М. Н. Хоунконю, М. Дж. Ландалиджи, М. Митрович, Гамильтонова динамика космического аппарата в метриках Алькубьерре и Гёделя: операторы рекурсии и лежащие в их основе мастер-симметрии, *ТМФ*, 2022, том 212, номер 1, 129–148

DOI: 10.4213/tmf10209

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 212, № 1
июль, 2022

 М. Н. Хоунконю[∗†], М. Дж. Ландалиджи[∗†], М. Митрович[‡∗†]

ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В МЕТРИКАХ АЛЬКУБЬЕРРЕ И ГЁДЕЛЯ: ОПЕРАТОРЫ РЕКУРСИИ И ЛЕЖАЩИЕ В ИХ ОСНОВЕ МАСТЕР-СИММЕТРИИ

Изучается гамильтонова динамика космического аппарата на фоне метрик Алькубьерре и Гёделя. Получены гамильтоновы векторные поля, управляющие эволюцией системы, построены и обсуждаются операторы рекурсии, порождающие константы движения. Кроме того, описаны соответствующие мастер-симметрии.

Ключевые слова: гамильтонова динамика, метрика Алькубьерре, скобка Пуассона, метрика Гёделя, оператор рекурсии, мастер-симметрия.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10209

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1949 г. Гёдель [1] нашел решение уравнений Эйнштейна, соответствующее однородному распределению массы, которая вращается в каждой точке пространства (см. также работу [2]). Такое распределение материи вызывает необычные эффекты, в частности существование замкнутых времениподобных линий. Метрика Гёделя обладает тем преимуществом, что она имеет весьма компактный вид, при этом большинство вычислений может быть выполнено аналитически [3]. Результат Гёделя делает очевидным тот факт, что общая теория относительности допускает

М. Митрович поддержана Faculty of Mechanical Engineering, University of Niš, Serbia (грант “Research and development of new generation machine systems in the function of the technological development of Serbia”).

[∗]International Chair of Mathematical Physics and Applications (ICMPA-UNESCO Chair), University of Abomey-Calavi, Cotonou, Benin. E-mail: norbert.hounkonnou@cipma.uac.bj, landalidjijustin@yahoo.fr, melanija.mitrovic@masfak.ni.ac.rs

[†]Centre International de Recherches et d’Etude Avancées en Sciences Mathématiques & Informatiques et Applications (CIREASMIA), Cotonou, Benin

[‡]Center of Applied Mathematics, Faculty of Mechanical Engineering (CAM-FMEN), University of Niš, Niš, Serbia

решения с замкнутыми времениподобными мировыми линиями, даже когда метрика локально лоренцева, что приводит к регулярной хронологии и, как следствие, к локальному подтверждению принципа причинности [4]. В последние десятилетия изучение замкнутых времениподобных линий привлекло внимание многих авторов (см., например, [2]–[6]). В частности, в 2004 г. Каджари с соавторами [3] представили точные результаты для эффекта Саньяка во Вселенной Гёделя. Они выразили временну́ю задержку Саньяка в метрике Гёделя через инвариантные физические величины и показали, что это выражение очень схоже с аналогичной формулой во вращающейся системе координат в пространстве-времени Минковского.

Кроме того, известно, что в общей теории относительности скорость, превышающая скорость света, запрещена только локально [2]. Это не так экзотично, как может показаться на первый взгляд. Например, расширение Вселенной может привести к тому, что две отдаленные галактики будут двигаться со сверхсветовой скоростью друг относительно друга, в то время как каждая из них движется локально внутри своего светового конуса. Возможно и обратное: если пространство-время сжимается достаточно быстро, то эти две галактики локально (внутри своего светового конуса) движутся в противоположных направлениях каждая со скоростью, близкой к скорости света, но глобально сближаются. С учетом этих соображений Алькубьерре в 1994 г. ввел в рамках общей теории относительности так называемую метрику варп-двигателя [7], которая в принципе допускает сверхсветовое движение, т. е. путешествие со скоростью больше скорости света [2], [8]. Идея Алькубьерре состоит в том, чтобы создать впереди объекта (например, космического аппарата) сжатие пространства-времени, а позади объекта – расширение. Таким образом, и сжатие, и расширение будут толкать объект вперед [2]. Локально объект будет находиться внутри своего светового конуса, но из-за этой манипуляции с пространством-временем он будет двигаться со сверхсветовой скоростью по сравнению со скоростью света c в плоском пространственно-временном вакууме. Тем самым объект находится внутри так называемого деформационного пузыря и, следовательно, может перемещаться со сколь угодно высокими скоростями, не нарушая законов специальной и общей теории относительности или других известных физических законов [8]. На основе идеи Алькубьерре были проведены многочисленные исследования (см., например, [2], [8]).

В последние несколько десятилетий возродился интерес к полностью интегрируемым гамильтоновым системам, концепция которых восходит к работам Лиувилля 1897 г. [9] и Пуанкаре 1899 г. [10]. Если не вдаваться в подробности, вполне интегрируемые системы определяются как нелинейные дифференциальные уравнения, допускающие гамильтоново описание и обладающие достаточно большим количеством констант движения, чтобы их можно было интегрировать в квадратурах [11]. Многие из этих систем подчиняются гамильтоновой динамике относительно двух совместных симплектических структур [12]–[14], что позволяет дать геометрическую интерпретацию так называемого оператора рекурсии [15]. Описание интегрируемости, работающее как для систем с конечным числом степеней свободы, так и для теории поля, может быть дано в терминах инвариантного диагонализуемого смешанного $(1,1)$-тензорного поля, имеющего двумерные собственные пространства и обращающееся в нуль кручение Нийенхейса.

Оператор рекурсии с исчезающим кручением Нийенхейса служит основой плодотворных методов описания вполне интегрируемых систем с инволютивными гамильтоновыми функциями или константами движения. В работе [16] Такеучи построил операторы рекурсии гамильтоновых векторных полей геодезических потоков для некоторых римановых метрик и метрик Минковского и получил соответствующие константы движения. В своей работе он использовал пять частных решений уравнения Эйнштейна (в метриках Шварцшильда, Рейсснера–Нордстрёма, Керра, Керра–Ньюмена и Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера) и построил операторы рекурсии, приводящие к полной интегрируемости гамильтоновых функций. В 2019 г. мы исследовали ту же задачу в некоммутативном фазовом пространстве Минковского и задачу Кеплера в деформированном фазовом пространстве и получили соответствующие константы движения [17], [18].

Со времени работы Магри [13] интегрируемость, связанная с бигамильтоновыми структурами [12], стала одним из наиболее эффективных методов исследования интегрируемости эволюционных уравнений как в конечномерных, так и в бесконечномерных динамических системах [15], [19]. Если вполне интегрируемая гамильтонова система допускает бигамильтонову структуру, то из нее можно получить бесконечные иерархии сохраняющихся величин, используя конструкцию Увела [20], которая основана на масштабных инвариантах и мастер-симметриях [21], [22]. В работах [19], [22] Смирнов сформулировал конструктивный метод приведения вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы к бигамильтоновой форме Магри–Мороси–Гельфанда–Дорфмана. В работе [23] было доказано существование бигамильтоновой структуры, возникающей из несимплектической симметрии, а также, в некоторых частных случаях, существование мастер-симметрий и дополнительных интегралов движения (слабая суперинтегрируемость). Недавно в работе [24] мы также построили иерархию бигамильтоновых структур для задачи Кеплера и вычислили сохраняющиеся величины, используя соответствующие мастер-симметрии.

В настоящей работе мы рассматриваем гамильтонову динамику космического аппарата в метриках Алькубьерре и Гёделя. Мы находим операторы рекурсии и обсуждаем соответствующие мастер-симметрии. Мы доказываем, что эти две модели удовлетворяют одним и тем же уравнениям динамики и имеют набор сходных мастер-симметрий.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы формулируем основные математические положения, используемые в работе. В разделе 3 мы определяем гамильтонову функцию, симплектическую форму и векторное поле, описывающее гамильтонову динамику космического аппарата в метрике Алькубьерре, и строим соответствующие операторы рекурсии. В разделе 4 мы проводим аналогичное исследование в метрике Гёделя. В разделе 5 мы вводим бигамильтоновы структуры, определяем иерархию мастер-симметрий и вычисляем соответствующие сохраняющиеся величины. Раздел 6 содержит некоторые заключительные замечания.

2. ОПЕРАТОР РЕКУРСИИ И МАСТЕР-СИММЕТРИЯ

Описание интегрируемой гамильтоновой системы было дано де Филиппо с соавторами в работе [11], где была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть X – динамическое векторное поле на $2n$-мерном многообразии $\mathcal{M}$. Если X допускает диагонализуемое смешанное* $(1,1)$*-тензорное поле T,* *инвариантное под действием поля X, которое имеет нулевое кручение Нийенхейса и дважды вырожденные собственные значения с дифференциалами, нигде не равными нулю, то существует симплектическая структура и гамильтонова функция H, такие что векторное поле X является для H гамильтоновым векторным полем с разделенными переменными и H вполне интегрируема относительно данной симплектической структуры.*

Такое $(1,1)$-тензорное поле T называется оператором рекурсии для векторного поля X. В частном случае пространства $\mathbb{R}^{2n}$ оператор рекурсии можно построить следующим образом [16].

Лемма 1. *Рассмотрим следующие векторные поля на $\mathbb{R}^{2n}$:*

$$X_l = -\frac{\partial}{\partial x_{n+l}}, \qquad l = 1, \dots, n.$$

Пусть T – $(1,1)$-тензорное поле на $\mathbb{R}^{2n}$, заданное как

$$T = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_i + \frac{\partial}{\partial x_{n+i}} \otimes dx_{n+i} \right).$$

Тогда тензорное поле T имеет нулевые кручение Нийенхейса $\mathcal{N}_T$ и производную Ли $\mathcal{L}_{X_l}$,

$$(\mathcal{N}_T)^h_{ij} := T^k_i \frac{\partial T^h_j}{\partial x^k} - T^k_j \frac{\partial T^h_i}{\partial x^k} + T^h_k \frac{\partial T^k_i}{\partial x^j} - T^h_k \frac{\partial T^k_j}{\partial x^i} = 0, \qquad \mathcal{L}_{X_l} T = 0,$$

т.е. $(1,1)$-тензорное поле T является оператором рекурсии для X_l $(l = 1, \dots, n)$.

Пусть задана общая динамическая система, определенная на $2n$-мерном многообразии $\mathcal{Q}$ [19]:

$$\dot{x}(t) = X(x), \qquad x \in \mathcal{Q}, \quad X \in \mathcal{T}\mathcal{Q}, \tag{1}$$

где $\mathcal{T}\mathcal{Q}$ – касательное расслоение многообразия $\mathcal{Q}$. Если система (1) допускает два различных гамильтонова представления

$$\dot{x}(t) = X_{H_1,H_2} = \mathcal{P}_1\, dH_1 = \mathcal{P}_2\, dH_2, \tag{2}$$

то ее интегрируемость, а также многие другие свойства можно исследовать в рамках подхода Магри, т.е. считать, что бигамильтоново векторное поле X_{H_1,H_2} определяется двумя пуассоновыми бивекторами $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ и двумя гамильтоновыми функциями H_1, H_2. Пуассоновы бивекторы $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ совместны и имеют нулевую скобку Схоутена–Нийенхейса [25]: $[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2]_{\text{SN}} = 0$. Такое многообразие $\mathcal{Q}$, снабженное двумя пуассоновыми бивекторами, называется двойным пуассоновым многообразием, а четверка $(\mathcal{Q}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, X_{H_1,H_2})$ называется бигамильтоновой системой.

В терминах дифференциальной геометрии векторное поле Y на кокасательном расслоении $\mathcal{T}^*\mathcal{Q}$, которое удовлетворяет условиям

$$[X_{H'}, Y] \neq 0, \qquad [X_{H'}, X] = 0, \qquad [X_{H'}, Y] = X,$$

называется мастер-симметрией или генератором симметрий степени $m = 1$ гамильтонова векторного поля $X_{H'}$ [21], [23], [26]–[28].

3. ОПЕРАТОР РЕКУРСИИ ГАМИЛЬТОНОВА ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ В МЕТРИКЕ АЛЬКУБЬЕРРЕ

В этой работе без потери общности мы рассматриваем следующий частный случай метрики Алькубьерре [7], описывающей движение космического аппарата вдоль оси x декартовой системы координат:

$$ds^2 = -dt^2 + (dx - v_{\mathrm{s}} f(r_{\mathrm{s}})\,dt)^2 + dy^2 + dz^2.$$

В данном случае

$$\alpha = 1, \quad \beta_2 = -v_{\mathrm{s}} f(r_{\mathrm{s}}), \quad \beta_3 = \beta_4 = 0, \quad \gamma_{ij} = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} \text{ – символ Кронекера}),$$

где

$$v_{\mathrm{s}} = \frac{dx_{\mathrm{s}}(t)}{dt}, \qquad r_{\mathrm{s}}(t) = ((x - x_{\mathrm{s}}(t))^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$$
$$f(r_{\mathrm{s}}) = \frac{\operatorname{th}(\sigma(r_{\mathrm{s}} + R)) - \operatorname{th}(\sigma(r_{\mathrm{s}} - R))}{2\operatorname{th}(\sigma R)}$$

с произвольными параметрами $\sigma > 0$, $R > 0$. При этом

$$\lim_{\sigma\to\infty} f(r_{\mathrm{s}}) = \begin{cases} 1 & \text{при } r_{\mathrm{s}} \in]-R, R[, \\ \dfrac{1}{2} & \text{при } r_{\mathrm{s}} \in \{-R, R\}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В пределе $\sigma \to \infty$ при $r_{\mathrm{s}} \in]-R, R[$ эта метрика Алькубьерре принимает вид

$$ds^2 = -dt^2 + (dx - v_{\mathrm{s}}\,dt)^2 + dy^2 + dz^2, \tag{3}$$

а метрический тензор и его обратный задаются как

$$g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} -(1 - v_{\mathrm{s}}^2) & -v_{\mathrm{s}} & 0 & 0 \\ -v_{\mathrm{s}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} -1 & -v_{\mathrm{s}} & 0 & 0 \\ -v_{\mathrm{s}} & (1 - v_{\mathrm{s}}^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Геометрически это пространство-время можно интерпретировать следующим образом [7]. Во-первых, поскольку $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$, трехмерная геометрия гиперповерхностей всегда плоская. Во-вторых, тот факт, что интервал задается при условии $\alpha = 1$, влечет, что времениподобные кривые, нормальные к этим гиперповерхностям, являются геодезическими, т. е. эйлеровы наблюдатели находятся в свободном падении. Следует обратить внимание, что пространство-время, однако, не является плоским из-за наличия неравномерного сдвига. Наконец, поскольку вектор сдвига обращается в нуль при $r_{\mathrm{s}} \gg R$, в любой момент времени t пространство-время будет фактически плоским всюду, кроме области радиуса порядка R с центром в точке $(x_{\mathrm{s}}(t), 0, 0)$.

Пусть $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^4 := \{q^1 = t, q^2 = x, q^3 = y, q^4 = z\}$ – многообразие, описывающее конфигурационное пространство, и $\mathcal{T}^*\mathcal{Q} = \mathcal{Q} \times \mathbb{R}^4$ – кокасательное расслоение с локальными координатами (q, p) и естественной симплектической структурой

$\omega_{\mathrm{A}}\colon \mathcal{TQ} \longrightarrow \mathcal{T}^*\mathcal{Q}$, задающейся как

$$\omega_{\mathrm{A}} = \sum_{\nu=1}^{4} dp_\nu \wedge dq^\nu,$$

где $\mathcal{TQ}$ – касательное расслоение. По определению ω_{A} невырождена. Она индуцирует отображение $\mathcal{P}_{\mathrm{A}}\colon \mathcal{T}^*\mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{TQ}$, которое называется бивекторным полем и определяется как

$$\mathcal{P}_{\mathrm{A}} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \wedge \frac{\partial}{\partial q^\nu}.$$

Это отображение является обратным к ω_{A}, т. е. $\omega_{\mathrm{A}} \circ \mathcal{P}_{\mathrm{A}} = \mathcal{P}_{\mathrm{A}} \circ \omega_{\mathrm{A}} = 1$ [29]. В этом случае гамильтоново векторное поле X_f гамильтоновой функции f задается формулой $X_f = \mathcal{P}_{\mathrm{A}}\, df$. На кокасательном расслоении $\mathcal{T}^*\mathcal{Q}$ метрика (3) принимает вид

$$ds^2 = -(dq^1)^2 + (dq^2 - v_{\mathrm{s}}\, dq^1)^2 + (dq^3)^2 + (dq^4)^2.$$

В нашем подходе гамильтонова функция $\mathcal{H}_{\mathrm{A}}$, описывающая динамику космического аппарата в метрике Алькубьерре, и соответствующая 1-форма $d\mathcal{H}_{\mathrm{A}} \in \mathcal{T}^*\mathcal{Q}$ задаются соответственно как

$$\mathcal{H}_{\mathrm{A}} := \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^{4} g^{\nu\mu} p_\nu p_\mu = \frac{1}{2}(-p_1^2 - v_{\mathrm{s}} p_1 p_2 + (1 - v_{\mathrm{s}}^2) p_2^2 + p_3^2 + p_4^2) \tag{4}$$

и

$$d\mathcal{H}_{\mathrm{A}} = -(p_1 + v_{\mathrm{s}} p_2)\, dp_1 + (-v_{\mathrm{s}} p_1 + (1 - v_{\mathrm{s}}^2) p_2)\, dp_2 + p_3\, dp_3 + p_4\, dp_4 - \dot{v}_{\mathrm{s}}(p_1 + v_{\mathrm{s}} p_2) p_2\, dq^1.$$

Тогда гамильтоново векторное поле для $\mathcal{H}_{\mathrm{A}}$ относительно симплектической структуры ω_{A} получается следующим образом:

$$\begin{aligned} X_{\mathcal{H}_{\mathrm{A}}} := \{\mathcal{H}_{\mathrm{A}}, \cdot\} = -(p_1 + v_{\mathrm{s}} p_2) \frac{\partial}{\partial q^1} + (-v_{\mathrm{s}} p_1 + (1 - v_{\mathrm{s}}^2) p_2) \frac{\partial}{\partial q^2} + {} \\ + p_3 \frac{\partial}{\partial q^3} + p_4 \frac{\partial}{\partial q^4} + \dot{v}_{\mathrm{s}}(p_1 + v_{\mathrm{s}} p_2) p_2 \frac{\partial}{\partial p_1}. \end{aligned}$$

Это гамильтоново векторное поле удовлетворяет необходимому условию для гамильтоновой системы

$$\iota_{X_{\mathcal{H}_{\mathrm{A}}}} \omega_{\mathrm{A}} = -d\mathcal{H}_{\mathrm{A}},$$

где $\iota_{X_{\mathcal{H}_{\mathrm{A}}}} \omega_{\mathrm{A}}$ – внешнее произведение симплектической структуры ω_{A} относительно гамильтонова векторного поля $X_{\mathcal{H}_{\mathrm{A}}}$. Следовательно, тройка $(\mathcal{T}^*\mathcal{Q}, \omega_{\mathrm{A}}, \mathcal{H}_{\mathrm{A}})$ является гамильтоновой системой.

Далее рассмотрим уравнение Гамильтона–Якоби для гамильтоновой функции (4) и введем производящую функцию W, удовлетворяющую следующим каноническим преобразованиям [30], [31]:

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}, \qquad P = -\frac{\partial W}{\partial Q}.$$

Гамильтонова функция $\mathcal{H}_{\rm A}$ не зависит явно от t, поэтому, положив $V = W - Et$, мы можем найти аддитивное решение с разделенными переменными:

$$W = W_1(q^1) + W_2(q^2) + W_3(q^3) + W_4(q^4).$$

Тогда уравнение Гамильтона–Якоби [31]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{H}_{\rm A}\left(\frac{\partial V}{\partial q}, q, t\right) = 0$$

сводится к нелинейному уравнению

$$E = \frac{1}{2}\left\{-\left(\frac{\partial W}{\partial q^1}\right)^2 - 2v_{\rm s}\frac{\partial W}{\partial q^1}\frac{\partial W}{\partial q^2} + (1-v_{\rm s}^2)\left(\frac{\partial W}{\partial q^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q^4}\right)^2\right\}, \tag{5}$$

где E – константа.

Заметим, что гамильтонова функция не содержит переменных q^2, q^3 и q^4. Тогда, положив

$$\frac{dW_2}{dq^2}(q^2) = \alpha_0, \qquad \frac{dW_3}{dq^3}(q^3) = \beta_0, \qquad \frac{dW_4}{dq^4}(q^4) = \gamma_0,$$

где α_0, β_0, γ_0 – константы и $2E \leqslant \beta_0^2 + \gamma_0^2 + \alpha_0^2$, приводим уравнение (5) к виду

$$\left(\frac{dW_1}{dq^1}\right)^2 + 2\alpha_0 v_{\rm s}\frac{dW_1}{dq^1} + K = 0,$$

где $K = 2E - (\beta_0^2 + \gamma_0^2 + (1-v_{\rm s}^2)\alpha_0^2)$. Далее для функции $\Psi = dW_1/dq^1$ с условием $W_1(0) = 0$ получаем квадратное уравнение

$$\Psi^2 + 2\alpha_0 v_{\rm s}\Psi + K = 0,$$

дискриминант которого $\Delta_{\rm A} = -8E + 4(\beta_0^2 + \gamma_0^2 + \alpha_0^2) \geqslant 0$. Рассмотрим отдельно два случая: $\Delta_{\rm A} > 0$ и $\Delta_{\rm A} = 0$.

Случай 1. При $\Delta_{\rm A} > 0$ имеем два решения квадратного уравнения

$$\Psi_1 = -v_{\rm s}\alpha_0 + \sqrt{(\beta_0^2 + \gamma_0^2 + \alpha_0^2) - 2E}, \qquad \Psi_2 = -v_{\rm s}\alpha_0 - \sqrt{(\beta_0^2 + \gamma_0^2 + \alpha_0^2) - 2E},$$

что приводит к следующим решениям для производящей функции W:

$$\begin{aligned} W_a &= -\alpha_0 q_{\rm s} - \sqrt{(\beta^2 + \gamma_0^2 + \alpha_0^2) - 2E}\cdot q^1 + \alpha_0 q^2 + \beta_0 q^3 + \gamma_0 q^4,\\ W_b &= -\alpha_0 q_{\rm s} + \sqrt{(\beta_0^2 + \gamma_0^2 + \alpha_0^2) - 2E}\cdot q^1 + \alpha_0 q^2 + \beta_0 q^3 + \gamma_0 q^4. \end{aligned} \tag{6}$$

В терминах переменных q^i и Q^i эти решения записываются как

$$\begin{aligned} W_a &= -Q^2 q_{\rm s} - \left(\sqrt{\sum_{k=2}^4 (Q^k)^2 - 2Q^1} - v_{\rm s}Q^2\right)q^1 + \sum_{k=2}^4 Q^k q^k,\\ W_b &= -Q^2 q_{\rm s} + \left(\sqrt{\sum_{k=2}^4 (Q^k)^2 - 2Q^1} - v_{\rm s}Q^2\right)q^1 + \sum_{k=2}^4 Q^k q^k, \end{aligned} \tag{7}$$

где $Q^1 = E$, $Q^2 = \alpha_0$, $Q^3 = \beta_0$, $Q^4 = \gamma_0$ и $\sum_{k=2}^4 (Q^k)^2 - 2Q^1 > 0$. Для каждого из этих решений найдем связь между каноническими координатами (Q, P) и (q, p).

• При $W = W_a$ получаем соотношения

$$\begin{cases} p_1 = -\sqrt{\sum_{k=2}^4 (Q^k)^2 - 2Q^1} - v_{\mathrm{s}} Q^2, \\ p_2 = Q^2, \\ p_3 = Q^3, \\ p_4 = Q^4, \end{cases} \qquad \begin{cases} q^1 = -P_1 \sqrt{\sum_{k=2}^4 (Q^k)^2 - 2Q^1}, \\ q^2 = q_{\mathrm{s}} - P_2 - Q^2 P_1, \\ q^3 = -P_3 - Q^3 P_1, \\ q^4 = -P_4 - Q^4 P_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{q^1}{p_1 + v_{\mathrm{s}} p_2}, \\ P_2 = -\dfrac{p_2 q^1}{p_1 + v_{\mathrm{s}} p_2} + q_{\mathrm{s}} - q^2, \\ P_3 = -\dfrac{p_3 q^1}{p_1 + v_{\mathrm{s}} p_2} - q^3, \\ P_4 = -\dfrac{p_4 q^1}{p_1 + v_{\mathrm{s}} p_2} - q^4, \end{cases} \qquad \begin{cases} Q^1 = \mathcal{H}, \\ Q^2 = p_2, \\ Q^3 = p_3, \\ Q^4 = p_4. \end{cases} \tag{8}$$

• При $W = W_b$ имеем

$$\begin{cases} p_1 = \sqrt{\sum_{k=2}^4 (Q^k)^2 - 2Q^1} - v_{\mathrm{s}} Q^2, \\ p_2 = Q^2, \\ p_3 = Q^3, \\ p_4 = Q^4, \end{cases} \qquad \begin{cases} q^1 = P_1 \sqrt{\sum_{k=2}^4 (Q^k)^2 - 2Q^1}, \\ q^2 = q_{\mathrm{s}} - P_2 - Q^2 P_1, \\ q^3 = -P_3 - Q^3 P_1, \\ q^4 = -P_4 - Q^4 P_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{q^1}{p_1 + v_{\mathrm{s}} p_2}, \\ P_2 = -\dfrac{p_2 q^1}{p_1 + v_{\mathrm{s}} p_2} + q_{\mathrm{s}} - q^2, \\ P_3 = -\dfrac{p_3 q^1}{p_1 + v_{\mathrm{s}} p_2} - q^3, \\ P_4 = -\dfrac{p_4 q^1}{p_1 + v_{\mathrm{s}} p_2} - q^4, \end{cases} \qquad \begin{cases} Q^1 = \mathcal{H}_{\mathrm{A}}, \\ Q^2 = p_2, \\ Q^3 = p_3, \\ Q^4 = p_4. \end{cases} \tag{9}$$

В координатах (Q, P) симплектическая форма Алькубьерре и векторное поле задаются как

$$\omega_{\mathrm{A}} = \sum_{\nu=1}^4 dP_\nu \wedge dQ^\nu, \qquad X_{\mathcal{H}_{\mathrm{A}}} := \{\mathcal{H}_{\mathrm{A}}, \cdot\} = -\frac{\partial}{\partial P_1}.$$

При этих условиях тензорное поле T_{A} $(1,1)$-типа имеет вид

$$T_{\mathrm{A}} = \sum_{\nu=1}^4 Q^\nu \left(\frac{\partial}{\partial P_\nu} \otimes dP_\nu + \frac{\partial}{\partial Q_\nu} \otimes dQ^\nu \right).$$

Если в лемме 1 положить $x_\nu = Q^\nu$ и $x_{\nu+4} = P_\nu$ для $\nu = 1, 2, 3, 4$, то тензорное поле T_{A} принимает вид

$$T_{\mathrm{A}} = \sum_{\nu=1}^4 Q^\nu \left(\frac{\partial}{\partial P_\nu} \otimes dP_\nu + \frac{\partial}{\partial Q_\nu} \otimes dQ^\nu \right) = \sum_{i,j=1}^{2n} (T_{\mathrm{A}})^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j,$$

где $x \equiv (Q^1, \dots, Q^4, P_1, \dots, P_4)$. При этом матрица $(T_{\mathrm{A}})^i_j$ задается формулой (верхний индекс t означает транспонирование)

$$(T_{\mathrm{A}})^i_j = \begin{pmatrix} G^{\mathrm{t}} & O \\ O & G \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} Q^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q^4 \end{pmatrix}.$$

Тензор T_{A} удовлетворяет уравнениям $\mathcal{L}_{X_{\mathcal{H}_{\mathrm{A}}}} T_{\mathrm{A}} = 0$, $\mathcal{N}_{T_{\mathrm{A}}} = 0$ и $\deg Q^\nu = 2$, это доказывает, что T_{A} – оператор рекурсии для $X_{\mathcal{H}_{\mathrm{A}}}$. Константы движения таковы:

$$\operatorname{Tr} T_{\mathrm{A}}^h = 2\big((Q^1)^h + (Q^2)^h + (Q^3)^h + (Q^4)^h\big), \qquad h \in \mathbb{N}.$$

Если вернуться в исходную систему координат (q, p), то производящие функции W_a и W_b приводят для метрики Алькубьерре

$$ds^2 = -(dq^1)^2 + (dq^2 - v_{\mathrm{s}}\, dq^1)^2 + (dq^3)^2 + (dq^4)^2$$

к следующему предложению.

Предложение 1. *Если выполнены условия*

$$\frac{\dot v_{\mathrm{s}}}{v_{\mathrm{s}}} = -\frac{1}{q^1}, \tag{10}$$

$$\frac{\ddot v_{\mathrm{s}}}{\dot v_{\mathrm{s}}} v_{\mathrm{s}}^{h-1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{h-1} (p_1 + v_{\mathrm{s}} p_2)^{h-1}, \qquad h \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

то гамильтоново векторное поле имеет оператор рекурсии

$$T_{\mathrm{A}} = \sum_{\mu,\nu=1}^{4} \left(\widetilde{M}^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial q^\nu} \otimes dq^\mu + \widetilde{N}^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \otimes dp_\mu + \widetilde{L}^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial q^\nu} \otimes dp_\mu + \widetilde{R}^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \otimes dq^\mu \right) \tag{12}$$

с соответствующими константами движения

$$\operatorname{Tr} T_{\mathrm{A}}^h = \mathcal{H}^h + 2(p_2^h + p_3^h + p_4^h) + \left(\frac{\mathcal{H} p_1}{p_1 + v_{\mathrm{s}} p_2}\right)^h + \left(\frac{v_{\mathrm{s}} p_2 q^1 (\mathcal{H} - p_2)}{(p_1 + v_{\mathrm{s}} p_2)^2}\right)^h + (\dot v_{\mathrm{s}} p_2 \mathcal{H})^h,$$

где $h \in \mathbb{N}$. Здесь зависящие от координат величины $\widetilde{M}^\nu_\mu$, $\widetilde{N}^\nu_\mu$, $\widetilde{L}^\nu_\mu$ и $\widetilde{R}^\nu_\mu$ задаются следующим образом:

$$\begin{cases} \widetilde{M}^1_1 = J p_1 \mathcal{H}_{\mathrm{A}}, \\ \widetilde{M}^2_1 = p_2[J(p_2 - \mathcal{H}_{\mathrm{A}}) - v_{\mathrm{s}}], \\ \widetilde{M}^k_1 = J p_k (p_k - \mathcal{H}_{\mathrm{A}}), \quad k = 3, 4, \\ \widetilde{M}^j_j = p_j, \quad j = 2, 3, 4, \\ \widetilde{M}^m_n = 0 \ \textit{в остальных случаях}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \widetilde{N}^1_1 = \mathcal{H}_{\mathrm{A}}, \\ \widetilde{N}^1_2 = (p_2 - \mathcal{H}_{\mathrm{A}})(J p_2 - v_{\mathrm{s}}), \\ \widetilde{N}^1_k = J p_k (p_k - \mathcal{H}_{\mathrm{A}}), \quad k = 3, 4, \\ \widetilde{N}^j_j = p_j, \quad j = 2, 3, 4, \\ \widetilde{N}^m_n = 0 \ \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widetilde{L}^k_1 = -\widetilde{L}^1_k = J^2 p_k q^1 (p_k - \mathcal{H}_{\mathrm{A}}), \quad k = 2, 3, 4, \\ \widetilde{L}^k_2 = J^2 v_{\mathrm{s}} p_k q^1 (\mathcal{H}_{\mathrm{A}} - p_k), \quad k = 2, 3, 4, \\ \widetilde{L}^j_j = 0, \quad j = 1, 3, 4, \\ \widetilde{L}^m_n = 0 \ \textit{в остальных случаях}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \widetilde{R}^1_1 = \dot v_{\mathrm{s}} p_2 \mathcal{H}_{\mathrm{A}}, \\ \widetilde{R}^m_n = 0 \ \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

В этих формулах $n, m = 1, 2, 3, 4$, $J = 1/(p_1 + v_{\mathrm{s}} p_2)$ (причем $p_1 + v_{\mathrm{s}} p_2 > 0$).

Доказательство. Используя (8) или (9), напрямую получаем (12). С учетом условий (10) и (11) имеем $\mathcal{L}_{X_{\mathcal{H}_\mathrm{A}}}(\operatorname{Tr} T_\mathrm{A}^h) = 0$, и это доказывает, что $\operatorname{Tr} T_\mathrm{A}^h$ – константа движения.

Случай 2. При $\Delta_\mathrm{A} = 0$ мы имеем двойной корень $\Psi = -v_\mathrm{s}\alpha_0$, который дает

$$W = -\alpha_0 q_\mathrm{s} + \alpha_0 q^2 + \beta_0 q^3 + \gamma_0 q^4$$

или, в терминах q^i и Q^i,

$$W = -Q^2 q_\mathrm{s} + \sum_{k=2}^{4} Q^k q^k,$$

где $Q^2 = \alpha_0$, $Q^3 = \beta_0$ и $Q^4 = \gamma_0$. Это приводит к следующей связи между каноническими координатами (Q, P) и (q, p):

$$\begin{cases} p_1 = -v_\mathrm{s} Q^2, \\ p_2 = Q^2, \\ p_3 = Q^3, \\ p_4 = Q^4, \end{cases} \qquad \begin{cases} q^2 = q_\mathrm{s} - P_2, \\ q^3 = -P_3, \\ q^4 = -P_4; \end{cases} \qquad \begin{cases} P_2 = q_\mathrm{s} - q^2, \\ P_3 = -q^3, \\ P_4 = -q^4, \end{cases} \qquad \begin{cases} Q^2 = p_2, \\ Q^3 = p_3, \\ Q^4 = p_4. \end{cases}$$

Гамильтонова функция в системе координат (Q, P)

$$\mathcal{H}_\mathrm{A} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{4}(Q^k)^2$$

описывает динамику свободных частиц, а соответствующее гамильтоново векторное поле имеет вид

$$X_{\mathcal{H}_\mathrm{A}} = -\sum_{k=2}^{4} Q^k \frac{\partial}{\partial P_k}.$$

Производящая функция W не зависит от Q^1 и P_1, поэтому $(1,1)$-тензорное поле T_A может быть задано как

$$T_\mathrm{A} = \sum_{\nu=2}^{4} Q^\nu \left(\frac{\partial}{\partial P_\nu} \otimes dP_\nu + \frac{\partial}{\partial Q_\nu} \otimes dQ^\nu\right).$$

Тогда T_A удовлетворяет условиям $\mathcal{L}_{X_{\mathcal{H}_\mathrm{A}}} T_\mathrm{A} = 0$, $\mathcal{N}_{T_\mathrm{A}} = 0$ и $\deg Q^\nu = 2$. С помощью теоремы 1 отсюда заключаем, что T_A – оператор рекурсии для $X_{\mathcal{H}_\mathrm{A}}$, а константы движения равны

$$\operatorname{Tr} T_\mathrm{A}^h = 2\big((Q^2)^h + (Q^3)^h + (Q^4)^h\big), \qquad h \in \mathbb{N}.$$

В исходной системе координат (q, p) оператор T_A принимает вид

$$T_\mathrm{A} = \sum_{\mu,\nu=1}^{4} \left(A_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial q^\nu} \otimes dq^\mu + B_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \otimes dp_\mu\right),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_{\mathrm{s}} p_2 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -v_{\mathrm{s}} p_2 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix};$$

при этом константы движения суть $\operatorname{Tr} T_{\mathrm{A}}^h = 2(p_2^h + p_3^h + p_4^h)$, $h \in \mathbb{N}$.

4. ОПЕРАТОР РЕКУРСИИ ГАМИЛЬТОНОВА ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ В МЕТРИКЕ ГЁДЕЛЯ

Для сравнения результатов мы также рассматриваем линейный элемент метрики Гёделя ds^2 в безразмерных цилиндрических координатах [3]:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - \frac{1}{1+(r/2a)^2}\,dr^2 - r^2\left(1 - \left(\frac{r}{2a}\right)^2\right)d\phi^2 - dz^2 + \frac{2r^2c^2}{a\sqrt{2}}\,dt\,d\phi,$$

где a – параметр размерности длины, который определяет характерное расстояние. В частности, $r = 2a$ задает критический радиус, при котором существует замкнутая времениподобная линия [15]. Соответствующий метрический тензор и его обратный задаются как

$$g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{r^2}{a\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{1+(r/2a)^2} & 0 & 0 \\ \dfrac{r^2}{a\sqrt{2}} & 0 & -r^2\left(1-\left(\dfrac{r}{2a}\right)^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$g^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} \dfrac{(2a)^2 - r^2}{(2a)^2 + r^2} & 0 & \dfrac{2a\sqrt{2}}{(2a)^2 + r^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{(2a)^2 + r^2}{(2a)^2} & 0 & 0 \\ \dfrac{2a\sqrt{2}}{(2a)^2 + r^2} & 0 & -\dfrac{(2a)^2}{r^2((2a)^2 + r^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где мы положили $c = 1$.

Пусть многообразие

$$\mathcal{Q} = \mathbb{R}^4 := \{q^1 = t, q^2 = r, q^3 = \phi q^4 = z\},$$
$$t \in (-\infty, +\infty), \quad r \in (0, \infty), \quad \phi \in (0, 2\pi), \quad z \in (-\infty, +\infty),$$

описывает конфигурационное пространство и $\mathcal{T}^*\mathcal{Q} = \mathcal{Q} \times \mathbb{R}^4$ – кокасательное расслоение с локальными координатами (q, p). Естественная симплектическая форма и соответствующий ей пуассонов бивектор задаются как

$$\omega_{\mathrm{G}} = \sum_{\nu=1}^{4} dp_\nu \wedge dq^\nu, \qquad \mathcal{P}_{\mathrm{G}} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \wedge \frac{\partial}{\partial q^\nu}.$$

В кокасательном расслоении $\mathcal{T}^*\mathcal{Q}$ метрика Гёделя принимает вид

$$ds^2 = (c\,dq^1)^2 - \frac{1}{1+(q^2/2a)^2}(dq^2)^2 - (q^2)^2\left(1-\left(\frac{q^2}{2a}\right)^2\right)(dq^3)^2 - \\ - (dq^4)^2 + \frac{2(cq^2)^2}{a\sqrt{2}}\,dq^1\,dq^3. \tag{13}$$

При условии $(q^2)^3/2a \ll 1$ получаем приближенный линейный элемент (13)

$$ds^2 \simeq (c\,dq^1)^2 - (dq^2)^2 - (q^2)^2(dq^3)^2 - 2(q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}\,dq^1\,dq^2 - (dq^4)^2 + \mathcal{O}(\Omega_{\mathrm{G}}^2),$$

где $\Omega_{\mathrm{G}} = c/\sqrt{2a}$ и $q^2/2a \ll 1$. При $c=1$ это дает

$$ds^2 \simeq (dq^1)^2 - (dq^2)^2 - (q^2)^2(dq^3)^2 - 2(q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}\,dq^1\,dq^2 - (dq^4)^2 + \mathcal{O}(\Omega_{\mathrm{G}}^2). \tag{14}$$

В этом случае мы имеем гамильтонову функцию

$$\mathcal{H}_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2((q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2+1)}p_1^2 - \frac{1}{2}p_2^2 - \frac{1}{2(q^2)^2((q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2+1)}p_3^2 + \frac{\Omega_{\mathrm{G}}}{(q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2+1}p_1p_3 - \frac{1}{2}p_4^2$$

с соответствующим гамильтоновым векторным полем

$$X_{\mathcal{H}_{\mathrm{G}}} = \sum_{\mu=1}^{4}\left(U'_\mu\frac{\partial}{\partial q^\mu} - V'_\mu\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right),$$

где

$$U'_1 = \frac{1}{(q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2+1}p_1 + \frac{\Omega_{\mathrm{G}}}{(q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2+1}p_3, \qquad U'_2 = -p_2,$$
$$U'_3 = \frac{\Omega_{\mathrm{G}}}{(q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2+1}p_1 - \frac{1}{(q^2)^2((q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2+1)}p_3, \qquad U'_4 = -p_4,$$
$$V'_1 = V'_2 = V'_3 = 0, \qquad V'_2 = \frac{(q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2(2p_3^2-(q^2)^2p_1^2) + p_3(p_3 - \Omega_{\mathrm{G}}^3(q^2)^2p_1)}{(q^2)^3((q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2+1)^2}.$$

Векторное поле $X_{\mathcal{H}_{\mathrm{G}}}$ удовлетворяет необходимому условию для гамильтоновой системы $\iota_{X_{\mathcal{H}_{\mathrm{G}}}}\omega_{\mathrm{G}} = -d\mathcal{H}_{\mathrm{G}}$. Следовательно, тройка $(\mathcal{T}^*\mathcal{Q}, \omega_{\mathrm{G}}, \mathcal{H}_{\mathrm{G}})$ – гамильтонова система.

Уравнение Гамильтона–Якоби записывается как

$$E' = \frac{1}{2((q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2+1)}\left(\frac{\partial W'_1}{\partial q^1}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W'_2}{\partial q^2}\right)^2 - \frac{1}{2(q^2)^2((q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2+1)}\left(\frac{\partial W'_3}{\partial q^3}\right)^2 + \\ + \frac{\Omega_{\mathrm{G}}}{(q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2+1}\frac{\partial W'_1}{\partial q^1}\frac{\partial W'_3}{\partial q^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W'_4}{\partial q^4}\right)^2,$$

где E' – константа и $W' = \sum_{\mu=1}^4 W'_\mu(q^\mu)$ есть производящая функция.

Гамильтонова функция $\mathcal{H}_{\mathrm{G}}$ не содержит переменных q^1, q^2 и q^3, следовательно, мы можем положить

$$\frac{dW'_1}{dq^1} = \eta', \qquad \frac{dW'_3}{dq^3} = \theta', \qquad \frac{dW'_4}{dq^4} = \vartheta',$$

что дает

$$E' = \frac{1}{2((q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2+1)}\eta'^{\,2} - \frac{1}{2}\left(\frac{dW_2'}{dq^2}\right)^2 - \frac{1}{2(q^2)^2((q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2+1)}\theta'^{\,2} + \frac{\Omega_{\mathrm{G}}}{(q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2+1}\eta'\theta' - \frac{1}{2}\vartheta'^{\,2},$$

где η', θ' и ϑ' – константы, для которых выполнены следующие условия:

$$\frac{\eta'^{\,2}}{2E'+\vartheta'^{\,2}} \ll 1, \qquad 2E'+\vartheta'^{\,2} > 0, \tag{15а}$$

$$\frac{(\Omega_{\mathrm{G}}\theta')^2}{2E'+\vartheta'^{\,2}} \ll \frac{1}{4}, \tag{15б}$$

$$\frac{\eta'\theta'}{2E'+\vartheta'^{\,2}} \backsimeq \frac{1}{2\Omega_{\mathrm{G}}^2}. \tag{15в}$$

Далее получаем

$$\left(\frac{dW_2'}{dq^2}\right)^2 = \frac{1}{(q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2+1}f(q^2), \tag{16}$$

где

$$f(q^2) = -(2E'+\vartheta'^{\,2})\Omega_{\mathrm{G}}^2(q^2)^4 + (-(2E+\vartheta'^{\,2}) + \eta'^{\,2} + 2\eta'\theta'\Omega_{\mathrm{G}})(q^2)^2 - \theta'^{\,2}.$$

Положив $Z = (q^2)^2$ с учетом условия (15а), мы видим, что f принимает вид

$$\begin{gathered}
f(Z) = -(2E'+\vartheta'^{\,2})\Omega_{\mathrm{G}}^2 Z^2 + \bigl(-(2E'+\vartheta'^{\,2}) + 2\eta'\theta'\Omega_{\mathrm{G}}\bigr)Z - \theta'^{\,2},\\
\Delta_{\mathrm{G}} = (2E'+\vartheta'^{\,2})\bigl((2E'+\vartheta'^{\,2}) - 4\eta'\Phi - 4\Phi^2\bigr), \qquad \Phi = \theta'\Omega_{\mathrm{G}}.
\end{gathered}$$

После преобразований получаем с учетом (15б), что $\Delta_{\mathrm{G}} = 16(2E'+\vartheta'^{\,2}) > 0$. Тогда имеем

$$Z_1 = \frac{\eta'\theta'}{(2E'+\vartheta'^{\,2})\Omega_{\mathrm{G}}} + \frac{1}{2\Omega_{\mathrm{G}}^2}, \qquad Z_2 = \frac{\eta'\theta'}{(2E'+\vartheta'^{\,2})\Omega_{\mathrm{G}}} - \frac{3}{2\Omega_{\mathrm{G}}^2}.$$

Используя условие (15в), получаем

$$f(q^2) = \frac{(2E'+\vartheta'^{\,2})}{\Omega_{\mathrm{G}}^2}\bigl(1-(q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2\bigr)\bigl((q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2+1\bigr),$$

где $(q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2 \ll 1$. Следовательно, (16) принимает вид

$$\frac{dW_2'}{dq^2} = \frac{\sqrt{2E'+\vartheta'^{\,2}}}{\Omega_{\mathrm{G}}}\sqrt{(1-(q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2)} \simeq \frac{\sqrt{2E'+\vartheta'^{\,2}}}{\Omega_{\mathrm{G}}}\left(1-\frac{1}{2}(q^2)^2\Omega_{\mathrm{G}}^2\right), \qquad W_2'(0)=0,$$

откуда

$$W_2' \simeq \frac{\sqrt{2E'+\vartheta'^{\,2}}}{\Omega_{\mathrm{G}}}q^2\left(1-\frac{1}{6}\Omega_{\mathrm{G}}^2(q^2)^3\right) \simeq \frac{\sqrt{2E'+\vartheta'^{\,2}}}{\Omega_{\mathrm{G}}}q^2.$$

Положив $Q^1 = E'$, $Q^2 = \eta'$, $Q^3 = \theta'$ и $Q^4 = \vartheta'$, имеем

$$W' \simeq Q^2 q^1 + \frac{\sqrt{2Q^1 + (Q^4)^2}}{\Omega_{\mathrm{G}}}q^2 + Q^3 q^3 + Q^4 q^4.$$

Таким образом, получаем следующую связь между каноническими координатами (Q,P) и (q,p):

$$
\begin{cases}
p_1 = Q^2,\\
p_2 = \dfrac{\sqrt{2Q^1+(Q^4)^2}}{\Omega_{\mathrm{G}}},\\
p_3 = Q^3,\\
p_4 = Q^4,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
q^1 = -P_2,\\
q^2 = -P_1\Omega_{\mathrm{G}}\sqrt{2Q^1+(Q^4)^2},\\
q^3 = -P_3,\\
q^4 = -P_4 + Q^4P_1;
\end{cases}
$$
$$
\begin{cases}
P_1 = -\dfrac{q^1}{\Omega_{\mathrm{G}}^2 p_2},\\
P_2 = -q^1,\\
P_3 = -q^3,\\
P_4 = -\dfrac{p_4q^2}{\Omega_{\mathrm{G}}^2 p_2} - q^4,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
Q^1 = \mathcal{H}'_{\mathrm{G}},\\
Q^2 = p_1,\\
Q^3 = p_3,\\
Q^4 = p_4.
\end{cases}
\tag{17}
$$

В терминах канонических координат (Q,P) векторное поле $X_{\mathcal{H}_{\mathrm{G}}}$ и симплектическая форма ω_{G} записываются как

$$
X_{\mathcal{H}_{\mathrm{G}}} = \{\mathcal{H}_{\mathrm{G}},\,\cdot\,\} = -\frac{\partial}{\partial P_1}, \qquad \omega_{\mathrm{G}} = \sum_{\nu=1}^{4} dP_\nu \wedge dQ^\nu.
$$

С учетом леммы 1 получаем, что $(1,1)$-тензорное поле T_{G} имеет вид

$$
T_{\mathrm{G}} = \sum_{\nu=1}^{4} Q^\nu\left(\frac{\partial}{\partial P_\nu}\otimes dP_\nu + \frac{\partial}{\partial Q_\nu}\otimes dQ^\nu\right),
$$

а константы движения равны

$$
\operatorname{Tr} T_{\mathrm{G}}^h = 2((Q^1)^h + (Q^2)^h + (Q^3)^h + (Q^4)^h), \qquad h\in\mathbb{N}.
$$

В результате приходим к следующему предложению.

Предложение 2. *Если*

$$
V_2'^{\,h} \simeq \left(\frac{p_2^2}{q^2}\right)^h, \qquad h\in\mathbb{N}, \tag{18}
$$

то гамильтоново векторное поле $X_{\mathcal{H}_{\mathrm{G}}}$ в метрике Гёделя (14) имеет оператор рекурсии T_{G}, который в исходной системе координат (q,p) задается как

$$
T_{\mathrm{G}} = \sum_{\mu,\nu=1}^{4}\left(\widetilde{A}^\nu_\mu\frac{\partial}{\partial q^\nu}\otimes dq^\mu + \widetilde{B}^\nu_\mu\frac{\partial}{\partial p_\nu}\otimes dp_\mu + \widetilde{C}^\nu_\mu\frac{\partial}{\partial q^\nu}\otimes dp_\mu + \widetilde{D}^\nu_\mu\frac{\partial}{\partial p_\nu}\otimes dq^\mu\right),
$$

где

$$
\begin{cases}
\widetilde{A}^j_j = p_j,\\
\widetilde{A}^2_2 = \mathcal{H}_{\mathrm{G}}(1+q^2V_2'S),\\
\widetilde{A}^4_2 = -p_4p_2S(\mathcal{H}_{\mathrm{G}}+U_4'),\\
\widetilde{A}^m_n = 0 \ \textit{в остальных случаях},
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\widetilde{B}^j_j = p_j, \quad j=1,3,4,\\
\widetilde{B}^2_k = \mathcal{H}_{\mathrm{G}}U_k'p_2S, \quad k=1,2,3,\\
\widetilde{B}^2_4 = -p_4p_2S(\mathcal{H}_{\mathrm{G}}+U_4'),\\
\widetilde{B}^m_n = 0 \ \textit{в остальных случаях},
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \widetilde{C}_i^2 = \mathcal{H}_{\mathrm{G}} U_i' q^2 S, \quad i = 1, 3, \\ \widetilde{C}_2^2 = \mathcal{H}_{\mathrm{G}} q^2 \Omega_{\mathrm{G}}^2 S(-p_2 + U_2'^3 S), \\ \widetilde{C}_4^2 = -p_4 S(\mathcal{H}_{\mathrm{G}} + U_4'), \\ \widetilde{C}_2^4 = p_4 S(\mathcal{H}_{\mathrm{G}} + U_4'), \\ \widetilde{C}_n^m = 0 \ \textit{в остальных случаях}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \widetilde{D}_2^2 = \mathcal{H}_{\mathrm{G}} V_2' p_2 S, \\ \widetilde{D}_n^m = 0 \ \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Здесь $S = 1/\Omega_{\mathrm{G}}^2 p_2^2$, $\Omega_{\mathrm{G}}^2 p_2^2 > 0$, $n, m = 1, 2, 3, 4$. *Константы движения в исходной системе координат* (q, p) *равны*

$$\operatorname{Tr} T_{\mathrm{G}}^h = 2(p_2^h + p_3^h + p_4^h) + \mathcal{H}_{\mathrm{G}}^h \left(1 + \frac{q^2 V_2'}{\Omega_{\mathrm{G}}^2 p_2^2}\right)^h + \left(-\frac{\mathcal{H}_{\mathrm{G}}}{\Omega_{\mathrm{G}}^2}\right)^h + \\ + \left(-\frac{\mathcal{H}_{\mathrm{G}} q^2}{p_2}\right)^h \left(1 + \frac{1}{\Omega_{\mathrm{G}}^2}\right)^h + \left(\frac{\mathcal{H}_{\mathrm{G}} V_2'}{\Omega_{\mathrm{G}}^2 p_2}\right)^h, \qquad h \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Используя соотношения (17), после некоторых вычислений получаем (2). Дополнительно из (18) имеем $\mathcal{L}_{X_{\mathcal{H}_{\mathrm{G}}}}(\operatorname{Tr} T_{\mathrm{G}}^h) = 0$. Следовательно,

$$2(p_2^h + p_3^h + p_4^h) + \mathcal{H}_{\mathrm{G}}^h \left(1 + \frac{q^2 V_2'}{\Omega_{\mathrm{G}}^2 p_2^2}\right)^h + \left(-\frac{\mathcal{H}_{\mathrm{G}}}{\Omega_{\mathrm{G}}^2}\right)^h + \left(-\frac{\mathcal{H}_{\mathrm{G}} q^2}{p_2}\right)^h \left(1 + \frac{1}{\Omega_{\mathrm{G}}^2}\right)^h + \left(\frac{\mathcal{H}_{\mathrm{G}} V_2'}{\Omega_{\mathrm{G}}^2 p_2}\right)^h$$

являются константами движения.

Следует отметить, что в системе координат (Q, P) при $\Delta_{\mathrm{A}} > 0$ метрики Алькубьерре и Гёделя имеют одинаковое гамильтоново векторное поле X_H и один и тот же оператор рекурсии T, которые, таким образом, порождают одинаковую динамику.

5. МАСТЕР-СИММЕТРИИ

Рассмотрим при вышеуказанных общих динамических характеристиках гамильтонову систему $(\mathcal{T}^*\mathcal{Q}, \omega, Q^1)$, в которой гамильтонова функция H, векторное поле X_0, симплектическая форма ω и бивекторное поле задаются и в метрике Алькубьерре, и в метрике Гёделя следующим образом:

$$H = Q^1, \quad X_0 = \{Q^1, \cdot\,\} = -\frac{\partial}{\partial P_1}, \quad \omega = \sum_{\nu=1}^{4} dP_\nu \wedge dQ^\nu, \quad \mathcal{P} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial}{\partial P_\nu} \wedge \frac{\partial}{\partial Q^\nu}.$$

Введем векторные поля $Y_j \in \mathcal{T}^*\mathcal{Q}$ как

$$Y_j = \sum_{\nu=1}^{4} (Q^\nu)^j \left((j+1) P_\nu \frac{\partial}{\partial P_\nu} - Q^\nu \frac{\partial}{\partial Q_\nu}\right), \qquad j \in \mathbb{N}.$$

При этом выполняется соотношение

$$\iota_{Y_j} \omega = -d\widetilde{H}_j, \quad \text{где} \quad \widetilde{H}_j = -\sum_{\nu=1}^{4} (Q^\nu)^{j+1} P_\nu.$$

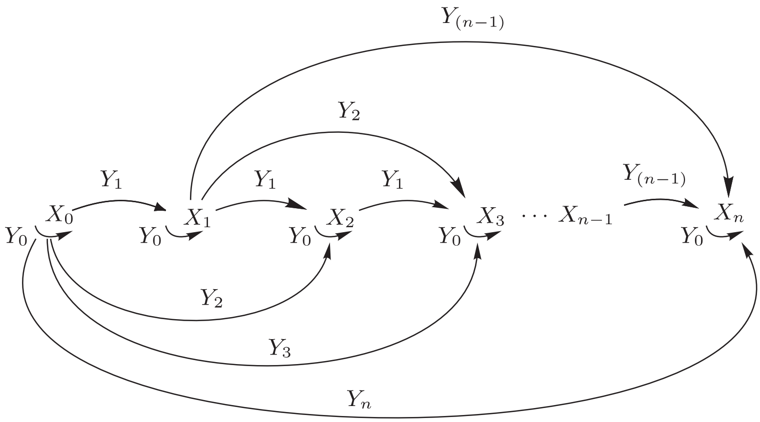

Рис. 1. Диаграмма, иллюстрирующая соотношения (19).

Симплектическая структура ω порождает набор гамильтоновых систем на одном и том же многообразии $\mathcal{T}^*\mathcal{Q}$. Скобки Пуассона между X_i и Y_j подчиняется следующим соотношениям:

$$[X_i, Y_j] = X_{i+j}, \quad [X_i, X_{i+j}] = 0, \quad \text{где} \quad X_{i+j} = -(j+1)(i+j+1)(Q^1)^{i+j}\frac{\partial}{\partial P_1}; \quad (19)$$

здесь $i, j \in \mathbb{N}$. Эти соотношения показаны на рис. 1.

В терминах дифференциальной геометрии Y_j и $\widetilde{H}_j$ называются *мастер-симметриями* для X_i и *мастер-интегралами* соответственно [21], [23], [26]–[28].

Из мастер-интегралов $\widetilde{H}_j$ мы можем получить семейство гамильтоновых функций

$$H_{i+j} := \{H_i, \widetilde{H}_j\} = (i+1)(Q^1)^{i+j+1}, \qquad H_0 = H, \qquad i, j \in \mathbb{N}.$$

Оператор рекурсии

$$T = \sum_{\nu=1}^{4} Q^\nu \left(\frac{\partial}{\partial P_\nu} \otimes dP_\nu + \frac{\partial}{\partial Q_\nu} \otimes dQ^\nu\right)$$

можно записать как

$$T = \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}^{-1}, \quad \text{где} \quad \mathcal{P}_1 = \sum_{\nu=1}^{4} Q^\nu \frac{\partial}{\partial P_\nu} \wedge \frac{\partial}{\partial Q^\nu},$$

при этом $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_1$ – два совместных пуассоновых бивектора с нулевой скобкой Схоутена–Нийенхейса, $[\mathcal{P}, \mathcal{P}_1]_{\text{SN}} = 0$.

Теперь введем следующие скобки Пуассона $\{\cdot\,,\cdot\}_1$ относительно симплектической формы $\omega_1 = \sum_{\nu=1}^{4} (Q^\nu)^{-1} dP_\nu \wedge dQ^\nu$:

$$\{f, g\}_1 := \sum_{\nu=1}^{4} Q^\nu \left(\frac{\partial f}{\partial P_\nu}\frac{\partial g}{\partial Q^\nu} - \frac{\partial f}{\partial Q^\nu}\frac{\partial g}{\partial P_\nu}\right).$$

Получаем

$$X_i = \{\overline{H}_i, \cdot\} = \{\overline{H}_{i+1}, \cdot\}_1, \quad \overline{H}_0 = H, \quad \overline{H}_1 = \ln Q^1, \quad \overline{H}_j = -\frac{1}{j(Q^1)^j}, \qquad Q^1 \neq 0,$$

$$X_0 = -\frac{\partial}{\partial P_1}, \quad X_1 = -\frac{1}{Q^1}\frac{\partial}{\partial P_1}, \quad X_j = -\frac{1}{(Q^1)^{j+1}}\frac{\partial}{\partial P_1}, \qquad j = 2, 3, \ldots, n, \quad n, i \in \mathbb{N}.$$

Это доказывает, что X_i – бигамильтоновы векторные поля, определяющиеся двумя пуасоновыми бивекторами $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}_1$. Тогда четверка $(\mathcal{Q}, \mathcal{P}, \mathcal{P}_1, X_i)$ является бигамильтоновой системой при каждом i.

Кроме того, имеем

$$\mathcal{L}_{Y_0}(\mathcal{P}) = 0 \quad (\tilde{\alpha} = 0), \qquad \mathcal{L}_{Y_0}(\mathcal{P}_1) = -\sum_{\nu=1}^{4} Q^\nu \frac{\partial}{\partial P_\nu} \wedge \frac{\partial}{\partial Q^\nu} \quad (\tilde{\beta} = -1),$$
$$\mathcal{L}_{Y_0}(H) = -Q^1 = -H \quad (\tilde{\gamma} = -1).$$

Отсюда заключаем, что векторное поле

$$Y_0 = \sum_{\nu=1}^{4}\left(P_\nu \frac{\partial}{\partial P_\nu} - Q^\nu \frac{\partial}{\partial Q_\nu}\right)$$

является конформной симметрией для $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_1$ и H [21].

Теперь определим величины X'_h, Y'_h, $\mathcal{P}'_h$, ω'_h и dH'_h для $h \in \mathbb{N}$ формулами

$$X'_h := T^h X_0, \quad \mathcal{P}'_h := T^h \mathcal{P}, \quad \omega'_h := (T^*)^h \omega', \quad Y_h := T^h Y_0, \quad dH'_h := (T^*)^h dH,$$

где $T^* := \mathcal{P}^{-1} \circ \mathcal{P}_1$ есть оператор, сопряженный к T. Отсюда получаем

$$\mathcal{P}'_h = \sum_{\nu=1}^{4} (Q^\nu)^h \frac{\partial}{\partial P_\nu} \wedge \frac{\partial}{\partial Q^\nu},$$

$$Y'_h = \sum_{\nu=1}^{4} (Q^\nu)^h \left(P_\nu \frac{\partial}{\partial P_\nu} - Q^\nu \frac{\partial}{\partial Q_\nu}\right), \qquad X'_h = -(Q^1)^h \frac{\partial}{\partial P_1},$$

$$\omega'_h = \sum_{\nu=1}^{4} (Q^\nu)^h dP_\nu \wedge dQ^\nu, \qquad dH'_h = (Q^1)^h dQ^1 \quad \text{и} \quad H'_h = \frac{1}{h+1}(Q^1)^{h+1},$$

что приводит к следующим многочисленным сохраняющимся величинам:

$$\mathcal{L}_{Y'_h}(Y'_l) = (h-l)Y'_{l+h}, \qquad \mathcal{L}_{Y'_h}(X'_l) = -(l+1)X'_{l+h}, \qquad \mathcal{L}_{Y'_h}(\mathcal{P}'_l) = (h-l)\mathcal{P}'_{l+h},$$
$$\mathcal{L}_{Y'_h}(\omega'_l) = -(l+h)\omega'_{l+h}, \qquad \mathcal{L}_{Y'_h}(T) = -T^{1+h},$$
$$\langle dH'_l, Y'_h \rangle = -(h+l+1)H'_{l+h}, \qquad l \in \mathbb{N}.$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{L}_{Y'_h}(Y'_l) = (\tilde{\beta} - \tilde{\alpha})(l-h)Y'_{(l+h)}, \qquad \mathcal{L}_{Y'_h}(X'_l) = (\tilde{\beta} + \tilde{\gamma} + (l-1)(\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}))X'_{l+h},$$
$$\mathcal{L}_{Y'_h}(\mathcal{P}'_l) = (\tilde{\beta} + (l-h-1)(\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}))\mathcal{P}'_{l+h}, \qquad \mathcal{L}_{Y'_h}(\omega'_l) = (\tilde{\beta} + (l+h-1)(\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}))\omega'_{l+h},$$
$$\mathcal{L}_{Y'_h}(T) = (\tilde{\beta} - \tilde{\alpha})T^{1+h}, \qquad \langle dH'_l, Y'_h \rangle = (\tilde{\gamma} + (l+h)(\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}))H'_{l+h},$$

аналогичным формулам Увела [19]–[22].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной статье мы подробно проанализировали динамику космического аппарата в метриках Алькубьерре и Гёделя. Мы вычислили гамильтоновы векторные поля, управляющие эволюцией системы, построили и обсудили связанные с ними операторы рекурсии, порождающие константы движения. Кроме того, мы доказали, что в рассматриваемой канонической системе координат существует бигамильтонова структура, и нашли сохраняющиеся величины, используя соответствующие мастер-симметрии.

Наше исследование показало, что гамильтонова динамика наводит на мысль о связи между геометрией физической системы и законами сохранения при использовании скобки Пуассона. Физические системы в метриках Алькубьерре и Гёделя представляют собой симплектические многообразия, оснащенные гамильтоновыми векторными полями. При этом положения космических аппаратов на многообразиях рассматриваются как состояния, а векторные поля – как законы, управляющие эволюцией этих состояний.

Мы заметили, что при нашем частном выборе метрик Алькубьерре и Гёделя динамика космического аппарата одинаковая. Действительно, используя соответствующие параметризации, мы выразили гамильтоновы векторные поля и операторы рекурсии для обеих метрик идентичным образом. Единственное различие между ними проявляется в формулах, связывающих исходные и новые координаты. Кроме того, гамильтонова функция космического аппарата остается постоянной вдоль траекторий (также называемых интегральными кривыми) гамильтоновых векторных полей.

Мы использовали оператор рекурсии, чтобы вычислить константы движения, т. е. первые интегралы, которые играют важную роль в изучении динамики космического аппарата. Каждое гамильтоново векторное поле X_H является своим собственным первым интегралом, $X_H(H) := \{H, H\} = 0$, благодаря антисимметрии скобки Пуассона. Это характеристика физического принципа сохранения энергии.

Наконец, мы сформулировали обобщенную скобку Пуассона

$$\{f, g\}_j := \sum_{\nu=1}^{4} (Q^\nu)^j \left(\frac{\partial f}{\partial P_\nu} \frac{\partial g}{\partial Q_\nu} - \frac{\partial f}{\partial Q_\nu} \frac{\partial g}{\partial P_\nu} \right), \qquad j \in \mathbb{N},$$

дающую бигамильтоновы векторные поля

$$X_i = \{\overline{H}_i, \cdot\} = \{\overline{H}_{i+j}, \cdot\}_j, \qquad i, j \in \mathbb{N},$$

на основе которых можно напрямую обобщить полученные результаты.

Благодарности. Мы благодарим рецензента и редакционную коллегию за полезные комментарии, которые позволили улучшить статью. ICMPA-UNESCO Chair выражает свою благодарность Association pour la Promotion Scientifique de l'Afrique и Daniel Iagolnitzer Foundation (Франция) за ценное партнерство в деле развития математической физики в Африке.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] K. Gödel, "An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation", *Rev. Modern Phys.*, **21**:3 (1949), 447–450.

[2] J. F. García, C. Sabín, "Dirac equation in exotic spacetimes", *Phys. Rev. D*, **99**:2 (2019), 025008, 8 pp.

[3] E. Kajari, R. Walser, W. P. Schleich, A. Delgado, "Sagnac effect of Gödel's universe", *Gen. Rel. Grav.*, **36**:10 (2004), 2289–2316.

[4] T. P. Kling, F. Ahmed, M. Lalumiere, "Wave fronts in a causality-violating Gödel-type metric", *Adv. High Energy Phys.*, **2020** (2020), 8713756, 13 pp.

[5] F. Ahmed, "The energy-momentum distributions and relativistic quantum effects on scalar and spin-half particles in a Gödel-type space-time", *Eur. Phys. J. C*, **78**:7 (2018), 598, 8 pp.; "The Dirac equation in a class of topologically trival flat Gödel-type space-time backgrounds", **79**:6 (2019), 534, 10 pp.

[6] C. Sabín, "One-dimensional sections of exotic spacetimes with superconducting circuits", *New J. Phys.*, **20**:5 (2018), 053028, 7 pp.

[7] M. Alcubierre, "The warp drive: hyper-fast travel within general relativity", *Class. Quantum Grav.*, **11**:5 (1994), L73–L77, arXiv: gr-qc/0009013.

[8] U. V. Gabriele, Z. Burstein, "Conformal gravity and the Alcubierre warp drive metric", *ISRN Astron. Astrophys.*, **2013** (2013), 482734, 13 pp.

[9] R. Liouville, "Sur le mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un de ses points", *Acta Math.*, **20**:1 (1897), 239–284.

[10] H. Poincaré, "Sur les quadratures mécaniques", *Bull. Astron.*, **16** (1899), 382–387.

[11] S. De Filippo, G. Vilasi, G. Marmo, M. Salerno, "A new characterization of completely integrable systems", *Nuovo Cimento B*, **83**:2 (1984), 97–112.

[12] F. Magri, "A simple model of the integrable Hamiltonian equation", *J. Math. Phys.*, **19**:5 (1978), 1156–1162.

[13] И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, "Скобка Схоутена и гамильтоновы операторы", *Функц. анализ и его прил.*, **14**:3 (1980), 71–74.

[14] G. Vilasi, "On the Hamiltonian structures of the Korteweg–de Vries and sine-Gordon theories", *Phys. Lett. B*, **94**:2 (1980), 195–198.

[15] P. D. Lax, "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary ways", *Commun. Pure Appl. Math.*, **21**:5 (1968), 467–490.

[16] T. Takeuchi, "On the construction of recursion operators for the Kerr–Newman and FLRW metrics", *J. Geom. Symmetry Phys.*, **37** (2015), 85–96.

[17] M. N. Hounkonnou, M. J. Landalidji, E. Baloïtcha, "Recursion operator in a noncommutative Minkowski phase space", *Geometric Methods in Physics* XXXVI (Białowieża, Poland, July 2–8, 2017), Trends in Mathematics, eds. P. Kielanowski, A. Odzijewicz, E. Previato, Birkhäuser, Cham, 2019, 83–93.

[18] M. N. Hounkonnou, M. J. Landalidji, "Hamiltonian dynamics for the Kepler problem in a deformed phase space", *Geometric Methods in Physics* XXXVII (Białowieża, Poland, July 1 – 7, 2018), Trends in Mathematics, eds. P. Kielanowski, A. Odzijewicz, E. Previato, Birkhäuser, Cham, 2019, 34–48.

[19] R. G. Smirnov, "Magri–Morosi–Gel'fand–Dorfman's bi-Hamiltonian constructions in the action-angle variables", *J. Math. Phys.*, **38**:12 (1997), 6444–6454.

[20] W. Oevel, "A geometrical approach to integrable systems admitting time dependent invariants", *Topics in Soliton Theory and Exactly Solvable Nonlinear Equations*, Proceedings of the Conference on Nonlinear Evolution Equations, Solitons and the Inverse Scattering Transform (Oberwolfach, Germany, July 27 – August 2, 1986), eds. M. Ablowitz, B. Fuchssteiner, M. Kruskal, World Sci., Singapore, 1987, 108–124.

[21] R. L. Fernandes, "On the master symmetries and bi-Hamiltonian structure of the Toda lattice", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26**:15 (1993), 3797–3803.

[22] R. G. Smirnov, "The action-angle coordinates revisited: bi-Hamiltonian systems", *Rep. Math. Phys.*, **44**:1–2 (1999), 199–204.

[23] M. F. Rañada, "A system of $n = 3$ coupled oscillators with magnetic terms: symmetries and integrals of motion", *SIGMA*, **1** (2005), 004, 7 pp.

[24] М. Н. Хоунконю, М. Дж. Ландалиджи, М. Митрович, "Некоммутативная кеплерова динамика: группы симметрий и бигамильтоновы структуры", *ТМФ*, **207**:3 (2021), 403–423.

[25] B. Dubrovin, *Bihamiltonian Structures of PDEs and Frobenius Manifolds*, Lectures at the ICTP Summer School "Poisson Geometry" (Trieste, July 11–15, 2005), SISSA, Trieste, Italia, 2005.

[26] R. Caseiro, "Master integrals, superintegrability and quadratic algebras", *Bull. Sci. Math.*, **126**:8 (2002), 617–630.

[27] P. A. Damianou, "Symmetries of Toda equations", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26**:15 (1993), 3791–3796.

[28] M. F. Rañada, "Superintegrability of the Calogero–Moser system: constants of motion, master symmetries, and time-dependent symmetries", *J. Math. Phys.*, **40**:1 (1999), 236–247.

[29] G. Vilasi, *Hamiltonian Dynamics*, World Sci., Singapore, 2001.

[30] R. Abraham, J. E. Marsden, *Foundation of Mechanics*, Addison-Wesley, New York, 1978.

[31] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, УРСС, М., 2003.

[32] O. I. Bogoyavlenskij, "Theory of tensor invariants of integrable Hamiltonian systems. I. Incompatible Poisson structures", *Commun. Math. Phys.*, **180**:3 (1996), 529–586.

[33] Y. A. Grigoryev, A. V. Tsiganov, "On bi-Hamiltonian formulation of the perturbed Kepler problem", *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:17 (2015), 175206, 7 pp.

Поступила в редакцию 22.11.2021,
после доработки 30.12.2021,
принята к публикации 7.01.2022