытаемся ответить на вопрос, который ранее не обсуждался: как долго начальные флуктуации влияют на динамику жидкости?

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим прямоугольную пористую область, которая является частью бесконечного горизонтального слоя. Твердый скелет считается недеформируемым. Нижняя половина области заполнена однокомпонентной жидкостью плотности  $\rho_0$ , верхняя половина – раствором с плотностью  $\rho_b$ . В начальный момент система находится в гидростатическом равновесии. Жидкость не проникает через границы; примесь через горизонтальные границы также не проникает, а на вертикальных границах могут появляться незначительные диффузионные потоки, так как здесь распределение примеси подчиняется уравнению диффузии. Граничные условия для скорости – это условия проскальзывания, для давления – сохранение начальных значений. На границе между слоями жидкости в начальный момент задаются флуктуации плотности.

Мы предполагаем, что  $\rho_b > \rho_0$ , поэтому система неустойчива в поле силы тяжести и со временем развивается естественное концентрационно-конвективное движение, которое описывается в рамках гидродинамической модели. Базовая система уравнений включает уравнение неразрывности, уравнение Дарси и уравнение конвекции-диффузии, описывающее перенос примеси [11]. Система дополняется уравнением состояния, согласно которому плотность раствора  $\rho$  линейно увеличивается с плотностью  $\rho_c$  растворенной примеси. Величина  $\rho_c$  представляет собой массу примеси в единице объема раствора. Данная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0, \\ \mathbf{U} &= -\frac{k}{\mu}(\nabla P - \rho g \mathbf{e}), \\ \phi \frac{\partial \rho_c}{\partial \tau} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho_c &= \nabla \cdot (\phi \nabla \rho_c), \\ \rho &= \rho_0 + \alpha \rho_c. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{U}$  – скорость фильтрации,  $P$  – давление,  $g$  – ускорение силы тяжести Земли,  $\mathbf{e}$  – единичный вектор, сонаправленный с вектором силы тяжести,  $\alpha$  – константа. Пористость  $\phi$  и проницаемость твердого скелета  $k$ , коэффициенты диффузии примеси  $D$  и вязкости раствора  $\mu$  постоянные. В начальный момент система неподвижна ( $\mathbf{U} = 0$ ) и уравнение Дарси сводится к равенству, определяющему стратификацию давления  $P_{\text{in}}$  в однокомпонентной жидкости вдоль вектора силы тяжести:

$$0 = -\frac{k}{\mu}(\nabla P_{\text{in}} - \rho_0 g \mathbf{e}) \quad (2)$$

(здесь индекс “in” указывает на начальные условия). Вычтем данное равенство из уравнения Дарси и далее преобразуем базовые уравнения к безразмерному виду.

Выберем следующие масштабы: характерный геометрический размер  $H$ , скорость  $D/H$ , время  $H^2/D$ , плотность  $\rho_b - \rho_0$ , давление  $(\rho_b - \rho_0)gH$ . Система координат декартова, координаты точки обозначаются как  $(x, y)$ , вектор  $\mathbf{e} = (0, -1)$ . Безразмерными переменными являются скорость фильтрации  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ , давление  $\Pi$  и плотность примеси  $S$ . Переменные  $\Pi$  и  $S$  имеют вид

$$\Pi = \frac{P - P_{\text{in}}}{(\rho_b - \rho_0)gH}, \quad S = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_b - \rho_0}. \quad (3)$$

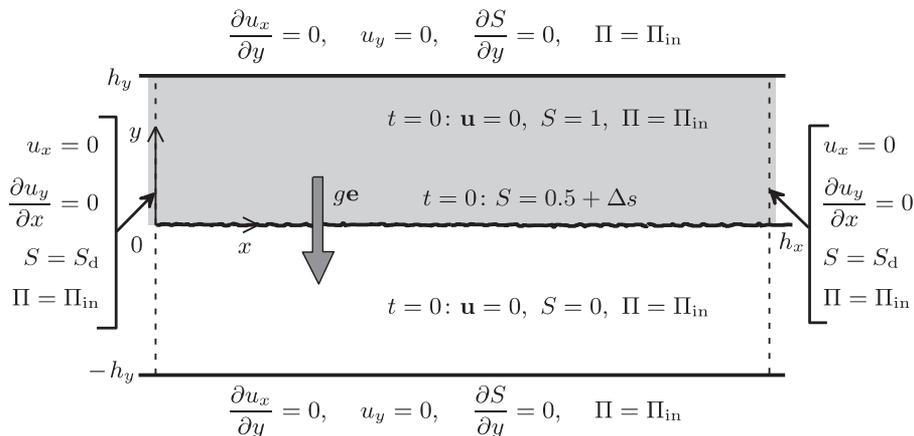


Рис. 1. Постановка задачи.

Эквивалентное определение плотности  $S = \alpha \rho_c / (\rho_b - \rho_0)$  получается при замене  $\rho - \rho_0 = \alpha \rho_c$  в соответствии с уравнением состояния. В результате система уравнений приобретает вид [10]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{u} &= -\text{Ra} \phi (\nabla \Pi - \text{Se}), \\ \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S &= \nabla \cdot (\phi \nabla S). \end{aligned} \quad (4)$$

В этой системе появляется безразмерный параметр – число Рэлея–Дарси

$$\text{Ra} = \frac{(\rho_b - \rho_0) g H k}{\phi \mu D}. \quad (5)$$

Схема задачи, начальные и граничные условия показаны на рис. 1. На этом рисунке величина  $\Pi_{in}$  – это начальное давление, распределение которого задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi_{in} &= 0, & 0 < x < h_x, & \quad -h_y < y \leq 0, \\ \Pi_{in} &= -y, & 0 < x < h_x, & \quad 0 < y < h_y. \end{aligned} \quad (6)$$

Предполагается, что на вертикальных границах плотность примеси меняется со временем  $t$  в соответствии с уравнением диффузии, которое имеет аналитическое решение [12]. Значения плотности, найденные из уравнения диффузии, обозначаются как  $S_d$ :

$$S_d = \frac{1}{2} \left( 1 - \text{erf} \left( \frac{-y}{2t^{1/2}} \right) \right). \quad (7)$$

Считается, что в начальный момент на границе между слоями жидкости существуют механические флуктуации, которые описываются добавочным членом  $\Delta s$ . Величина  $\Delta s$  вычисляется следующим образом:  $\Delta s = \sigma(R - 1/2)$ , где  $R \in [0, 1]$  – случайное число, а  $\sigma$  – амплитуда флуктуаций ( $\sigma \ll 1$ ). При проведении численного моделирования в каждом узле пространственной сетки, попадающем на границу

раздела жидкостей, определялось свое значение  $\Delta s$ . Таким образом, в начальный момент при  $y = 0$  задается условие

$$S = \frac{1}{2} + \Delta s, \quad \Delta s = \sigma \left( R - \frac{1}{2} \right). \quad (8)$$

В работе изучается влияние амплитуды флуктуаций  $\sigma$  на начало и развитие конвективного течения.

### 3. МЕТОД РЕШЕНИЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Базовая система уравнений (4) с начальными и граничными условиями была решена численно с помощью разработанного автором вычислительного кода, который основан на конечно-разностном методе, реализованном на разнесенной неравномерной пространственной сетке. Уравнения неразрывности и Дарси решались совместно по алгоритму типа SIMPLE, затем интегрировалось уравнение переноса примеси. В последнем для аппроксимации конвективного члена использовалась схема QUICK, переход на новый временной слой осуществлялся по двухшаговой схеме Рунге-Кутты второго порядка точности. Детали численного метода описаны в работах [13], [14]. Данный вычислительный код успешно применялся в течение ряда лет для решения задач о концентрационно-конвективных течениях в пористых средах [10], [15]–[17].

В процессе счета на каждом временном слое по полям скорости и плотности определялись интегральные величины, характеризующие конвективное течение и массоперенос. Рассчитывалась средняя плотность примеси  $\langle S(y) \rangle$  на уровне  $y$ :

$$\langle S(y) \rangle = \frac{1}{h_x} \int_0^{h_x} S(x, y) dx. \quad (9)$$

Если на уровне  $y$  происходит перемешивание слоев жидкости, то  $0 < \langle S(y) \rangle < 1$ . Назовем нижней координатой зоны перемешивания величину  $y = y_*$ , такую что  $\langle S(y_*) \rangle = 0.01$ , а верхней координатой – величину  $y = y^*$ , такую что  $\langle S(y^*) \rangle = 0.99$ . Высота зоны перемешивания  $h_c$  определяется как  $h_c = y^* - y_*$ . Ниже на рис. 4 показана величина  $h_c$ , полученная в численном решении.

В задаче также вычислялась удельная кинетическая энергия  $K$ , под которой понимается суммарная кинетическая энергия жидкости в зоне перемешивания единичного объема. В двумерной геометрии полный объем, в котором происходит перемешивание, составляет величину  $h_x h_c$ . Жидкость движется в порах твердого скелета со скоростью  $\mathbf{v} = \mathbf{u}/\phi$ , где  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ , и занимает долю  $\phi$  всего объема. Следовательно,  $K \sim \phi S(v_x^2 + v_y^2)$ . При учете связи между скоростью движения  $\mathbf{v}$  и скоростью фильтрации  $\mathbf{u}$  в среде с постоянным значением  $\phi$  выражение для  $K$  принимает вид

$$K = \frac{1}{2\phi h_x h_c} \int_{y_*}^{y^*} \int_0^{h_x} S(u_x^2 + u_y^2) dx dy. \quad (10)$$

По определению завихренность скорости – это вектор  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ , который в двумерной системе координат имеет одну компоненту  $\omega$  вдоль оси, перпендикулярной плоскости течения:

$$\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (11)$$

Можно перейти к скорости фильтрации  $\mathbf{u}$ , учесть, что жидкость занимает долю объема  $\phi$ , и получить выражение для удельного квадрата завихренности  $\langle \omega^2 \rangle$ . Эта величина представляет собой суммарный квадрат завихренности в единице объема зоны перемешивания,

$$\langle \omega^2 \rangle = \frac{1}{\phi h_x h_c} \int_{y_*}^{y^*} \int_0^{h_x} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 dx dy. \quad (12)$$

По величине  $K$  можно судить об интенсивности движения жидкости, в то время как величина  $\langle \omega^2 \rangle$  характеризует ее перемешивание.

#### 4. ПАРАМЕТРЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Чтобы при проведении численного моделирования наблюдать в расчетной области развитую стохастическую конвекцию, следует выбрать число Рэлея–Дарси  $Ra \gg 1$ . Мы изучаем процесс, пока конвективные “пальцы” не достигли горизонтальных границ расчетной области, т. е. считаем, что конвекция развивается в бесконечной физической области. При таком условии нет характерного масштаба длины, который определялся бы из постановки задачи, поэтому входящий в  $Ra$  геометрический размер  $H$  является лишь некоторой произвольно выбранной величиной. Следовательно, число  $Ra$  не является критерием подобия и параметры течения не зависят от  $Ra$ .

Моделирование проводилось при  $Ra = 2.67 \cdot 10^3$ . Были использованы два набора численных параметров. В серии I выбиралась расчетная область  $10 \times 6$  и шаги сетки по  $x$ - и  $y$ -направлениям  $\Delta x = 2.5 \cdot 10^{-3}$  и  $\Delta y = 3.0 \cdot 10^{-3}$ , шаг интегрирования по времени был принят равным  $\Delta t = 1.0 \cdot 10^{-7}$ . Для серии II были выбраны область  $8 \times 4$ ,  $\Delta x = 1.6 \cdot 10^{-3}$  и  $\Delta y = 2.0 \cdot 10^{-3}$ ,  $\Delta t = 0.5 \cdot 10^{-7}$ . При расчетах использовалась равномерная пространственная сетка, причем выбирались разные сетки, чтобы продемонстрировать, что решение не зависит от дискретизации по пространству. Тестирование показало, что уменьшение шага  $\Delta t$  не влияет на решение.

Амплитуда флуктуаций  $\sigma$  варьировалась в диапазоне  $\sigma \in [10^{-8}, 10^{-2}]$ . В обеих сериях расчетов величина  $\sigma$  уменьшалась на порядок от варианта к варианту, и задача решалась дважды при каждом  $\sigma$ , при этом всякий раз генерировался новый ряд случайных чисел  $R$ , определяющий флуктуации  $\Delta s$  в точках границы (8). Таким образом были получены 28 вариантов численного решения задачи.

#### 5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В рассматриваемой задаче обычно выделяют три стадии. Первоначально система находится в состоянии механического равновесия, и распространение примеси из верхней части области в нижнюю происходит только за счет диффузии, со временем диффузионная (переходная между слоями) зона расширяется. Затем рост малых возмущений приводит к появлению согласованного движения, в переходной зоне формируется конвективное движение. В аналитических исследованиях устойчивости, в которых рассматривается линеаризованная система уравнений, неустойчивое состояние приводит к периодическому движению с выделенной длиной волны возмущения. В численных решениях на основе полной системы уравнений визуализируется квазипериодическая структура конвекции. В более поздние времена движение усиливается, перестраивается и переходит в стохастическую стадию.

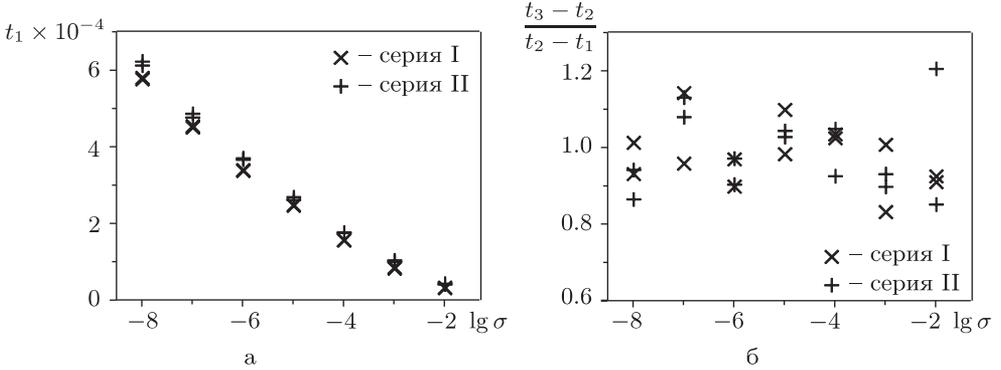


Рис. 2. Время начала конвекции  $t_1$  (а) и отношение  $(t_3 - t_2)/(t_2 - t_1)$  (б) в зависимости от амплитуды флуктуаций  $\sigma$ .

Время начала конвекции может определяться по-разному. Например, в нашей работе [10], следуя рассуждениям и терминологии из статьи [9], по численным результатам мы находили два характерных времени: критическое время (соответствующее началу роста скорости движения), которое по смыслу близко ко времени потери устойчивости в аналитических исследованиях, и видимое время (соответствующее при расчетах началу отклонения зоны перемешивания от диффузионной зоны в неподвижной среде), которое ассоциируется с обнаружением конвекции в экспериментах. В результате получилось, что второе время может быть больше первого в несколько десятков раз. В настоящей работе считается, что в момент начала конвекции максимальная скорость движения жидкости  $|\mathbf{V}|_{\max}$  достигает значения характерной диффузионной скорости  $D/H_c$ , построенной по высоте диффузионной зоны  $H_c$  в данный момент времени:  $|\mathbf{V}|_{\max} = D/H_c$  (все величины размерные). Преобразуя данное условие к безразмерному виду, можно получить, что  $|\mathbf{v}|_{\max} h_c = 1$  или, переходя к скорости фильтрации,  $|\mathbf{u}|_{\max} h_c / \phi = 1$ . При этом мы учитываем, что, пока конвекция не развилась, диффузионная зона совпадает с зоной перемешивания. Будем обозначать время начала конвекции как  $t_1$ . Зависимость  $t_1$  от амплитуды флуктуаций  $\sigma$  показана на рис. 2а. Как видно, при уменьшении  $\sigma$  значение  $t_1$  существенно увеличивается. При  $\sigma = 10^{-8}$  время  $t_1$  больше, чем при  $\sigma = 10^{-2}$ , примерно в 15 раз.

Поведение кинетической энергии  $K$  и квадрата завихренности  $\langle \omega^2 \rangle$  при развитии конвекции показано на рис. 3. Кривые  $K$  и  $\langle \omega^2 \rangle$  при одинаковом  $\sigma$  проходят через локальный максимум примерно в одно и то же время, указывая, что в это время в системе происходят существенные изменения. Обозначим момент времени, соответствующий максимуму  $K$ , как  $t_2$ . Затем значения  $K$  и  $\langle \omega^2 \rangle$  уменьшаются, кривая  $K$  доходит до локального минимума в момент времени, который мы обозначим как  $t_3$ . Квадрат завихренности  $\langle \omega^2 \rangle$  после максимума монотонно уменьшается (сначала резко, затем медленно) и становится со временем практически не зависящим от  $\sigma$ . На рис. 3а вертикальными пунктирными линиями отмечены времена  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  для кривой 2.

Для варианта, который на рис. 3 представлен кривыми 2, на рис. 4 показаны изолинии плотности примеси  $S$  в части расчетной области. Значение  $S$  увеличивается

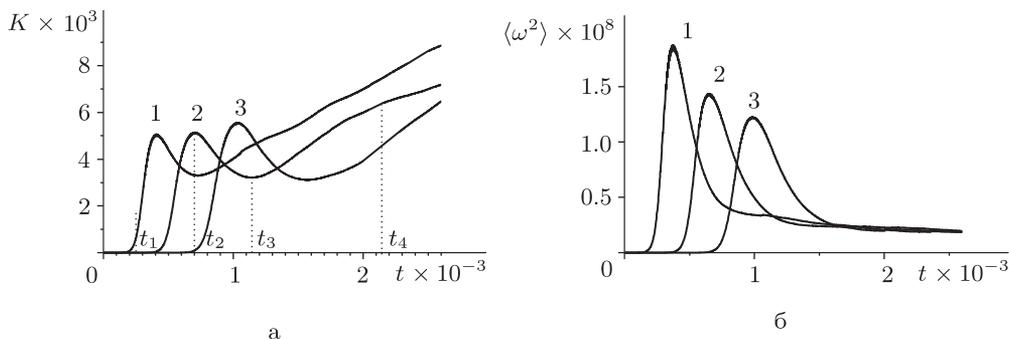


Рис. 3. Удельная кинетическая энергия  $K$  и удельный квадрат завихренности  $\langle \omega^2 \rangle$  в зависимости от времени в серии расчетов I при  $\sigma = 10^{-3}$  (вариант 1),  $10^{-5}$  (вариант 2),  $10^{-7}$  (вариант 3). Моменты времени  $t_1, t_2, t_3, t_4$  соответствуют варианту 2.

от 0 до 1 при переходе от светлого тона к темному. Момент времени  $t$  на рис. 4а совпадает с  $t_1$ , на рис. 4б является промежуточным между  $t_1$  и  $t_2$ , на рис. 4в совпадает с  $t_2$ , а на рис. 4г совпадает с  $t_3$ . В момент  $t_1$ , в который, как считается, система теряет устойчивость, конвективное движение еще не визуализируется. Это момент, когда начальная диффузионная стадия процесса только закончилась. Возмущение переходной зоны становится заметным позже – на рис. 4б видны волнообразные искривления изолиний плотности. На рис. 4в конвективные “пальцы” движутся вверх и вниз с примерно одинаковой скоростью. На рис. 4г некоторые “пальцы” движутся существенно быстрее, чем остальные, вырываясь вперед (вверх в подъемном течении и вниз в опускном), увеличивается разброс по скоростям, наблюдается переход к стохастической стадии. Можно заключить, что в период между временами  $t_1$  и  $t_2$  наблюдается удлинение “пальцев” с примерно одинаковой скоростью, тогда как в момент  $t_2$  начинается разрушение исходного квазипериодического движения: между временами  $t_2$  и  $t_3$  “пальцы” движутся с существенно разными скоростями, в некоторых местах происходит их деформация и слияние. Процесс перехода к стохастической конвекции сопровождается уменьшением с течением времени удельной кинетической энергии  $K$  и резким уменьшением квадрата завихренности  $\langle \omega^2 \rangle$  вплоть до момента  $t_3$ . Можно предположить, что в момент  $t_3$  меняется сценарий разрушения квазипериодической структуры.

Как видно на рис. 3а, чем меньше амплитуда флуктуаций  $\sigma$ , тем позже кинетическая энергия  $K$  проходит через максимум и минимум, т. е. значения времени  $t_2$  и  $t_3$  становятся больше. Из анализа всех вариантов получается, что при уменьшении  $\sigma$  от  $10^{-2}$  до  $10^{-8}$  время  $t_2$  возрастает в среднем в 4.1 раза, а время  $t_3$  – в 3.3 раза. Продолжительность этапа квазипериодической конвекции составляет  $t_2 - t_1$ , продолжительность первой фазы перестройки квазипериодического движения в стохастическое равна  $t_3 - t_2$ . Отношение этих двух временных периодов продемонстрировано на рис. 2б. Можно заметить, что  $(t_3 - t_2)/(t_2 - t_1)$  является величиной, близкой к единице с точностью не ниже  $\pm 20\%$  независимо от  $\sigma$ . Таким образом, если флуктуации уменьшаются, то развитие динамического процесса происходит в увеличенном временном масштабе.

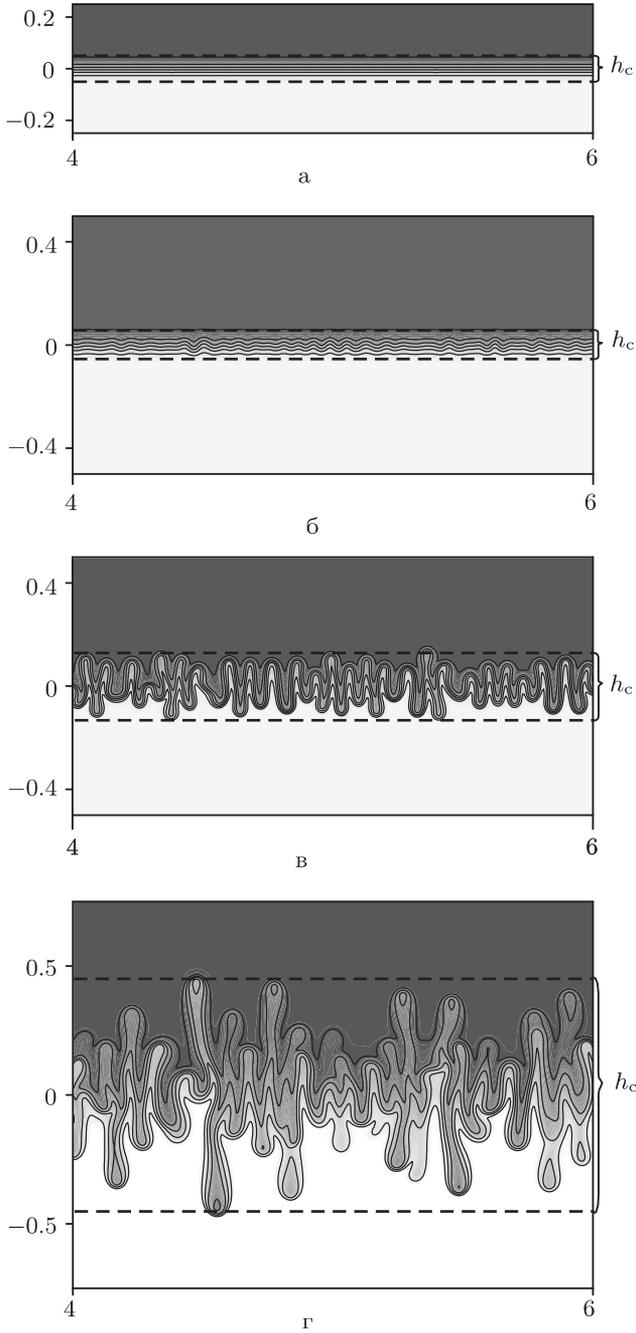


Рис. 4. Изолинии плотности  $S$ , полученные в серии I при  $\sigma = 10^{-5}$  в моменты времени  $t = 0.248 \cdot 10^{-3}$  (а),  $t = 0.463 \cdot 10^{-3}$  (б),  $t = 0.678 \cdot 10^{-3}$  (в),  $t = 0.115 \cdot 10^{-2}$  (г); здесь  $h_c$  – высота зоны перемешивания.

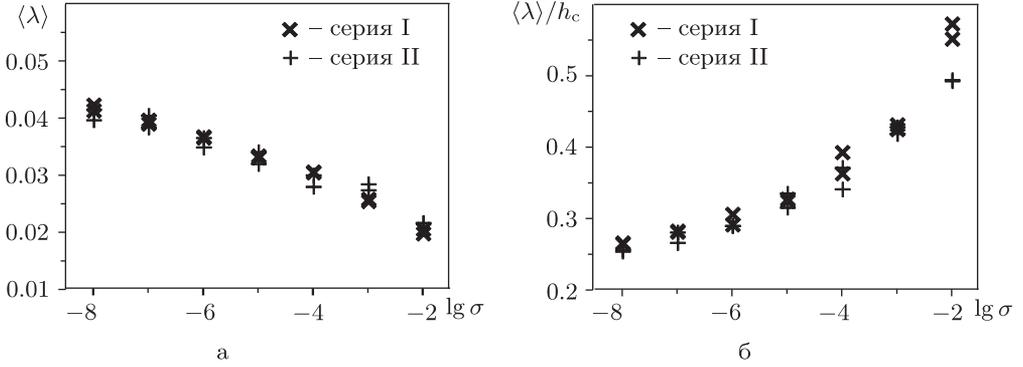


Рис. 5. Средняя ширина конвективных “пальцев”  $\langle \lambda \rangle$  на уровне  $y = 0$  (а) и отношение  $\langle \lambda \rangle / h_c$  (б) в момент времени  $t = t_1$  в зависимости от амплитуды флуктуаций  $\sigma$ .

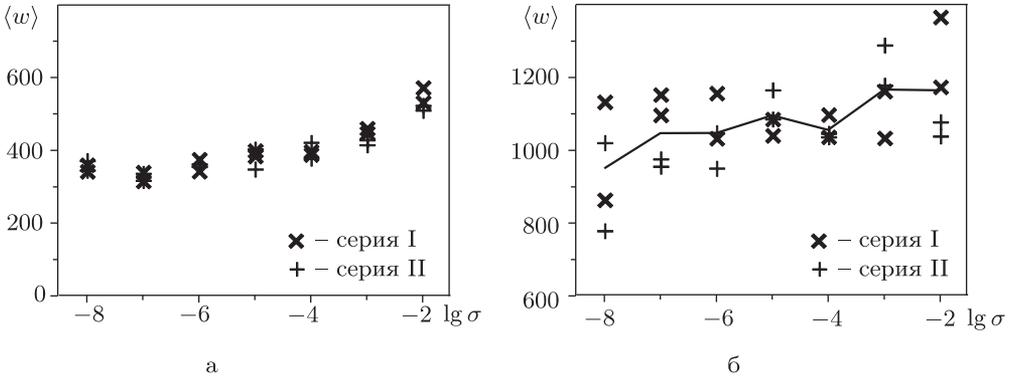


Рис. 6. Средняя скорость  $\langle w \rangle$  увеличения зоны перемешивания на временных интервалах  $t_2 - t_1$  (а) и  $t_4 - t_3$  (б) в зависимости от амплитуды флуктуаций  $\sigma$ .

Проведем анализ средней ширины  $\langle \lambda \rangle$  конвективных “пальцев” на начальном (квазипериодическом) этапе конвекции. Пока конвекции нет, вертикальная компонента скорости движения  $v_y(x, 0)$  на уровне начального расположения границы между слоями равна нулю при всех  $x$ . С появлением конвективного движения мы имеем  $v_y(x, 0) > 0$  в поднимающихся “пальцах” и  $v_y(x, 0) < 0$  в опускающихся “пальцах”. Количество точек, в которых меняется знак величины  $v_y(x, 0)$ , соответствует числу “пальцев”; средняя ширина  $\langle \lambda \rangle$  есть длина области, деленная на это число.

На рис. 5а приведены значения  $\langle \lambda \rangle$  в зависимости от  $\sigma$ , рассчитанные в момент появления конвекции, при  $t = t_1$ . Видно, что чем меньше  $\sigma$ , тем больше  $\langle \lambda \rangle$ . Как показано выше, с уменьшением  $\sigma$  время  $t_1$  возрастает, поэтому можно заключить, что если конвекция начинается позже, то величина  $\langle \lambda \rangle$  будет больше. Действительно, высота переходного слоя между жидкостями увеличивается со временем, поэтому чем позже слой начинает деформироваться, тем более крупные конвектив-

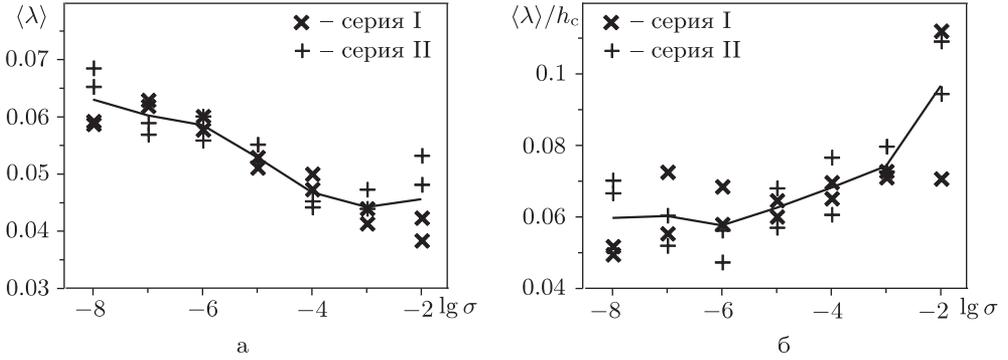


Рис. 7. То же, что на рис. 5, в момент времени  $t = t_3$ .

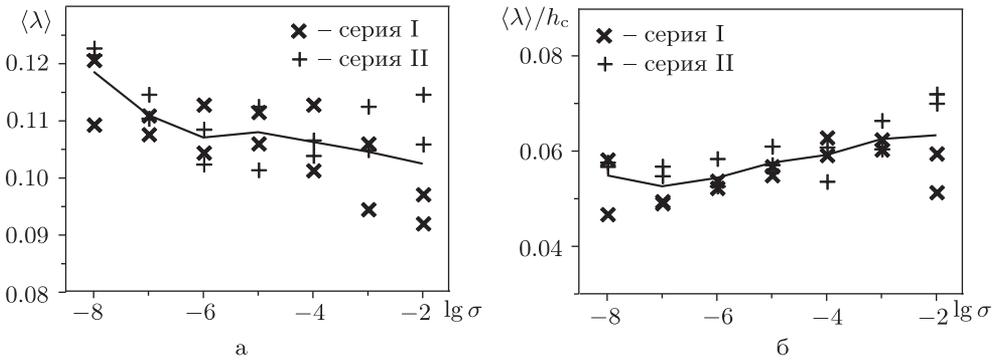


Рис. 8. То же, что на рис. 5, в момент времени  $t = t_4$ .

ные “пальцы” образуются. При уменьшении  $\sigma$  от  $10^{-2}$  до  $10^{-8}$  высота  $h_c$  в момент времени  $t_1$  возрастает в среднем в 4.3 раза, а ширина  $\langle \lambda \rangle$  – в 2.0 раза. На рис. 5б приведено отношение  $\langle \lambda \rangle / h_c$ , которое, как видно, уменьшается вместе с  $\sigma$ . Можно сделать вывод, что горизонтальный и вертикальный пространственные масштабы конвективной структуры (величины  $\langle \lambda \rangle$  и  $h_c$ ) зависят от времени начала конвекции, которое, в свою очередь, зависит от амплитуды  $\sigma$  начальных флуктуаций. Отношение  $\langle \lambda \rangle / h_c$  также меняется вместе с  $\sigma$ .

Можно оценить среднюю скорость  $\langle w \rangle$ , с которой расширяется зона перемешивания на каком-либо временном интервале  $\Delta t$ :

$$\langle w \rangle = \frac{h_c(t + \Delta t) - h_c(t)}{\Delta t}.$$

На рис. 6а приведены значения  $\langle w \rangle$  для квазипериодического этапа конвекции, рассчитанные при  $t = t_1$ ,  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Мы видим, что величина  $\langle w \rangle$  уменьшается во всем диапазоне значений  $\sigma$  в среднем в 1.67 раза.

Согласно рис. 5 и рис. 6а характеристики квазипериодической конвекции чувствительны к начальным флуктуациям. Возникает вопрос: как долго заметно влияние флуктуаций? Проанализируем значения  $\langle \lambda \rangle$ ,  $\langle \lambda \rangle / h_c$  и  $\langle w \rangle$  в нерегулярном переходном течении. Выберем еще один момент времени, наступающий существенно позже

начала разрушения квазипериодической структуры: возьмем для определенности  $t_4 = t_3 + 10^{-3}$ . На рис. 3а отмечено время  $t_4$  для кривой 2. На рис. 7, рис. 8 приведены значения  $\langle \lambda \rangle$  и  $\langle \lambda \rangle / h_c$  при  $t = t_3$  и  $t = t_4$  соответственно. В нерегулярном течении наблюдается существенный разброс численных результатов, поэтому при каждом  $\sigma$  мы нашли усредненные величины как среднее арифметическое значений, полученных в четырех вариантах расчета при фиксированном  $\sigma$ . Усредненные величины соединены сплошной кривой. Результаты показывают тенденцию возрастания усредненной ширины  $\langle \lambda \rangle$  с уменьшением  $\sigma$  при  $t = t_3$  аналогично тому, что продемонстрировано на рис. 5а для квазипериодического движения; рост величины  $\langle \lambda \rangle$  происходит в среднем в 1.38 раза на всем интервале значений  $\sigma$ . В момент  $t = t_4$  усредненное значение  $\langle \lambda \rangle$  увеличивается лишь в 1.16 раза. Можно заметить, что при  $t = t_4$  значения  $\langle \lambda \rangle$  становятся существенно больше, чем при  $t = t_3$ , т. е. в этот период происходит интенсивное слияние конвективных “пальцев” и возрастание горизонтального геометрического масштаба течения. Отношение  $\langle \lambda \rangle / h_c$  при  $t = t_3$  уменьшается вместе с  $\sigma$  в среднем в 1.62 раза, при  $t = t_4$  уменьшение уже незначительное, в среднем в 1.15 раза.

На рис. 6б представлена скорость увеличения зоны перемешивания  $\langle w \rangle$  на временном интервале  $[t_3, t_4]$ . Сплошная линия, как и на рис. 7, рис. 8, соединяет усредненные значения, которые становятся меньше в 1.23 раза при уменьшении  $\sigma$  от  $10^{-2}$  до  $10^{-8}$ . Таким образом, при разрушении исходной квазипериодической структуры в переходном режиме конвекции влияние начальных флуктуаций плотности прослеживается достаточно долго.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовалось начало и развитие конвекции Рэлея–Тейлора в пористой среде в зависимости от начальных механических флуктуаций плотности на границе между слоями жидкостей. Был рассмотрен случай смешивающихся жидкостей, для которых характерно нестационарное состояние механического равновесия, обусловленное увеличивающейся со временем диффузионной зоной между слоями. Получено, что, чем меньше амплитуда флуктуаций  $\sigma$ , тем позднее формируется конвективное движение. В частности, при уменьшении  $\sigma$  от  $10^{-2}$  до  $10^{-8}$  время начала конвекции увеличивается примерно в 15 раз. Если конвекция возникает позже, то высота диффузионной зоны в момент начала ее образования оказывается больше. Как следствие, с уменьшением флуктуаций образуются более широкие конвективные “пальцы”, а средняя на этапе квазипериодической конвекции скорость роста зоны перемешивания уменьшается.

Мы показали, что в начале движения происходит примерно одинаковое удлинение конвективных “пальцев”. Разрушение квазипериодической структуры начинается с того, что скорость распространения некоторых “пальцев” становится существенно больше, чем остальных; в отдельных местах “пальцы” начинают сливаться. Обнаружено, что начало перехода к стохастической стадии соответствует локальному максимуму на кривых удельной кинетической энергии и удельного квадрата завихренности. При больших временах кривая кинетической энергии проходит через минимум, что, вероятно, связано с изменением сценария разрушения квазипериодического течения.

В работе была предпринята первая попытка проанализировать влияние начальных флуктуаций на нерегулярное конвективное течение. Мы оценили среднюю ширину конвективных “пальцев” на линии начального расположения границы между слоями жидкости, а также отношение этой ширины к высоте зоны перемешивания, которое представляет собой отношение характерных геометрических масштабов конвекции (горизонтального к вертикальному) и среднюю скорость роста зоны перемешивания. Были рассмотрены два момента времени, существенно более поздние, чем время начала разрушения квазипериодической конвективной структуры. Для достоверности при каждом  $\sigma$  расчеты проводились четыре раза с использованием двух наборов численных параметров. Варианты отличались друг от друга рядом случайных чисел, определяющим флуктуации плотности в точках границы. По четырем полученным значениям находилось их среднее арифметическое. Результаты показали, что зависимость усредненных таким образом величин от амплитуды начальных флуктуаций становится со временем менее заметной. Однако влияние флуктуаций на усредненные характеристики движения и перемешивания прослеживается в течение длительного времени.

**Благодарности.** Автор благодарит Г. Г. Цыпкина за полезные обсуждения.

**Конфликт интересов.** Автор заявляет, что у нее нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] P. G. Drazin, W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.
- [2] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. 9: *Статистическая физика. Часть 2. Теория конденсированного состояния*, Физматлит, М., 2004.
- [3] J. M. Ortiz de Zárate, J. V. Sengers, *Hydrodynamic Fluctuations in Fluids and Fluid Mixtures*, Elsevier, New York, 2006.
- [4] C. Zhao, J. Zhao, T. Si, S. Chen, “Influence of thermal fluctuations on nanoscale free-surface flows: A many-body dissipative particle dynamics study”, *Phys. Fluids*, **33**:11 (2021), 112004.
- [5] H. E. Huppert, J. A. Neufeld, “The fluid mechanics of carbon dioxide sequestration”, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **46** (2014), 255–272.
- [6] H. Emami-Meybodi, H. Hassanzadeh, C. P. Green, J. Ennis-King, “Convective dissolution of CO<sub>2</sub> in saline aquifers: Progress in modeling and experiments”, *Internat. J. Greenhouse Gas Control*, **40** (2015), 238–266.
- [7] A. Riaz, M. Hesse, H. A. Tchelepi, F. M. Orr, “Onset of convection in a gravitationally unstable diffusive boundary layer in porous media”, *J. Fluid Mech.*, **548** (2006), 87–111.
- [8] S. Rapaka, S. Chen, R. J. Pawar, P. H. Stauffer, D. Zhang, “Non-modal growth of perturbations in density-driven convection in porous media”, *J. Fluid Mech.*, **609** (2008), 285–303.
- [9] M. Bestehorn, A. Firoozabadi, “Effect of fluctuations on the onset of density-driven convection in porous media”, *Phys. Fluids*, **24**:11 (2012), 114102 pp.
- [10] Е. Б. Соболева, “Начало конвекции Рэлея–Тейлора в пористой среде”, *Изв. РАН. Сер. МЖГ*, 2021, № 2, 52–62.
- [11] J. Bear, A. Cheng, *Modeling Groundwater Flow and Contaminant Transport*, Theory and Applications of Transport in Porous Media, **23**, Springer, New York, 2010.
- [12] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, т. VI: *Гидродинамика*, Наука, М., 1988.

- [13] Е. В. Соболева, “Метод численного исследования динамики соленой воды в почве”, *Матем. моделирование*, **26**:2 (2014), 50–64.
- [14] Е. В. Соболева, “Метод численного моделирования концентрационно-конвективных течений в пористых средах в приложении к задачам геологии”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **59**:11 (2019), 1961–1972.
- [15] Е. В. Соболева, Г. Г. Цыпкин, “Численное моделирование конвективных течений в грунте при испарении воды, содержащей растворенную примесь”, *Изв. РАН. Сер. МЖТ*, 2014, № 5, 81–92.
- [16] E. Soboleva, “Numerical simulation of haline convection in geothermal reservoirs”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **891**:1 (2017), 012105, 10 pp.
- [17] E. V. Soboleva, “Density-driven convection in an inhomogeneous geothermal reservoir”, *Internat. J. Heat Mass Transfer*, **127**, Part C (2018), 784–798.

Поступила в редакцию 16.01.2022,  
после доработки 15.02.2022,  
принята к публикации 15.02.2022