Ю. А. Фарков, Биортогональные всплески на группах Виленкина, *Труды МИАН*, 2009, том 265, 110–124

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2009, т. 265, с. 110–124

УДК 517.986.62

Биортогональные всплески на группах Виленкина

©2009 г. Ю. А. Фарков[1]

Поступило в июне 2008 г.

Изложены алгоритмы построения биортогональных систем всплесков и масштабирующих функций, масками которых являются обобщенные полиномы Уолша. Приведено несколько новых примеров биортогональных наборов всплесков с компактными носителями на группах Виленкина.

Известно, что ортогональные всплески с компактными носителями на группах Виленкина представимы лакунарными рядами по обобщенным функциям Уолша. В данной работе изложены алгоритмы построения биортогональных систем всплесков и масштабирующих функций, масками которых являются обобщенные полиномы Уолша. Приведено несколько новых примеров биортогональных наборов всплесков.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Основы теории рядов и преобразований Уолша как одного из разделов современного гармонического анализа изложены в монографиях [1–3]. В то время как характерами группы вращений окружности являются гармоники e^{ikt}, функции Уолша являются характерами канторовой диадической группы. Ортогональные всплески и соответствующие им масштабирующие функции, представимые в виде лакунарных рядов Уолша, изучались в [4–10]. Для данного $p \geq 2$ группа Виленкина G может быть определена как слабое прямое произведение счетного множества циклических групп p-го порядка (в случае $p = 2$ группа G изоморфна канторовой группе). Специфика построения всплесков на группах Кантора и Виленкина связана с тем обстоятельством, что эти группы (как и аддитивная группа поля p-адических чисел) содержат открытые компактные подгруппы (см. [11]). В настоящей работе вводятся биортогональные всплески и масштабирующие функции, масками которых являются обобщенные полиномы Уолша, подобно тому как биортогональные всплески с компактными носителями на прямой $\mathbb{R}$ определяются по надлежащим образом выбранным тригонометрическим полиномам (см., например, [12, § 8.3.5; 13, § 1.3]). Отметим, что для каждого $p \geq 2$ рассматриваемые обобщенные функции Уолша являются характерами соответствующей группы Виленкина.

Пусть G — локально компактная абелева группа, состоящая из последовательностей вида

$$x = (x_j) = (\ldots, 0, 0, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots),$$

где $x_j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ для $j \in \mathbb{Z}$ и $x_j = 0$ для $j < k = k(x)$. Групповая операция на G обозначается $\oplus$ и определяется как покоординатное сложение по модулю p:

$$(z_j) = (x_j) \oplus (y_j) \quad \Leftrightarrow \quad z_j = x_j + y_j \ (\mathrm{mod}\, p) \quad \text{для} \ \ j \in \mathbb{Z},$$

а топология в G вводится полной системой окрестностей нуля:

$$U_l = \big\{(x_j) \in G \mid x_j = 0 \text{ для } j \leq l\big\}, \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

[1]Российский государственный геологоразведочный университет, Москва, Россия.
E-mail: farkov@list.ru

Группу G называют *группой Виленкина* (см., например, [2, p. 511]). Обозначим через $\ominus$ операцию, обратную $\oplus$ (так что $x\ominus x=\theta$, где θ — нулевая последовательность). Определим U как подгруппу группы G с множеством элементов U_0.

Пространства Лебега $L^q(G)$, $1\le q\le\infty$, определяются по мере Хаара μ, заданной на борелевских множествах группы G и нормированной условием $\mu(U)=1$. Обозначим через $(\cdot\,,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ скалярное произведение и норму в $L^2(G)$.

Группа, двойственная G, обозначается G^* и состоит из последовательностей вида

$$\omega=(\omega_j)=(\dots,0,0,\omega_k,\omega_{k+1},\omega_{k+2},\dots),$$

где $\omega_j\in\{0,1,\dots,p-1\}$ для $j\in\mathbb{Z}$ и $\omega_j=0$ для $j<k=k(\omega)$. Операции сложения и вычитания, окрестности нуля $\{U_l^*\}$ и мера Хаара μ^* вводятся для G^* так же, как и для G. Каждый характер группы G может быть задан по формуле

$$\chi(x,\omega)=\exp\biggl(\frac{2\pi i}{p}\sum_{j\in\mathbb{Z}}x_j\omega_{1-j}\biggr),\qquad x\in G,$$

для некоторого $\omega\in G^*$. Выделим в G дискретную подгруппу $H=\{(x_j)\in G\mid x_j=0 \text{ для } j>0\}$ и определим автоморфизм $A\in\operatorname{Aut}G$ по формуле $(Ax)_j=x_{j+1}$. Легко видеть, что фактор-группа $H/A(H)$ содержит p элементов, а аннулятор $H^\perp$ подгруппы H состоит из последовательностей $(\omega_j)\in G^*$, у которых $\omega_j=0$ для $j>0$.

Отображение $\lambda\colon G\to[0,+\infty)$ определим равенством

$$\lambda(x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}x_jp^{-j},\qquad x=(x_j)\in G.$$

Образом подгруппы H при отображении λ является множество целых неотрицательных чисел: $\lambda(H)=\mathbb{Z}_+$. Для каждого $\alpha\in\mathbb{Z}_+$ через $h_{[\alpha]}$ обозначим элемент из H такой, что $\lambda(h_{[\alpha]})=\alpha$ (в частности, $h_{[0]}=\theta$). Отображение $\lambda^*\colon G^*\to[0,+\infty)$, автоморфизм $B\in\operatorname{Aut}G^*$, подгруппа U^* в G^* и элементы $\omega_{[\alpha]}$ из $H^\perp$ определяются аналогично λ, A, U и $h_{[\alpha]}$ соответственно. Отметим, что $\chi(Ax,\omega)=\chi(x,B\omega)$ для всех $x\in G$, $\omega\in G^*$ (т.е. B — автоморфизм, сопряженный к A).

Обобщенные функции Уолша для группы G могут быть заданы равенством

$$W_\alpha(x)=\chi(x,\omega_{[\alpha]}),\qquad \alpha\in\mathbb{Z}_+,\quad x\in G.$$

Эти функции непрерывны на G и удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int\limits_U W_\alpha(x)\overline{W_\beta(x)}\,d\mu(x)=\delta_{\alpha,\beta},\qquad \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+,$$

где $\delta_{\alpha,\beta}$ — символ Кронекера. Известно также, что система $\{W_\alpha\}$ полна в $L^2(U)$. Соответствующая система для группы G^* определяется равенством

$$W_\alpha^*(\omega)=\chi(h_{[\alpha]},\omega),\qquad \alpha\in\mathbb{Z}_+,\quad \omega\in G^*.$$

Система $\{W_\alpha^*\}$ является ортонормированным базисом в $L^2(U^*)$.

Для любой функции $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$ преобразование Фурье $\widehat{f}$, определенное по формуле

$$\widehat{f}(\omega)=\int\limits_G f(x)\overline{\chi(x,\omega)}\,d\mu(x),\qquad \omega\in G,$$

принадлежит пространству $L^2(G)$. Оператор Фурье

$$\mathcal{F}\colon\ L^1(G)\cap L^2(G)\to L^2(G), \qquad \mathcal{F}f=\widehat{f},$$

стандартным образом продолжается на все пространство $L^2(G)$. Для любых $f,g\in L^2(G)$ имеет место равенство Парсеваля $(f,g)=(\widehat{f},\widehat{g})$.

Носитель функции $f\in L^2(G)$ обозначается $\operatorname{supp} f$ и определяется как наименьшее по включению замкнутое множество, на дополнении которого функция f почти везде равна нулю. Обозначим через $L^2_{\mathrm{c}}(G)$ множество функций из $L^2(G)$, имеющих компактный носитель.

Определение 1. Функцию $\varphi\in L^2_{\mathrm{c}}(G)$ будем называть *масштабирующей функцией*, если она удовлетворяет уравнению вида

$$\varphi(x)=p\sum_{\alpha=0}^{p^n-1}a_\alpha\varphi(Ax\ominus h_{[\alpha]}), \qquad x\in G, \tag{1.1}$$

где a_α — некоторые комплексные коэффициенты.

Характеристическую функцию множества $E\subset G$ будем обозначать через $\mathbf{1}_E$. Если $a_0=\ldots$ $\ldots=a_{p-1}=1/p$ и все $a_\alpha=0$ для $\alpha\ge p$, то решением уравнения (1.1) является функция $\varphi=\mathbf{1}_{U_{n-1}}$. Соответствующие ортогональные всплески в $L^2(G)$ имеют вид

$$\psi^{(\nu)}(x)=\sum_{\alpha=0}^{p-1}\varepsilon_p^{\nu\alpha}\varphi(Ax\ominus h_{[\alpha]}), \qquad \nu=1,\ldots,p-1,$$

где $\varepsilon_p=\exp(2\pi i/p)$ (ср. [14, теорема 2; 15, § 4]). Некоторые другие примеры масштабирующих функций, по которым определяются ортогональные всплески в $L^2(G)$, приведены в [6] и [10].

Функциональное уравнение (1.1) называется *масштабирующим уравнением*. Применяя преобразование Фурье, можем записать это уравнение в виде

$$\widehat{\varphi}(\omega)=m(B^{-1}\omega)\widehat{\varphi}(B^{-1}\omega), \tag{1.2}$$

где

$$m(\omega)=\sum_{\alpha=0}^{p^n-1}a_\alpha\overline{W^*_\alpha(\omega)} \tag{1.3}$$

— обобщенный полином Уолша, называемый *маской* масштабирующей функции φ.

Множества

$$U^*_{n,s}=B^{-n}(\omega_{[s]})\oplus B^{-n}(U^*), \qquad 0\le s\le p^n-1, \tag{1.4}$$

являются смежными классами группы U^* по подгруппе $B^{-n}(U^*)$. Каждая из функций $W^*_\alpha(\cdot)$ при $0\le\alpha\le p^n-1$ постоянна на множествах (1.4). Коэффициенты масштабирующего уравнения (1.1) связаны со значениями b_s маски (1.3) на классах $U^*_{n,s}$ прямым и обратным дискретными преобразованиями Виленкина–Крестенсона:

$$a_\alpha=\frac{1}{p^n}\sum_{s=0}^{p^n-1}b_sW^*_\alpha(B^{-n}\omega_{[s]}), \qquad 0\le\alpha\le p^n-1, \tag{1.5}$$

$$b_s=\sum_{\alpha=0}^{p^n-1}a_\alpha\overline{W^*_\alpha(B^{-n}\omega_{[s]})}, \qquad 0\le s\le p^n-1. \tag{1.6}$$

Формула Парсеваля для этих преобразований имеет вид

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{\widetilde{a}_\alpha} = \frac{1}{p^n} \sum_{s=0}^{p^n-1} b_s \overline{\widetilde{b}_s}, \tag{1.7}$$

где a_α, b_s и $\widetilde{a}_\alpha$, $\widetilde{b}_s$ — произвольные наборы чисел, для которых имеют место равенства (1.5) и (1.6). Для вычисления дискретных преобразований Виленкина–Крестенсона применяются алгоритмы, аналогичные классическим алгоритмам для быстрого преобразования Фурье (см., например, [2, p. 463]).

Теорема A. *Если функция $\varphi \in L^2_{\mathrm{c}}(G)$ удовлетворяет уравнению* (1.1) *и $\widehat{\varphi}(\theta) = 1$, то*

$$\sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha = 1 \qquad \text{и} \qquad \operatorname{supp}\varphi \subset U_{1-n}.$$

В пространстве $L^2_{\mathrm{c}}(G)$ это решение уравнения (1.1) *единственно, дается формулой*

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\omega)$$

и обладает следующими свойствами:

1) $\widehat{\varphi}(h^*) = 0$ *при всех* $h^* \in H^\perp \setminus \{\theta\}$ (*модифицированное условие Стрэнга–Фикса*);
2) $\sum_{h\in H} \varphi(x \oplus h) = 1$ *для п.в.* $x \in G$ (*свойство разбиения единицы*).

Определение 2. Функцию $f \in L^2(G)$ будем называть *стабильной*, если существуют положительные константы c_1 и c_2 такие, что

$$c_1 \biggl(\sum_{\alpha=0}^{\infty} |a_\alpha|^2\biggr)^{1/2} \le \biggl\|\sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha f(\,\cdot\ominus h_{[\alpha]})\biggr\| \le c_2 \biggl(\sum_{\alpha=0}^{\infty} |a_\alpha|^2\biggr)^{1/2}$$

для каждой последовательности $\{a_\alpha\}$ из ℓ^2. Иначе говоря, функция f стабильна в $L^2(G)$, если функции $f(\,\cdot\ominus h)$, $h \in H$, образуют систему Рисса в пространстве $L^2(G)$.

Будем говорить, что функция $g\colon G^* \to \mathbb{C}$ имеет *периодический нуль* в точке $\omega \in G^*$, если $g(\omega \oplus h^*) = 0$ для всех $h^* \in H^\perp$. Следующая теорема характеризует стабильные в $L^2(G)$ функции с компактными носителями.

Теорема B. *Для произвольной функции $f \in L^2_{\mathrm{c}}(G)$ следующие свойства эквивалентны*:

(а) *функция f стабильна в $L^2(G)$*;
(б) *система $\{f(\,\cdot\ominus h) \mid h \in H\}$ линейно независима*;
(в) *преобразование Уолша функции f не имеет периодических нулей.*

Теоремы A и B доказаны в [10] и [16] (при $p = 2$ их аналоги для пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$ имеются в [9]).

Определение 3. Семейство замкнутых подпространств $V_j \subset L^2(G)$, $j \in \mathbb{Z}$, называется *кратномасштабным анализом* (сокращенно КМА) в $L^2(G)$, если выполнены следующие условия:

(i) $V_j \subset V_{j+1}$ для $j \in \mathbb{Z}$;
(ii) $\overline{\bigcup V_j} = L^2(G)$ и $\bigcap V_j = \{0\}$;
(iii) $f(\cdot) \in V_j \;\Leftrightarrow\; f(A\,\cdot) \in V_{j+1}$ для $j \in \mathbb{Z}$;

(iv) $f(\cdot) \in V_0 \;\Rightarrow\; f(\cdot \ominus h) \in V_0$ для $h \in H$;

(v) существует функция $\varphi \in L^2(G)$ такая, что система $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ является базисом Рисса в V_0.

Для произвольной функции $f \in L^2(G)$ положим

$$f_{j,h}(x) = p^{j/2} f(A^j x \ominus h), \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad h \in H.$$

Определение 4. Будем говорить, что *функция* φ *порождает КМА в* $L^2(G)$, если, во-первых, семейство $\{\varphi(\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ является системой Рисса в $L^2(G)$ и, во-вторых, замкнутые подпространства $V_j = \overline{\mathrm{span}}\{\varphi_{j,h} \mid h \in H\}$, $j \in \mathbb{Z}$, образуют КМА в $L^2(G)$.

В работах [8] и [10] для произвольных $p, n \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, найдены коэффициенты a_α такие, что масштабирующее уравнение (1.1) имеет решение $\varphi \in L^2_{\mathrm{c}}(G)$, которое является суммой лакунарного ряда по обобщенным функциям Уолша и порождает КМА в $L^2(G)$. Более того, по каждой масштабирующей функции φ, порождающей КМА в $L^2(G)$, могут быть построены *ортогональные всплески* $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(p-1)}$ таким образом, что функции

$$\psi^{(\nu)}_{j,h}(x) = p^{j/2} \psi^{(\nu)}(A^j x \ominus h), \qquad 1 \leq \nu \leq p-1, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad h \in H,$$

образуют ортонормированный базис в $L^2(G)$.

Приведем разложение масштабирующей функции в лакунарный ряд Уолша. Пусть $l \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Последовательность $\omega = (\omega_j)$, у которой $\omega_1 = l$ и $\omega_j = 0$ для $j \neq 1$, обозначим через δ_l (в частности, $\delta_0 = \theta$). Легко видеть, что

$$\bigl\{\omega \in U^* \mid \chi(x, \omega) = 1 \text{ для } x \in A(H)\bigr\} = \{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{p-1}\},$$

т.е. множество последовательностей δ_l является аннулятором подгруппы $A(H)$ в H. Заметим, что $W^*_\alpha(\delta_l) = \varepsilon_p^{\alpha l}$ и $\delta_l = B^{-n}\omega_{[lp^{n-1}]}$ для $0 \leq l \leq p-1$.

Предположим, что функция $\varphi \in L^2_{\mathrm{c}}(G)$ является решением масштабирующего уравнения (1.1), маска которого удовлетворяет условиям

$$m(\theta) = 1, \qquad \sum_{l=0}^{p-1} |m(\omega \oplus \delta_l)|^2 = 1, \quad \omega \in G^*.$$

Тогда, как показано в [8], имеет место равенство

$$\varphi(x) = \frac{1}{p^{n-1}}\, \mathbf{1}_U(A^{1-n}x)\left(1 + \sum_{l \in \mathbb{N}(p,n)} c_l[m] W_l(A^{1-n}x)\right), \qquad x \in G, \tag{1.8}$$

где $\mathbb{N}(p,n)$ и $c_l[m]$ определяются следующим образом. Представим каждое $l \in \mathbb{N}$ в виде p-арного разложения

$$l = \sum_{j=0}^{k} \mu_j p^j, \qquad \mu_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}, \quad \mu_k \neq 0, \quad k = k(l) \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.9}$$

и обозначим через $\mathbb{N}_0(p,n)$ множество всех натуральных чисел $l \geq p^{n-1}$, у которых среди упорядоченных наборов $(\mu_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_{j+n-1})$ в разложении (1.9) отсутствуют наборы

$$(0, 0, \dots, 0, 1),\ (0, 0, \dots, 0, 2),\ \dots,\ (0, 0, \dots, 0, p-1).$$

Тогда $\mathbb{N}(p,n) = \{1,2,\dots,p^{n-1}-1\} \cup \mathbb{N}_0(p,n)$. Далее положим

$$\gamma(i_1,i_2,\dots,i_n) = b_s, \qquad s = i_1p^0 + i_2p^1 + \dots + i_np^{n-1}, \quad i_j \in \{0,1,\dots,p-1\},$$

где b_s заданы формулами (1.6). Тогда

$$c_l[m] = \gamma(\mu_0,0,0,\dots,0,0), \qquad \text{если} \quad k(l)=0,$$

$$c_l[m] = \gamma(\mu_1,0,0,\dots,0,0)\gamma(\mu_0,\mu_1,0,\dots,0,0), \qquad \text{если} \quad k(l)=1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$c_l[m] = \gamma(\mu_k,0,0,\dots,0,0)\gamma(\mu_{k-1},\mu_k,0,\dots,0,0)\dots\gamma(\mu_0,\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{n-2},\mu_{n-1}),$$
$$\text{если} \quad k(l) \geq n-1.$$

Отметим, что в последнем произведении индексы каждого множителя начиная со второго получаются “сдвигом” индексов предыдущего множителя на одну позицию вправо и добавлением на освободившееся первое место одной новой цифры из p-арного разложения (1.9).

2. ПОСТРОЕНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ ВСПЛЕСКОВ НА ГРУППЕ ВИЛЕНКИНА

Пусть даны две масштабирующие функции φ, $\widetilde{\varphi}$ соответственно с масками

$$m(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1} a_\alpha \overline{W^*_\alpha(\omega)}, \qquad \widetilde{m}(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^{\widetilde{n}}-1} \widetilde{a}_\alpha \overline{W^*_\alpha(\omega)}. \tag{2.1}$$

Нас интересует, во-первых, когда H-сдвиги функций φ, $\widetilde{\varphi}$ будут образовывать биортонормированную систему в $L^2(G)$, и, во-вторых, как по маскам (2.1) построить биортогональные базисы в $L^2(G)$.

Предложение 1. *Пусть $\varphi,\widetilde{\varphi} \in L^2(G)$. Системы $\{\varphi(\,\cdot\ominus h) \mid h\in H\}$ и $\{\widetilde{\varphi}(\,\cdot\ominus h) \mid h\in H\}$ являются биортонормированными в $L^2(G)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{h^*\in H^\perp} \widehat{\varphi}(\omega\oplus h^*)\,\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\omega\oplus h^*)} = 1 \qquad \text{для п.в.} \ \ \omega\in G^*.$$

Предложение 2. *Пусть φ, $\widetilde{\varphi}$ — масштабирующие функции соответственно с масками m, $\widetilde{m}$. Если системы $\{\varphi(\,\cdot\ominus h) \mid h\in H\}$, $\{\widetilde{\varphi}(\,\cdot\ominus h) \mid h\in H\}$ являются биортонормированными в $L^2(G)$, то*

$$\sum_{l=0}^{p-1} m(\omega\oplus\delta_l)\,\overline{\widetilde{m}(\omega\oplus\delta_l)} = 1 \qquad \text{для всех} \ \ \omega\in G^*. \tag{2.2}$$

Некоторые аналоги предложений 1 и 2 имеются в [8, § 3] и [13, § 1.2].

Для данных масок (2.1) положим $m^*(\omega) = m(\omega)\overline{\widetilde{m}(\omega)}$ и $N = \max\{n,\widetilde{n}\}$. Условие (2.2) записывается в виде

$$\sum_{l=0}^{p-1} m^*(\omega\oplus\delta_l) = 1, \qquad \omega\in G^*,$$

и эквивалентно выполнению равенств

$$\sum_{\nu=0}^{p-1} b^{(N)}_{l+\nu p^{N-1}}\,\overline{\widetilde{b}}^{(N)}_{l+\nu p^{N-1}} = 1, \qquad 0\leq l\leq p^{N-1}-1, \tag{2.3}$$

где $b_l^{(N)} = m(B^{-N}\omega_{[l]})$, $\widetilde{b}_l^{(N)} = \widetilde{m}(B^{-N}\omega_{[l]})$. Пусть $\oplus_p$ и $\ominus_p$ обозначают соответственно операции сложения и вычитания целых чисел по модулю p. Пользуясь равенством $W_\alpha^*(\omega)W_\beta^*(\omega) = W_{\alpha\oplus_p\beta}^*(\omega)$, получаем

$$m^*(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^n-1}\sum_{\beta=0}^{p^{\widetilde{n}}-1} a_\alpha \overline{\widetilde{a}}_\beta \overline{W_{\alpha\oplus_p\beta}^*(\omega)}.$$

Далее, полагая $a_\alpha = \widetilde{a}_\beta = 0$ для $\alpha \ge p^n$, $\beta \ge p^{\widetilde{n}}$, имеем

$$m^*(\omega) = \sum_{\alpha=0}^{p^N-1} a_\alpha^* \overline{W_\alpha^*(\omega)}, \qquad a_\alpha^* = \sum_{\gamma=0}^{p^N-1} a_\gamma \overline{\widetilde{a}}_{\gamma\ominus_p\alpha}.$$

Определим функцию φ^* по формуле

$$\varphi^*(x) = \int_G \varphi(t\oplus x)\overline{\widetilde{\varphi}(t)}\,d\mu(t).$$

Преобразование Фурье этой функции связано с преобразованиями Фурье функций φ, $\widetilde{\varphi}$ равенством $\widehat{\varphi}^*(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}}(\omega)}$. Более того, функция φ^* является масштабирующей функцией и удовлетворяет уравнению

$$\varphi^*(x) = p\sum_{\alpha=0}^{p^N-1} a_\alpha^*\varphi^*(Ax\ominus\alpha), \qquad x \in G.$$

Таким образом, полином m^* является маской функции φ^*.

Пусть $M \subset U^*$ и

$$S_pM = \bigcup_{l=0}^{p-1}\bigl\{B^{-1}\omega_{[l]} + B^{-1}(\omega) \mid \omega \in M\bigr\}.$$

Предположим, что M совпадает с одним из множеств $U_{n-1,\,s}^*$, $1 \le s \le p^{n-1}-1$, либо является объединением некоторых из этих множеств. Множество M называется *блокирующим* для маски m, если $m(\omega) = 0$ для всех $\omega \in S_pM \setminus M$. Согласно данному определению если M — блокирующее множество для m, то $M \cap U_{n-1,\,0}^* = \varnothing$. Кроме того, каждая маска может иметь только конечное число блокирующих множеств.

Предложение 3. *Если одна из масок m, $\widetilde{m}$, m^* имеет блокирующее множество, то системы $\{\varphi(\,\cdot\ominus h) \mid h \in H\}$, $\{\widetilde{\varphi}(\,\cdot\ominus h) \mid h \in H\}$ не являются биортонормированными в $L^2(G)$.*

Это предложение доказывается с помощью теоремы B (случай $m = \widetilde{m}$ подробно изложен в [10]).

Пусть E — компактное множество в G^*. Множество E называется *конгруэнтным U^* по модулю $H^\perp$*, если $\mu^*(E) = 1$ и для любого $\omega \in E$ существует элемент $h^* \in H^\perp$ такой, что $\omega \oplus h^* \in U^*$. Имеет место следующий аналог хорошо известного критерия Коэна (см., например, [13, теорема 2.5.6]).

Теорема 1. *Пусть φ, $\widetilde{\varphi}$ — масштабирующие функции такие, что их маски m, $\widetilde{m}$ удовлетворяют условию* (2.2), *и пусть $\widehat{\varphi}(\theta) = \widehat{\widetilde{\varphi}}(\theta) = 1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(a) *системы $\{\varphi(\,\cdot\ominus h) \mid h \in H\}$, $\{\widetilde{\varphi}(\,\cdot\ominus h) \mid h \in H\}$ являются биортонормированными в $L^2(G)$*;

(б) *существует множество E, конгруэнтное U^* по модулю $H^\perp$, содержащее окрестность нулевого элемента группы G^* и такое, что*

$$\inf_{j\in\mathbb{N}}\inf_{\omega\in E}|m(B^{-j}\omega)|>0,\qquad \inf_{j\in\mathbb{N}}\inf_{\omega\in E}|\widetilde{m}(B^{-j}\omega)|>0. \tag{2.4}$$

Для случая $\varphi=\widetilde{\varphi}$ эта теорема доказана в [10]. При построении биортогональных всплесковых систем одним из основных является вопрос о принадлежности функций φ, $\widetilde{\varphi}$ классу L^2. В некоторых случаях ответить на этот вопрос удается с помощью совместного спектрального радиуса некоторых специальных линейных операторов, определяемых по соответствующим масштабирующим уравнениям (см., например, теорему A.6.5 в [13]).

Пусть $r=p^{n-1}$. Напомним, что совместный спектральный радиус комплексных матриц $A_0,A_1,\dots,A_{p-1}$ размера $r\times r$ определяется по формуле

$$\widehat{\rho}(A_0,A_1,\dots,A_{p-1}):=\lim_{k\to\infty}\max\Big\{\|A_{d_1}A_{d_2}\dots A_{d_k}\|^{1/k}:\ d_j\in\{0,1,\dots,p-1\},\ 1\le j\le k\Big\},$$

где $\|\cdot\|$ — произвольная норма в $\mathbb{C}^{r\times r}$. В случае $A_0=A_1=\dots=A_{p-1}$ величина $\widehat{\rho}(A_0,A_1,\dots$ $\dots,A_{p-1})$ совпадает со спектральным радиусом $\rho(A_0)$. Совместный спектральный радиус конечномерных линейных операторов L_0, $L_1,\dots,L_{p-1}$ определяется как совместный спектральный радиус их матриц в произвольном фиксированном базисе соответствующего линейного пространства.

Для данного масштабирующего уравнения (1.1) положим $c_\alpha=pa_\alpha$ и зададим матрицы $T_0,T_1,\dots,T_{p-1}$ размера $r\times r$ по формулам

$$(T_0)_{i,j}=c_{(pi-p)\ominus_p(j-1)},\quad (T_1)_{i,j}=c_{(pi-p+1)\ominus_p(j-1)},\quad \dots,\quad (T_{p-1})_{i,j}=c_{(pi-1)\ominus_p(j-1)},$$

где $i,j\in\{1,2,\dots,r\}$. Определим подпространство

$$V:=\big\{u=(u_1,\dots,u_r)^{\mathrm{t}}\mid u_1+\dots+u_r=0\big\}$$

и обозначим через $L_0,L_1,\dots,L_{p-1}$ сужения на подпространство V линейных операторов, заданных на всем пространстве $\mathbb{C}^r$ соответственно матрицами $T_0,T_1,\dots,T_{p-1}$.

Предложение 4. *Пусть маска m масштабирующего уравнения* (1.1) *удовлетворяет условиям*

$$m(\theta)=1,\qquad m(\delta_1)=m(\delta_2)=\dots=m(\delta_{p-1})=0,$$

и пусть $\widehat{\rho}\,[m]:=\widehat{\rho}(L_0,L_1,\dots,L_{p-1})<1$. Тогда функция φ, заданная по формуле (1.8), *удовлетворяет уравнению* (1.1) *и непрерывна на G.*

Это предложение доказывается аналогично соответствующим результатам из § 2 и § 4 работы [8]; при этом оказывается, что ряд в (1.8) сходится равномерно на G (см. также § 5 в [9]). Легко видеть, что при условиях предложения 4 функция φ имеет компактный носитель и принадлежит пространству $L^2(G)$. При этом

$$\sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1}a_{p\alpha}=\sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1}a_{p\alpha+1}=\dots=\sum_{\alpha=0}^{p^{n-1}-1}a_{p\alpha+p-1}=\frac{1}{p}.$$

В приведенных ниже графических иллюстрациях заданные на $[0,+\infty)$ функции Φ, $\widetilde{\Phi}$ связаны с масштабирующими функциями φ, $\widetilde{\varphi}$ равенствами $\varphi(x)=\Phi[\lambda(x)]$, $\widetilde{\varphi}(x)=\widetilde{\Phi}[\lambda(x)]$ для

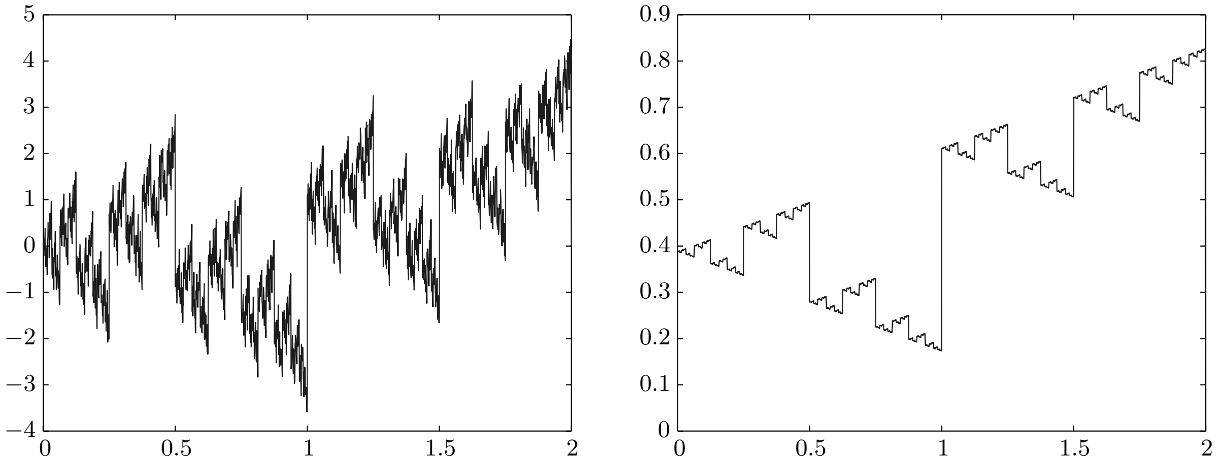

Рис. 1. Функции Φ (слева) и $\widetilde{\Phi}$ (справа) из примера 1

почти всех $x \in G$ (очевидно, определенное в разд. 1 отображение $\lambda\colon G \to [0, +\infty)$ обратимо почти всюду). Отметим также, что в примерах 1–3 разложения вида (1.8) выводятся из формул

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\omega), \qquad \widehat{\widetilde{\varphi}}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \widetilde{m}(B^{-j}\omega) \tag{2.5}$$

с помощью преобразования Фурье.

Пример 1. Пусть $p = 2$, $n = \widetilde{n} = 2$ и маски масштабирующих функций φ, $\widetilde{\varphi}$ имеют вид

$$m(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in U^*_{2,0}, \\ a, & \omega \in U^*_{2,1}, \\ 0, & \omega \in U^*_{2,2}, \\ b, & \omega \in U^*_{2,3}, \end{cases} \qquad \widetilde{m}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in U^*_{2,0}, \\ \widetilde{a}, & \omega \in U^*_{2,1}, \\ 0, & \omega \in U^*_{2,2}, \\ \widetilde{b}, & \omega \in U^*_{2,3}, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $a\overline{\widetilde{a}} + b\overline{\widetilde{b}} = 1$. Если $a = 0$ или $\widetilde{a} = 0$, то класс $U^*_{1,1}$ является блокирующим множеством для m или $\widetilde{m}$, а в остальных случаях блокирующих множеств для масок m, $\widetilde{m}$, m^* не существует. Предположим дополнительно, что $|b| < 1$ и $|\widetilde{b}| < 1$. Тогда $a\widetilde{a} \neq 0$, блокирующие множества отсутствуют и условие (2.4) выполнено для $E = U^*$. Кроме того, как в ортогональном случае [4], имеет место разложение

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\,\mathbf{1}_U(A^{-1}x)\left(1 + a\sum_{j=0}^{\infty} b^j W_{2^{j+1}-1}(A^{-1}x)\right)$$

и аналогичное разложение верно для $\widetilde{\varphi}$, причем обе функции φ, $\widetilde{\varphi}$ непрерывны на G. Действительно, указанные разложения для φ, $\widetilde{\varphi}$ получаются непосредственно из (2.5) и (2.6), а из примера 4.3 в [8] и замечания 3 в [9] видно, что $\widehat{\rho}[m] = |b|$, $\widehat{\rho}[\widetilde{m}] = |\widetilde{b}|$; следовательно, можно применить предложение 4. Таким образом, если $a\overline{\widetilde{a}} + b\overline{\widetilde{b}} = 1$, $|b| < 1$, $|\widetilde{b}| < 1$, то H-сдвиги масштабирующих функций φ, $\widetilde{\varphi}$ образуют биортонормированную систему в $L^2(G)$. Графики функций Φ и $\widetilde{\Phi}$ для значений

$$a = -1.835358, \qquad b = -0.792570, \qquad \widetilde{a} = -0.332874, \qquad \widetilde{b} = -0.490884$$

изображены на рис. 1.

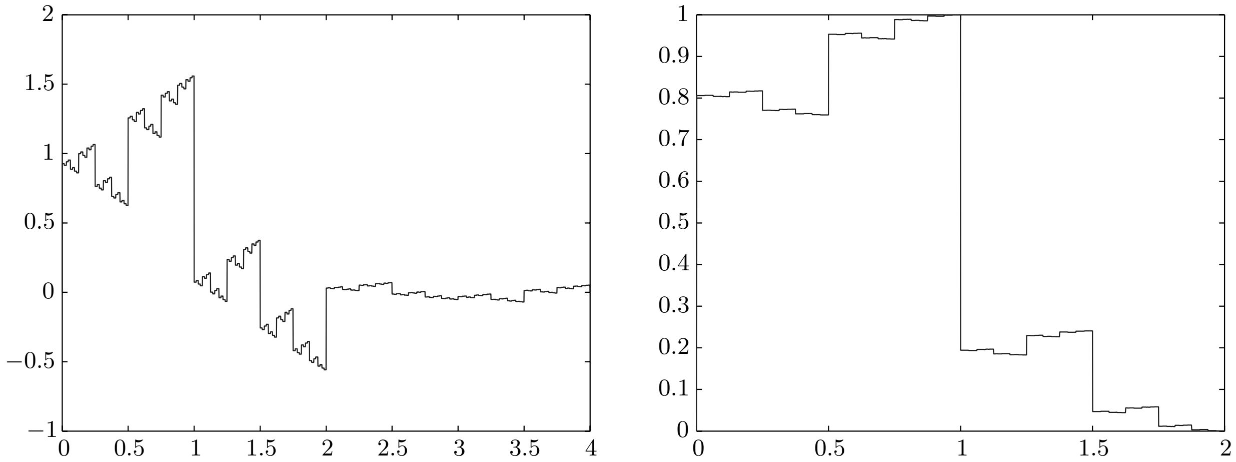

Рис. 2. Функции Φ (слева) и $\widetilde{\Phi}$ (справа) из примера 2

Пример 2. Пусть $p = 2$, $n = 3$, $\widetilde{n} = 2$, маска $\widetilde{m}$ такая же, как (2.6), а маска m задана равенствами

$$m(\omega) = 1 \quad \text{для} \quad \omega \in U^*_{3,0}, \qquad m(\omega) = 1 \quad \text{для} \quad \omega \in U^*_{3,1},$$

$$m(\omega) = b \quad \text{для} \quad \omega \in U^*_{3,2}, \qquad m(\omega) = c \quad \text{для} \quad \omega \in U^*_{3,3},$$

$$m(\omega) = 0 \quad \text{для} \quad \omega \in U^*_{3,4}, \qquad m(\omega) = 0 \quad \text{для} \quad \omega \in U^*_{3,5},$$

$$m(\omega) = \beta \quad \text{для} \quad \omega \in U^*_{3,6}, \qquad m(\omega) = \gamma \quad \text{для} \quad \omega \in U^*_{3,7}.$$

Класс $U^*_{1,1}$ является блокирующим множеством для m, $\widetilde{m}$, m^* соответственно в следующих случаях: 1) $b = c = 0$, 2) $\widetilde{a} = 0$, 3) $b\widetilde{a} = c\widetilde{a} = 0$. Кроме того, класс $U^*_{2,3}$ является блокирующим множеством для m и m^* при $c = 0$ и $c\widetilde{a} = 0$ соответственно. Других блокирующих множеств для m, $\widetilde{m}$, m^* не существует. Отметим, что в случае $\widetilde{a} = 0$, $bc \neq 0$ класс $U^*_{2,3}$ является блокирующим множеством для m^* и не является блокирующим множеством для m, $\widetilde{m}$. В соответствии с (2.3) предположим, что

$$b\overline{\widetilde{a}} + \beta\overline{\widetilde{b}} = c\overline{\widetilde{a}} + \gamma\overline{\widetilde{b}} = 1$$

(в частности, при $b = 0$, $c = 1$ имеем $\beta = 1/\overline{\widetilde{b}}$, $\gamma = (1 - \widetilde{a})/\overline{\widetilde{b}}\,$). Блокирующие множества для m, $\widetilde{m}$, m^* существуют, только если $\widetilde{a} = 0$ или $c = 0$. В случае $c\widetilde{a} \neq 0$ условие (2.4) выполнено для $E = U^*_{2,0} \cup U^*_{3,3} \cup U^*_{3,6}$. Согласно примерам 4.3 и 4.4 из [8] имеем $\widehat{\rho}[m] = |\gamma|$ и $\widehat{\rho}[\widetilde{m}] = |\widetilde{b}|$. Таким образом, если $c\widetilde{a} \neq 0$, $|\gamma| < 1$ и $|\widetilde{b}| < 1$, то H-сдвиги масштабирующих функций φ, $\widetilde{\varphi}$ составляют биортонормированную систему в $L^2(G)$. Графики функций Φ и $\widetilde{\Phi}$ для значений

$$b = 1.201260, \qquad c = 1.166263, \qquad \beta = -0.367477, \qquad \gamma = -0.477955,$$

$$\widetilde{a} = 0.758916, \qquad \widetilde{b} = -0.240408$$

приведены на рис. 2.

Пример 3. Пусть $p = 3$, $n = \widetilde{n} = 2$, а маски m, $\widetilde{m}$ равны 1 на $U^*_{2,0}$, равны 0 на $U^*_{2,3} \cup U^*_{2,6}$, а на остальной части подгруппы U^* заданы равенствами

$$m(\omega) = a \ \text{ и } \ \widetilde{m}(\omega) = \widetilde{a} \quad \text{для} \quad \omega \in U^*_{2,1}, \qquad m(\omega) = \alpha \ \text{ и } \ \widetilde{m}(\omega) = \widetilde{\alpha} \quad \text{для} \quad \omega \in U^*_{2,2},$$

$$m(\omega) = b \ \text{ и } \ \widetilde{m}(\omega) = \widetilde{b} \quad \text{для} \quad \omega \in U^*_{2,4}, \qquad m(\omega) = \beta \ \text{ и } \ \widetilde{m}(\omega) = \widetilde{\beta} \quad \text{для} \quad \omega \in U^*_{2,5},$$

$$m(\omega) = c \ \text{ и } \ \widetilde{m}(\omega) = \widetilde{c} \quad \text{для} \quad \omega \in U^*_{2,7}, \qquad m(\omega) = \gamma \ \text{ и } \ \widetilde{m}(\omega) = \widetilde{\gamma} \quad \text{для} \quad \omega \in U^*_{2,8},$$

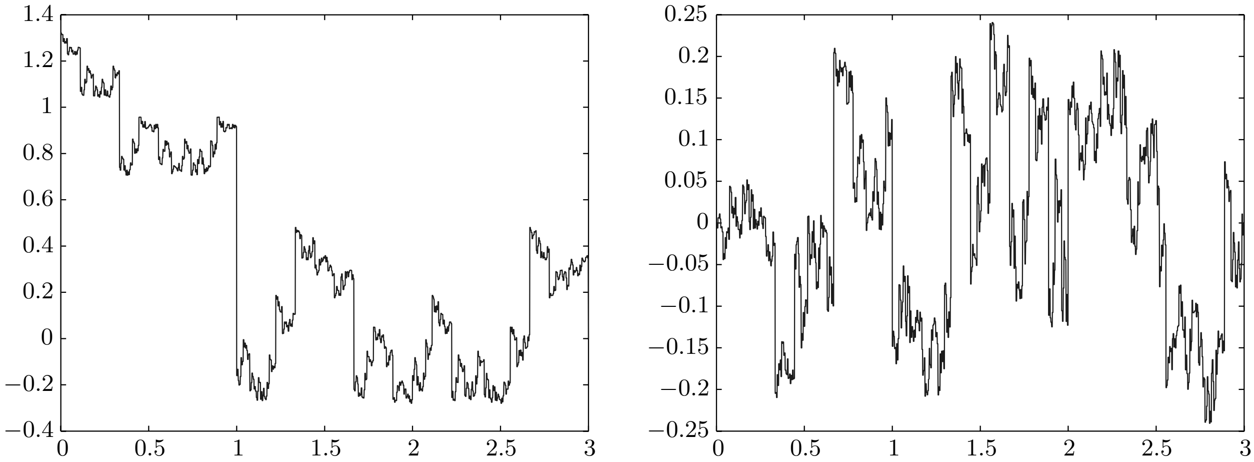

Рис. 3. Функции $\operatorname{Re}\Phi$ (слева) и $\operatorname{Im}\Phi$ (справа) из примера 3

где параметры удовлетворяют условию

$$a\overline{\overline{a}} + b\overline{\overline{b}} + c\overline{\overline{c}} = \alpha\overline{\overline{\alpha}} + \beta\overline{\overline{\beta}} + \gamma\overline{\overline{\gamma}} = 1.$$

В случаях $a\overline{\overline{a}} = \alpha\overline{\overline{\alpha}} = 0$, $a\overline{\overline{a}} = c\overline{\overline{c}} = 0$, $\alpha\overline{\overline{\alpha}} = \beta\overline{\overline{\beta}} = 0$ блокирующими множествами для маски m^* соответственно являются $U^*_{1,1} \cup U^*_{1,2}$, $U^*_{1,1}$, $U^*_{1,2}$. Условие (2.4) выполняется в следующих трех случаях:

1) $a\widetilde{a} \ne 0$, $\alpha\widetilde{\alpha} \ne 0$ и $E = U^*$;
2) $a\widetilde{a} \ne 0$, $\beta\widetilde{\beta} \ne 0$ и $E = U^*_{1,0} \cup U^*_{1,1} \cup U^*_{1,5}$;
3) $c\widetilde{c} \ne 0$, $\alpha\widetilde{\alpha} \ne 0$ и $E = U^*_{1,0} \cup U^*_{1,2} \cup U^*_{1,7}$.

Таким образом, если $\widehat{\rho}\,[m] < 1$ и $\widehat{\rho}\,[\widetilde{m}] < 1$ (это условие при конкретных числовых значениях параметров проверяется численно), то в указанных трех случаях H-сдвиги масштабирующих функций φ, $\widetilde{\varphi}$ составляют биортонормированную систему в $L^2(G)$. На рис. 3 и 4 изображены действительные и мнимые части функций Φ и $\widetilde{\Phi}$ для следующих значений параметров:

$$a = 0.9,\quad b = -0.295272,\quad c = 0.403503,\quad \alpha = 0.9,\quad \beta = 0.478760,\quad \gamma = 0.144181,$$

$$\widetilde{a} = 0.9,\quad \widetilde{b} = 0.037839,\quad \widetilde{c} = 0.498566,\quad \widetilde{\alpha} = 0.9,\quad \widetilde{\beta} = 0.270151,\quad \widetilde{\gamma} = 0.420735.$$

Отметим, что для указанных значений параметров имеют место оценки $\widehat{\rho}\,[m] < 0.57$ и $\widehat{\rho}\,[\widetilde{m}] < 0.65$.

Определение 5. Пусть $\{V_j\}$, $\{\widetilde{V}_j\}$ — два КМА в $L^2(G)$. Будем говорить, что функции $\psi^{(\nu)} \in V_1$, $\widetilde{\psi}^{(\nu)} \in \widetilde{V}_1$, $\nu = 1, \dots, p-1$, образуют *биортогональный набор всплесков* относительно пары $\{V_j\}$, $\{\widetilde{V}_j\}$, если $\psi^{(\nu)} \perp \widetilde{V}_0$, $\widetilde{\psi}^{(\nu)} \perp V_0$ для всех $\nu = 1, \dots, p-1$ и

$$\bigl(\psi^{(\nu)}(\,\cdot \oplus h_{[\alpha]}), \widetilde{\psi}^{(\varkappa)}(\,\cdot \oplus h_{[\beta]})\bigr) = \delta_{\nu,\varkappa}\delta_{\alpha,\beta}, \qquad \nu, \varkappa \in \{1, \dots, p-1\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+.$$

Как обычно, через $\mathcal{M}^*$ обозначается матрица, сопряженная к матрице $\mathcal{M}$. Единичная матрица порядка p обозначается E_p.

Теорема 2. *Пусть КМА $\{V_j\}$, $\{\widetilde{V}_j\}$ соответственно порождены масштабирующими функциями φ, $\widetilde{\varphi}$ с масками $m = m_0$, $\widetilde{m} = \widetilde{m}_0$ и системы $\{\varphi(\,\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$, $\{\widetilde{\varphi}(\,\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ являются биортонормированными. Если матрицы*

$$\mathcal{M} = \{m_\nu(\omega + \delta_k)\}_{\nu,k=0}^{p-1}, \qquad \widetilde{\mathcal{M}} = \{\widetilde{m}_\nu(\omega + \delta_k)\}_{\nu,k=0}^{p-1}, \tag{2.7}$$

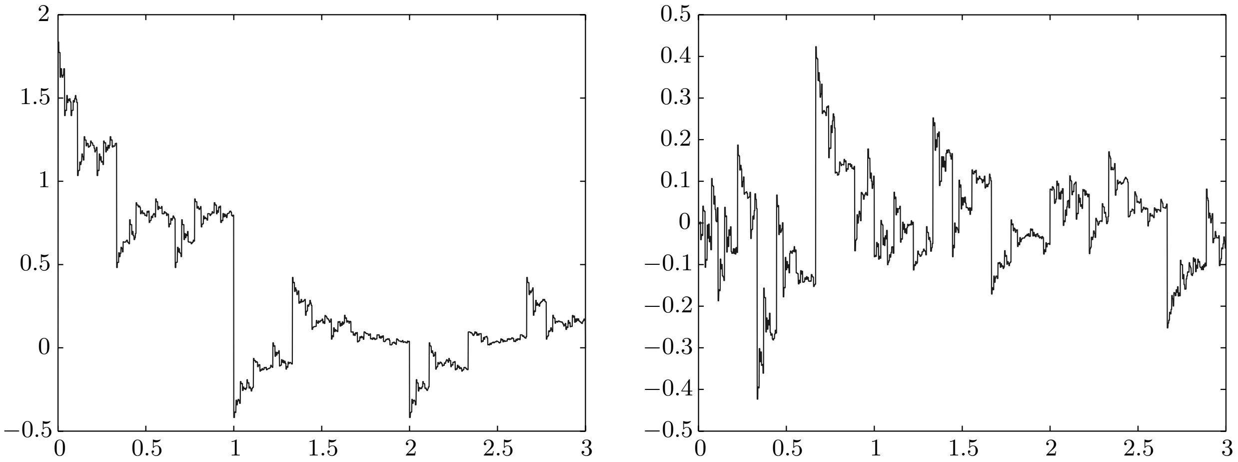

Рис. 4. Функции $\mathrm{Re}\,\widetilde\Phi$ (слева) и $\mathrm{Im}\,\widetilde\Phi$ (справа) из примера 3

где $m_\nu, \widetilde m_\nu \in L^2(U^*)$, *для почти всех* $\omega \in U^*$ *удовлетворяют условию*

$$\mathcal{M}\widetilde{\mathcal{M}}^* = E_p, \tag{2.8}$$

то функции $\psi^{(\nu)}$, $\widetilde\psi^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, p-1$, *определенные равенствами*

$$\widehat{\psi^{(\nu)}}(\omega) = m_\nu(B^{-1}\omega)\widehat\varphi(B^{-1}\omega), \qquad \widehat{\widetilde\psi^{(\nu)}}(\omega) = \widetilde m_\nu(B^{-1}\omega)\widehat{\widetilde\varphi}(B^{-1}\omega), \tag{2.9}$$

образуют биортогональный набор всплесков относительно пары $\{V_j\}$, $\{\widetilde V_j\}$.

Аналоги теоремы 2 для пространств $L^2(\mathbb{R}^d)$ и $L^2(\mathbb{R}_+)$ содержатся в [13, гл. 2] и [17]. При $p = 2$ можно выбрать

$$m_1(\omega) = -w_1(\omega)\overline{\widetilde m_0(\omega \oplus \delta_1)}, \qquad \widetilde m_1(\omega) = -w_1(\omega)\overline{m_0(\omega \oplus \delta_1)}. \tag{2.10}$$

Выполняя обратные преобразования Фурье и полагая $\psi = \psi^{(1)}$, $\widetilde\psi = \widetilde\psi^{(1)}$, из формул (2.1), (2.9) и (2.10) получим

$$\psi(x) = 2\sum_{\alpha=0}^{2^n-1} (-1)^\alpha\, \overline{\widetilde a}_{\alpha\oplus 1}\varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}), \qquad \widetilde\psi(x) = 2\sum_{\alpha=0}^{2^{\widetilde n}-1} (-1)^\alpha\, \overline{a}_{\alpha\oplus 1}\widetilde\varphi(Ax \ominus h_{[\alpha]}).$$

Согласно (2.1) для полиномов $m_0 = m$, $\widetilde m_0 = \widetilde m$ справедливы равенства

$$m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{p-1} \overline{W_k^*(\omega)} A_{0k}(\overline{W_p^*(\omega)}), \qquad \widetilde m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{p-1} \overline{W_k^*(\omega)} \widetilde A_{0k}(\overline{W_p^*(\omega)}),$$

где

$$A_{0k}(z) = \sum_{l=0}^{p^{n-1}-1} a_{k+pl} z^l, \qquad \widetilde A_{0k}(z) = \sum_{l=0}^{p^{\widetilde n-1}-1} \widetilde a_{k+pl} z^l, \qquad 0 \le k \le p-1.$$

Пусть $\mathbb{T}$ — единичная окружность на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Коэффициенты a_α, $\widetilde a_\alpha$ в (2.1) выберем так, чтобы выполнялись условия

$$p\sum_{k=0}^{p-1} A_{0k}(z)\overline{\widetilde A_{0k}(z)} = 1, \qquad z \in \mathbb{T}, \tag{2.11}$$

и

$$\sum_{k=0}^{p-1} A_{0k}(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \widetilde A_{0k}(1) = 1 \tag{2.12}$$

(легко видеть, что тогда $m_0(\theta)=\widetilde{m}_0(\theta)=1$). Предположим, что нам удалось найти алгебраические полиномы $A_{\nu k}(z)$, $\widetilde{A}_{\nu k}(z)$, $1\le\nu,k\le p-1$, такие, что

$$p\sum_{k=0}^{p-1}A_{\nu k}(z)\overline{\widetilde{A}_{\varkappa k}(z)}=\delta_{\nu,\varkappa},\qquad 1\le\nu,\varkappa\le p-1,\quad z\in\mathbb{T},\tag{2.13}$$

и

$$\sum_{k=0}^{p-1}A_{\nu k}(1)=\sum_{k=0}^{p-1}\widetilde{A}_{\nu k}(1)=0,\qquad 1\le\nu\le p-1.\tag{2.14}$$

Положим тогда

$$m_\nu(\omega)=\sum_{k=0}^{p-1}\overline{W_k^*(\omega)}A_{\nu k}(\overline{W_p^*(\omega)}),\qquad \widetilde{m}_\nu(\omega)=\sum_{k=0}^{p-1}\overline{W_k^*(\omega)}\widetilde{A}_{\nu k}(\overline{W_p^*(\omega)}),\qquad 1\le\nu\le p-1,$$

и образуем матрицы

$$\mathcal{M}=\{m_\nu(\omega\oplus\delta_k)\}_{\nu,k=0}^{p-1},\qquad \widetilde{\mathcal{M}}=\{\widetilde{m}_\nu(\omega\oplus\delta_k)\}_{\nu,k=0}^{p-1},\qquad \mathcal{D}(\omega)=\{W_\nu^*(\omega\oplus\delta_k)\}_{\nu,k=0}^{p-1}.$$

Легко видеть, что

$$\mathcal{M}=A(\overline{W_p^*(\omega)})\mathcal{D}(\omega),\qquad \widetilde{\mathcal{M}}=\widetilde{A}(\overline{W_p^*(\omega)})\mathcal{D}(\omega),\tag{2.15}$$

где $A(z)=\{A_{\nu k}(z)\}_{\nu,k=0}^{p-1}$, $\widetilde{A}(z)=\{\widetilde{A}_{\nu k}(z)\}_{\nu,k=0}^{p-1}$. Поскольку матрица $p^{-1/2}\mathcal{D}(\omega)$ унитарна, из (2.15) имеем

$$\mathcal{M}\widetilde{\mathcal{M}}^*=pA(\overline{W_p^*(\omega)})\widetilde{A}^*(\overline{W_p^*(\omega)})\tag{2.16}$$

или, подробнее,

$$\sum_{k=0}^{p-1}m_\nu(\omega\oplus\delta_k)\overline{\widetilde{m}_\varkappa(\omega\oplus\delta_k)}=p\sum_{k=0}^{p-1}A_{\nu k}(\overline{W_p^*(\omega)})\overline{\widetilde{A}_{\varkappa k}(\overline{W_p^*(\omega)})},\qquad 1\le\nu,\varkappa\le p-1.$$

Из формул (2.13), (2.14) и (2.16) видно, что для матриц (2.15) условия (2.8) выполнены; кроме того, $m_\nu(\theta)=0$, $\widetilde{m}_\nu(\theta)=0$ для $\nu=1,\dots,p-1$.

Пример 4. Пусть $p=3$, $n=\widetilde{n}=2$. Коэффициенты масок $m=m_0$, $\widetilde{m}=\widetilde{m}_0$ определим с помощью формул (1.5) по параметрам $a,\alpha,\dots,\overline{\widetilde{\gamma}}$ таким образом, что системы $\{\varphi(\,\cdot\ominus h)\mid h\in H\}$, $\{\widetilde{\varphi}(\,\cdot\ominus h)\mid h\in H\}$ являются биортонормированными в $L^2(G)$ (см. пример 3). Напомним, что

$$a\overline{\widetilde{a}}+b\overline{\widetilde{b}}+c\overline{\widetilde{c}}=\alpha\overline{\widetilde{\alpha}}+\beta\overline{\widetilde{\beta}}+\gamma\overline{\widetilde{\gamma}}=1.\tag{2.17}$$

Поскольку $b_0=\widetilde{b}_0=1$, то из (1.7) и (2.17) имеем

$$\sum_{\alpha=0}^{8}a_\alpha\overline{\widetilde{a}_\alpha}=\frac{1}{3}.$$

Кроме того, в рассматриваемом случае

$$A_{00}(z)=a_0+a_3z+a_6z^2,\qquad A_{01}(z)=a_1+a_4z+a_7z^2,\qquad A_{02}(z)=a_2+a_5z+a_8z^2,$$

$$\widetilde{A}_{00}(z)=\widetilde{a}_0+\widetilde{a}_3z+\widetilde{a}_6z^2,\qquad \widetilde{A}_{01}(z)=\widetilde{a}_1+\widetilde{a}_4z+\widetilde{a}_7z^2,\qquad \widetilde{A}_{02}(z)=\widetilde{a}_2+\widetilde{a}_5z+\widetilde{a}_8z^2.$$

Следовательно, для всех $z \in \mathbb{T}$

$$\sum_{k=0}^{3} A_{0k}(z)\overline{\widetilde{A}_{0k}(z)} = \frac{1}{3} + (a_0\overline{\widetilde{a}}_3 + a_1\overline{\widetilde{a}}_4 + a_2\overline{\widetilde{a}}_5)\overline{z} + (\overline{\widetilde{a}}_0 a_3 + \overline{\widetilde{a}}_1 a_4 + \overline{\widetilde{a}}_2 a_5)z + (a_0\overline{\widetilde{a}}_6 + a_1\overline{\widetilde{a}}_7 + a_2\overline{\widetilde{a}}_8)\overline{z}^2 + \\ + (\overline{\widetilde{a}}_0 a_6 + \overline{\widetilde{a}}_1 a_7 + \overline{\widetilde{a}}_2 a_8)z^2 + (a_3\overline{\widetilde{a}}_6 + a_4\overline{\widetilde{a}}_7 + a_5\overline{\widetilde{a}}_8)z\overline{z}^2 + (\overline{\widetilde{a}}_3 a_6 + \overline{\widetilde{a}}_4 a_7 + \overline{\widetilde{a}}_5 a_8)\overline{z}z^2.$$

Отсюда получаем, что условие (2.11) выполняется в том и только том случае, когда

$$a + \alpha + (\overline{\widetilde{\alpha}} + d)\varepsilon_3 + (\overline{\widetilde{a}} + \widetilde{d})\varepsilon_3^2 = \overline{\widetilde{a}} + \overline{\widetilde{\alpha}} + (\alpha + \widetilde{d})\varepsilon_3 + (a + d)\varepsilon_3^2 = 0,$$

$$a + \alpha + (\overline{\widetilde{a}} + \widetilde{d})\varepsilon_3 + (\overline{\widetilde{\alpha}} + d)\varepsilon_3^2 = \overline{\widetilde{a}} + \overline{\widetilde{\alpha}} + (a + d)\varepsilon_3 + (\alpha + \widetilde{d})\varepsilon_3^2 = 0,$$

$$d + \widetilde{d} + (a + \overline{\widetilde{a}})\varepsilon_3 + (\alpha + \overline{\widetilde{\alpha}})\varepsilon_3^2 = 0,$$

где $d = a\overline{\widetilde{\alpha}} + b\overline{\widetilde{\beta}} + c\overline{\widetilde{\gamma}}$, $\widetilde{d} = \overline{\widetilde{a}}\alpha + \overline{\widetilde{b}}\beta + \overline{\widetilde{c}}\gamma$ (ср. с алгоритмами построения всплесков в [13, § 2.6; 18–20]).

Замечание 1. По аналогии с теоремой 2.7.5 из [13] можно сформулировать условия, при выполнении которых функции $\psi^{(\nu)}$, $\widetilde{\psi}^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, p-1$, определенные по формулам (2.9), порождают фреймы или базисы Рисса в $L^2(G)$. Например, достаточно предположить, что $\widehat{\rho}\,[m] = \widehat{\rho}\,[\widetilde{m}] = 0$; тогда для масштабирующих функций φ, $\widetilde{\varphi}$ в разложениях вида (1.8) имеется только конечное число ненулевых коэффициентов, а их преобразования Фурье $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\widetilde{\varphi}}$ имеют компактные носители (см. [10, предложение 2]). В этом случае при выполнении равенств (2.2), условий (2.8) и

$$m_\nu(\theta) = 0, \qquad \widetilde{m}_\nu(\theta) = 0, \qquad \nu = 1, \dots, p-1,$$

каждая из систем $\{\psi_{j,h}^{(\nu)}\}$, $\{\widetilde{\psi}_{j,h}^{(\nu)}\}$ является фреймом в $L^2(G)$. Если при этом системы $\{\varphi(\,\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$, $\{\widetilde{\varphi}(\,\cdot \ominus h) \mid h \in H\}$ являются биортонормированными, то функции $\psi^{(\nu)}$, $\widetilde{\psi}^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, p-1$, образуют биортогональный набор всплесков относительно пары $\{V_j\}$, $\{\widetilde{V}_j\}$ и каждая из систем $\{\psi_{j,h}^{(\nu)}\}$, $\{\widetilde{\psi}_{j,h}^{(\nu)}\}$ является базисом Рисса в $L^2(G)$.

Замечание 2. Приведенные в примерах 1 и 2 графические иллюстрации даны для значений параметров, максимизирующих пиковое отношение сигнал–шум при сжатии изображений Lena и Bridge по методике, изложенной в [21] применительно к ортогональным двоичным всплескам.

Автор благодарит А.Ю. Максимова и С.А. Строганова за написание компьютерных программ и построение графиков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. 2-е изд. М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
2. *Schipp F., Wade W.R., Simon P.* Walsh series: An introduction to dyadic harmonic analysis. New York: Adam Hilger, 1990.
3. *Голубов Б.И.* Элементы двоичного анализа. М.: МГУП, 2005.
4. *Lang W.C.* Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group // SIAM J. Math. Anal. 1996. V. 27. P. 305–312.
5. *Lang W.C.* Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group // Intern. J. Math. and Math. Sci. 1998. V. 21. P. 307–314.
6. *Lang W.C.* Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Houston J. Math. 1998. V. 24. P. 533–544.
7. *Farkov Yu.A.* Orthogonal p-wavelets on $\mathbb{R}_+$ // Wavelets and splines: Proc. Intern. Conf., July 3–8, 2003, St. Petersburg, Russia. St. Petersburg: St. Petersburg State Univ., 2005. P. 4–26.

8. *Фарков Ю.А.* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69, № 3. С. 193–220.
9. *Протасов В.Ю., Фарков Ю.А.* Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 10. С. 129–160.
10. *Фарков Ю.А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 6. С. 934–952.
11. *Benedetto J.J., Benedetto R.L.* A wavelet theory for local fields and related groups // J. Geom. Anal. 2004. V. 14. P. 423–456.
12. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001.
13. *Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.* Теория всплесков. М.: Физматлит, 2006.
14. *Козырев С.В.* Теория всплесков как p-адический спектральный анализ // Изв. РАН. Сер. мат. 2002. Т. 66, № 2. С. 149–158.
15. *Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M., Skopina M.* p-Adic refinable functions and MRA-based wavelets: E-print, 2007. arXiv: 0711.2820v1.
16. *Farkov Yu.A.* Multiresolution analysis and wavelets on Vilenkin groups // Facta Univ. Ser. Electron. and Energ. 2008. V. 21, N 3. P. 309–325.
17. *Фарков Ю.А.* Биортогональные диадические вейвлеты на $\mathbb{R}_+$ // УМН. 2007. Т. 62, № 6. С. 189–190.
18. *Farkov Yu.A.* On wavelets related to the Walsh series // J. Approx. Theory. 2008. doi:10.1016/j.jat.2008.10.003.
19. *Soardi P.M.* Biorthogonal M-channel compactly supported wavelets // Constr. Approx. 2000. V. 16. P. 283–311.
20. *Bratteli O., Jorgensen P.E.T.* Wavelet filters and infinite-dimensional unitary groups // Wavelet analysis and applications. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2002. P. 35–65. (AMS/IP Stud. Adv. Math.; V. 25).
21. *Максимов А.Ю., Строганов С.А.* О применении диадических вейвлетов для сжатия изображений // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 14-й Саратов. зимн. шк., посв. памяти акад. П.Л. Ульянова. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008. С. 108–109.