



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. М. Нагиев, Р. М. Мир-Касимов, Релятивистский линейный осциллятор под действием постоянной внешней силы. Волновые функции и динамическая группа симметрии, *ТМФ*, 2021, том 208, номер 3, 481–494

DOI: 10.4213/tmf10011

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.147.69.160

28 октября 2024 г., 23:23:30



© 2021 г. Ш. М. Нагиев\*, Р. М. Мир-Касимов\*

## РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОЙ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ И ДИНАМИЧЕСКАЯ ГРУППА СИММЕТРИИ

Детально рассмотрена точно решаемая релятивистская модель линейного осциллятора при наличии постоянной внешней силы как в импульсном, так и в релятивистском конфигурационном представлении. Установлено, что, в отличие от нерелятивистского случая, в зависимости от значения силы возможны как дискретный, так и непрерывный спектры энергии. Показано, что в случае дискретного спектра волновые функции в импульсном представлении выражаются через полиномы Лагерра, а в релятивистском конфигурационном представлении – через полиномы Мейкснера–Поллачека. Найдены интегральные и дифференциально-разностные формулы, связывающие полиномы Лагерра и Мейкснера–Поллачека. Построена динамическая группа симметрии.

**Ключевые слова:** релятивистская модель линейного осциллятора, однородное поле, конечно-разностное уравнение, динамическая группа симметрии, связь между ортогональными полиномами.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf10011>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Модель гармонического осциллятора сыграла фундаментальную роль в возникновении и развитии нерелятивистской квантовой механики. Это одна из немногих точно решаемых квантово-механических задач. Потенциал гармонического осциллятора является важным для приложений в нерелятивистской квантовой механике. Он находит широкое применение в атомной и молекулярной физике, статистической механике, квантовой химии, теории ядра, квантовой электродинамике, адронной физике и т. д. (см., например, [1]–[3]). Появление кварковых моделей для описания свойств и структур адронов усилило интерес физиков к гармоническому потенциалу. Развитие кварковых моделей привело к необходимости построения релятивистских

---

\*Институт физики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан.  
E-mail: shakir.m.nagiyev@gmail.com

волновых функций составных частиц и, в частности, релятивистских моделей гармонического осциллятора. Волновая функция содержит всю информацию о квантовой системе. Знание релятивистских волновых функций позволяет вычислить, например, формфакторы упругого рассеяния, вероятность и ширину распадов мезонов, структурные функции адронов.

Проблема обобщения на релятивистский случай квантового нерелятивистского гармонического осциллятора давно обсуждается в литературе, но до сих пор не существует однозначного определения релятивистского гармонического осциллятора. Другими словами, в отличие от теории нерелятивистского гармонического осциллятора, теория релятивистского гармонического осциллятора пока далека от своего завершения.

Данная проблема обычно формулируется в рамках различных подходов, использующих уравнения типа Клейна–Гордона, Дирака, Солпитера, конечно-разностного уравнения в релятивистском конфигурационном пространстве и т. д. Первые модели релятивистского гармонического осциллятора, применяемые в физике элементарных частиц, появились в пятидесятые годы прошлого века в работах [4], [5]. За ними последовала работа Фейнмана и др. [6]. Стимулом для исследования релятивистских осцилляторных моделей было стремление решить проблему спектра масс элементарных частиц. Эти четырехмерные осцилляторные модели описывались релятивистскими уравнениями типа Клейна–Гордона, в которых использовалось прямое релятивистское обобщение  $x^\mu x_\mu = x_0^2 - \mathbf{x}^2$  потенциала нерелятивистского гармонического осциллятора. Такие уравнения обладают “дефектными” решениями, связанными с колебаниями по оси времени (см. также обзоры [7], [8]). В этой связи особо отметим работу [6], где авторы использовали четырехмерную модель релятивистского осциллятора для описания спектра и распадов адронов и столкнулись с проблемой нефизических степеней свободы. Эти нефизические степени свободы связаны в первую очередь с тем, что четырехмерный осциллятор включает в себя времениподобные состояния с отрицательной нормой. Исключение же этих состояний из рассмотрения приводит, в частности, к нарушению условия унитарности теории, поскольку полный набор состояний не используется. В дальнейшем четырехмерная осцилляторная модель была развита в работах [9]–[11] (см. также [12]). В работе [13] предложен особый релятивистский гармонический осциллятор, моделируемый теорией Клейна–Гордона в пространстве анти-де Ситтера (см. также [14]).

В работе [15] с помощью замены в уравнении Дирака импульса  $\mathbf{p}$  на  $\mathbf{p} - i\beta m\omega \mathbf{r}$ , где  $\beta$  – обычная матрица Дирака,  $m$  – масса частицы, а  $\omega$  – частота осциллятора, был получен новый точно решаемый потенциал релятивистского гармонического осциллятора. Полученный таким образом релятивистский осциллятор называется осциллятором Дирака и описывает частицу со спином 1/2. В нерелятивистском пределе он переходит в трехмерный изотропный гармонический осциллятор со спин-орбитальной связью. Осциллятор Дирака нашел широкое применение в физике ядра и элементарных частиц (см., например, работы [16]–[20]).

Релятивистские гармонические осцилляторы, описываемые бесспиновым уравнением Солпитера [21], [22], рассмотрены в работах [22], [23]. Напомним, что в случае одной квантовой частицы гамильтониан бесспинового уравнения Солпитера со статическим потенциалом взаимодействия  $V(\hat{\mathbf{r}})$  имеет вид  $H = \sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2 + m^2} + V(\hat{\mathbf{r}})$ , т. е. является простым и прямым обобщением соответствующего гамильтониана Шре-

дингера. Волновые функции в импульсном представлении для случая  $l = 0$  в работе [22] были определены в виде бесконечного ряда, а в работе [23] – точно.

С другой стороны, введенная в работах [24], [25] концепция релятивистского конфигурационного  $\mathbf{r}$ -представления явилась основой для построения конечно-разностного варианта релятивистской квантовой механики, обладающего многими важными чертами нерелятивистской квантовой механики. Основное отличие этого варианта теории от квантовой механики состоит в том, что в нем волновая функция удовлетворяет конечно-разностному уравнению с шагом, равным комптоновской длине волны частицы  $\lambda = \hbar/mc$ . Подчеркнем, что канонически-сопряженным к  $\mathbf{r}$ -пространству импульсным пространством является пространство Лобачевского, реализованное на верхнем поле массовой оболочки частицы  $p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2$ ,  $p_0 > 0$ .

В работах [26]–[37] были исследованы различные конечно-разностные уравнения, дающие обобщение на релятивистский случай задачи о гармоническом осцилляторе. Так, в работах [26], [29], [33] в релятивистском конфигурационном  $\mathbf{r}$ -представлении изучались релятивистские модели трехмерного гармонического осциллятора. Отметим, что эти трехмерные релятивистские модели осциллятора свободны от недостатков, присущих четырехмерным релятивистским осцилляторам [4]–[8]. Например, их волновые функции нормируемы и допускают вероятностную интерпретацию.

В работах [27], [28] была детально рассмотрена точно решаемая модель линейного осциллятора в релятивистском конфигурационном  $x$ -представлении. Препринт [30] посвящен изучению этой модели при наличии однородного внешнего поля  $V_g(x) = gx$ , которому соответствует постоянная внешняя сила  $F(x) = -\nabla_x V_g(x) = -g$ , где  $\nabla_x = \partial_x$ . Показано, что, в отличие от соответствующего нерелятивистского случая, в зависимости от области значений силы  $|g|$  возможны как дискретный спектр, так и непрерывный спектр энергии.

Цель данной работы – изложить результаты неопубликованного препринта [30]. На этот препринт ссылались в ряде работ (см., например, [34]–[37]), т. е. его результаты представляют собой физический и математический интерес и не потеряли своей актуальности и по сей день. Для рассматриваемой модели в работе [34] были построены обобщенные когерентные состояния, а в работе [36] были получены функции Вигнера для стационарных состояний, а также для состояний термодинамического равновесия.

В препринте [30] было показано, что при наличии постоянной внешней силы волновые функции релятивистского осциллятора, принадлежащие дискретному спектру, в релятивистском конфигурационном  $x$ -пространстве выражаются через полиномы Мейкснера–Поллачека. Найдены динамическая группа симметрии и когерентные состояния, а также новый конечно-разностный аналог формулы Родрига для полиномов Мейкснера–Поллачека. Получена билинейная производящая функция для полиномов Мейкснера–Поллачека, с помощью которой вычислена функция Грина. В настоящей работе мы приводим только часть этих результатов.

Статья имеет следующую структуру. Раздел 2 посвящен краткому описанию нерелятивистского линейного осциллятора во внешнем однородном поле. В разделе 3 детально изложена релятивистская модель линейного осциллятора во внешнем однородном поле. В разделе 4 построена группа динамической симметрии. Обсуждение полученных результатов приводится в разделе 5. В приложении приводится доказательство предельной формулы для полиномов Мейкснера–Поллачека.

## 2. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ВО ВНЕШНЕМ ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

Из многих разнообразных свойств гармонического осциллятора отметим следующие два. Гармонический осциллятор имеет: 1) бесконечный набор связанных состояний, соответствующие уровни энергии которых эквидистантны; 2) класс решений в виде когерентных состояний (КС). КС минимизируют произведение неопределенности координаты и импульса гауссовскими волновыми пакетами, вид которых сохраняется с течением времени. В нерелятивистской квантовой механике гамильтониан линейного осциллятора в однородном внешнем поле

$$H_N = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + gx \quad (1)$$

имеет следующие собственные функции [1]:

$$\psi_{Nn}(x) = C_{Nn} H_n \left( (x + x_0) \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x+x_0)^2}, \quad (2)$$

где  $x_0 = g/m\omega^2$  и  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а  $H_n(x)$  – полиномы Эрмита. Волновые функции (2) соответствуют уровням энергии

$$E_{Nn} = E_{Nn}^{(0)} - \frac{m\omega^2}{2}x_0^2, \quad E_{Nn}^{(0)} = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (3)$$

и удовлетворяют следующему условию ортонормированности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{Nn}^*(x) \psi_{Nm}(x) dx = \delta_{nm}. \quad (4)$$

Из этого условия для нормировочной постоянной получаем

$$C_{Nn} = \frac{C_{N0}}{\sqrt{2^n n!}}, \quad C_{N0} = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4}.$$

Волновые функции  $\psi_{Nn}(x)$  (2) в  $x$ -представлении могут быть получены из волновых функций  $\psi_{Nn}^{(0)}(x)$  нерелятивистского линейного осциллятора без поля ( $g = 0$ ) простым сдвигом:

$$\psi_{Nn}(x) = U_N \psi_{Nn}^{(0)}(x) = \psi_{Nn}^{(0)}(x + x_0), \quad (5)$$

с помощью оператора сдвига

$$U_N = e^{ix_0\hat{p}/\hbar} = e^{x_0\nabla_x}. \quad (6)$$

В импульсном представлении этот сдвиг сводится к умножению на простой фазовый множитель:

$$\Phi_{Nn}(p) = e^{ix_0p/\hbar} \Phi_{Nn}^{(0)}(p). \quad (7)$$

Как хорошо известно, если ввести бозонные операторы рождения и уничтожения

$$b^\pm = U_N a^\pm U_N^{-1} = a^\pm + \frac{\xi_0}{\sqrt{2}}, \quad [b^-, b^+] = 1, \quad (8)$$

где  $a^\pm = (\xi \mp \nabla_\xi)/\sqrt{2}$ ,  $\xi = x\sqrt{m\omega/\hbar}$ ,  $\xi_0 = x_0\sqrt{m\omega/\hbar}$ , то можно найти собственные функции (2) и собственные значения (3) гамильтониана (1) чисто алгебраическим способом. Однако здесь мы приведем только две формулы: формулу для гамильтониана (1), записанную через операторы  $b^+$  и  $b^-$  (или  $a^+$  и  $a^-$ )

$$H_N = \hbar\omega\left(b^+b^- + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}m\omega^2x_0^2 = \hbar\omega\left[a^+a^- + \frac{\xi_0}{\sqrt{2}}(a^+ + a^-) + \frac{1}{2}\right] \quad (9)$$

и формулу для нахождения нормированных собственных функций (2)

$$\psi_{Nn}(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(b^+)^n\psi_{N0}(x). \quad (10)$$

Действие операторов  $b^-$  и  $b^+$  на собственные функции (10) задается соотношениями

$$b^-\psi_{Nn} = \sqrt{n}\psi_{N,n-1}, \quad b^+\psi_{Nn} = \sqrt{n+1}\psi_{N,n+1}. \quad (11)$$

### 3. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ВО ВНЕШНЕМ ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим конечно-разностное уравнение, описывающее релятивистский линейный осциллятор при наличии постоянной внешней силы  $F(x) = -g$  [30]:

$$H(x)\psi(x) \equiv mc^2\left[\text{ch}(i\lambda\nabla_x) + \frac{m\omega^2}{2}x(x+i\lambda)e^{i\lambda\nabla_x} + gx\right]\psi(x) = E\psi(x). \quad (12)$$

Известно, что решения этого уравнения в принципе могут содержать произвольные функции переменной  $x$  с периодом  $i\lambda$  (так называемые  $i\lambda$ -периодические константы, которые появляются в решениях из-за конечно-разностной природы гамильтониана (12)), т. е. если  $\psi(x)$  – решение уравнения (12), то и  $C(x)\psi(x)$  будет решением этого уравнения, где  $C(x \pm i\lambda) = C(x)$  (см. также [38]–[41]). Эти  $i\lambda$ -периодические константы могут повлиять на асимптотику волновой функции. На основании такого свойства конечно-разностного уравнения в работе [42] было дано интересное объяснение невылета кварков. Мы фиксируем вид  $i\lambda$ -периодических констант исходя из условия того, что релятивистская волновая функция имеет правильный нерелятивистский предел. Таким образом, волновую функцию  $\psi(x)$  будем рассматривать в области определения  $C_0^\infty(-\infty, +\infty)$  – в пространстве бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, принадлежащих интервалу  $(-\infty, +\infty)$ . Это означает, что при  $|x| \rightarrow \infty$  функция  $\psi(x)$  и все ее производные любого порядка стремятся к нулю быстрее любой степени  $|x|^{-1}$ .

Гамильтониан  $H(x)$  уравнения (12) является эрмитовым оператором относительно скалярного произведения

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x)\psi_2(x) dx.$$

Из условия эрмитовости гамильтониана  $H^+(x) = H(x)$  следует, что параметр  $g$  (сила) веществен. Для решения уравнения (12) перейдем в импульсное  $p$ -представление. Пространством импульсов  $p$  в нашем случае является одномерное пространство

Лобачевского, реализованное на массовой гиперболе  $p_0^2 - p^2 = m^2 c^2$ ,  $p_0 > 0$ . Переход в  $x$ -представление

$$\psi(x) = \frac{mc}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \frac{dp}{p_0} \xi(p, x) \psi(p), \quad p_0 = \sqrt{m^2 c^2 + p^2}, \quad (13)$$

и обратный переход в  $p$ -представление

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \xi^*(p, x) \psi(x) dx \quad (14)$$

осуществляются с помощью разложения волновых функций по полной ортогональной системе функций [24], [25], [27]

$$\xi(p, x) = \left( \frac{p_0 - p}{mc} \right)^{-ix/\lambda} = e^{ix\chi/\lambda}, \quad \chi = \ln \frac{p_0 + p}{mc}. \quad (15)$$

Они реализуют базис неприводимого унитарного представления группы движения одномерного пространства Лобачевского и удовлетворяют условиям полноты и ортогональности

$$\begin{aligned} \frac{mc}{2\pi\hbar} \int \frac{dp}{p_0} \xi^*(p, x) \xi(p, x') &= \delta(x - x'), \\ \frac{1}{2\pi\hbar} \int \xi^*(p, x) \xi(p', x) dx &= \frac{1}{mc} \delta(\chi - \chi'). \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим, что гамильтониан уравнения (12) и релятивистские плоские волны (15) имеют правильный нерелятивистский предел, т. е.

$$\lim_{c \rightarrow \infty} [H(x) - mc^2] = H_N(x), \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \xi(p, x) = e^{ipx/\hbar}.$$

В импульсном представлении уравнение (12) принимает вид дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} H(\zeta) \psi(\zeta) &\equiv \hbar\omega \left[ -\zeta \nabla_\zeta^2 + i\rho\zeta \nabla_\zeta + \frac{\zeta}{4} + \frac{1}{\omega_0^2 \zeta} \right] \psi(\zeta) = E\psi(\zeta), \\ \zeta = \frac{2c(p_0 + p)}{\hbar\omega} &= \frac{2}{\omega_0} e^x, \quad 0 \leq \zeta < \infty, \quad \rho = \frac{g}{mc\omega}, \quad \omega_0 = \frac{\hbar\omega}{mc^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

с граничными условиями  $\zeta^{-1/2} \psi(\zeta)|_{\zeta=0} = 0$  и  $\psi(\infty) = 0$ , т. е. функции  $\psi(\zeta)$  определены в пространстве квадратично интегрируемых функций с весом  $\zeta^{-1}$  на интервале  $(0, +\infty)$ . Полагая в (17)

$$\psi(\zeta) = \zeta^\nu e^{(i\rho - \delta)\zeta/2} \varphi(\zeta), \quad \delta = \sqrt{1 - \rho^2}, \quad \nu = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\omega_0^2}}, \quad (18)$$

приходим к следующему уравнению для  $\varphi(\zeta)$ :

$$\zeta \varphi''(\zeta) + (2\nu - \delta\zeta) \varphi'(\zeta) + \left( \frac{E}{\hbar\omega} - \nu\delta \right) \varphi(\zeta) = 0 \quad (19)$$

с граничным условием  $\varphi(\zeta) < \infty$ . Это вырожденное гипергеометрическое уравнение [43]. Поскольку параметр  $\nu > 1$  принимает нецелые значения, то общее решение уравнения (19) имеет вид [1], [43]

$$\varphi(\zeta) = C_1 \Phi\left(\nu - \frac{E}{\hbar\omega\delta}, 2\nu; \delta\zeta\right) + C_2 \zeta^{1-2\nu} \Phi\left(1 - \nu - \frac{E}{\hbar\omega\delta}, 2 - 2\nu; \delta\zeta\right),$$

где  $\Phi(a, c; x)$  – вырожденная гипергеометрическая функция. Принимая теперь во внимание граничное условие  $\varphi(\zeta) < \infty$ , находим, что  $C_2 = 0$ . Отсюда получаем явный вид волновой функции в импульсном  $p$ -представлении для рассматриваемого релятивистского линейного осциллятора во внешнем поле:

$$\psi(\zeta) = C'_n \zeta^\nu e^{(i\rho-\delta)\zeta/2} \Phi\left(\nu - \frac{E}{\hbar\omega\delta}, 2\nu; \delta\zeta\right). \tag{20}$$

Требование  $\psi(\infty) = 0$  (граничное условие) для волновой функции (20) налагает в этом случае, в отличие от нерелятивистского случая, ограничение  $|g| < mc\omega$  (т.е.  $|\rho| < 1, 0 < \delta \leq 1$ ) на значение параметра  $g$  (силы) и приводит к условию квантования энергии  $\nu - E/\hbar\omega\delta = -n, n = 0, 1, 2, \dots$ . Следовательно, уровни энергии рассматриваемой системы эквидистантны и равны

$$E_n = \hbar\omega\delta(n + \nu), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{21}$$

Ясно, что это выражение при  $c \rightarrow \infty$  также имеет правильный нерелятивистский предел, т.е. совпадает с выражением (3). Волновые функции (20), соответствующие уровням энергии (21), в  $p$ -представлении

$$\psi_n(\zeta) = C'_n \zeta^\nu e^{(i\rho-\delta)\zeta/2} L_n^{2\nu-1}(\delta\zeta), \quad C'_n = \delta^\nu \sqrt{\frac{n!}{mc\Gamma(n+2\nu)}}, \tag{22}$$

выражаются через полиномы Лагерра [44]

$$L_n^\alpha(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \Phi(-n, \alpha+1; x), \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}.$$

В силу условия ортогональности для полиномов Лагерра [45]

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{nm}, \quad \alpha > -1, \tag{23}$$

функции (22) удовлетворяют условию нормировки

$$mc \int_0^\infty \psi_n^*(\zeta) \psi_m(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \delta_{nm}. \tag{24}$$

Поскольку  $\delta^2 + \rho^2 = 1$  и  $0 < \delta \leq 1$ , можно положить  $\rho = \cos \varphi, \delta = \sin \varphi, \varphi \in (0, \pi)$ .

Используя теперь интегральную формулу [43]

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-ct(\cos \beta + i \sin \beta)} dt = \Gamma(\alpha) c^{-\alpha} e^{-i\alpha\beta}, \quad c > 0, \quad |\beta| < \frac{\pi}{2}, \quad \text{Re } \alpha > 0,$$

можно легко найти волновые функции (22) в релятивистском конфигурационном  $x$ -представлении:

$$\psi_n(x) = C_n \omega_0^{ix/\lambda} \Gamma(\nu + ix/\lambda) e^{(x/\lambda)(\varphi - \pi/2)} P_n^\nu\left(\frac{x}{\lambda}; \varphi\right), \quad (25)$$

$$C_n = (2i\delta)^\nu e^{-i(n+\nu)\varphi} \sqrt{\frac{n!}{2\pi\lambda\Gamma(n+2\nu)}}.$$

Здесь функции

$$P_n^\nu(x; \varphi) = \frac{(2\nu)_n}{n!} e^{in\varphi} F(-n, \nu + ix; 2\nu; 1 - e^{-2i\varphi}) \quad (26)$$

являются полиномами Мейкснера–Поллачека [44], [45]. Ортонормированность волновых функций (25)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \psi_m(x) dx = \delta_{nm}$$

следует из формулы [45]

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n^\nu(x; \varphi) P_m^\nu(x; \varphi) \rho^{(\nu)}(x) dx = \frac{(2\nu)_n}{n!} \delta_{nm}, \quad (27)$$

где весовая функция имеет вид

$$\rho^{(\nu)}(x) = \frac{(2\delta)^{2\nu}}{2\pi\Gamma(2\nu)} |\Gamma(\nu + ix)|^2 e^{x(2\varphi - \pi)}.$$

Формула (27) также является следствием (23).

Можно доказать, что волновые функции (22) и (25) в  $p$ - и  $x$ -представлениях соответственно при  $c \rightarrow \infty$  переходят в волновые функции нерелятивистского линейного осциллятора во внешнем однородном поле. Для доказательства надо исходить из следующих предельных формул для полиномов Лагерра и Мейкснера–Поллачека:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \nu^{-n/2} L_n^{2\nu-1}(2\nu + 2x\sqrt{\nu}) = \frac{(-1)^n}{n!} H_n(x), \quad (28)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \nu^{-n/2} P_n^\nu\left(x\sqrt{\nu}; \arccos \frac{x_0}{\sqrt{\nu}}\right) = \frac{1}{n!} H_n(x + x_0). \quad (29)$$

Первая формула дана в [45], а доказательство второй формулы приведено в приложении.

Принимая во внимание теперь релятивистские преобразования Фурье (13), (14) и формулы (22), (25), получим следующие интегральные соотношения между полиномами Лагерра и Мейкснера–Поллачека:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-(1-i\operatorname{ctg}\varphi)t/2} t^{\nu+ix-1} L_n^{2\nu-1}(t) dt &= \\ &= (2\sin\varphi)^{\nu+ix} e^{(\pi/2-\varphi)(i\nu-x)} \Gamma(\nu + ix) e^{-in\varphi} P_n^\nu(x; \varphi), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t^{-ix} \Gamma(\nu + ix) e^{x(\varphi - \pi/2)} P_n^\nu(x; \varphi) dx &= \\ &= 2\pi e^{in\varphi} e^{i(\varphi - \pi/2)\nu} e^{ite^{i\varphi}} t^\nu L_n^{2\nu-1}(2t\sin\varphi), \end{aligned} \quad (31)$$

где  $t > 0$ ,  $\nu > 0$ . Воспользовавшись теперь равенствами  $(it\nabla_t)^n t^{-ix} = x^n t^{-ix}$  и  $e^{-in\nabla_x} t^{ix} = t^{n+ix}$ , формулы (30) и (31) можно переписать в “локальной” форме:

$$L_n^{2\nu-1}(e^{-i\nabla_x})(2\sin\varphi)^{ix} e^{x(\varphi-\pi/2)} \Gamma(\nu+ix) = (2\sin\varphi)^{ix} e^{x(\varphi-\pi/2)} \Gamma(\nu+ix) e^{-in\varphi} P_n^\nu(x; \varphi), \quad (32)$$

$$P_n^\nu(it\nabla_t; \varphi) t^\nu e^{ite^{i\varphi}} = t^\nu e^{ite^{i\varphi}} e^{in\varphi} L_n^{2\nu-1}(2t\sin\varphi). \quad (33)$$

В заключение данного раздела отметим, что гамильтониан в  $p$ -представлении

$$H(\zeta) = \hbar\omega[a_\zeta(\sigma, \sigma') a_\zeta^+(\sigma, \sigma') + c(\sigma, \sigma')] \quad (34)$$

факторизуется четырьмя способами с помощью операторов

$$a_\zeta(\sigma, \sigma') = \frac{1}{2} \left[ 2\sqrt{\zeta} \nabla_\zeta + Z_\sigma \sqrt{\zeta} + \frac{(2\nu-1)\sigma'}{\sqrt{\zeta}} \right],$$

$$a_\zeta^+(\sigma, \sigma') = \frac{1}{2} \left[ -2\sqrt{\zeta} \nabla_\zeta + Z_\sigma^* \sqrt{\zeta} + \frac{1+(2\nu-1)\sigma'}{\sqrt{\zeta}} \right]. \quad (35)$$

Здесь  $\sigma = \pm 1$ ,  $\sigma' = \pm 1$ ,  $Z_\sigma = \sigma\delta - i\rho$ ,  $c(\sigma, \sigma') = -\sigma\delta((1-\sigma')/2 + \nu\sigma')$ .

В  $x$ -представлении операторы (35) принимают вид

$$a_x(\sigma, \sigma') = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \left\{ Z_\sigma e^{-i\lambda\nabla_x/2} + \omega_0 e^{i\lambda\nabla_x/2} \left[ \sigma' \left( \nu - \frac{1}{2} \right) - \frac{ix}{\lambda} \right] \right\},$$

$$a_x^+(\sigma, \sigma') = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \left\{ Z_\sigma^* e^{-i\lambda\nabla_x/2} + \omega_0 \left[ \sigma' \left( \nu - \frac{1}{2} \right) + \frac{ix}{\lambda} \right] e^{i\lambda\nabla_x/2} \right\}. \quad (36)$$

Запишем также в факторизованной форме гамильтониан в  $x$ -представлении:

$$H(x) = \hbar\omega[a_x(\sigma, \sigma') a_x^+(\sigma, \sigma') + c(\sigma, \sigma')]. \quad (37)$$

Отметим, что при  $c \rightarrow \infty$  операторы (35) и (36) имеют следующий асимптотический вид:

$$a_\zeta(\sigma, \sigma') \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \nabla_\eta + \frac{\sigma - \sigma'}{2} \eta - i\xi_0 \right) + \sqrt{\frac{mc^2}{\hbar\omega}} (\sigma + \sigma'),$$

$$a_\zeta^+(\sigma, \sigma') \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\nabla_\eta + \frac{\sigma - \sigma'}{2} \eta + i\xi_0 \right) + \sqrt{\frac{mc^2}{\hbar\omega}} (\sigma + \sigma') \quad (38)$$

и

$$a_x(\sigma, \sigma') \cong \frac{i}{\sqrt{2}} \left( -\frac{\sigma - \sigma'}{2} \nabla_\xi - \xi - \xi_0 \right) + \sqrt{\frac{mc^2}{\hbar\omega}} (\sigma + \sigma'),$$

$$a_x^+(\sigma, \sigma') \cong \frac{i}{\sqrt{2}} \left( -\frac{\sigma - \sigma'}{2} \nabla_\xi + \xi + \xi_0 \right) + \sqrt{\frac{mc^2}{\hbar\omega}} (\sigma + \sigma'), \quad (39)$$

откуда следует, что они имеют правильный нерелятивистский предел только при  $\sigma + \sigma' = 0$ , т.е. при  $\sigma - \sigma' = \pm 2$ , где  $\eta = p/\sqrt{m\hbar\omega}$  и  $\xi = x\sqrt{m\omega/\hbar}$ . Приведем также асимптотический вид числа  $c(\sigma, \sigma')$ , который не зависит от  $\sigma$  и  $\sigma'$ :

$$c(\sigma, \sigma') \cong \frac{1}{2} \hbar\omega - \frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2 + mc^2.$$

#### 4. ДИНАМИЧЕСКАЯ ГРУППА СИММЕТРИИ

Для построения динамической группы симметрии системы, описываемой уравнением (12), рассмотрим отдельно случаи, когда  $|g| < mc\omega$  и  $|g| \geq mc\omega$ .

СЛУЧАЙ А. Пусть  $|\rho| = |g|/mc\omega < 1$ , т. е.  $0 < \delta \leq 1$  (дискретный спектр). Введем в  $p$ -представлении следующие эрмитовы операторы:

$$K_0 \equiv \Gamma_0(\zeta) = \frac{H(\zeta)}{\hbar\omega\delta}, \quad K_1 \equiv \Gamma_4(\zeta) = \frac{1}{2}\delta\zeta - \Gamma_0(\zeta), \quad K_2 \equiv T(\zeta) = \frac{1}{2}\rho\zeta + i\zeta\nabla_\zeta, \quad (40)$$

которые обладают коммутационными соотношениями алгебры Ли группы  $SU(1, 1)$ :

$$[\Gamma_0, \Gamma_4] = iT, \quad [T, \Gamma_0] = i\Gamma_4, \quad [\Gamma_4, T] = -i\Gamma_0. \quad (41)$$

Оператор Казимира  $C_2 = \Gamma_0^2 - \Gamma_4^2 - T^2 = s(s+1)I$ , где  $I$  – единичный оператор, имеет значение  $C_2 = \nu(\nu-1)$ , т. е.  $s = \nu - 1$  или  $s = -\nu$ . Значению  $s = -\nu < 0$  соответствует унитарное неприводимое представление  $D^+(-\nu)$  группы  $SU(1, 1)$  [46]–[48], в котором собственные значения компактного генератора  $\Gamma_0$  равны  $-s + n = n + \nu$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Таким образом, мы получаем правильный спектр (21) для оператора  $H = \omega\delta\Gamma_0$ . Его собственные функции (22) и (25) образуют базис неприводимого представления  $D^+(-\nu)$ .

Приведем также вид операторов (40) в  $x$ -представлении:

$$\Gamma_0(x) = \frac{H(x)}{\hbar\omega\delta}, \quad \Gamma_4(x) = \frac{\delta}{\omega_0}e^{-i\lambda\nabla_x} - \Gamma_0(x), \quad T(x) = \frac{x}{\lambda} + \frac{\rho}{\omega_0}e^{-i\lambda\nabla_x}. \quad (42)$$

СЛУЧАЙ Б. Пусть теперь  $|\rho| \geq 1$  (непрерывный спектр). В случае  $|\rho| > 1$  генераторы алгебры Ли динамической группы  $SU(1, 1)$  связаны с генераторами (40) (или (42)) следующим образом:

$$\Gamma'_0 = -i\Gamma_4, \quad \Gamma'_4 = i\Gamma_0, \quad T' = -T, \quad \delta = i\delta', \quad \delta' = \sqrt{\rho^2 - 1}. \quad (43)$$

Поскольку спектр некомпактного генератора  $\Gamma'_4$  непрерывен и равен  $\lambda \in \mathbb{R}$  [46], приходим к выводу, что при  $|\rho| > 1$  спектр оператора  $H = \hbar\omega\delta'\Gamma'_4$  также непрерывен.

В случае  $|\rho| = 1$  можно ввести следующие операторы:

$$\Gamma''_0(\zeta) = \frac{H(\zeta)}{\hbar\omega} - i\rho\zeta\nabla_\zeta, \quad \Gamma''_4(\zeta) = i\rho\zeta\nabla_\zeta, \quad T''(\zeta) = -\rho\left(\frac{1}{2}\zeta - \Gamma''_0(\zeta)\right), \quad (44)$$

которые образуют ту же замкнутую алгебру (41), причем по-прежнему  $C''_2 = \nu(\nu-1)$ . В  $x$ -представлении они записываются в виде

$$\Gamma''_0(x) = \frac{H(x)}{\hbar\omega} - \rho\frac{x}{\lambda}, \quad \Gamma''_4(x) = \rho\frac{x}{\lambda}, \quad T''(x) = -\rho\left(\frac{1}{\omega_0}e^{-i\lambda\nabla_x} - \Gamma''_0(x)\right). \quad (45)$$

Следовательно,  $H = \hbar\omega(\Gamma''_0 + \Gamma''_4)$ . Как известно [46], этот оператор обладает непрерывным и положительным спектром. Таким образом, динамической группой симметрии рассматриваемой системы является группа  $SU(1, 1)$ .

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе мы детально рассмотрели как в импульсном пространстве Лобачевского, так и в релятивистском конфигурационном пространстве модель релятивистского линейного осциллятора при наличии постоянной внешней силы. Получены некоторые физические и математические результаты. Интересно отметить, что, в отличие от соответствующей нерелятивистской задачи, в данном случае связанные состояния возможны только в конечной области значения силы, а именно при  $|g| < mc\omega$ , а при  $|g| \geq mc\omega$  имеется только непрерывный спектр энергии. Уровни энергии дискретного спектра эквидистантны. Мы показали, что волновые функции в  $x$ -представлении выражаются через полиномы Мейкснера–Поллачека и построили динамическую алгебру, с помощью которой, как и в нерелятивистском случае, можно найти чисто алгебраическим способом энергетический спектр и построить волновые функции. Зная повышающий и понижающий операторы, можно построить когерентные состояния системы. Установлено предельное соотношение (29), связывающее полиномы Мейкснера–Поллачека и Эрмита.

Замеченная нами связь между полиномами Лагерра и Мейкснера–Поллачека может быть использована для нахождения билинейной производящей функции для полиномов Мейкснера–Поллачека (формулы (30)–(33)). Заметим также, что гамильтониан (12) дает пример разностного оператора, а гамильтониан (17) – пример дифференциального оператора, для нахождения спектра которых нельзя применить теорию возмущения соответственно в окрестностях точек  $|g| = mc\omega$  и  $|\rho| = 1$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь докажем формулу (29). Будем исходить из рекуррентных соотношений для полиномов Мейкснера–Поллачека и Эрмита [39]

$$P_{n+1}^\nu(x; \varphi) = A_n P_n^\nu(x; \varphi) + B_n P_{n-1}^\nu(x; \varphi), \quad (\text{П.1})$$

$$H_{n+1}(z) = 2zH_n(z) - 2nH_{n-1}(z), \quad (\text{П.2})$$

где

$$A_n = \frac{2[(n + \nu) \cos \varphi + x \sin \varphi]}{n + 1}, \quad B_n = -\frac{n - 1 + 2\nu}{n + 1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Пусть

$$Q_n = n! \nu^{-n/2} P_n^\nu \left( x\sqrt{\nu}; \arccos \frac{x_0}{\sqrt{\nu}} \right), \quad Q'_n = \lim_{\nu \rightarrow \infty} Q_n. \quad (\text{П.3})$$

Тогда из (П.1) мы получим следующее рекуррентное соотношение для полиномов  $Q_n$ :

$$Q_{n+1} = A'_n Q_n + B'_n Q_{n-1}, \quad (\text{П.4})$$

где  $A'_n = (n + 1)A_n/\sqrt{\nu}$  и  $B'_n = n(n + 1)B_n/\nu$ . Так как  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} A'_n = 2(x + x_0)$ ,  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} B'_n = -2n$ , то, переходя к пределу  $\nu \rightarrow \infty$  в (П.4), мы приходим к равенству

$$Q'_{n+1} = 2(x + x_0)Q'_n - 2nQ'_{n-1}, \quad (\text{П.5})$$

которое совпадает с рекуррентным соотношением для полиномов Эрмита (П.2) при  $z = x + x_0$ . Следовательно,  $Q'_n = H_n(x + x_0)$ . Это завершает доказательство.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 3: *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Наука, М., 1989.
- [2] А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, М., 1971.
- [3] M. Moshinsky, Yu. F. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*, Contemporary Concepts in Physics, **9**, Harwood Academic Publ., Amsterdam, 1996.
- [4] H. Yukawa, “Structure and mass spectrum of elementary particles. II. Oscillator model”, *Phys. Rev.*, **91**:2 (1953), 416–417.
- [5] M. Markov, “On dynamically deformable form factors in the theory of elementary particles”, *Nuovo Cimento*, **3**:supp. 4 (1956), 760–772.
- [6] R. P. Feynman, M. Kislinger, F. Ravndal, “Current matrix elements from a relativistic quark model”, *Phys. Rev. D*, **3**:11 (1971), 2706–2732.
- [7] В. Л. Гинзбург, В. И. Манько, “Релятивистские волновые уравнения с внутренними степенями свободы и партоны”, *ЭЧАЯ*, **7**:1 (1976), 3–20.
- [8] П. Н. Боголюбов, “Уравнения для связанных состояний (кварков)”, *ЭЧАЯ*, **3**:1 (1972), 144–174.
- [9] T. De, Y. S. Kim, M. E. Noz, “Radial effects in the symmetric quark model”, *Nuovo Cimento A*, **13**:4 (1973), 1089–1101.
- [10] Y. S. Kim, M. E. Noz, “Group theory of covariant harmonic oscillators”, *Am. J. Phys.*, **46**:5 (1978), 480–483.
- [11] Y. S. Kim, M. E. Noz, “Relativistic harmonic oscillators and hadronic structure in the quantum-mechanics curriculum”, *Am. J. Phys.*, **46**:5 (1978), 484–488.
- [12] I. Bars, “Relativistic harmonic oscillator revisited”, *Phys. Rev. D*, **79**:4 (2009), 045009, 22 pp., arXiv:0810.2075.
- [13] D. J. Navarro, J. Navarro-Salas, “Special-relativistic harmonic oscillator modeled by Klein–Gordon theory in anti-de Sitter space”, *J. Math. Phys.*, **37**:12 (1996), 6060–6073.
- [14] I. I. Cotaescu, “Geometric models of the relativistic harmonic oscillator”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **12**:20 (1997), 3545–3550, arXiv:physics/9704009.
- [15] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, “The Dirac oscillator”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**:17 (1989), L817–L819.
- [16] O. L. de Lange, “Shift operators for a Dirac oscillator”, *J. Math. Phys.*, **32**:5 (1991), 1296–1300.
- [17] M. Moreno, A. Zentella, “Covariance, CPT and the Foldy–Wouthuysen transformation for the Dirac oscillator”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**:17 (1989), L8221–L825.
- [18] R. Lisboa, M. Malheiro, A. S. de Castro, P. Alberto, M. Fiolhais, “Pseudospin symmetry and the relativistic harmonic oscillator”, *Phys. Rev. C*, **69**:2 (2004), 024319, 15 pp., arXiv:nucl-th/0310071.
- [19] M. Moshinsky, G. Loyola, A. Szczepaniak, C. Villegas, N. Aquino, “The Dirac oscillator and its contribution to the baryon mass formula”, *Proceedings of the Rio De Janeiro International Workshop on Relativistic Aspects of Nuclear Physics* (Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, Brasil, August 28–30, 1989), eds. T. Kodama, K. C. Chung S. J. B. Duarte, M. C. Nemes, World Sci., Singapore, 1990, 271–308.
- [20] R. P. Martinez-y-Romero, H. N. Núñez Yépez, A. L. Salas-Brito, “Relativistic quantum mechanics of a Dirac oscillator”, *Eur. J. Phys.*, **16**:3 (1995), 135–141, arXiv:quant-ph/9908069.
- [21] E. E. Salpeter, “Mass corrections to the fine structure of hydrogen-like atoms”, *Phys. Rev.*, **87**:2 (1952), 328–343.

- [22] Z.-F. Li, J.-J. Liu, W. Lucha, W.-G. Ma, F. F. Schöberl, “Relativistic harmonic oscillator”, *J. Math. Phys.*, **46**:10 (2005), 103514, 11 pp., arXiv: hep-ph/0501268.
- [23] K. Kowalski, J. Rembieliński, “Relativistic massless harmonic oscillator”, *Phys. Rev. A*, **81**:1 (2010), 012118, 6 pp., arXiv: 1002.0474.
- [24] V. G. Kadyshesky, R. M. Mir-Kasimov, N. B. Skachkov, “Quasi-potential approach and the expansion in relativistic spherical functions”, *Nuovo Cimento A*, **55**:2 (1968), 233–257.
- [25] В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков, “Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел”, *ЭЧАЯ*, **2**:3 (1972), 635–690.
- [26] А. Д. Донков, В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, “Квазипотенциальное уравнение для релятивистского гармонического осциллятора”, *ТМФ*, **8**:1 (1971), 61–72.
- [27] Н. М. Атакишиев, Р. М. Мир-Касимов, Ш. М. Нагиев, “Квазипотенциальные модели релятивистского осциллятора”, *ТМФ*, **44**:1 (1980), 47–62.
- [28] Н. М. Атакишиев, “Квазипотенциальные волновые функции релятивистского гармонического осциллятора и многочлены Поллачека”, *ТМФ*, **58**:2 (1984), 254–260.
- [29] N. M. Atakishiyev, R. M. Mir-Kasimov, Sh. M. Nagiyev, “A relativistic model of the isotropic oscillator”, *Ann. Phys.*, **497**:1 (1985), 25–30.
- [30] Р. М. Мир-Касимов, Ш. М. Нагиев, Э. Дж. Каграманов, *Релятивистский линейный осциллятор под действием постоянной внешней силы и билинейная производящая функция для полиномов Поллачека*, Препринт № 214, СКБ ИФАН АзССР, Баку, 1987.
- [31] E. D. Kagramanov, R. M. Mir-Kasimov, Sh. M. Nagiyev, “The covariant linear oscillator and generalized realization of the dynamical  $SU(1, 1)$  symmetry algebra”, *J. Math. Phys.*, **31**:7 (1990), 1733–1738.
- [32] R. M. Mir-Kasimov, “ $SU_q(1, 1)$  and the relativistic oscillator”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24**:18 (1991), 4283–4302.
- [33] Ю. А. Гришечкин, В. Н. Капшай, “Решение уравнения Логунова–Тавхелидзе для трехмерного осцилляторного потенциала в релятивистском конфигурационном представлении”, *Изв. вузов. Физика*, **61**:9 (2018), 83–89.
- [34] N. M. Atakishiyev, K. B. Wolf, “Generalized coherent states for a relativistic model of the linear oscillator in a homogeneous external field”, *Rep. Math. Phys.*, **27**:3 (1989), 305–311.
- [35] Н. М. Атакишиев, Ш. М. Нагиев, К. Б. Вольф, “О функциях распределения Вигнера для релятивистского линейного осциллятора”, *ТМФ*, **114**:3 (1998), 410–425.
- [36] S. M. Nagiyev, G. H. Guliyeva, E. I. Jafarov, “The Wigner function of the relativistic finite-difference oscillator in an external field”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:45 (2009), 454015, 10 pp.
- [37] N. M. Atakishiyev, Sh. M. Nagiyev, K. B. Wolf, “Realization of  $Sp(2, r)$  by finite-difference operators: the relativistic oscillator in an external field”, *J. Group Theory Phys.*, **3**:1 (1995), 61–70.
- [38] Е. Ф. Дей, В. Н. Капшай, Н. Б. Скачков, “Точные решения класса квазипотенциальных уравнений для суперпозиции квазипотенциалов однобозонного обмена”, *ТМФ*, **82**:2 (1990), 188–198.
- [39] А. А. Атанасов, Е. С. Писанова, “Теория возмущений для релятивистского трехмерного двухчастичного квазипотенциального уравнения”, *ТМФ*, **89**:2 (1991), 222–227.
- [40] А. А. Атанасов, А. Т. Маринов, “ $\hbar$ -Разложение для связанных состояний, описываемых релятивистским трехмерным двухчастичным квазипотенциальным уравнением”, *ТМФ*, **129**:1 (2001), 106–115.
- [41] О. П. Соловцова, Ю. Д. Черниченко, “Ресуммирующий  $L$ -фактор в релятивистском квазипотенциальном подходе”, *ТМФ*, **166**:2 (2011), 225–244.
- [42] E. D. Kagramanov, R. M. Mir-Kasimov, Sh. M. Nagiyev, “Can we treat confinement as a pure relativistic effect?”, *Phys. Lett. A*, **140**:1–2 (1989), 1–4.

- [43] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1: *Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Наука, М., 1973.
- [44] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2: *Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1974.
- [45] R. Koekoek, P. A. Lesky, R. F. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their  $q$ -Analogues*, Springer, Berlin, 2010.
- [46] A. O. Barut, "Some unusual applications of Lie algebra representations in quantum theory", *SIAM J. Appl. Math.*, **25**:3 (1973), 247–259.
- [47] И. А. Малкин, В. И. Манько, *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем*, Наука, М., 1979.
- [48] А. Барут, Р. Рончка, *Теория представлений групп и ее приложения*, т. 2, Мир, М., 1980.

Поступила в редакцию 14.11.2020,  
после доработки 3.05.2021,  
принята к публикации 5.05.2021