

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Цзя Чэн, Шоу-Фу Тянь, Чжи-Цзя У, $\bar{\partial}$ -Задача и метод одевания для комплексного векторного модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза, *ТМФ*, 2021, том 209, номер 2, 305–326

DOI: 10.4213/tmf10107

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.137.216.227

1 ноября 2024 г., 15:10:41



© 2021 г. Цзя Чэн*, Шоу-Фу Тянь*, Чжи-Цзя У*

$\bar{\partial}$ -ЗАДАЧА И МЕТОД ОДЕВАНИЯ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО ВЕКТОРНОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

С использованием метода $\bar{\partial}$ -одевания из локальной (5×5) -матрицы для $\bar{\partial}$ -задачи путем введения подходящего оператора рекурсии Λ^n выведена иерархия нелинейных эволюционных уравнений, которая включает в себя как частные случаи нелинейное уравнение Шредингера при $n = 2$, векторное модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза при $n = 3$, уравнение Лакшманана–Порсециана–Даниеля при $n = 4$. Кроме того, метод $\bar{\partial}$ -одевания применяется для нахождения N -солитонных решений комплексного векторного модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза. Обсуждается влияние параметров решения на характер взаимодействия солитонов, а также анализируется влияние положения характеристических прямых на относительное положение волн, что позволяет в полной мере описать метод управления направлением распространения волн.

Ключевые слова: векторные модифицированные уравнения Кортевега–де Фриза, метод $\bar{\partial}$ -одевания, оператор рекурсии, N -солитонные решения.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf10107>

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время нелинейная динамика привлекает всё большее внимание и широко используется в ряде разделов теории солитонов, поскольку может описывать некоторые нелинейные волновые явления в физических структурах с дисперсией. Одним из важных уравнений в теории интегрируемых систем является уравнение

Работа частично поддержана National Natural Science Foundation of China (грант № 11975306), Natural Science Foundation of Jiangsu Province (грант № BK20181351), Six Talent Peaks Project in Jiangsu Province (грант № JY-059) и Fundamental Research Fund for the Central Universities (гранты № 2019ZDPY07 и 2019QNA35).

*School of Mathematics and Institute of Mathematical Physics, China University of Mining and Technology, Xuzhou, China. E-mail: sftian@cumt.edu.cn, shoufu2006@126.com

Кортевега–де Фриза (КдФ), которое можно использовать, в частности, для описания движения волн на мелкой воде:

$$q_t + q_{xxx} + 6qq_x = 0, \quad (1.1)$$

где нижний индекс обозначает соответствующую частную производную. В течение многих лет это уравнение изучалось различными учеными [1]–[5]. Позже исследователи обратили свое внимание на другие нелинейные волновые уравнения, одним из которых является обобщенное уравнение КдФ

$$q_t + q_{xxx} + 6q^\alpha q_x = 0, \quad (1.2)$$

где α – натуральное число, q – вещественнозначная скалярная функция. При $\alpha = 2$ это уравнение называется модифицированным уравнением КдФ (мКдФ) [6]

$$q_t + q_{xxx} + 6q^2 q_x = 0. \quad (1.3)$$

Оно применимо для описания многих объектов, таких как волны Альвена в бесстолкновительной плазме [7], симметрии гиперболических поверхностей [8], тонкие упругие стержни [9] и др. [6], [10]–[18]. Постепенно область исследования этого уравнения расширялась, и было сформулировано комплексное уравнение мКдФ [19]

$$q_t + q_{xxx} + 6|q|^2 q_x = 0, \quad (1.4)$$

где q – комплекснозначная скалярная функция.

Однако, хотя все приведенные выше уравнения описывают те или иные физические системы, в большинстве случаев мы имеем дело с результатом взаимодействия нескольких физических величин, и связанные уравнения в общем случае описывают более широкий круг явлений. Как результат, имеются многочисленные исследования, посвященные следующей системе комплексных уравнений мКдФ [20], [21]:

$$\begin{aligned} p_t + p_{xxx} - 3q^2 p_x - 3pqq_x - 6p^2 p_x &= 0, \\ q_t + q_{xxx} - 3p^2 q_x - 3ppq_x - 6q^2 q_x &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где p и q – комплекснозначные функции. Эту систему, которая изучалась во многих работах (см., например, [15], [22]–[25]), можно рассматривать как обобщение уравнения мКдФ. Для исследования обобщений уравнения мКдФ применялись разнообразные методы [26]–[29].

В настоящей работе мы сосредоточим свое внимание на применении метода $\bar{\partial}$ -одевания к комплексному векторному уравнению мКдФ (квмКдФ) с парой Лакса размерности 5×5 , которое имеет вид [30]

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{q}_{xxx} + 3(\mathbf{q}_x \mathbf{q}^T \mathbf{q} + \mathbf{q} \mathbf{q}^T \mathbf{q}_x) = 0, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{q} = (-\bar{q}_1, -q_1, -\bar{q}_2, -q_2)^T$ – функция, значения которой суть комплексные матрицы размера 4×1 , а \bar{q}_i обозначает функцию, комплексно-сопряженную к q_i . Насколько нам известно, уравнение квмКдФ ранее не исследовалась методом $\bar{\partial}$ -одевания, представляющего собой развитие метода одевания.

Метод одевания, который является мощным инструментом для построения и получения солитонных решений интегрируемых уравнений, был впервые предложен

Захаровым и Шабатом [31]. Затем он получил интенсивное развитие в работах многих исследователей [32]–[36]. До сих пор этот метод широко используется для вывода интегрируемых иерархий и получения явных солитонных решений, в том числе уравнения Дэви–Стюардсона-II [37], AB -системы [38], системы Каупа–Броера [39], трехволнового уравнения [40], связанного уравнения Герджикова–Иванова [41], дифференциально-разностного уравнения Кадомцева–Петвиашвили [42] и т. д. [43]–[50]. Кроме того, его также можно применять для изучения асимптотического поведения уравнений при больших временах [51], [52].

Однако работ, посвященных многокомпонентным уравнениям, не так много. Мы применяем метод $\bar{\partial}$ -одевания для изучения уравнений квмКДФ со спектром Лакса пятого порядка. Основная цель настоящей работы – вывести иерархию нелинейных эволюционных уравнений, содержащую многочисленные важные уравнения, и получить явные солитонные решения с помощью матрицы спектрального преобразования. Кроме того, для более широкого анализа явления мы исследуем характеристические прямые солитонных решений.

В нашей работе мы сначала формулируем $\bar{\partial}$ -задачу и строим матричную спектральную задачу методом $\bar{\partial}$ -одевания. Затем мы вводим подходящий оператор рекурсии Λ^n , с помощью которого получаем иерархию нелинейных эволюционных уравнений. Далее с помощью матрицы спектрального преобразования мы получаем явные солитонные решения. Изменяя параметры и точки дискретного спектра, мы анализируем связь между характером распространения солитонов и положением дискретных спектральных точек. Изучая динамические явления и характеристические прямые, мы обнаруживаем, что смещение и поворот характеристических прямых влияют на распространение солитонов.

Структура работы следующая. В разделе 2 мы изучаем интегральный оператор Коши–Грина и его свойства. Кроме того, используя метод одевания с локальной $\bar{\partial}$ -задачей, мы строим (5×5) -матрицы Лакса с сингулярным дисперсионным соотношением. В разделе 3 мы вводим новый оператор рекурсии, чтобы получить иерархию нелинейных эволюционных уравнений. В разделе 4 мы представляем N -солитонные решения уравнения квмКДФ, полученные с помощью соответствующей матрицы спектрального преобразования R , и проводим подробный анализ одно-, двух- и трехсолитонных решений.

2. $\bar{\partial}$ -ЗАДАЧА И ПАРА ЛАКСА

Рассмотрим $\bar{\partial}$ -задачу в плоскости комплексной переменной z :

$$\bar{\partial}\Psi(x, t, z, \bar{z}) = \Psi(x, t, z, \bar{z})R(x, t, z, \bar{z}), \tag{2.1}$$

где $\Psi = \Psi(x, t, z, \bar{z})$ и $R = R(x, t, z, \bar{z})$ – (5×5) -матричнозначные функции. Для простоты мы далее пишем $\Psi(x, t, z)$ и $R(x, t, z)$ вместо $\Psi(x, t, z, \bar{z})$ и $R(x, t, z, \bar{z})$. Если $\Psi(x, t, z)$ удовлетворяет условию $\Psi(x, t, z) \rightarrow I$ при $z \rightarrow \infty$, то, как нетрудно проверить, канонически нормированное решение $\bar{\partial}$ -задачи (2.1) удовлетворяет уравнению

$$\Psi = I + \Psi RC_z, \tag{2.2}$$

где C_z – интегральный оператор Коши–Грина, действующий на функции, стоящие слева,

$$\Psi RC_z = \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\Psi(\zeta)R(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}. \quad (2.3)$$

В соответствии с выражением (2.2) решение $\bar{\partial}$ -задачи(2.1) имеет вид

$$\Psi = I \cdot (I - RC_z)^{-1}. \quad (2.4)$$

Определим спаривание

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi i} \iint f(z)g^T(z) dz \wedge d\bar{z}. \quad (2.5)$$

Нетрудно проверить, что оно обладает следующими свойствами:

$$\langle f, g \rangle^T = \langle g, f \rangle, \quad \langle fR, g \rangle = \langle f, gR^T \rangle, \quad \langle fC_z, g \rangle = -\langle f, gC_z \rangle. \quad (2.6)$$

Тогда получаем

$$\langle f(I - C_z R)^{-1}, g \rangle = \langle f, g(I + R^T C_z)^{-1} \rangle. \quad (2.7)$$

Чтобы построить решение уравнения квМКдФ, нам потребуется ввести зависимость от переменных x и t в матрицу R спектрального преобразования. Для уравнения квМКдФ потребуем, чтобы по этим переменным матрица R удовлетворяла уравнениям

$$R_x = iz[R, \sigma], \quad (2.8)$$

$$R_t = [R, \Omega], \quad (2.9)$$

где Ω – дисперсионное соотношение, которое содержит полиномиальную часть Ω_p и сингулярную часть Ω_s :

$$\Omega = \Omega_p + \Omega_s = \alpha_n z^n \sigma + \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{w(\zeta)\sigma}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}. \quad (2.10)$$

Здесь α_n – константа, $w(z)$ – скалярная функция и $\bar{\partial}\Omega_s = w(z)\sigma$. Далее мы рассматриваем случай, когда дисперсионное соотношение содержит только полиномиальную часть, $\Omega = \Omega_p = \alpha_n z^n \sigma$. Тогда уравнение (2.9) упрощается и принимает вид

$$R_t = 4iz^3[R, \sigma]. \quad (2.11)$$

Из (2.4), (2.8) получаем

$$\begin{aligned} \Psi_x &= I \cdot (I - RC_z)_x^{-1} = \Psi R_x C_z (I - RC_z)^{-1} = iz\Psi(R\sigma - \sigma R)C_z (I - RC_z)^{-1} = \\ &= i(z\Psi RC_z)\sigma (I - RC_z)^{-1} - iz\Psi\sigma RC_z (I - RC_z)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Найдем первое слагаемое в правой части (2.12). По определению C_z имеем

$$\begin{aligned} z^n \Psi RC_z &= \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\zeta^n \Psi(\zeta) R(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{(\zeta^n - z^n) \Psi(\zeta) R(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} + \frac{z^n}{2\pi i} \iint \frac{\Psi(\zeta) R(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint \Psi(\zeta) R(\zeta) \sum_{j=1}^n \zeta^{n-j} z^{j-1} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} + z^n (\Psi RC_z) = \\ &= \sum_{j=1}^n z^{j-1} \langle z^{n-j} \Psi R \rangle + z^n (\Psi - I). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Здесь мы положили

$$\langle z^{n-j} \Psi R \rangle \equiv \langle z^{n-j} \Psi R, I \rangle = \frac{1}{2\pi i} \iint \zeta^{n-j} \Psi(\zeta) R(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}. \tag{2.14}$$

При $n = 1$ получаем

$$z \Psi RC_z = \langle \Psi R \rangle + z(\Psi - I). \tag{2.15}$$

Далее найдем второе слагаемое в (2.12). С учетом $RC_z = I - (I - RC_z)$ имеем

$$RC_z(I - RC_z)^{-1} = (I - RC_z)^{-1} - I. \tag{2.16}$$

В итоге, подставляя оба полученных выражения в (2.12), выводим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \Psi_x &= i \langle \Psi R \rangle \sigma(I - RC_z)^{-1} + iz \Psi \sigma(I - RC_z)^{-1} - \\ &\quad - iz \sigma(I - RC_z)^{-1} - iz \Psi \sigma(I - RC_z)^{-1} + iz \Psi \sigma = \\ &= i \langle \Psi R \rangle \sigma(I - RC_z)^{-1} - iz \sigma(I - RC_z)^{-1} + iz \Psi \sigma = \\ &= i \langle \Psi R \rangle \sigma \Psi - i \sigma z (I - RC_z)^{-1} + iz \Psi \sigma. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Дополнительно из (2.15) получаем

$$zI = \langle \Psi R \rangle + z\Psi(I - RC_z). \tag{2.18}$$

Отметим, что $z(I - RC_z)^{-1}$ означает, что $(I - RC_z)^{-1}$ действует на z слева, поэтому мы не можем здесь использовать (2.4). Чтобы упростить соотношение (2.17), подставим (2.18) в (2.17) и заметим, что спаривание $\langle \Psi R \rangle$ не зависит от z . Тогда $z(I - RC_z)^{-1}$ задается как

$$z(I - RC_z)^{-1} = (\langle \Psi R \rangle + z)\Psi. \tag{2.19}$$

Таким образом, уравнение (2.12) принимает вид

$$\Psi_x + iz[\sigma, \Psi] = Q\Psi, \quad Q = -i[\sigma, \langle \Psi R \rangle]. \tag{2.20}$$

Чтобы вывести спектральную задачу, зависящую от времени, предположим, что матрица R удовлетворяет уравнению (2.11). Опять же из (2.4) и (2.11) получаем

$$\begin{aligned}\Psi_t &= \Psi R_t C_z (I - RC_z)^{-1} = \Psi (R\Omega - \Omega R) C_z (I - RC_z)^{-1} = \\ &= 4iz^3 \Psi [R, \sigma] C_z (I - RC_z)^{-1} = \\ &= 4i(z^3 \Psi RC_z) \sigma (I - RC_z)^{-1} - 4iz^3 \Psi \sigma [RC_z (I - RC_z)^{-1}] = \\ &= 4i(z^3 \Psi RC_z) \sigma (I - RC_z)^{-1} - 4iz^3 \Psi \sigma (I - RC_z)^{-1} + 4iz^3 \Psi \sigma.\end{aligned}\quad (2.21)$$

Из (2.13) при $n = 3$ имеем $z^3 \Psi RC_z = z^3(\Psi - I) + \langle z^2 \Psi R \rangle + z \langle z \Psi R \rangle + z^2 \langle \Psi R \rangle$. Подставляя это выражение в (2.21), получаем

$$\begin{aligned}\Psi_t &= 4i[z^3(\Psi - I) + \langle z^2 \Psi R \rangle + z \langle z \Psi R \rangle + z^2 \langle \Psi R \rangle] \sigma (I - RC_z)^{-1} - \\ &\quad - 4iz^3 \Psi \sigma (I - RC_z)^{-1} + 4iz^3 \Psi \sigma = \\ &= 4iz^3 \Psi \sigma + 4i \langle z^2 \Psi R \rangle \sigma \Psi + 4i \langle z \Psi R \rangle \sigma (\langle \Psi R \rangle + z) \Psi + \\ &\quad + 4i \langle \Psi R \rangle \sigma (z^2 + \langle z \Psi R \rangle + \langle \Psi R \rangle^2 + z \langle \Psi R \rangle) \Psi - \\ &\quad - 4i \sigma (z^3 + \langle z^2 \Psi R \rangle + z \langle z \Psi R \rangle + z^2 \langle \Psi R \rangle + \\ &\quad\quad + \langle z \Psi R \rangle \langle \Psi R \rangle + \langle \Psi R \rangle \langle z \Psi R \rangle + \langle \Psi R \rangle^3 + z \langle \Psi R \rangle^2) = \\ &= -4iz^3 [\sigma, \Psi] - 4i [\sigma, \langle z^2 \Psi R \rangle] \Psi - 4i [\sigma, \langle z \Psi R \rangle] (\langle \Psi R \rangle + z) \Psi - \\ &\quad - 4i [\sigma, \langle \Psi R \rangle] (z^2 + \langle z \Psi R \rangle + z \langle \Psi R \rangle + \langle \Psi R \rangle^2).\end{aligned}\quad (2.22)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\Psi_t + 4iz^3 [\sigma, \Psi] &= -4i [\sigma, \langle z^2 \Psi R \rangle] \Psi - 4i [\sigma, \langle z \Psi R \rangle] (\langle \Psi R \rangle + z) \Psi - \\ &\quad - 4i [\sigma, \langle \Psi R \rangle] (z^2 + \langle z \Psi R \rangle + z \langle \Psi R \rangle + \langle \Psi R \rangle^2).\end{aligned}\quad (2.23)$$

Для матрицы A размера 5×5 введем разложение $A = A^{(E)} + A^{(F)}$, где

$$A^{(F)} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{(E)} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ 0 & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{pmatrix}.$$

Используя (2.20) и (2.8), получаем

$$\begin{aligned}\langle \Psi R \rangle_x^{(F)} &= Q \langle \Psi R \rangle_x^{(E)} - 2i \sigma \langle z \Psi R \rangle_x^{(F)}, \\ -i \langle z \Psi R \rangle_x &= -i Q \langle z \Psi R \rangle - 2 \sigma \langle z^2 \Psi R \rangle^{(F)}, \\ \langle z \Psi R \rangle^{(E)} &= Q \langle z \Psi R \rangle^{(F)}.\end{aligned}$$

Подстановка полученных выражений в (2.23) дает еще одно линейное уравнение

$$\Psi_t + 4iz^3 [\sigma, \Psi] = \tilde{Q} \Psi, \quad (2.24)$$

где $\tilde{Q} = 4z^2 Q - 2iz\sigma Q^2 + 2iz\sigma Q_x + [Q_x, Q] - Q_{xx} + 2Q^3$.

3. ОПЕРАТОР РЕКУРСИИ И ИЕРАРХИЯ УРАВНЕНИЙ

В этом разделе мы выводим иерархию нелинейных эволюционных уравнений. В силу определения оператора C_z имеем $\bar{\partial}f(z)C_z = f(z)$, тогда

$$\begin{aligned} (\Psi R)_t &= \bar{\partial}\Psi_t(z) = \bar{\partial}[I \cdot (I - RC_z)_t^{-1}] = \bar{\partial}[I \cdot (I - RC_z)^{-1}R_tC_z(I - RC_z)^{-1}] = \\ &= \bar{\partial}[\Psi R_tC_z(I - RC_z)^{-1}] = \bar{\partial}[\Psi R_t(I - C_zR)^{-1}(I - C_zR)C_z(I - RC_z)^{-1}] = \\ &= \bar{\partial}[\Psi R_t(I - C_zR)^{-1}C_z] = \Psi R_t(I - C_zR)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Применив спаривание к обеим частям равенства, получаем

$$\langle (\Psi R)_t \rangle = \langle \Psi R_t(I - C_zR)^{-1}, I \rangle = \langle \Psi R_t, I \cdot (I + R^T C_z)^{-1} \rangle. \quad (3.2)$$

Возьмем производную по t от второго уравнения в (2.20) и поставим в получившееся уравнение равенство (3.2):

$$Q_t = -i[\sigma, \langle \Psi R \rangle_t] = -i[\sigma, \langle \Psi R_t, I \cdot (I + R^T C_z)^{-1} \rangle]. \quad (3.3)$$

Поскольку $\bar{\partial}\Psi^{-1} = -R\Psi^{-1}$, имеем $\bar{\partial}(\Psi^{-1})^T = (\Psi^{-1})^T(-R^T)$. В результате получаем формальное решение

$$(\Psi^{-1})^T = I \cdot (I + R^T C_z)^{-1}. \quad (3.4)$$

Учтем (2.11) и (3.4), тогда (3.3) дает

$$\begin{aligned} Q_t &= -i[\sigma, \langle \Psi R_t, (\Psi^{-1})^T \rangle] = -i[\sigma, \langle \Psi R_t \Psi^{-1} \rangle] = \\ &= -i[\sigma, \langle \Psi(R\Omega - \Omega R)\Psi^{-1} \rangle] = -i[\sigma, \langle \Psi R\Omega\Psi^{-1} \rangle] - i[\sigma, \langle \Psi\Omega(-R\Psi^{-1}) \rangle] = \\ &= -i[\sigma, \langle (\bar{\partial}\Psi)\Omega\Psi^{-1} \rangle] - i[\sigma, \langle \Psi\Omega(\bar{\partial}\Psi^{-1}) \rangle]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Используя условие $\Omega_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, преобразуем это уравнение как

$$\begin{aligned} Q_t &= -i[\sigma, \langle \bar{\partial}(\Psi\Omega\Psi^{-1}) \rangle] + i[\sigma, \langle \Psi(\bar{\partial}\Omega)\Psi^{-1} \rangle] = \\ &= -i[\sigma, \langle \bar{\partial}(\Psi\Omega_p\Psi^{-1}) \rangle] + i[\sigma, \langle \Psi(\bar{\partial}\Omega_s)\Psi^{-1} \rangle] = \\ &= -i\alpha_n[\sigma, \langle \bar{\partial}(z^n\Psi\sigma\Psi^{-1}) \rangle] + i[\sigma, \langle w(z)\Psi\sigma\Psi^{-1} \rangle]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Далее введем матрицу $M = \Psi\sigma\Psi^{-1}$, тогда

$$Q_t = -i\alpha_n[\sigma, \langle \bar{\partial}(z^n M) \rangle] + i[\sigma, \langle w(z)M \rangle] = -2i\alpha_n\sigma\langle \bar{\partial}(z^n M) \rangle^{(F)} + i[\sigma, \langle w(z)M \rangle]. \quad (3.7)$$

Нетрудно проверить, что M удовлетворяет следующему уравнению:

$$M_x + iz[\sigma, M] - [Q, M] = 0. \quad (3.8)$$

Разложив матрицу M , перепишем его как

$$M_x^{(E)} = [Q, M^{(F)}], \quad (3.9)$$

$$M_x^{(F)} + 2iz\sigma M^{(F)} = [Q, M^{(E)}]. \quad (3.10)$$

При условии, что $\Psi \rightarrow I$ при $z \rightarrow \infty$, уравнение (3.9) принимает вид

$$M_x^{(E)} = \sigma + \partial_x^{-1}[Q, M^{(F)}]. \quad (3.11)$$

Применяя этот результат в (3.10), получаем

$$M_x^{(F)} + 2iz\sigma M^{(F)} = [Q, \sigma + \partial_x^{-1}[Q, M^{(F)}]]. \quad (3.12)$$

Упростим запись, введя оператор рекурсии

$$\Lambda \cdot = \frac{1}{2}i\sigma(\partial_x - [Q, \partial_x^{-1}[Q, \cdot]]). \quad (3.13)$$

Тогда уравнение (3.12) принимает вид $M^{(F)} = -i(\Lambda - z)^{-1}Q$. Учтя это соотношение, получаем, что (3.7) можно записать как

$$Q_t = -2\alpha_n\sigma(\bar{\partial}(z^n(\Lambda - z)^{-1}Q)) + i[\sigma, \langle w(z)M(z) \rangle]. \quad (3.14)$$

Далее разложим $(\Lambda - z)^{-1}$ в ряд: $(\Lambda - z)^{-1} = -\sum_{j=1}^{\infty} z^{-j}\Lambda^{j-1}$. С другой стороны, $\bar{\partial}z^{n-j} = \pi\delta(z)\delta_{j,n+1}R$, $j = 1, 2, \dots$. Тогда

$$Q_t = -2\alpha_n\sigma\Lambda^n Q + i[\sigma, \langle w(z)M(z) \rangle], \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Чтобы найти иерархию уравнений кмвКдФ, введем следующую симметрию потенциала Q :

$$HQH^{-1} = \bar{Q}, \quad \text{где } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что Q имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & \bar{q}_1 & q_2 & \bar{q}_2 \\ -\bar{q}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{q}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее имеем

$$H\bar{\Psi}(-\bar{z})H^{-1} = \Psi(z), \quad H\bar{M}(-\bar{z})H^{-1} = M(z).$$

При $n = 0$ получаем уравнения

$$\begin{aligned} Q_t + 2\alpha_0\sigma Q &= 2i\sigma\langle w(z)M^{(F)} \rangle, \\ M_x^{(F)} + 2iz\sigma M^{(F)} &= [Q, M^{(E)}], \quad M_x^{(E)} = [Q, M^{(F)}]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

При $n = 1$, $\Lambda Q = \frac{i}{2}\sigma Q_x$ и $\alpha_1 = -i$ получаем уравнения типа Максвелла–Блоха:

$$\begin{aligned} Q_t + Q_x &= 2i\sigma\langle w(z)M^{(F)} \rangle, \\ M_x^{(F)} + 2iz\sigma M^{(F)} &= [Q, M^{(E)}], \quad M_x^{(E)} = [Q, M^{(F)}]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

При $n = 2$, $\Lambda^2 Q = -\frac{1}{4}Q_{xx} + \frac{1}{2}Q^3$ получаем уравнения типа нелинейного уравнения Шредингера–Максвелла–Блоха

$$\begin{aligned} Q_t + \alpha_2\sigma\left(Q^3 - \frac{1}{2}Q_{xx}\right) &= 2i\sigma\langle w(z)M^{(F)} \rangle, \\ M_x^{(F)} + 2iz\sigma M^{(F)} &= [Q, M^{(E)}], \quad M_x^{(E)} = [Q, M^{(F)}]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

При $n = 3$, $\Lambda^3 Q = -\frac{i}{8}\sigma Q_{xxx} + \frac{3i}{8}\sigma(Q_x Q^2 + Q^2 Q_x)$ и $\alpha_3 = 4i$ имеем

$$\begin{aligned} Q_t - \frac{i}{4}\alpha_3 Q_{xxx} + \frac{3i}{4}\alpha_3(Q_x Q^2 + Q^2 Q_x) &= 2i\sigma\langle w(z)M^{(F)} \rangle, \\ M_x^{(F)} + 2iz\sigma M^{(F)} &= [Q, M^{(E)}], \quad M_x^{(E)} = [Q, M^{(F)}]. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Если $w(z) = 0$, мы приходим к уравнению квМКдФ

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{q}_{xxx} + 3(\mathbf{q}_x \mathbf{q}^T \mathbf{q} + \mathbf{q} \mathbf{q}^T \mathbf{q}_x) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q} = (-\bar{q}_1, -q_1, -\bar{q}_2, -q_2)^T.$$

При $n = 4$,

$$\Lambda^4 Q = \frac{Q_{xxxx} - 4Q_{xx}Q^2 - 4Q^2Q_{xx} - 2Q_x^2Q - 2QQ_x^2 - 6Q_xQQ_x - 2QQ_{xx}Q + 6Q^5}{16}$$

и $\alpha_4 = -8i$ мы имеем уравнение Лакшманана–Порсециана–Даниеля

$$\begin{aligned} Q_t + \frac{\alpha_4}{8}\sigma H &= 2i\sigma\langle w(z)M^{(F)} \rangle, \\ M_x^{(F)} + 2iz\sigma M^{(F)} &= [Q, M^{(E)}], \quad M_x^{(E)} = [Q, M^{(F)}], \end{aligned} \tag{3.20}$$

где $H = Q_{xxxx} - 4Q_{xx}Q^2 - 4Q^2Q_{xx} - 2Q_x^2Q - 2QQ_x^2 - 6Q_xQQ_x - 2QQ_{xx}Q + 6Q^5$.

4. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ И АНАЛИЗ ИХ ДИНАМИКИ

В этом разделе с помощью $\bar{\partial}$ -задачи мы строим одно-, двух- и трехсолитонные решения уравнения квМКдФ и анализируем их графики.

4.1. N -солитонные решения. Пусть $z_j, \bar{z}_j, j = 1, 2, \dots, N$, – точки дискретного спектра на комплексной плоскости. Решая уравнения (2.8), (2.9), можно получить, что

$$\begin{aligned} R &= \pi e^{-i\theta(z)\hat{\sigma}} \times \\ &\times \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} 0 & -a_j\delta(z - z_j) & \bar{a}_j\delta(z - z_j) & -b_j\delta(z - z_j) & \bar{b}_j\delta(z - z_j) \\ \bar{a}_j\delta(z - \bar{z}_j) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_j\delta(z - \bar{z}_j) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{b}_j\delta(z - \bar{z}_j) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_j\delta(z - \bar{z}_j) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\theta(z) = zx + 4z^3t$. Для такого R , используя второе уравнение в (2.20), получаем решение уравнения квМКдФ:

$$\begin{aligned} q_1(x, t) &= -2i\langle \Psi R \rangle_{12} = -\frac{1}{\pi} \iint \Psi_{11} R_{12} dz \wedge d\bar{z} = \\ &= \sum_{j=1}^N a_j \iint \Psi_{11} e^{-2i\theta(z)} \delta(z - z_j) dz \wedge d\bar{z} = -2i \sum_{j=1}^N a_j e^{-2i\theta(z_j)} \Psi_{11}(z_j). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Аналогично

$$q_2(x, t) = -2i \sum_{j=1}^N b_j e^{-2i\theta(z_j)} \Psi_{11}(z_j). \tag{4.2}$$

Отсюда выводим потенциал Q и определяем функции $\Psi_{11}(z_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$. Далее мы получим выражение для $\Psi_{11}(z)$.

Сравнив элементы первой строки матричной собственной функции (2.2), имеем

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(z) &= 1 + \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\Psi_{12}R_{21} + \Psi_{13}R_{31} + \Psi_{14}R_{41} + \Psi_{15}R_{51}}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\ &= 1 + \sum_{j=1}^N \left[\frac{\bar{a}_j}{z - \bar{z}_j} \Psi_{12}(\bar{z}_j) - \frac{a_j}{z - \bar{z}_j} \Psi_{13}(\bar{z}_j) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{b}_j}{z - \bar{z}_j} \Psi_{14}(\bar{z}_j) - \frac{b_j}{z - \bar{z}_j} \Psi_{15}(\bar{z}_j) \right] e^{2i\theta(\bar{z}_j)}, \end{aligned} \quad (4.3a)$$

$$\Psi_{12}(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\Psi_{11}R_{12}}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \sum_{l=1}^N \frac{-a_l}{z - z_l} e^{-2i\theta(z_l)} \Psi_{11}(z_l), \quad (4.3б)$$

$$\Psi_{13}(z) = \sum_{l=1}^N \frac{\bar{a}_l}{z - z_l} e^{-2i\theta(z_l)} \Psi_{11}(z_l), \quad (4.3в)$$

$$\Psi_{14}(z) = \sum_{l=1}^N \frac{-b_l}{z - z_l} e^{-2i\theta(z_l)} \Psi_{11}(z_l), \quad (4.3г)$$

$$\Psi_{15}(z) = \sum_{l=1}^N \frac{\bar{b}_l}{z - z_l} e^{-2i\theta(z_l)} \Psi_{11}(z_l). \quad (4.3д)$$

Если $z = \bar{z}_j$, получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{12}(\bar{z}_j) &= \sum_{l=1}^N \frac{-a_l}{\bar{z}_j - z_l} e^{-2i\theta(z_l)} \Psi_{11}(z_l), & \Psi_{13}(\bar{z}_j) &= \sum_{l=1}^N \frac{\bar{a}_l}{\bar{z}_j - z_l} e^{-2i\theta(z_l)} \Psi_{11}(z_l), \\ \Psi_{14}(\bar{z}_j) &= \sum_{l=1}^N \frac{-b_l}{\bar{z}_j - z_l} e^{-2i\theta(z_l)} \Psi_{11}(z_l), & \Psi_{15}(\bar{z}_j) &= \sum_{l=1}^N \frac{\bar{b}_l}{\bar{z}_j - z_l} e^{-2i\theta(z_l)} \Psi_{11}(z_l). \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в (4.3a) дает для $n = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(z_n) &= 1 + \sum_{j=1}^N \left[\frac{\bar{a}_j}{z_n - \bar{z}_j} \Psi_{12}(\bar{z}_j) - \frac{a_j}{z_n - \bar{z}_j} \Psi_{13}(\bar{z}_j) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{b}_j}{z_n - \bar{z}_j} \Psi_{14}(\bar{z}_j) - \frac{b_j}{z_n - \bar{z}_j} \Psi_{15}(\bar{z}_j) \right] e^{2i\theta(\bar{z}_j)} = \\ &= 1 - \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{a_j \bar{a}_l + \bar{a}_j a_l}{(z_n - \bar{z}_j)(\bar{z}_j - z_l)} e^{2i(\theta(\bar{z}_j) - \theta(z_l))} \Psi_{11}(z_l) - \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{b_j \bar{b}_l + \bar{b}_j b_l}{(z_n - \bar{z}_j)(\bar{z}_j - z_l)} e^{2i(\theta(\bar{z}_j) - \theta(z_l))} \Psi_{11}(z_l) = \\ &= 1 - \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{a_j \bar{a}_l + \bar{a}_j a_l + b_j \bar{b}_l + \bar{b}_j b_l}{(z_n - \bar{z}_j)(\bar{z}_j - z_l)} e^{2i(\theta(\bar{z}_j) - \theta(z_l))} \Psi_{11}(z_l). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Эти соотношения можно записать как

$$M\Upsilon_{11} = E. \tag{4.5}$$

Здесь $E = (1, 1, \dots, 1)^T$ и $\Upsilon_{11} = (\Psi_{11}(z_1), \Psi_{11}(z_2), \dots, \Psi_{11}(z_N))^T$ суть векторы-столбцы размера $N \times 1$ и

$$M = I + A, \quad A = (A_{mn})_{N \times N},$$

$$A_{mn} = \sum_{j=1}^N [A_{1j}(z_m)\overline{A_{1n}(z_j)} + A_{2j}(z_m)\overline{A_{2n}(z_j)} + B_{1j}(z_m)\overline{B_{1n}(z_j)} + B_{2j}(z_m)\overline{B_{2n}(z_j)}],$$

$$A_{1j}(z_m) = \frac{\bar{a}_j}{z_m - \bar{z}_j} e^{2i\theta(\bar{z}_j)}, \quad B_{1j}(z_m) = \frac{\bar{b}_j}{z_m - \bar{z}_j} e^{2i\theta(\bar{z}_j)},$$

$$A_{2j}(z_m) = \frac{a_j}{z_m - \bar{z}_j} e^{2i\theta(\bar{z}_j)}, \quad B_{2j}(z_m) = \frac{b_j}{z_m - \bar{z}_j} e^{2i\theta(\bar{z}_j)}.$$

Получаем решение уравнения (4.5)

$$\Psi_{11}(z_n) = \frac{\det M_n^{\text{rep}}}{\det M}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \tag{4.6}$$

где $M_n^{\text{rep}} = (M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, E, M_{n+1}, M_{n+2}, \dots, M_N)$. Наконец, подставим это выражение в соотношения (4.1) и (4.2), тогда их можно записать в следующем компактном виде:

$$q_1(x, t) = 2i \frac{\det N}{\det M}, \quad q_2(x, t) = 2i \frac{\det H}{\det M}, \tag{4.7}$$

где

$$N = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ E & M \end{pmatrix}, \quad Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N), \quad Y_n = a_n e^{-2i\theta(z_n)},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & X \\ E & M \end{pmatrix}, \quad X = (X_1, X_2, \dots, X_N), \quad X_n = b_n e^{-2i\theta(z_n)}.$$

4.2. Анализ влияния параметров на односолитонное решение. В случае $N = 1$ получаем односолитонное решение:

$$q_1 = -2i \frac{a_1}{e^{2i\theta(z_1)} + \frac{2}{|z_1 - \bar{z}_1|^2} (|a_1|^2 + |b_1|^2) e^{2i\theta(\bar{z}_1)}}, \tag{4.8}$$

$$q_2 = -2i \frac{b_1}{e^{2i\theta(z_1)} + \frac{2}{|z_1 - \bar{z}_1|^2} (|a_1|^2 + |b_1|^2) e^{2i\theta(\bar{z}_1)}}, \tag{4.9}$$

где $\theta(z_1) = z_1 x + 4z_1^3 t$. Для комплексного $z_1 = \xi_1 + i\eta_1$ имеем

$$\theta(z_1) = n_1 + im_1, \quad \theta(\bar{z}_1) = n_1 - im_1.$$

Тогда односолитонное решение (4.8), (4.9) записывается как

$$q_1 = \frac{-2ia_1}{(e^{-2m_1} + \frac{|a_1|^2 + |b_1|^2}{2\eta_1^2} e^{2m_1})(\cos(2n_1) + i \sin(2n_1))}, \tag{4.10}$$

$$q_2 = \frac{-2ib_1}{(e^{-2m_1} + \frac{|a_1|^2 + |b_1|^2}{2\eta_1^2} e^{2m_1})(\cos(2n_1) + i \sin(2n_1))}. \tag{4.11}$$

Отсюда

$$|q_1| = \frac{2|a_1|}{e^{-2m_1} + \frac{|a_1|^2 + |b_1|^2}{2\eta_1^2} e^{2m_1}} \leq \frac{|a_1|}{\sqrt{\frac{|a_1|^2 + |b_1|^2}{2\eta_1^2}}},$$

при этом функция $|q_1|$ имеет единственный максимум при

$$e^{-2m_1} = \sqrt{\frac{|a_1|^2 + |b_1|^2}{2\eta_1^2}}, \quad m_1 = -\frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{|a_1|^2 + |b_1|^2}{2\eta_1^2}}.$$

Далее положим $h_1 = -\frac{1}{2} \ln \frac{|a_1|^2 + |b_1|^2}{2\eta_1^2}$, тогда формулы (4.10) и (4.11) сводятся к

$$q_1 = \frac{-ia_1 e^{h_1}}{(\operatorname{ch} 2(m_1 - h_1/2))(\cos(2n_1) + i \sin(2n_1))}, \quad (4.12)$$

$$q_2 = \frac{-ib_1 e^{h_1}}{(\operatorname{ch} 2(m_1 - h_1/2))(\cos(2n_1) + i \sin(2n_1))}. \quad (4.13)$$

Из выражения для q_2 мы видим, что данная солитонная волна имеет характеристическую прямую $L: m_1 - h_1/2 = 0$, вдоль которой значение q_1 остается неизменным. Эта же прямая L является характеристической для q_1 (см. формулу (4.12)).

Положив $a_1 = 3$, $b_1 = 1$ и $z_1 = 1/2 + i/2$, во введенных выше обозначениях имеем

$$q_1 = \frac{-6i}{(e^{-2m_1} + 20e^{2m_1})(\cos(2n_1) + i \sin(2n_1))}, \quad (4.14)$$

$$q_2 = \frac{-2i}{(e^{-2m_1} + 20e^{2m_1})(\cos(2n_1) + i \sin(2n_1))}. \quad (4.15)$$

На рис. 1 показана структура солитонной волны (4.11) при данных значениях параметров.

Односолитонное решение содержит три параметра: a_1 , b_1 и z_1 . Чтобы понять, как влияют на поведение решения параметры a_1 и b_1 , мы построили графики решения при различных a_1 и b_1 , не меняя другие параметры (см. рис. 2). Для построения графиков мы выбрали $z_1 = 1/2 + i/2$.

Влияние параметра z_1 на поведение решения показано на рис. 3.

На рис. 2а–2в мы видим три солитона одинаковой формы, но с разными положениями максимумов. Чем больше значения a_1 и b_1 , тем больше солитон смещается вправо. Очевидно, что a_1 и b_1 не влияют на форму волны и направление ее распространения, но изменение значений a_1 и b_1 может повлиять на положение максимума. С увеличением значения a_1 максимум уменьшается. Если мы увеличиваем значение b_1 , максимум растет.

Далее мы изучили влияние на решение действительной и мнимой частей параметра $z_1 = \xi_1 + i\eta_1$ (см. рис. 3). При постоянных a_1 и b_1 , когда ξ_1 уменьшается или η_1 увеличивается, угол между направлением распространения волны и осью x уменьшается, а когда ξ_1 уменьшается или η_1 увеличивается, этот угол увеличивается и солитон одновременно смещается вправо. Кроме того, параметр z_1 также оказывает определенное влияние на максимум волны.

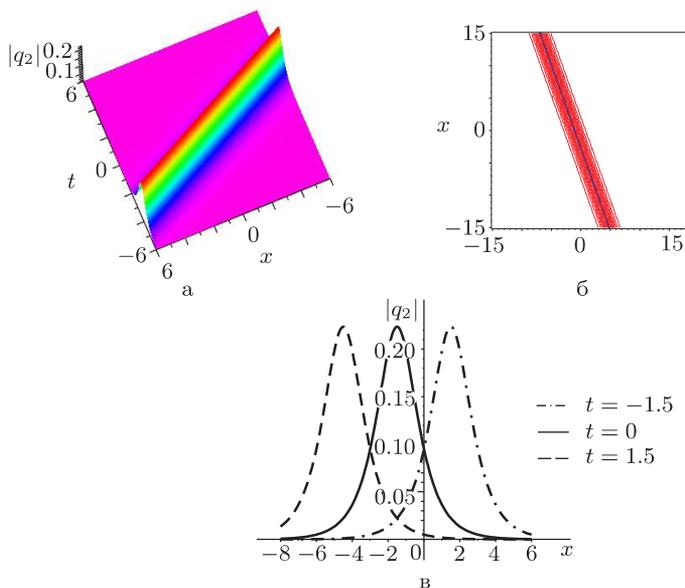


Рис. 1. Графики модуля односолитонного решения q_2 уравнения с параметрами $a = 3$, $b = 1$ и $z_1 = 1/2 + i/2$: трехмерный график (а); двумерная цветовая диаграмма (б), где также показана характеристическая прямая $L: x/2 + t = -(\ln 20)/2$ солитонной волны; решение как функция от x при различных временах (в).

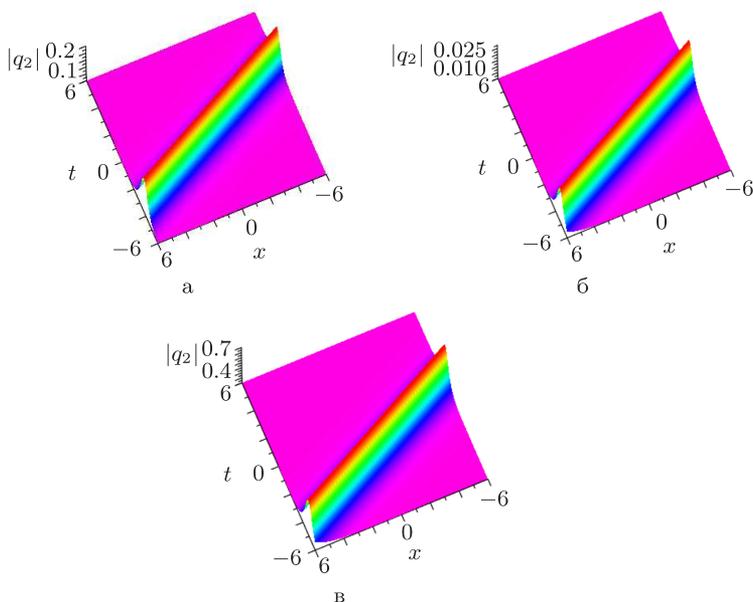


Рис. 2. Графики модуля односолитонного решения q_2 уравнения с параметрами $z_1 = 1/2 + i/2$ и $a = 3$, $b = 1$ (а); $a = 25$, $b = 1$ (б); $a = 3$, $b = 33$ (в).

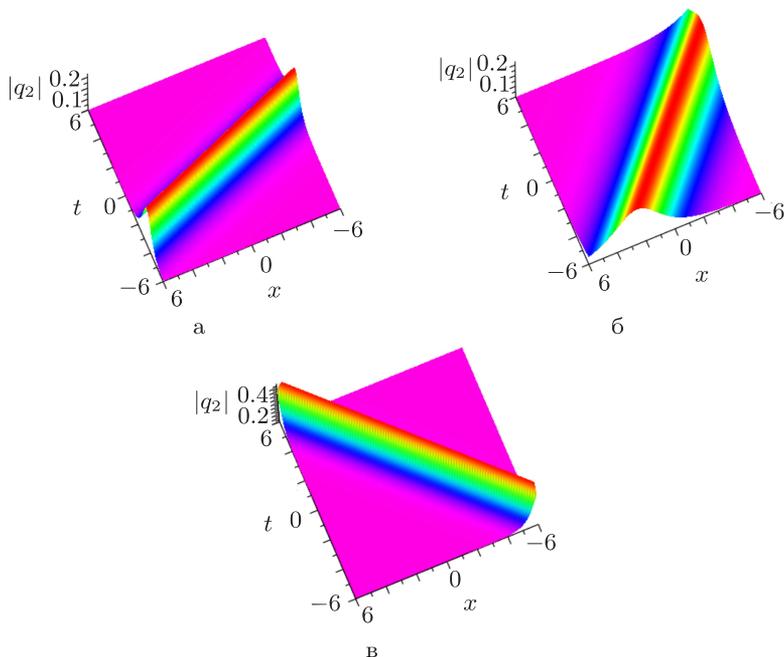


Рис. 3. Графики модуля односолитонного решения q_2 уравнения с параметрами $a = 3$, $b = 1$ и $z_1 = 1/2 + i/2$ (а); $z_1 = 1/3 + i/2$ (б); $z_1 = 1/2 + i$ (в).

4.3. Анализ влияния параметров на двухсолитонное решение. В случае $N = 2$ двухсолитонное решение получается по формулам (4.7) и (4.8):

$$q_1(x, t) = 2i \frac{\det N}{\det M}, \quad q_2(x, t) = 2i \frac{\det H}{\det M}, \quad (4.16)$$

где

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a_1 e^{-2i\theta(z_1)} & a_2 e^{-2i\theta(z_2)} \\ 1 & M_{11} & M_{12} \\ 1 & M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & b_1 e^{-2i\theta(z_1)} & b_2 e^{-2i\theta(z_2)} \\ 1 & M_{11} & M_{12} \\ 1 & M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

$$M_{11} = 1 + \sum_{j=1}^2 \frac{\bar{a}_j a_1 + a_j \bar{a}_1 + \bar{b}_j b_1 + b_j \bar{b}_1}{(z_1 - \bar{z}_j)(\bar{z}_j - z_1)} e^{2i(\theta(\bar{z}_j) - \theta(z_1))},$$

$$M_{12} = \sum_{j=1}^2 \frac{\bar{a}_j a_2 + a_j \bar{a}_2 + \bar{b}_j b_2 + b_j \bar{b}_2}{(z_1 - \bar{z}_j)(\bar{z}_j - z_2)} e^{2i(\theta(\bar{z}_j) - \theta(z_2))},$$

$$M_{21} = \sum_{j=1}^2 \frac{\bar{a}_j a_1 + a_j \bar{a}_1 + \bar{b}_j b_1 + b_j \bar{b}_1}{(z_2 - \bar{z}_j)(\bar{z}_j - z_1)} e^{2i(\theta(\bar{z}_j) - \theta(z_1))},$$

$$M_{22} = 1 + \sum_{j=1}^2 \frac{\bar{a}_j a_2 + a_j \bar{a}_2 + \bar{b}_j b_2 + b_j \bar{b}_2}{(z_2 - \bar{z}_j)(\bar{z}_j - z_2)} e^{2i(\theta(\bar{z}_j) - \theta(z_2))}$$

и $\theta(z) = zx + 4z^3t$. Из этих выражений мы видим, что волна имеет две характеристические прямые

$$L_1: \eta_1x - 4\eta_1^3t + 12\xi_1^2\eta_1t + \frac{1}{4} \ln \sqrt{\frac{|a_1|^2 + |b_1|^2}{2\eta_1^2}} = 0,$$

$$L_2: \eta_2x - 4\eta_2^3t + 12\xi_2^2\eta_2t + \frac{1}{4} \ln \sqrt{\frac{|a_2|^2 + |b_2|^2}{2\eta_2^2}} = 0.$$

Положив $a_1 = 20, a_2 = 15, b_1 = 9, b_2 = 10$, мы построили графики решения q_2 для различных z_1 и z_2 (см. рис. 4 и 5), чтобы описать локализованные структуры, присутствующие в двухсолитонном решении. Эти рисунки показывают, что мы сталкиваемся с двумя типами явлений.

На рис. 4 мы видим два солитона, которые распространяются параллельно без взаимодействия; на рис. 5 две волны сталкиваются и возникает разность фаз. В момент столкновения максимум волны мгновенно увеличивается. После столкновения форма двух волн остается неизменной, а энергия передается от одного солитона к другому: один из пиков увеличивается, а другой уменьшается. Двухсолитонное решение имеет две характеристические прямые. При $z_1 = -z_2$ эти прямые параллельны (см. рис. 4б), при $z_1 \neq -z_2$ они пересекаются (см. рис. 5б).

Выбрав некоторые подходящие параметры, отражающие изменение поведения волны, мы видим, что влияние параметров a_1, b_1, z_1 и параметров a_2, b_2, z_2 аналогичны, поэтому рассмотрим параметры a_1, b_1, z_1 . На рис. 6 показано двухсолитонное решение q_2 уравнения с параметрами $a_2 = \sqrt{3}e^{4\sqrt{3}}, b_2 = \sqrt{3}e^{4\sqrt{3}}$ и различными значениями других параметров a_1, b_1, z_1 и z_2 , а именно

$$\begin{aligned} \text{рис. 6а: } & a_1 = e^{10}, \quad b_1 = e^{10}, \quad z_1 = \frac{1}{2} + i, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i, \\ \text{рис. 6б: } & a_1 = 2000, \quad b_1 = e^{10}, \quad z_1 = \frac{1}{2} + i, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i, \\ \text{рис. 6в: } & a_1 = e^{10}, \quad b_1 = 10^4, \quad z_1 = \frac{1}{2} + i, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i, \\ \text{рис. 6г: } & a_1 = e^{10}, \quad b_1 = e^{10}, \quad z_1 = \frac{2}{3} + i, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i, \\ \text{рис. 6д: } & a_1 = e^{10}, \quad b_1 = e^{10}, \quad z_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i, \\ \text{рис. 6е: } & a_1 = e^{10}, \quad b_1 = e^{10}, \quad z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} + i, \quad z_2 = \sqrt{\frac{13}{12}} + \sqrt{3}i. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Рис. 6а–6в показывают, что при изменении значения a_1 или b_1 максимум увеличивается или уменьшается, но это изменение не влияет на направление распространения волны. Также видно, что угол между двумя солитонами остается неизменным. Двухсолитонное решение представляет собой комбинацию двух односолитонных решений. Если меняется $\xi_i = \text{Re } z_i$ или $\eta_i = \text{Im } z_i$, то направление распространения соответствующей волны будет отклоняться (см. рис. 6г, 6д). Затем меняется угол между двумя солитонами. Дополнительно относительное положение характеристических прямых определяет форму волн, не влияя на аналитическое выражение.

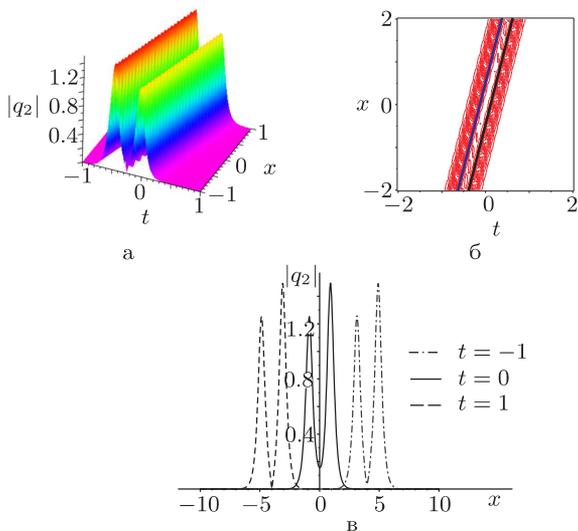


Рис. 4. Графики модуля двухсолитонного решения q_2 уравнения с $a_1 = 20$, $a_2 = 15$, $b_1 = 9$, $b_2 = 10$ и $z_1 = -1 - 2i$, $z_2 = 1 + 2i$: трехмерный график (а); двумерная цветовая диаграмма (б), где также показаны характеристические прямые $L_1: x - 4t + \frac{1}{8} \ln \frac{325}{8} = 0$ и $L_2: x - 4t + \frac{1}{8} \ln \frac{325}{8} = 0$ солитонной волны; решение как функция от x при различных временах (в).

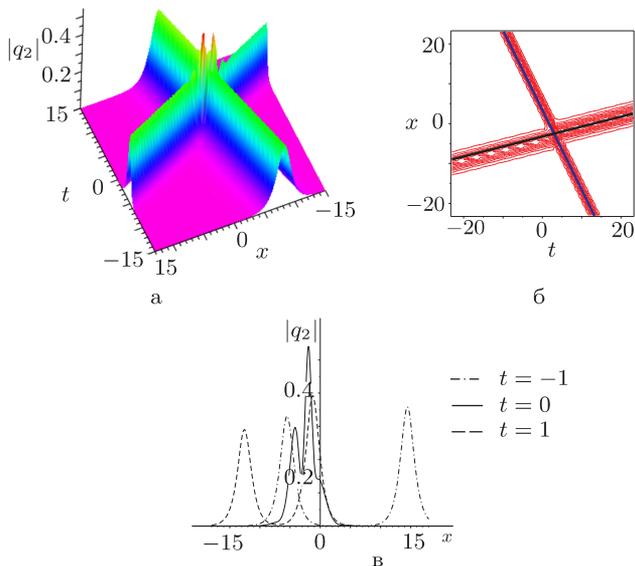


Рис. 5. Графики модуля двухсолитонного решения q_2 уравнения с $a_1 = 20$, $a_2 = 15$, $b_1 = 9$, $b_2 = 10$ и $z_1 = -1/2 - i/2$, $z_2 = 1/4 + i/2$: трехмерный график (а); двумерная цветовая диаграмма (б), где также показаны характеристические прямые $L_1: x + 2t - (\ln 962)/2 = 0$ и $L_2: 4x - t + 2 \ln 650 = 0$ солитонной волны; решение как функция от x при различных временах (в).

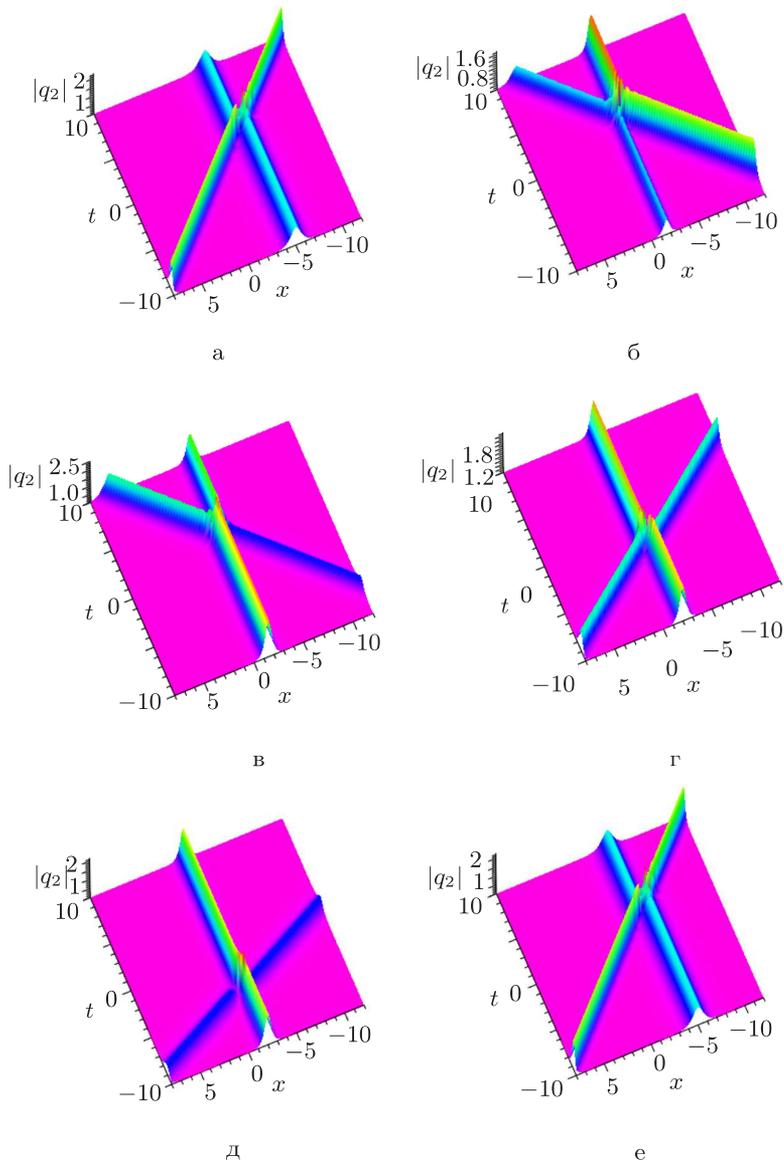


Рис. 6. Графики модуля двухсолитонного решения q_2 уравнения с $a_2 = \sqrt{3}e^{4\sqrt{3}}$, $b_2 = \sqrt{3}e^{4\sqrt{3}}$ при различных значениях a_1 , b_1 , z_1 и z_2 (см. (4.17)).

Из рис. 6а, 6г, 6д видно, что при изменении угла между двумя волнами меняется форма волн. Наоборот, если угол не меняется, вся картина только поворачивается на определенный угол. Например, как видно из сравнения рис. 6а и 6е, форма волн не меняется, просто картина поворачивается на 45° .

4.4. Анализ влияния параметров на трехсолитонное решение. На рис. 7 изображены динамические явления в случае $N = 3$ при различном выборе значений параметров. Пусть $z_i = \xi_i + i\eta_i$, $i = 1, 2, 3$.

Прежде всего, тем же методом, что и раньше, мы находим, что трехсолитонные решения имеют три характеристические прямые:

$$L_i: \eta_i x - 4\eta_i^3 t + 12\xi_i^2 \eta_i t + \frac{1}{4} \ln \frac{a_i^2 + b_i^2}{2\eta_i^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Мы рассмотрели три случая, изображенных на рис. 7а–7в, 7г–7е, 7ж–7и:

$$\begin{aligned} \text{Случай 1 (а, б, в):} \quad & z_1 = \frac{1}{2} + i, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ & a_1 = a_2 = a_3 = e^{10}, \quad b_1 = b_2 = b_3 = \sqrt{3}e^{4\sqrt{3}}. \\ \text{Случай 2 (г, д, е):} \quad & z_1 = \frac{1}{2} + i, \quad z_2 = 1 + \frac{\sqrt{21}}{6} + \sqrt{2}i, \quad z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ & a_1 = a_2 = e^{10}, \quad a_2 = b_2 = \sqrt{2}e^{-10\sqrt{2}}, \quad b_3 = \sqrt{3}e^{4\sqrt{3}}. \\ \text{Случай 3 (ж, з, и):} \quad & z_1 = \frac{1}{2} + i, \quad z_2 = \frac{\sqrt{21}}{6} + \sqrt{2}i, \quad z_3 = \frac{\sqrt{33}}{6} + \sqrt{3}i, \\ & a_1 = b_1 = e^{10}, \quad a_2 = b_2 = \sqrt{2}e^{-10\sqrt{2}}, \quad a_3 = b_3 = \sqrt{3}e^{-20\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Анализируя поведение трехсолитонных решений и характеристических прямых, мы получаем некоторые интересные динамические явления. Очевидно, что положение трехсолитонных решений меняется с изменением характеристических прямых. Когда все три прямые пересекаются, три солитона также взаимодействуют друг с другом. Когда две или все три прямые параллельны, соответствующие солитоны одинаковы.

Далее мы провели анализ влияния параметров на трехсолитонное решение. Результат аналогичен одно- и двухсолитонным решениям. Параметры a_i и b_i влияют на значения и положение максимумов и не влияют на другие свойства солитонов. Мы можем изменить направление распространения солитонов, изменив параметр z_j . При этом взаимное расположение характеристических прямых определяет общий вид решения. Меняя характеристические прямые, можно повернуть картину как целое на некоторый угол без изменения других ее характеристик.

На рис. 7 показано поведение трех решений, отвечающих трем различным явлениям. В первом случае, показанном на рис. 7а–7в, три солитона попарно сталкиваются. Следует отметить, что столкновение трех солитонов в дальнейшем приводит к изменению пика и фазы. Более интересным явлением является то, что одно из солитонных решений исчезает после столкновения, и точка столкновения не совпадает с $x = 0$; это показывает, что мы имеем неупругое столкновение, которое встречается чаще, чем поведение, описываемое классическим нелинейным уравнением Шредингера.

Для второго типа распространения волн, показанного на рис. 7г–7е, это явление имеет место и для классического нелинейного уравнения Шредингера, т. е. решение ведет себя как солитон, проходящий через два параллельных солитона, при этом после столкновения фаза солитона меняется. Для классического нелинейного уравнения Шредингера, когда собственные значения комплексные, два солитона распространяются параллельно оси времени t , что, очевидно, отличается от результатов нашей работы.

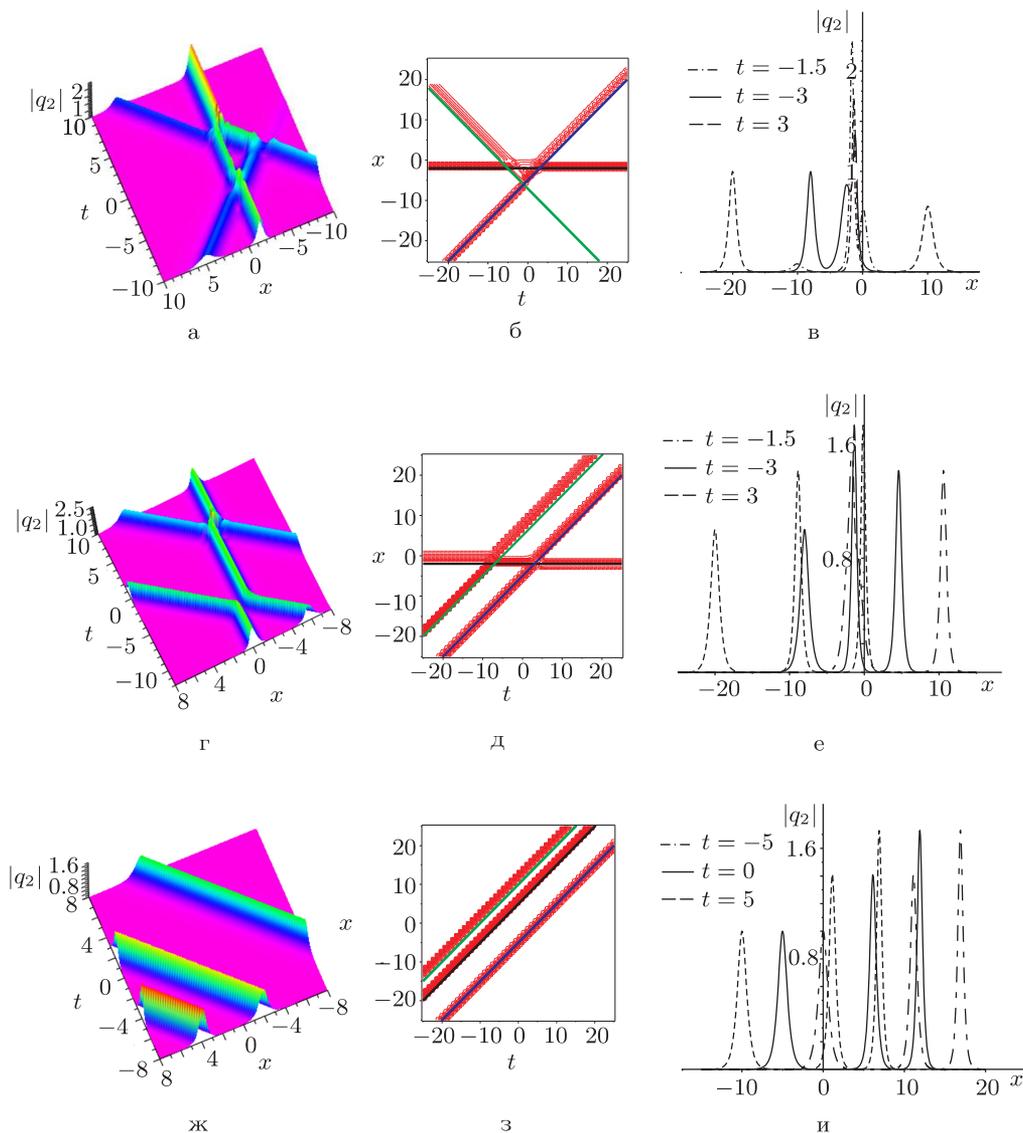


Рис. 7. Три набора графиков, аналогичных рис. 1 и 5, для солитонного решения q_2 в трех случаях (4.18): все три характеристические прямые пересекаются, две параллельны и пересекаются третьей, все три прямые параллельны.

В последнем случае, показанном на рис. 7ж–7и, происходит параллельное распространение трех солитонов без столкновения. Кроме того, можно заметить, что направление распространения не параллельно осям x и t . Более того, расстояние между этими тремя солитонами неодинаковое, что отличает наши решения от решений классического нелинейного уравнения Шредингера.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

В представленной статье, используя метод \bar{d} -одевания, мы вывели иерархию и получили N -солитонные решения векторных модифицированных уравнений Кортвега–де Фриза пятого порядка. Затем мы проанализировали одно-, двух- и трехсолитонных решения, меняя управляющие параметры. Мы обнаружили, что параметры a_i и b_i не влияют на форму волны и направление ее распространения, но влияют на значение максимума волны. Направление распространения определяется только параметрами z_i . Угол между волной и осью x увеличивается, когда уменьшается $\text{Re } z_i$ или увеличивается $\text{Im } z_i$. При этом также меняется угол между солитонами. Кроме того, относительное расположение характеристических прямых влияет на направление распространения волн и определяет общий вид решения. Опираясь на этот факт, мы могли бы контролировать относительное положение характеристических прямых, чтобы сохранить неизменными форму решения и угол между двумя волнами.

Благодарности. Мы выражаем искреннюю благодарность редактору и рецензенту за ценные комментарии.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, М., 1987.
- [2] A. S. Fokas, A. R. Its, “An initial boundary value problem for the Korteweg–de Vries equation”, *Math. Comput. Simul.*, **37**:4–5 (1994), 293–321.
- [3] N. Yajima, M. Oikawa, “A class of exactly solvable nonlinear evolution equations”, *Progr. Theoret. Phys.*, **54**:5 (1975), 1576–1577.
- [4] P. A. Treharne, A. S. Fokas, “The generalized Dirichlet to Neumann map for the KdV equation on the half-line”, *J. Nonlinear Sci.*, **18**:2 (2008), 191–217.
- [5] W.-X. Ma, Y. You, “Solving the Korteweg–de Vries equation by its bilinear form: Wronskian solutions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357**:5 (2005), 1753–1778, arXiv: nlin/0503001.
- [6] M. Wadati, “The modified Korteweg–de Vries equation”, *J. Phys. Soc. Japan*, **34**:5 (1973), 1289–1296.
- [7] A. H. Khater, O. H. El-Kalaawy, D. K. Callebaut, “Bäcklund transformations and exact solutions for Alfvén solitons in a relativistic electron-positron plasma”, *Phys. Scr.*, **58**:6 (1998), 545–548.
- [8] W. K. Schief, “An infinite hierarchy of symmetries associated with hyperbolic surfaces”, *Nonlinearity*, **8**:1 (1995), 1–9.
- [9] S. Matsutani, H. Tsuru, “Reflectionless quantum wire”, *J. Phys. Soc. Japan*, **60**:11 (1991), 3640–3644.
- [10] M. Wadati, K. Ohkuma, “Multiple-pole solutions of the modified Korteweg–de Vries equation”, *J. Phys. Soc. Japan*, **51**:6 (1982), 2029–2035.
- [11] T. C. A. Yeung, P. C. W. Fung, “Hamiltonian formulation of the inverse scattering method of the modified KdV equation under the non-vanishing boundary condition $u(x, t) \rightarrow b$ as $x \rightarrow \pm\infty$ ”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **21**:18 (1988), 3575–3592.
- [12] G. Zhang, Z. Yan, *Phys. D*, **410** (2020), 132521, arXiv: 1810.12150.
- [13] J.-S. He, S.-R. Chen, “Hamiltonian formalism of mKdV equation with non-vanishing boundary values”, *Commun. Theor. Phys.*, **44**:2 (2005), 321–325.
- [14] D. E. Baldwin, *Dispersive shock wave interactions and two-dimensional oceanwave soliton interactions*, Ph. D. thesis, University of Colorado, 2013.

- [15] T. Tsuchida, M. Wadati, “The coupled modified Korteweg–de Vries equations”, *J. Phys. Soc. Japan*, **67**:4 (1998), 1175–1187, arXiv: solv-int/9812003.
- [16] J. Wu, X. Geng, “Inverse scattering transform and soliton classification of the coupled modified Korteweg–de Vries equation”, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.*, **53** (2017), 83–93.
- [17] D.-J. Zhang, S.-L. Zhao, Y.-Y. Sun, J. Zhou, “Solutions to the modified Korteweg–de Vries equation”, *Rev. Math. Phys.*, **26**:7 (2014), 1430006.
- [18] R. Hirota, “Exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation for multiple collisions of solitons”, *J. Phys. Soc. Japan*, **33**:5 (1972), 1456–1458.
- [19] Y.-Zhang, X. Tao, S. Xu, “The bound-state soliton solutions of the complex modified KdV equation”, *Inverse Problems*, **36**:6 (2020), 065003.
- [20] S.-F. Tian, “Initial-boundary value problems of the coupled modified Korteweg–de Vries equation on the half-line via the Fokas method”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **50**:39 (2017), 395204, 32 pp.
- [21] S.-F. Tian, “Initial-boundary value problems for the coupled modified Korteweg–de Vries equation on the interval”, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **17**:3 (2018), 923–957.
- [22] W.-X. Ma, “Riemann–Hilbert problems and N -soliton solutions for a coupled mKdV system”, *J. Geom. Phys.*, **132** (2018), 45–54.
- [23] C. Athorne, A. Fordy, “Generalised KdV and MKdV equations associated with symmetric spaces”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **20**:6 (1987), 1377–1386.
- [24] J.-J. Yang, S.-F. Tian, Z.-Q. Li, *Inverse scattering transform and soliton solutions for the modified matrix Korteweg–de Vries equation with nonzero boundary conditions*, arXiv: 2005.00290.
- [25] H. Liu, X. Geng, “Initial-boundary problems for the vector modified Korteweg–de Vries equation via Fokas unified transform method”, *J. Math. Anal. Appl.*, **440**:2 (2016), 578–596.
- [26] Цзинь-Цзе Ян, Шоу-Фу Тянь, “Задача Римана–Гильберта для модифицированного уравнения Ландау–Лифшица с ненулевыми граничными условиями”, *ТМФ*, **205**:3 (2020), 420–450.
- [27] С. В. Манаков, “К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн”, *ЖЭТФ*, **65**:2 (1973), 505–516.
- [28] A. P. Fordy, P. P. Kulish, “Nonlinear Schrödinger equations and simple Lie algebras”, *Commun. Math. Phys.*, **89**:3 (1983), 427–443.
- [29] D.-S. Wang, D.-J. Zhang, J. Yang, “Integrable properties of the general coupled nonlinear Schrödinger equations”, *J. Math. Phys.*, **51**:2 (2010), 023510, 17 pp.
- [30] X.-B. Wang, B. Han, “Application of the Riemann–Hilbert method to the vector modified Korteweg–de Vries equation”, *Nonlinear Dyn.*, **99**:2 (2020), 1363–1377.
- [31] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I”, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53.
- [32] R. Beals, R. R. Coifman, “The D -bar approach to inverse scattering and nonlinear evolutions”, *Phys. D*, **18**:1–3 (1986), 242–249.
- [33] M. J. Ablowitz, D. Bar Jaacov, A. S. Fokas, “On the inverse scattering transform for the Kadomtsev–Petviashvili equation”, *Stud. Appl. Math.*, **69**:2 (1983), 135–143.
- [34] S. V. Manakov, “The inverse scattering transform for the time-dependent Schrödinger equation and Kadomtsev–Petviashvili equation”, *Phys. D*, **3**:1–2 (1981), 420–427.
- [35] A. S. Fokas, P. M. Santini, “Dromions and a boundary value problem for the Davey–Stewartson 1 equation”, *Phys. D*, **44**:1–2 (1990), 99–130.
- [36] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, “Построение многомерных нелинейных интегрируемых систем и их решений”, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:2 (1985), 11–25.
- [37] V. G. Dubrovsky, “The $\bar{\partial}$ -dressing method and the solutions with constant asymptotic values at infinity of DS-II equation”, *J. Math. Phys.*, **38**:12 (1997), 6382–6400.

- [38] J. Zhu, X. Geng, “The AB equations and the $\bar{\partial}$ -dressing method in semi-characteristic coordinates”, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **17**:1–2 (2014), 49–65.
- [39] P. V. Nabelek, V. E. Zakharov, “Solutions to the Kaup–Broer system and its $(2+1)$ dimensional integrable generalization via the dressing method”, *Phys. D*, **409** (2020), 132478, 21 pp.
- [40] J. Zhu, S. Zhou, Z. Qiao, “Forced $(2+1)$ -dimensional discrete three-wave equation”, *Commun. Theor. Phys.*, **72**:1 (2020), 015004.
- [41] J. Luo, E. Fan, “ $\bar{\partial}$ -Dressing method for the coupled Gerdjikov–Ivanov equation”, *Appl. Math. Lett.*, **110** (2020), 106589.
- [42] X. Wang, J. Zhu, Z. Qiao, “New solutions to the differential-difference KP equation”, *Appl. Math. Lett.*, **113** (2021), 106836.
- [43] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II”, *Функц. анализ и его прил.*, **13**:3 (1979), 13–22.
- [44] R. Beals, R. R. Coifman, “Linear spectral problems, non-linear equations and δ -method”, *Inverse Problems*, **5**:2 (1989), 87–130.
- [45] A. S. Fokas, P. M. Santini, “The dressing method and nonlocal Riemann–Hilbert problem”, *J. Nonlinear Sci.*, **2**:1 (1992), 109–134.
- [46] B. G. Konopelchenko, *Solutions in Multidimensions: Inverse Spectral Transform Method*, Word Sci., Singapore, 1993.
- [47] L. V. Bogdanov, V. E. Zakharov, “The Boussinesq equation revisited”, *Phys. D*, **165**:3–4 (2002), 137–162.
- [48] N. Wang, M. Wadati, “Noncommutative extension of $\bar{\partial}$ -dressing method”, *J. Phys. Soc. Japan*, **72**:6 (2003), 1366–1373.
- [49] P. V. Nabelek, “On solutions to the nonlocal $\bar{\partial}$ -problem and $(2+1)$ dimensional completely integrable systems”, *Lett. Math. Phys.*, **111**:1 (2021), 16, 13 pp.; “Correction to: On solutions to the nonlocal $\bar{\partial}$ -problem and $(2+1)$ dimensional completely integrable systems”, **111**:2, 2, arXiv:2008.13237.
- [50] Y. Kuang, J. Zhu, “A three-wave interaction model with self-consistent sources: The $\bar{\partial}$ -dressing method and solutions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **426**:2 (2015), 783–793.
- [51] Q. Cheng, Y. Yang, E. Fan, *Long-time asymptotic behavior of a mixed Schrödinger equation with weighted Sobolev initial data*, arXiv:2011.00919.
- [52] Y. Yang, E. Fan, *Long-time asymptotic behavior of the modified Camassa–Holm equation*, arXiv:2101.02489v1.

Поступила в редакцию 5.04.2021,
после доработки 17.05.2021,
принята к публикации 20.05.2021