Е. А. Панасенко, Е. Л. Тонков, Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений, *Труды МИАН*, 2008, том 262, 202–221

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2008, т. 262, с. 202–221

УДК 517.911/517.93

Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений[1]

©2008 г. Е. А. Панасенко[2], Е. Л. Тонков[3]

Поступило в декабре 2007 г.

В терминах функций Ляпунова сформулированы условия, при которых заданное множество в расширенном фазовом пространстве нестационарного дифференциального включения обладает свойством положительной инвариантности, инвариантности, устойчивой или асимптотически устойчивой инвариантности. Получены также условия, при которых интегральная воронка дифференциального включения рекуррентна по времени. Рассмотрены примеры.

ВВЕДЕНИЕ

В этой работе изучаются условия, при которых заданное множество в расширенном фазовом пространстве нестационарного дифференциального включения обладает свойством инвариантности в том или ином смысле. Наличие инвариантного множества дифференциального включения позволяет рассматривать сужение включения на это множество и исследовать в нем различные экстремальные движения. Большой интерес, в частности, представляют так называемые асимптотические (или, по-другому, магистральные) движения. Говоря нестрого, магистральное движение дифференциального включения — это движение, определенное и ограниченное на числовой прямой $\mathbb{R}$, оптимальное в смысле заданного функционала (имеющего смысл среднего значения) и одновременно локально оптимальное (т.е. оптимальное на каждом отрезке времени) относительно сужения этого функционала на всякий рассматриваемый отрезок времени. При некоторых естественных предположениях магистральное движение оказывается рекуррентным, почти периодическим или даже периодическим движением, и тем самым появляется возможность построения алгоритма, позволяющего находить магистральное движение (или магистральный процесс соответствующей управляемой системы) с заданной степенью точности.

Мы пользуемся в этой работе не совсем традиционной записью дифференциального включения (точнее, семейства дифференциальных включений)

$$\dot{x} \in F(f^t\sigma, x), \qquad \sigma \in \Sigma, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Здесь Σ — полное метрическое пространство, f^t — поток на Σ (однопараметрическая группа преобразований Σ в себя, непрерывная по t, σ). Таким образом, включение (1) снабжается параметром σ, меняющимся в некотором метрическом пространстве Σ, и при этом пара (Σ, f^t) образует топологическую динамическую систему.

Такая запись дифференциального включения удобна по крайней мере по двум причинам. Во-первых, исследование всякого свойства нестационарного дифференциального включения $\dot{x} \in F(t, x)$, которое предполагается выполненным равномерно относительно начального мо-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 07-01-00305 и 06-01-00258).

[2]Тамбовский государственный университет, Тамбов, Россия.
E-mail: panlena_t@mail.ru

[3]Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия.
E-mail: eltonkov@udm.ru

мента времени (например, свойства равномерной относительно начального момента времени t_0 устойчивости положения равновесия $x = 0$), порождает так называемую динамическую систему сдвигов. Эта динамическая система при надлежащих обозначениях может быть записана в виде (Σ, f^t), что в свою очередь приводит к рассмотрению семейства дифференциальных включений вида (1).

Во-вторых, если динамическая система (Σ, f^t) снабжена структурой вероятностного пространства (а это означает, что на сигма-алгебре борелевских множеств пространства Σ задана вероятностная мера, инвариантная относительно потока f^t), то функция $t \to F(f^t\sigma, x)$ представляет стационарный в узком смысле случайный процесс и тем самым мы имеем дифференциальное включение со случайными параметрами. Следовательно, для таких включений появляется возможность (по крайней мере в эргодическом случае) исследовать свойства решений включения (1), которые имеют место с вероятностью единица.

В этой работе мы опираемся на обзорную статью В.И. Благодатских и А.Ф. Филиппова [1], которая, несмотря на давность, остается актуальной и в наши дни. Отметим также, что ряд утверждений статьи анонсирован в работах [2, 3].

1. СЕМЕЙСТВО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Пусть $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n со скалярным произведением $\langle x, y\rangle$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$; $O_r \doteq \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \le r\}$ — замкнутый шар радиуса r с центром в нуле, $O_r(x_0) \doteq x_0 + O_r$, $\varrho(x, M) \doteq \min_{y\in M} |x - y|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества M в $\mathbb{R}^n$. Если M — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{int} M$ — внутренность, $\operatorname{cl} M$ — замыкание, $\operatorname{fr} M$ — граница, а $\operatorname{co} M$ — замыкание выпуклой оболочки M.

Пространство непустых *компактных* подмножеств в $\mathbb{R}^n$ обозначим $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$. Определим в $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ метрику Хаусдорфа $\operatorname{dist}(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$, где $d(A, B)$ — *полуотклонение* множества A от множества B: $d(A, B) \doteq \max_{a\in A} \varrho(a, B)$. Пространство всех непустых *замкнутых* (не обязательно ограниченных) подмножеств в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать $\operatorname{cl}(\mathbb{R}^n)$.

Напомним, что функция $F\colon \mathbb{R}^n \to \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ называется *полунепрерывной сверху* в точке x_0, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что неравенство $d(F(x), F(x_0)) \le \varepsilon$ выполнено при всех $x \in O_\delta(x_0)$. Если F полунепрерывна сверху в каждой точке x_0 некоторого множества $G \subset \mathbb{R}^n$, то F *полунепрерывна сверху на множестве* G. Легко проверить, что если F полунепрерывна сверху, то функция $x \to \operatorname{co} F(x)$ также полунепрерывна сверху.

Пусть Σ — полное метрическое пространство с метрикой ρ_Σ. Введем в рассмотрение *топологическую динамическую систему* (Σ, f^t). Это означает [4, гл. 5; 5, ч. 2, гл. 1, § 1], что f^t — однопараметрическая группа преобразований фазового пространства Σ в себя, непрерывно зависящая от $(t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma$. Для заданной функции $F\colon \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(f^t\sigma, x) \tag{1.1}$$

с параметром σ (семейство дифференциальных включений). Напомним, что при каждом фиксированном σ *решением* включения (1.1) на интервале $J \subset \mathbb{R}$ называется всякая абсолютно непрерывная функция $\varphi\colon J \to \mathbb{R}^n$ такая, что включение $\dot{\varphi}(t) \in F(f^t\sigma, \varphi(t))$ выполнено при почти всех $t \in J$.

Будем далее предполагать, что выполнено следующее условие (условие Каратеодори).

Условие 1. При каждом $\sigma \in \Sigma$ функция $x \to F(\sigma, x)$ *полунепрерывна сверху* в каждой точке пространства $\mathbb{R}^n$; для всякой фиксированной точки $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ функция

$$t \to |F(f^t\sigma, x)| \doteq \max\bigl\{|y|\colon\ y \in F(f^t\sigma, x)\bigr\}$$

измерима, и для любого $r > 0$ найдется *измеримая и ограниченная в существенном на* $\mathbb{R}$ функция $t \to k_r(t)$ такая, что $|F(f^t\sigma, x)| \le k_r(t)$ для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times O_r$ и почти всех $t \in \mathbb{R}$.

Условие 1 не обеспечивает существование решения задачи Коши для включения (1.1), но [1, с. 213; 6, с. 66] обеспечивает при каждом $\sigma \in \Sigma$ существование локального решения задачи Коши для “овыпукленного” дифференциального включения

$$\dot{x} \in \operatorname{co} F(f^t\sigma, x), \qquad x(0) = x_0. \tag{1.2}$$

Условие 2. Для каждого $\sigma \in \Sigma$ и любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ всякое решение задачи (1.2) определено при всех $t \geq 0$.

При выполнении условий 1 и 2 динамической системе (Σ, f^t) и дифференциальному включению (1.1) сопутствует так называемая обобщенная динамическая система, построением которой мы займемся в следующем разделе. Обобщенная динамическая система сохраняет многие свойства классической динамической системы, и это обстоятельство позволит нам эффективно исследовать инвариантные множества включения (1.1).

2. ОБОБЩЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Наша ближайшая цель состоит в построении *обобщенной* динамической системы (Ω, g^t), которую можно рассматривать как расширение исходной динамической системы (Σ, f^t) и которая строится по овыпукленному дифференциальному включению

$$\dot{x} \in \operatorname{co} F(f^t\sigma, x). \tag{2.1}$$

Введем в рассмотрение пространство $\Omega \doteq \Sigma \times \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой $\rho_\Omega = \rho_\Sigma + \operatorname{dist}$ (тогда Ω — полное метрическое пространство) и каждой точке $\omega = (\sigma, X) \in \Omega$ и любому $t \geq 0$ поставим в соответствие сечение $S(t, \omega)$ интегральной воронки включения (2.1). Напомним, что $S(t, \omega)$ состоит из значений в момент времени t всех решений $\varphi(t, \sigma, x_0)$ задачи (1.2), когда x_0 пробегает все X. В предположении, что выполнены условия 1 и 2, функция $t \to S(t, \omega)$ определена при всех $t \geq 0$ и $S(t, \omega) \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ при каждом t (см., например, [1, с. 216]).

Далее одноточечные множества $\{x\}$ пространства $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ будем отождествлять с точками пространства $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, обозначать строчными буквами и без фигурных скобок. Такая договоренность позволяет писать $\omega = (\sigma, x) \in \Omega$ вместо $\omega = (\sigma, \{x\}) \in \Omega$, что упрощает запись и не приводит к разночтениям.

Для каждого $t \geq 0$ и всех $\omega \in \Omega$ обозначим $g^t\omega = (f^t\sigma, S(t, \omega))$. Тогда при любом $t \geq 0$ функция $\omega \to g^t\omega$ действует из Ω в Ω и $g^t\omega|_{t=0} = \omega$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2. *Тогда для каждого* $\omega \in \Omega$, *любого* $\tau \geq 0$ *и всех* $t \geq -\tau$ *определена функция* $t \to S(t, g^\tau\omega)$ *и* $S(t+\tau, \omega) = S(t, g^\tau\omega)$. *Если* $\varphi(t, \sigma, x_0)$ — *одно из решений задачи* (1.2), *то для всякого* $\tau \geq 0$ *найдется такое решение* $\varphi(t, f^\tau\sigma, \varphi(\tau, \sigma, x_0))$ *включения* $\dot{x} \in \operatorname{co} F(f^t(f^\tau\sigma), x)$, *что* $\varphi(t+\tau, \sigma, x_0) = \varphi(t, f^\tau\sigma, \varphi(\tau, \sigma, x_0))$ *при всех* $t \geq -\tau$.

Доказательство. Так как при $t \geq 0$ функция $t \to S(t, \omega)$ является интегральной воронкой включения (2.1), то при $t \geq -\tau$ функция $t \to S(t+\tau, \omega)$ существует и служит интегральной воронкой включения $\dot{x} \in \operatorname{co} F(f^t(f^\tau\sigma), x)$. В силу равенства $S(t+\tau, \omega)|_{t=0} = S(\tau, \omega)$ и единственности интегральной воронки $S(t+\tau, \omega) = S(t, g^\tau\omega)$.

Если $\omega = (\sigma, x_0)$ и $\varphi(t, \omega)$ — произвольное решение задачи (1.2), $t \geq 0$, то при любом $\tau \geq 0$ и всех $t \geq -\tau$ функция $\psi(t) \doteq \varphi(t+\tau, \omega)$ является решением включения $\dot{x} \in \operatorname{co} F(f^t(f^\tau\sigma), x)$. Так как $\psi(t)|_{t=0} = \varphi(\tau, \omega)$, то

$$\psi(t) = \psi(t, f^\tau\sigma, \varphi(\tau, \omega)) \in S(t, f^\tau\sigma, \varphi(\tau, \omega)).$$

Поэтому в $S(t, f^\tau\sigma, \varphi(\tau, \omega))$ найдется такое решение $\varphi(t, f^\tau\sigma, \varphi(\tau, \omega))$, что при всех $t \geq -\tau$ выполнено равенство $\varphi(t+\tau, \omega) = \varphi(t, f^\tau\sigma, \varphi(\tau, \omega))$. $\square$

Для любой пары точек $\omega = (\sigma, X)$, $\omega_0 = (\sigma_0, X_0) \in \Omega$ определим полуотклонение $d_\Omega(\omega, \omega_0)$ точки ω от точки ω_0 равенством $d_\Omega(\omega, \omega_0) \doteq \rho_\Sigma(\sigma, \sigma_0) + d(X, X_0)$. Формулируемая ниже лемма непосредственно вытекает из следствия работы [1, с. 217].

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2. *Тогда для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\vartheta > 0$ *и любой точки* $\omega_0 \in \Omega$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для всякой точки* $\omega \in \Omega$, *удовлетворяющей неравенству* $d_\Omega(\omega, \omega_0) \leq \delta$, *при всех* $t \in [0, \vartheta]$ *выполнено неравенство* $d_\Omega(g^t\omega, g^t\omega_0) \leq \varepsilon$.

Таким образом, в силу лемм 1 и 2 функция $\omega \to g^t\omega$ задает полупоток на Ω и полунепрерывна сверху равномерно относительно t на каждом отрезке $[0, \vartheta]$. Построенную таким образом пару (Ω, g^t) будем называть *обобщенной* динамической системой. Исследованиям различного рода обобщений классической динамической системы посвящено достаточно много работ. По своей сущности введенная здесь обобщенная динамическая система близка к полудинамической системе, рассмотренной в [7, 8]. Если в условии 1 требование полунепрерывности функции $x \to F(\sigma, x)$ заменить требованием локальной липшицевости, то (Ω, g^t) превращается в классическую полудинамическую систему ($t \geq 0$), а если добавить еще и условие неограниченной продолжаемости решений включения (2.1) влево, то (Ω, g^t) становится классической топологической динамической системой ($t \in \mathbb{R}$).

Для заданной функции $M\colon \Sigma \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$ будем говорить, что M *непрерывна в точке* σ_0, если для любого $r > 0$ такого, что $M_r(\sigma) \doteq M(\sigma) \cap O_r \neq \varnothing$, функция $\sigma \to M_r(\sigma)$ непрерывна в точке σ_0. Если $M(\sigma)$ непрерывна в каждой точке, то $M(\sigma)$ *непрерывна на множестве* Σ. Пусть функция $M\colon \Sigma \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$ непрерывна. Построим множества

$$\mathfrak{M} \doteq \bigl\{\omega = (\sigma, X) \in \Omega\colon\ X \subset M(\sigma)\bigr\}, \tag{2.2}$$

$\mathfrak{M}^r \doteq \{\omega \in \Omega\colon d(X, M(\sigma)) \leq r\}$ и $\mathfrak{N}^r \doteq \{\omega \in \mathfrak{M}^r\colon \omega \notin \mathfrak{M}\}$.

Определение 1. Напомним [4, гл. 5; 5, ч. 2, гл. 1, §1], что множество (2.2) называется *положительно инвариантным* (относительно g^t), если $g^t\omega \in \mathfrak{M}$ для каждого $\omega \in \mathfrak{M}$ и всех $t \geq 0$. Таким образом, положительная инвариантность $\mathfrak{M}$ означает положительную инвариантность, *равномерную относительно* σ: если $X(\sigma)$ — произвольный компакт в $M(\sigma)$, то вложение $S(t, \omega) \subset M(f^t\sigma)$, где $\omega = (\sigma, X(\sigma))$, имеет место при всех $\sigma \in \Sigma$ и $t \geq 0$.

Определение 2. Множество $\mathfrak{M}$ называется *устойчивым по Ляпунову* [4, гл. V], если оно положительно инвариантно и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого $\omega \in \mathfrak{M}^\delta$ при всех $t \geq 0$ имеет место включение $g^t\omega \in \mathfrak{M}^\varepsilon$. Если $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову и существует такое $r > 0$, что $\lim_{t\to\infty} d_\Omega(g^t\omega, \mathfrak{M}) = 0$ для любого $\omega \in \mathfrak{M}^r$, то $\mathfrak{M}$ называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову.*

В терминах включения (1.1) устойчивость по Ляпунову означает *равномерную* (относительно σ) устойчивость множества $M(\sigma)$: множество $M(\sigma)$ устойчиво по Ляпунову относительно включения (1.1), если оно положительно инвариантно относительно (1.1) и всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что из неравенства $d(X(\sigma), M(\sigma)) \leq \delta$, выполненного для всех σ, следует неравенство $d(S(t, \omega), M(f^t\sigma)) \leq \varepsilon$, выполненное для всех $t \geq 0$. Здесь $\omega = (\sigma, X(\sigma)) \in \Omega$. Аналогичным образом асимптотическая устойчивость множества $M(\sigma)$ относительно включения (1.1) означает *равномерную* асимптотическую устойчивость, т.е. устойчивость по Ляпунову и равенство $\lim_{t\to\infty} d(S(t, \omega), M(f^t\sigma)) = 0$, выполненное при всех $\omega \in \mathfrak{M}^r$.

3. ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА И ПРОИЗВОДНАЯ КЛАРКА

Пусть заданы $r > 0$ и непрерывная скалярная функция $\omega \to V(\omega)$, где $\omega = (\sigma, x) \in \mathfrak{M}^r$.

Определение 3. Будем говорить, что функция $\omega \to V(\omega)$ удовлетворяет *локальному условию Липшица*, если для каждого $\sigma \in \Sigma$ и любого $\vartheta > 0$ найдется такая константа ℓ, что для любой пары точек $(t_i, x_i) \in Q \doteq \bigl\{(t, x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\colon |t| \leq \vartheta,\ x \in M^r(f^t\sigma)\bigr\}$, $i = 1, 2$, выполнено неравенство $|V(f^{t_1}\sigma, x_1) - V(f^{t_2}\sigma, x_2)| \leq \ell(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|)$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2. *Если* $\omega = (\sigma, x) \in \mathfrak{M}^r$, $\varphi(t,\omega)$ *— одно из решений задачи* (1.2) *при* $x_0 = x$ *и задана локально липшицева функция* V, *то функция* $t \to v(t) \doteq V(g^t\omega)$, *где* $g^t\omega = (f^t\sigma, \varphi(t,\omega))$, *локально липшицева для всех таких* $t \geq 0$, *при которых* $g^t\omega \in \mathfrak{M}^r$.

Доказательство. Действительно, пусть $\omega \in \mathfrak{M}^r$, $\vartheta > 0$ и $g^t\omega \in \mathfrak{M}^r$ при $t \in [0,\vartheta]$. Тогда при всех таких $t, t+\tau \in [-\vartheta, \vartheta]$, что $g^t\omega \in Q$, имеем

$$|v(t+\tau) - v(t)| = |V(g^{t+\tau}\omega) - V(g^t\omega)| \leq \ell\big(|\tau| + |\varphi(t+\vartheta,\omega) - \varphi(t,\omega)|\big) \leq$$

$$\leq \ell\left(|\tau| + \left|\int\limits_t^{t+\tau} \dot\varphi(s,\omega)\,ds\right|\right) \leq \ell\left(|\tau| + \left|\int\limits_t^{t+\tau} |\operatorname{co} F(g^s\omega)|\,ds\right|\right) \leq \ell(|\tau| + k|\tau|) = \ell(1+k)|\tau|,$$

что и доказывает лемму. $\square$

Определение 4. Функция $V\colon \mathfrak{M}^r \to \mathbb{R}$ называется *функцией Ляпунова* (относительно $\mathfrak{M}$), если $V(\omega) = 0$ для всех $\omega \in \operatorname{fr}\mathfrak{M}$ и $V(\omega) > 0$ для всех $\omega \in \mathfrak{N}^r$. Функция Ляпунова $V\colon \mathfrak{M}^r \to \mathbb{R}$ называется *определенно положительной* (относительно $\mathfrak{M}$), если для любого $\varepsilon \in (0,r)$ найдется такое $\delta > 0$, что $V(\omega) \geq \delta$ при всех $\omega \in \operatorname{fr}\mathfrak{M}^\varepsilon$.

Определение 5. Для локально липшицевой функции $V\colon \mathfrak{M}^r \to \mathbb{R}$ *обобщенной производной* функции $\omega \to V(\omega)$ в точке ω по направлению вектора $q = (\tau, h) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ (производной Кларка [9, гл. 2, § 2.1]) называется следующий верхний предел:

$$V^{\mathrm{o}}(\omega; q) \doteq \limsup_{(\vartheta,y,\delta)\to(0,x,+0)} \frac{V(f^{\delta\tau}(f^\vartheta\sigma), y+\delta h) - V(f^\vartheta\sigma, y)}{\delta}. \tag{3.1}$$

Если $q_0 = (1,h)$, то выражение $V^{\mathrm{o}}_F(\omega) \doteq \max_{h\in F(\omega)} V^{\mathrm{o}}(\omega; q_0)$ будем называть *производной функции* V *в силу включения* (1.1).

Лемма 4. *Имеют место равенства* $V^{\mathrm{o}}_F(\omega) = V^{\mathrm{o}}_{\operatorname{co}F}(\omega) \doteq \max_{h\in\operatorname{co}F(\omega)} V^{\mathrm{o}}(\omega; q_0)$.

Доказательство. Во-первых, отметим, что функция $q = (\tau,h) \to V^{\mathrm{o}}(\omega; q)$ локально липшицева по q, субаддитивна и положительно однородна (см. [9, гл. 2, § 2.1]), т.е. если $\lambda \geq 0$, то $V^{\mathrm{o}}(\omega, \lambda q) = \lambda V^{\mathrm{o}}(\omega, q)$ и $V^{\mathrm{o}}(\omega, q+p) \leq V^{\mathrm{o}}(\omega, q) + V^{\mathrm{o}}(\omega, p)$.

Во-вторых, для всякой положительно однородной и субаддитивной функции $q \to w(q)$, где $q \in \mathbb{R}^r$, и любого компактного множества $Q \subset \mathbb{R}^r$ имеет место равенство

$$\max_{q\in Q} w(q) = \max_{q\in\operatorname{co}Q} w(q). \tag{3.2}$$

Действительно, пусть $\widehat{q}$ — точка, в которой левая часть равенства (3.2) достигает своего максимума, и пусть $w(\widehat{q}) < \max_{q\in\operatorname{co}Q} w(q)$. Тогда найдется точка $q \in \operatorname{co}Q$ такая, что $w(\widehat{q}) < w(q)$. Всякая точка выпуклой оболочки множества Q представима в виде выпуклой комбинации не более чем $r+1$ точек множества Q: $q = \lambda_1 q_1 + \ldots + \lambda_{r+1}q_{r+1}$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{r+1}\lambda_i = 1$, $q_i \in Q$ (теорема Каратеодори). Поэтому

$$\max_{q\in Q} w(q) = w(\widehat{q}) < \lambda_1 w(q_1) + \ldots + \lambda_{r+1}w(q_{r+1}) \leq \left(\sum_{i=1}^{r+1}\lambda_i\right) w(q_j) = w(q_j), \qquad q_j \in Q,$$

где $w(q_j) = \max\{w(q_1), \ldots, w(q_{r+1})\}$, что невозможно.

Воспользуемся равенством (3.2). Обозначим $Q_\varepsilon \doteq [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]\times F(\omega)$. Тогда Q_ε компактно, $\operatorname{co}Q_\varepsilon = [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]\times\operatorname{co}F(\omega)$ и $\max_{q\in Q_\varepsilon} V^{\mathrm{o}}(\omega; q) = \max_{q\in\operatorname{co}Q_\varepsilon} V^{\mathrm{o}}(\omega; q)$. Пусть $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$ и точка $q_i = (\tau_i, h_i)$ такова, что $V^{\mathrm{o}}(\omega; q_i) = \max_{q\in Q_{\varepsilon_i}} V^{\mathrm{o}}(\omega; q) = \max_{q\in\operatorname{co}Q_{\varepsilon_i}} V^{\mathrm{o}}(\omega; q)$.

Из последовательности $\{h_i\}$ выделим сходящуюся подпоследовательность (обозначим ее снова $\{h_i\}$). Тогда последовательность $\{q_i\}$ сходится к точке $\widehat{q} = (1, \widehat{h})$, где $\widehat{h}$ — предел последовательности $\{h_i\}$. Перейдем теперь в равенстве $V^{\mathrm{o}}(\omega; q_i) = \max_{q \in \operatorname{co} Q_{\varepsilon_i}} V^{\mathrm{o}}(\omega; q)$ к пределу, тогда получим $V^{\mathrm{o}}(\omega; \widehat{q}) = \max_{h \in \operatorname{co} F(\omega)} V^{\mathrm{o}}(\omega; q_0)$, $q_0 = (1, h)$, что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 5. *Предположим, что выполнены условия* 1 *и* 2 *и* $\varphi(t,\omega)$ — *произвольное решение включения* (2.1). *Тогда в точках дифференцируемости функции* $v(t) \doteq V(g^t\omega)$ *выполнено неравенство* $\dot v(t) \le V^{\mathrm{o}}_{\operatorname{co} F}(g^t\omega)$.

Доказательство. Пусть t — фиксированная точка дифференцируемости функции $v(t) \doteq \doteq V(g^t\omega)$ и $\varepsilon \ge 0$. Рассмотрим приращение

$$v(t+\varepsilon) - v(t) = V(g^{\varepsilon+t}\omega) - V(g^t\omega) = V\big(f^\varepsilon(f^t\sigma), \varphi(\varepsilon+t,\omega)\big) - V(f^t\sigma, \varphi(t,\omega)).$$

Учитывая равенство $\varphi(\varepsilon+t,\omega) = \varphi(t,\omega) + \varepsilon\dot\varphi(t,\omega) + o(\varepsilon)$, получим

$$v(t+\varepsilon) - v(t) = V\big(f^\varepsilon(f^t\sigma), \varphi(t,\omega) + o(\varepsilon) + \varepsilon\dot\varphi(t,\omega)\big) - V\big(f^t\sigma, \varphi(t,\omega) + o(\varepsilon)\big) +$$
$$+ V\big(f^t\sigma, \varphi(t,\omega) + o(\varepsilon)\big) - V(f^t\sigma, \varphi(t,\omega)).$$

Далее так как $|V(f^t\sigma, \varphi(t,\omega) + o(\varepsilon)) - V(f^t\sigma, \varphi(t,\omega))| \le \ell \cdot o(\varepsilon)$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{V(f^t\sigma, \varphi(t,\omega) + o(\varepsilon)) - V(f^t\sigma, \varphi(t,\omega))}{\varepsilon} = 0$$

и, следовательно,

$$\dot v(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{v(t+\varepsilon) - v(t)}{\varepsilon} \le \limsup_{\varepsilon\to +0} \frac{V(f^\varepsilon(f^t\sigma), \varphi(t,\omega) + o(\varepsilon) + \varepsilon\dot\varphi(t,\omega)) - V(f^t\sigma, \varphi(t,\omega) + o(\varepsilon))}{\varepsilon}.$$

Правая часть этого неравенства представляет производную V в точке $g^t\omega = (f^t\sigma, \varphi(t,\omega))$ по направлению $q(t,\omega) = (1, \dot\varphi(t,\omega))$, поэтому $\dot v(t) \le V^{\mathrm{o}}(g^t\omega; q(t,\omega)) \le V^{\mathrm{o}}_{\operatorname{co} F}(g^t\omega)$. $\square$

4. ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ

Мы пользуемся определениями 1 и 2. Допуская некоторую вольность, будем говорить также, что множество $\mathfrak{M}$ положительно инвариантно относительно включения (1.1) или что $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову относительно включения (1.1). Рассмотрим сначала пример.

Пример 1. Пусть заданы система дифференциальных уравнений

$$\dot x = F(x), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \tag{4.1}$$

на плоскости с непрерывной правой частью F и кривая $M \doteq \{x \in \mathbb{R}^2\colon w(x) = 0\}$, порожденная гладкой функцией $w\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ с отличным от нуля градиентом $\partial w(x)/\partial x$. Тогда [10] при наличии свойства единственности решения задачи Коши для системы (4.1) условие

$$\left\langle F(x), \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right\rangle = 0 \qquad \text{при всех} \quad x \in M \tag{4.2}$$

является необходимым и достаточным условием инвариантности множества M относительно решений системы (4.1). Если же свойство единственности отсутствует, то равенство (4.2) определяет траекторию *особого решения* системы (4.1). Это означает, что, во-первых, существует решение системы (4.1), остающееся при всех t в множестве M, и, во-вторых, через каждую точку множества M проходит решение системы (4.1), покидающее M за конечное время. Этот пример показывает, что при отсутствии единственности решения задачи Коши условия (4.2) недостаточно для положительной инвариантности множества M.

Формулируемая ниже теорема о положительной инвариантности дополняет результаты работ Ж.-П. Обена [10, Theorem 5.2.1, p. 168], А.Е. Ирисова и Е.Л. Тонкова [11, лемма 1, с. 63] и И. Бенедетти и Е.А. Панасенко [12, Theorem 3.4]. Напомним, что функцией Ляпунова мы называем функцию, удовлетворяющую определению 4.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* 1 *и* 2 *и для некоторого положительного r существует локально липшицева функция Ляпунова $V\colon \mathfrak{M}^r \to \mathbb{R}$. Если для всех $\omega \in \mathfrak{N}^r \doteq \{\omega = (\sigma, x) \in \mathfrak{M}^r \colon \omega \notin \mathfrak{M}\}$ выполнено неравенство $V_F^{\mathrm{o}}(\omega) \le 0$, то множество $\mathfrak{M}$, определенное равенством* (2.2), *положительно инвариантно.*

Доказательство. Пусть точка $\omega = (\sigma, x) \in \mathfrak{M}$. Допустим, что найдутся решение $\varphi(t,\omega)$ включения (2.1) и точка $t_0 \ge 0$ выхода движения $t \to g^t\omega = (f^t\sigma, \varphi(t,\omega))$ из множества $\mathfrak{M}$. Это означает, что существует последовательность $t_1, t_2, \dots$ моментов времени $t_i > t_0$ такая, что $t_i \to t_0$ и $g^{t_i}\omega \notin \mathfrak{M}$. Следовательно, для функции $v(t) = V(g^t\omega)$ в точках t_i выполнены неравенства $v(t_i) > 0$. Далее из леммы 3 следует, что функция $t \to v(t)$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Поэтому из теоремы Радемахера вытекает, что функция $t \to v(t)$ дифференцируема при почти всех t. Фиксируем индекс i и рассмотрим интервал $\Delta = (\tau_i, \vartheta_i)$ такой, что τ_i — ближайший слева к точке t_i нуль функции $v(t)$, а точка ϑ_i удовлетворяет условиям $\vartheta_i \ge t_i$ и $v(t) \ge 0$ при всех $t \in \Delta$. В силу условий теоремы при почти всех $t \in \Delta$ выполнено неравенство $\dot v(t) \le 0$, поэтому $v(t) = \int_{\tau_i}^{t} \dot v(s)\,ds \le 0$, что противоречит неравенству $v(t_i) > 0$. Таким образом, $\mathfrak{M}$ положительно инвариантно. $\square$

Замечание 1. В теореме 1 утверждается, что множество $\mathfrak{M}$ положительно инвариантно не только относительно решений включения (1.1), но и относительно решений овыпукленного включения (2.1). В этом состоит одно из отличий теоремы 1 от соответствующих результатов процитированных работ. Кроме того, условия инвариантности $\mathfrak{M}$ выражены в терминах функции Ляпунова (как это сделано и в работе [12]), а не в терминах конусов, опорных к множеству $M(\sigma)$, как в работах [10] и [11].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2 *и существует локально липшицева определенно положительная функция Ляпунова $V\colon \mathfrak{M}^r \to \mathbb{R}$, для которой $V_F^{\mathrm{o}}(\omega) \le 0$, $\omega \in \mathfrak{N}^r$. Тогда множество $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову относительно включения* (1.1).

Доказательство. В условиях теоремы множество $\mathfrak{M}$ положительно инвариантно. Покажем, что оно устойчиво по Ляпунову. Пусть задано $\varepsilon \in (0, r)$. Обозначим

$$\alpha = \inf_{\omega}\{V(\omega) \colon \omega \in \operatorname{fr}\mathfrak{M}^{\varepsilon}\}.$$

Из условия определенной положительности функции V следует, что $\alpha > 0$. По заданному ε построим такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что $V(\omega) < \alpha$ для всех $\omega \in \mathfrak{N}^{\delta}$ (в силу непрерывности V такое δ существует). Далее, если найдутся точка $\omega \in \mathfrak{N}^{\delta}$, момент времени t_0 и движение $t \to g^t\omega$, отвечающие некоторому решению $\varphi(t,\omega)$ включения (2.1), такие, что $g^{t_0}\omega \in \operatorname{fr}\mathfrak{M}^{\varepsilon}$ и при этом $g^t\omega \notin \operatorname{fr}\mathfrak{M}^{\varepsilon}$ для всех $t \in [0, t_0)$, то $g^t\omega \in \mathfrak{N}^{\varepsilon}$ и в силу соотношения $\dot v(t) \le 0$, выполненного для почти всех $t \in (0, t_0)$, где $v(t) = V(g^t\omega)$, имеют место противоречивые неравенства $\alpha \le v(t_0) \le v(0) < \alpha$. $\square$

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot y + u(t, y, \dot y)\dot y + p(y) = 0, \qquad (t, y, z) \in \mathbb{R}^3, \tag{4.3}$$

где функция $u(t, y, z)$ трактуется как возмущение, относительно которого известны только допустимые границы изменения $u_*(t, y, z) \le u(t, y, z) \le u^*(t, y, z)$. Здесь u_* и u^* непрерывны по (y, z) и равномерно непрерывны по t равномерно относительно (y, z) на компактах в $\mathbb{R}^2$.

Стандартным образом перейдем к дифференциальному включению

$$\begin{cases} \dot x_1 = x_2, \\ \dot x_2 \in -p(x_1) - [u_*(t, x), u^*(t, x)]x_2, \end{cases} \tag{4.4}$$

где $x = (x_1, x_2)$, а затем к семейству дифференциальных включений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 \in -p(x_1) - [\widehat{u}_*(t,x), \widehat{u}^*(t,x)]x_2, \end{cases} \tag{4.5}$$

полученному замыканием множества сдвигов включения (4.4) в топологии равномерной сходимости на компактах в $\mathbb{R}^3$. Это семейство обозначим буквой $\mathfrak{R}$ и будем писать $(4.5) \in \mathfrak{R}$, если существует такая последовательность $\{\tau_i\}$, что для любого $\varepsilon > 0$ и всякого компакта $[-\vartheta, \vartheta] \times K$ в $\mathbb{R}^3$ найдется такой номер i_0, что $|\widehat{u}_*(t,x) - u_*(t+\tau_i, x)| + |\widehat{u}^*(t,x) - u^*(t+\tau_i, x)| \le \varepsilon$ для всех $i \ge i_0$ и всех $(t,x) \in [-\vartheta, \vartheta] \times K$. Построенное таким образом пространство $\mathfrak{R}$ компактно в топологии равномерной сходимости на компактах $[-\vartheta, \vartheta] \times K$ в $\mathbb{R}^3$.

Будем предполагать далее, что для некоторой константы $\gamma > 0$ при всех $|x_1| \ge \gamma$ выполнено неравенство $x_1 p(x_1) > 0$. Тогда множество

$$\mathfrak{M} \doteq \{(t,x) \in \mathbb{R}^3\colon\ 0 \le t,\ q(x) \le a\}, \qquad \gamma \le a, \tag{4.6}$$

где $q(x) = \frac{(x_2)^2}{2} + \int_0^{x_1} p(z)\,dz$, компактно. Рассмотрим функцию $V(x) = q(x) - a$. В силу построения V и множества $\mathfrak{M}$ для всех $(t,x) \in \mathfrak{M}$ выполнено неравенство $V(x) \le 0$, и если $(t,x) \notin \mathfrak{M}$, то $V(x) > 0$. Следовательно, функция V определенно положительна. Далее $\dot{V}(x;h) = p(x_1)h_1 + x_2 h_2$ и производная V в силу включения $(4.5) \in \mathfrak{R}$ запишется в виде

$$\dot{\widehat{V}}(t,x) = \max_{\widehat{u}_*(t,x) \le u \le \widehat{u}^*(t,x)} \bigl(p(x_1)x_2 - x_2 p(x_1) - (x_2)^2 u\bigr) = -(x_2)^2 \widehat{u}_*(t,x). \tag{4.7}$$

Поэтому если для всякой системы $(4.5) \in \mathfrak{R}$ при всех $(t,x) \notin \mathfrak{M}$ выполнено неравенство $\widehat{u}_*(t,x) \ge 0$, то $\dot{\widehat{V}}(t,x) \le 0$ вне множества $\mathfrak{M}$. Таким образом, при высказанных предположениях выполнены все условия теоремы 2 и, следовательно, *множество* $\mathfrak{M}$, *определенное равенством* (4.6), *устойчиво по Ляпунову относительно включения* (4.5).

Пусть функция $V\colon \mathfrak{M}^r \to \mathbb{R}$ локально липшицева и $V^{\mathrm{o}}(\omega; q)$ — ее производная Кларка в точке $\omega = (\sigma, x) \in \mathfrak{M}^r$ по направлению вектора $q = (\tau, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. *Субдифференциалом Кларка* $\partial V(\omega)$ функции V в точке $\omega \in \mathfrak{M}^r$ называется множество [9, гл. 2, § 2.1]

$$\partial V(\omega) \doteq \bigl\{\psi = (\vartheta, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\colon\ V^{\mathrm{o}}(\omega; q) \ge \tau\vartheta + \langle h, p\rangle \ \text{ для всех }\ q = (\tau, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\bigr\}. \tag{4.8}$$

Если функция $(t,x) \to V(f^t\sigma, x)$ непрерывно дифференцируема в точке $(0,x)$, то

$$\partial V(\omega) = \biggl(\frac{\partial V(f^t\sigma, x)}{\partial t}\bigg|_{t=0}, \frac{\partial V(\sigma, x)}{\partial x}\biggr);$$

в любом случае $\partial V(\omega)$ — выпуклый компакт в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и для всякой точки $q = (\tau, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$V^{\mathrm{o}}(\omega; q) = \max_{\psi} \bigl\{\tau\vartheta + \langle h, p\rangle\colon\ \psi = (\vartheta, p) \in \partial V(\omega)\bigr\}. \tag{4.9}$$

Не уменьшая общности, будем считать, что $V(\omega) = 0$ для любой точки $\omega \in \mathfrak{M}$, и при любом малом $\lambda > 0$ рассмотрим множество уровня $H_\lambda = \{\omega = (\sigma, x) \in \Omega\colon V(\omega) \le \lambda\}$ функции V. Далее при каждом $\sigma \in \Sigma$ построим сечение $H_\lambda(\sigma) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon V(\sigma, x) \le \lambda\}$ множества H_λ. Если точка ω находится в $\mathfrak{N}^r$ и r положительно и близко к нулю, то в силу непрерывности V и равенства $V(\omega) = 0$ при всех $\omega \in \operatorname{fr}\mathfrak{M}$ найдется такое $\lambda_0 > 0$, что при любых $\sigma \in \Sigma$ и $\lambda \in [0, \lambda_0)$ сечение $H_\lambda(\sigma)$ содержится в множестве $M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r$, содержит внутри себя множество $M(\sigma)$ и мало (в метрике Хаусдорфа) отличается от $M(\sigma)$.

Из (4.9) следует, что неравенство $V_F^{\mathrm{o}}(\omega) \le 0$ имеет место в том и только том случае, если $\vartheta + \langle h, p\rangle \le 0$ для каждой точки $\psi = (\vartheta, p) \in \partial V(\omega)$ и всех $h \in F(\omega)$. Далее, как несложно убедиться, множество точек $q=(\tau,h)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих для всех $\psi=(\vartheta,p)\in\partial V(\omega)$ неравенству $\tau\vartheta+\langle h,p\rangle\le 0$, образует выпуклый замкнутый конус, опорный к множеству H_λ при $\lambda\doteq V(\omega)$ в точке $\omega\in\operatorname{fr}H_\lambda$. Этот конус называется *опорным конусом* Кларка (к множеству H_λ в точке ω). Обозначим его $\mathcal{K}_\omega H_\lambda$. Таким образом,

$$\mathcal{K}_\omega H_\lambda \doteq \bigl\{q=(\tau,h)\colon\ \tau\vartheta+\langle h,p\rangle\le 0 \ \text{ для всех } \ \psi=(\vartheta,p)\in\partial V(\omega)\bigr\}. \tag{4.10}$$

Из сказанного следует, что неравенство $V_F^{\mathrm{o}}(\omega)\le 0$ выполнено при всех $\omega\in\mathfrak{N}^r$, если *найдется такое положительное число* λ_0, *что для каждого* $\lambda\in[0,\lambda_0)$, *любой точки* ω *из* $\Sigma\times\operatorname{fr}M^\lambda(\sigma)$ *и всякого* $h\in F(\omega)$ *вектор* $q=(1,h)$ *содержится в опорном конусе* (4.10). *Если* V *непрерывно дифференцируема, то условие* $V_F^{\mathrm{o}}(\omega)\le 0$ *выполнено, когда*

$$\frac{\partial V(f^t\sigma,x)}{\partial t}\bigg|_{t=0}+\max_{h\in F(\omega)}\Bigl\langle h,\frac{\partial V(\sigma,x)}{\partial x}\Bigr\rangle\le 0$$

для всех $\sigma\in\Sigma$, $x\in M^\varepsilon(\sigma)\setminus\operatorname{int}M(\sigma)$ *и малого* $\varepsilon>0$.

Предположим теперь, что при каждом $\sigma\in\Sigma$ и всех x, близких к $M(\sigma)$,

$$V(\sigma,x)=\varrho(x,M(\sigma))\doteq\min_{y\in M(\sigma)}|x-y|. \tag{4.11}$$

Тогда V — функция Ляпунова. Более того, V определенно положительна (относительно множества $\mathfrak{M}$) и $H_\lambda\doteq\mathfrak{M}^\lambda=\{\omega=(\sigma,x)\in\Omega\colon\varrho(x,M(\sigma))\le\lambda\}$. Поэтому $V(\omega)=\lambda$ для всякой точки $\omega\in\operatorname{fr}\mathfrak{M}^\lambda$. С учетом сказанного из теоремы об инвариантности $\mathfrak{M}$ (теорема 1), а на самом деле из теоремы об устойчивости по Ляпунову (теорема 2) может быть получено следующее утверждение, которое уже не требует построения функции Ляпунова, но требует построения (при малых $\lambda>0$) опорного конуса $\mathcal{K}_\omega\mathfrak{M}^\lambda$ в каждой точке $\omega\in\operatorname{fr}\mathfrak{M}^\lambda$.

Следствие 1 (теоремы 2). *Если выполнены условия* 1 *и* 2 *и найдется* $\lambda_0>0$ *такое, что для каждого* $\lambda\in[0,\lambda_0)$, *любого* $\omega\in\operatorname{fr}\mathfrak{M}^\lambda$ *и всякого* $h\in F(\omega)$ *имеет место включение* $(1,h)\in\mathcal{K}_\omega\mathfrak{M}^\lambda$, *то множество* $\mathfrak{M}$ *устойчиво по Ляпунову относительно включения* (1.1).

Для автономного дифференциального включения $\dot x\in F(x)$ и множества M, не зависящего от σ, условие следствия 1 упрощается следующим образом: *для всякого неотрицательного и достаточно малого* λ *и любой точки* $x\in\operatorname{fr}M^\lambda\doteq\{x\in\mathbb{R}^n\colon\min_{y\in M}|x-y|=\lambda\}$ *имеет место вложение* $F(x)\subset\mathcal{K}_xM^\lambda$ (здесь $\mathcal{K}_xM^\lambda$ — конус, опорный к M^λ в точке x). Утверждается при этом, что множество M положительно инвариантно относительно включения $\dot x\in F(x)$ (на самом деле в силу сказанного ранее оно устойчиво по Ляпунову).

Одним из наиболее общих результатов об инвариантности M в случае автономного включения является теорема Ж.-П. Обена [10], в которой используется понятие опорного конуса к M в произвольной точке (не обязательно принадлежащей M). Опорный конус T_xM к множеству $M\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ в точке $x\in\mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$T_xM\doteq\biggl\{v\in\mathbb{R}^n\colon\ \liminf_{\delta\to+0}\frac{\varrho(x+\delta v,M)-\varrho(x,M)}{\delta}\le 0\biggr\}. \tag{4.12}$$

Согласно [10, Theorem 5.2.1] для положительной инвариантности M достаточно, чтобы для любого x выполнялось условие $F(x)\subset T_xM$. Следует отметить, что преимуществом теорем 1 и 2 перед соответствующим результатом Обена является свобода выбора функции V, что демонстрируется приведенным ниже примером.

Пример 3. Рассмотрим систему уравнений [13, с. 66]

$$\begin{cases}\dot x_1=x_2,\\ \dot x_2=-p(x_1)-q(x_2)\end{cases} \tag{4.13}$$

с гладкими функциями p и q, удовлетворяющими условиям $x_1p(x_1) > 0$ при $x_1 \neq 0$, $x_2q(x_2) \geq 0$. Пусть множество M состоит из одной точки $(0,0)$. Ясно, что M положительно инвариантно и это можно извлечь из теоремы 1, положив в качестве функции Ляпунова $V(x) = \frac{(x_2)^2}{2} + \int_0^{x_1} p(z)\,dz$ (V определенно положительна и $\dot{V}(x) = -x_2q(x_2) \leq 0$), но в силу следствия 1 положительная инвариантность множества $M = (0,0)$ имеет место только при $p(x_1) = x_1$. Действительно, $M^\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2\colon |x| \leq \lambda\}$ и $\mathcal{K}_x M^\lambda = \{h \in \mathbb{R}^2\colon x_1h_1 + x_2h_2 \leq 0\}$. Поэтому при $F(x) = (x_2, -p(x_1) - q(x_2))$, совпадающем с правой частью системы (4.13), условие $F(x) \subset \mathcal{K}_x M^\lambda$ запишется в виде $x_2(x_1 - p(x_1)) - x_2q(x_2) \leq 0$. Это условие выполнено (при всех $|x| \leq \lambda$ и малых λ) только в том случае, если $x_1 - p(x_1) = 0$.

Отметим еще, что даже в стационарном случае утверждение об инвариантности перестает быть верным, если условие $F(x) \subset \mathcal{K}_x M^\lambda$ (при малых $\lambda > 0$) ослабить до условия $F(x) \subset \mathcal{K}_x M$ (положить $\lambda = 0$). Действительно, в примере 1 условие (4.2) эквивалентно условию $F(x) \subset \mathcal{K}_x M$ и при этом множество M не является положительно инвариантным.

Следствие 2 (теоремы 2). *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2, *а множество M не зависит от σ, замкнуто и выпукло. Пусть далее $p(x)$ — проекция точки $x \notin M$ на множество M. Если для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$, каждого $\sigma \in \Sigma$, всех $x \in M^\varepsilon \setminus M$ и любого $h \in F(\sigma, x)$ выполнено неравенство*

$$\langle \eta(x), h - p^{\mathrm{o}}(x; h) \rangle \leq 0, \qquad \textit{где} \quad \eta(x) = \frac{x - p(x)}{|x - p(x)|}, \tag{4.14}$$

то множество $\mathfrak{M} \doteq \Sigma \times M$ устойчиво по Ляпунову относительно включения (1.1).

Доказательство. Пусть $V(x) \doteq \varrho(x, M) = |x - p(x)|$. Тогда $V(x)$ определенно положительна (относительно $\mathfrak{M}$). Из неравенства $|p(x) - p(y)| \leq |x - y|$ (см., например, [14, p. 80]) следует неравенство $|p(y + \delta h) - p(y)| \leq \delta|h|$, поэтому функция $x \to p(x)$ дифференцируема (по Кларку). Далее из равенств

$$\begin{aligned} V^2(y+\delta h) - V^2(y) &= \langle y + \delta h - p(y+\delta h), y + \delta h - p(y+\delta h)\rangle - \langle y - p(y), y - p(y)\rangle = \\ &= \langle y + \delta h - p(y+\delta h), y + \delta h - p(y+\delta h)\rangle - \langle y + \delta h - p(y+\delta h), y - p(y)\rangle + \\ &\quad + \langle y + \delta h - p(y+\delta h), y - p(y)\rangle - \langle y - p(y), y - p(y)\rangle = \\ &= 2\big\langle y + \delta h - p(y+\delta h), \delta h - [p(y+\delta h) - p(y)]\big\rangle \end{aligned}$$

получаем выражение для производной Кларка функции V по направлению вектора h

$$\begin{aligned} V^{\mathrm{o}}(x;h) &= \limsup_{(y,\delta)\to(x,+0)} \frac{V^2(y+\delta h) - V^2(y)}{\delta[V(y+\delta h) + V(y)]} = \left\langle \frac{x - p(x)}{|x - p(x)|}, h - \limsup_{(y,\delta)\to(x,+0)} \frac{p(y+\delta h) - p(y)}{\delta} \right\rangle = \\ &= \langle \eta(x), h - p^{\mathrm{o}}(x;h)\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, определенная положительность функции V вместе с неравенством (4.14) обеспечивают выполнение всех условий теоремы 2. $\square$

5. ПРОДОЛЖАЕМОСТЬ ВЛЕВО, ИНВАРИАНТНОСТЬ И РЕКУРРЕНТНОСТЬ

Для произвольной топологической динамической системы (Σ, f^t) *траекторию* точки $\sigma \in \Sigma$ обозначим $\mathrm{orb}(\sigma) \doteq \{f^t\sigma\colon t \in \mathbb{R}\}$, а замыкание траектории $\overline{\mathrm{orb}}(\sigma)$.

Условие 3. Пространство Σ компактно, и непрерывная функция $\sigma \to M(\sigma)$, задающая множество $\mathfrak{M}$, принимает значения в $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 6. Множество $\Sigma_0 \subset \Sigma$ называется *инвариантным* (относительно потока f^t), если $f^t\Sigma_0 = \Sigma_0$ при всех $t \in \mathbb{R}$, и *минимальным*, если оно замкнуто, инвариантно и не содержит инвариантного подмножества, не совпадающего с Σ_0.

При условии 3 каждой точке $\sigma \in \Sigma$ отвечает *омега-предельное множество* $\Sigma_0(\sigma)$, т.е. множество всех частичных пределов (в метрике ρ_Σ) движения $t \to f^t\sigma$ при $t \to \infty$. Множество $\Sigma_0(\sigma)$ непусто, компактно, связно и инвариантно. Поэтому $\overline{\mathrm{orb}}(\sigma_0) \subset \Sigma_0(\sigma)$ для любой точки $\sigma_0 \in \Sigma_0(\sigma)$. Если к тому же множество $\Sigma_0(\sigma)$ минимально, то $\Sigma_0(\sigma) = \overline{\mathrm{orb}}(\sigma_0)$ для каждой точки $\sigma_0 \in \Sigma_0(\sigma)$. Пусть Σ_0 — минимальное компактное множество. Тогда всякое движение $t \to f^t\sigma_0$ в Σ_0 *рекуррентно* по Биркгофу. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ множество $\ell(\varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R}\colon \rho_\Sigma(f^\tau\sigma_0, \sigma_0) \le \varepsilon\}$ относительно плотно на числовой прямой $\mathbb{R}$ (т.е. $\ell(\varepsilon) \cap [t_0, t_0 + \vartheta] \ne \varnothing$ для некоторого $\vartheta > 0$ и всех $t_0 \in \mathbb{R}$). Оказывается далее, что если движение $t \to f^t\sigma_0$ рекуррентно, то для любых положительных ε и ϑ множество $\ell(\varepsilon, \vartheta) \doteq \{\tau \in \mathbb{R}\colon \max_{|t|\le\vartheta} \rho_\Sigma(f^{t+\tau}\sigma_0, f^t\sigma_0) \le \varepsilon\}$ также относительно плотно на $\mathbb{R}$.

Пусть выполнены условия 1 и 2, и пусть (Ω, g^t) — обобщенная динамическая система, построенная в разд. 2, $t \ge 0$. Аналогичным образом для всякой фиксированной точки $\omega = (\sigma, X) \in \Omega$ построим множество $\Omega_0(\omega)$ в Ω, состоящее из всех частичных пределов (в метрике ρ_Ω) движения $t \to g^t\omega = (f^t\sigma, S(t,\omega))$ при $t \to \infty$ (следовательно, точка ω_0 принадлежит $\Omega_0(\omega)$ в том и только том случае, если найдется такая последовательность $\{t_i\}$ моментов времени, что $t_i \to \infty$ и $\rho_\Omega(g^{t_i}\omega, \omega_0) = \rho_\Sigma(f^{t_i}\sigma, \sigma_0) + \mathrm{dist}(S(t_i,\omega), X_0) \to 0$). В предположении, что выполнено еще и условие 3, для каждой точки $\omega \in \Omega$ множество $\Omega_0(\omega)$ непусто. Если же в дополнение к сказанному правая часть F дифференциального включения (1.1) удовлетворяет локальному условию Липшица по второму аргументу, то функция $(t,\omega) \to S(t,\omega)$ непрерывна и поэтому $\Omega_0(\omega)$ становится омега-предельным множеством точки $\omega \in \Omega$ в классическом смысле.

Теорема 3. *Пусть* $\widehat{\Sigma} = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \Sigma_0(\sigma)$, *где* $\Sigma_0(\sigma)$ *— омега-предельное множество* σ. *Пусть далее выполнены условия* 1–3 *и множество* $\mathfrak{M}$, *определенное равенством* (2.2), *положительно инвариантно. Тогда*

1) *для всякой точки* $\sigma \in \widehat{\Sigma}$ *найдется такое множество* $X(\sigma) \subset M(\sigma)$, *что интегральная воронка* $S(t,\omega)$ *включения* (2.1), *где* $\omega = (\sigma, X(\sigma))$, *определена при всех* $t \in \mathbb{R}$;
2) *если при каждом* $\sigma \in \Sigma$ *функция* $x \to F(\sigma, x)$ *локально липшицева, то для любой точки* $\omega = (\sigma, X(\sigma)) \in \mathfrak{M}$ *такой, что воронка* $S(t,\omega)$ *определена при всех* t, *справедливо включение* $\overline{\mathrm{orb}}(\omega) \subset \mathfrak{M}$, *где* $\mathrm{orb}(\omega) \doteq \{g^t\omega\colon t \in \mathbb{R}\}$;
3) *если при каждом* $\sigma \in \Sigma$ *функция* $x \to F(\sigma, x)$ *локально липшицева и множество* Σ *минимально, то всякой точке* $\sigma \in \Sigma$ *отвечает множество* $X(\sigma) \subset M(\sigma)$ *такое, что движение* $t \to S(t,\omega)$ *рекуррентно.*

Доказательство. 1. Пусть $\sigma \in \Sigma$ и $\omega = (\sigma, M(\sigma))$. Тогда $\omega \in \mathfrak{M}$ и в силу компактности Σ множество частичных пределов $\Omega_0(\omega)$ движения $t \to g^t\omega$ непусто. Для всякой точки $\omega_0 = (\sigma_0, X_0) \in \Omega_0(\omega)$, $X_0 \subset M(\sigma_0)$, найдется последовательность $\{t_i\}$ такая, что $t_{i+1} > t_i$, $t_i \to \infty$, $\rho_\Omega(\omega_i, \omega_0) \to 0$, $\omega_i = g^{t_i}\omega$. Из равенства $S(t + t_i, \omega) = S(t, \omega_i)$, выполненного при всех $t \ge -t_i$, следует, что для каждого $t \in \mathbb{R}$ найдется такой индекс i, что функция $t \to S(t, \omega_i)$ определена на полуинтервале $[-t_i, \infty)$. В силу полунепрерывности сверху функции $\omega \to S(t,\omega)$ полуотклонение $d(S(t,\omega_i), S(t,\omega_0))$ стремится к нулю с возрастанием i. Следовательно, интегральная воронка $S(t,\omega_0)$ включения (2.1) при $\sigma = \sigma_0$ определена для всех $t \in \mathbb{R}$. Сказанное верно для каждой точки $\sigma = \sigma_0 \in \widehat{\Sigma}$ с $X(\sigma) = X_0$.

2. Пусть $\sigma \in \widehat{\Sigma}$ и множество $X(\sigma) \subset M(\sigma)$ таково, что интегральная воронка $S(t,\omega)$, где $\omega = (\sigma, X(\sigma))$, определена при всех $t \in \mathbb{R}$. Покажем, что $\overline{\mathrm{orb}}(\omega) \subset \mathfrak{M}$. Действительно, из вложения $S(t,\omega) \subset M(f^t\sigma)$, справедливого для каждого $t \ge 0$, вытекает, что

$\mathrm{orb}_+(\omega) = \{(f^t\sigma, S(t,\omega))\colon t \geq 0\} \subset \mathfrak{M}$. Далее из п. 1 следует, что найдется такая последовательность $\{t_i\}$, $t_i \to \infty$, что $\rho_\Omega(\omega_i, \omega) \to 0$, где $\omega_i = g^{t_i}\omega$, функция $t \to S(t,\omega_i)$ определена на $[-t_i, \infty)$ и $S(t,\omega_i) \subset M(g^t\omega_i)$ для любого $t \in [-t_i, \infty)$. Следовательно, из локальной липшицевости функции F по второму аргументу следует, что $\mathrm{dist}(S(t,\omega_i), S(t,\omega)) \to 0$ при $i \to \infty$ и поэтому $S(t,\omega) \subset M(g^t\omega)$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Так как $\mathfrak{M}$ замкнуто, то $\overline{\mathrm{orb}}(\omega) \subset \mathfrak{M}$.

3. Пусть $\omega = (\sigma, M(\sigma))$, $\sigma \in \Sigma$. Так как F локально липшицева по x, то, как уже отмечалось, омега-предельное множество $\Omega_0(\omega)$ непусто. Поскольку Σ компактно, то $\Omega_0(\omega)$ также компактно, кроме того, согласно п. 2 $\Omega_0(\omega) \subset \mathfrak{M}$. Далее, $\Omega_0(\omega)$ как инвариантное компактное множество содержит компактное минимальное подмножество. Обозначим его $\mathfrak{M}_0$. Тогда для каждой точки $\omega_0 = (\sigma_0, X_0) \in \mathfrak{M}_0$ имеет место равенство $\overline{\mathrm{orb}}(\omega_0) = \mathfrak{M}_0$ (из минимальности Σ вытекает, что $\overline{\mathrm{orb}}(\sigma_0) = \Sigma$) и, следовательно, для любого $\sigma \in \Sigma$ найдется такое компактное множество $M_0(\sigma) \subset M(\sigma)$, что $\mathfrak{M}_0 = \{\omega = (\sigma, X)\colon \sigma \in \Sigma,\ X \subset M_0(\sigma)\}$. Так как всякое движение в $\mathfrak{M}_0$ рекуррентно, то для каждого $\omega \in \mathfrak{M}_0$ и любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ множество

$$L(\varepsilon, \vartheta) \doteq \left\{\tau \in \mathbb{R}\colon \max_{|t|\leq\vartheta} \mathrm{dist}(S(t+\tau,\omega), S(t,\omega)) \leq \varepsilon\right\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$. Следовательно, движение $t \to S(t,\omega)$ рекуррентно. $\square$

6. ТЕОРЕМА ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Формулируемая в этом разделе теорема распространяет известный результат Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского [13, с. 19; 15] на неавтономные дифференциальные включения. При изучении свойства асимптотической устойчивости мы пользуемся определением 2. Введем в рассмотрение еще одно определение. Напомним, что $\mathfrak{N}^r \doteq \{\omega \in \mathfrak{M}^r\colon \omega \notin \mathfrak{M}\}$.

Определение 7. Пусть $r > 0$, функция $V\colon \mathfrak{M}^r \to \mathbb{R}$ удовлетворяет локальному условию Липшица и число α таково, что $\mathfrak{S}_\alpha \doteq \{\omega \in \Omega\colon V(\omega) = \alpha\} \subset \mathfrak{N}^r$. Будем говорить, что $\mathfrak{S}_\alpha$ *не содержит положительных полутраекторий* включения (2.1), если для любого $\omega \in \mathfrak{S}_\alpha$ и каждого решения $\varphi(t,\omega)$ включения (2.1) найдется такое $\tau > 0$, что $V(g^\tau\omega) \neq \alpha$.

Другими словами, $\mathfrak{S}_\alpha$ не содержит положительных полутраекторий включения (2.1), если для любого $\omega \in \mathfrak{S}_\alpha$ всякое движение $t \to g^t\omega = (f^t\sigma, \varphi(t,\omega))$, где $\varphi(t,\omega)$ — одно из решений включения (2.1), начинающееся в $\mathfrak{S}_\alpha$ при $t = 0$, покидает $\mathfrak{S}_\alpha$ за конечное время.

Предположим, что при всех $\omega \in \mathfrak{N}^r$ выполнено неравенство $V_F^{\mathrm{o}}(\omega) \leq 0$. Тогда в силу леммы 4 $\mathfrak{S}_\alpha$ *не содержит положительных полутраекторий включения* (2.1), *если производная функции* V *в силу исходного включения* (1.1), *но подсчитанная на движениях, порожденных включением* (2.1), *удовлетворяет для всякой точки* $\omega \in \mathfrak{S}_\alpha$ *условию* $V_F^{\mathrm{o}}(g^t\omega) \not\equiv 0$, $t \geq 0$. Действительно, если $v(t) \doteq V(g^t\omega) \equiv \alpha$, то в точках дифференцируемости $v(t)$

$$0 = \dot v(t) = \frac{dV(g^t\omega)}{dt} \leq V^{\mathrm{o}}\big(g^t\omega; (1, \dot\varphi(t,\omega))\big) \leq V_{\mathrm{co}\,F}^{\mathrm{o}}(g^t\omega) = V_F^{\mathrm{o}}(g^t\omega) \leq 0.$$

Следовательно, $V_F^{\mathrm{o}}(g^t\omega) = 0$ при всех $t \geq 0$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1–3. *Если существует локально липшицева определенно положительная функция* $V\colon \mathfrak{M}^r \to \mathbb{R}$, *производная которой* $V_F^{\mathrm{o}}(\omega) \leq 0$ *при всех* $\omega \in \mathfrak{N}^r$, *и найдется такое* $\alpha_0 > 0$, *что при всех* $\alpha \in (0, \alpha_0)$ *множество* $\mathfrak{S}_\alpha$ *не содержит положительных полутраекторий включения* (2.1), *то* $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову относительно включения* (1.1).

Доказательство. Так как выполнены все условия теоремы 2, то множество $\mathfrak{M}$ устойчиво относительно включения (1.1). Поэтому достаточно доказать, что найдется такое $\delta > 0$, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ и всех таких $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, что $d(X, M(\sigma)) \le \delta$, имеет место равенство $\lim_{t\to\infty} d(S(t,\sigma,X), M(f^t\sigma)) = 0$.

Выберем такое $\delta > 0$, что для заданного $r > 0$ и всякой точки $\omega = (\sigma, x) \in \mathfrak{M}^\delta$ произвольное решение $\varphi(t,\omega)$ овыпукленного включения (2.1) определено при всех $t \ge 0$ и $g^t\omega = (f^t\sigma, \varphi(t,\omega)) \in \mathfrak{M}^r$. Если каждое такое движение входит в $\mathfrak{M}$ за конечное время, то $\lim_{t\to\infty} d(S(t,\sigma,X), M(f^t\sigma)) = 0$, поэтому будем предполагать, что некоторое движение $t \to g^t\omega$ остается в $\mathfrak{N}^r$ для всех $t \ge 0$. Рассмотрим функцию $v(t) = V(g^t\omega)$. Из неравенства $\dot v(t) \le 0$, выполненного при почти всех $t \ge 0$, следует, что $v(t)$ убывает, а из компактности Σ и $M(\sigma)$ следует ограниченность снизу $v(t)$. Поэтому существует предел $\lim_{t\to\infty} v(t) = \alpha$.

Покажем, что $\alpha = 0$ для всякого решения $\varphi(t,\omega) \in S(t,\omega)$, $\omega = (\sigma, x) \in \mathfrak{N}^\delta$. Допустим, что $\alpha > 0$. Из компактности $\operatorname{cl}\mathfrak{N}^r$ следует, что множество Ω_0 омега-предельных точек движения $t \to g^t\omega = (f^t\sigma, \varphi(t,\omega))$ непусто и $V(\widehat\omega) = \alpha$ для любой точки $\widehat\omega \in \Omega_0$. Действительно, если последовательность $\{t_i\}$ такова, что $\rho_\Sigma(f^{t_i}\sigma, \widehat\sigma) + |\varphi(t_i,\omega) - \widehat x| \to 0$, то $\lim_{i\to\infty} v(t_i) = \lim_{i\to\infty} V(g^{t_i}\omega) = \alpha$. Следовательно, множество Ω_0 целиком содержится в множестве $Q_\alpha \doteq \{\omega \in \mathfrak{N}^r \colon V(\omega) = \alpha\}$. Так как омега-предельное множество компактно и инвариантно относительно потока g^t, то $g^t\widehat\omega \in \Omega_0 \subset Q_\alpha$ и поэтому для всех $t \ge 0$ имеет место равенство $V(g^t\widehat\omega) = \alpha$. Дифференцируя это равенство по t, получим, что производная Кларка $V^{\mathrm{o}}(g^t\widehat\omega; q(t,\widehat\omega))$ в направлении вектора $q(t,\widehat\omega) = (1, \dot\varphi(t,\widehat\omega))$ равна нулю при почти всех $t \ge 0$. Поэтому $V_F^{\mathrm{o}}(g^t\widehat\omega) \ge V^{\mathrm{o}}(g^t\widehat\omega; q(t,\widehat\omega)) = 0$. Так как $g^t\widehat\omega \in \mathfrak{N}^r$, то согласно условию теоремы $V_F^{\mathrm{o}}(g^t\widehat\omega) \le 0$. Сопоставляя эти два неравенства, получаем равенство $V_F^{\mathrm{o}}(g^t\widehat\omega) = 0$, которое эквивалентно $V_{\operatorname{co} F}^{\mathrm{o}}(g^t\widehat\omega) = 0$. Последнее равенство противоречит условию теоремы о том, что $\mathfrak{S}_\alpha$ не содержит целых траекторий включения (2.1).

Таким образом, доказано, что $\alpha = 0$ и поэтому $\lim_{t\to\infty} V(g^t\omega) = 0$. Покажем, что $g^t\omega \to \mathfrak{M}$ и, следовательно (что эквивалентно), $\varphi(t,\omega) \to M(f^t\sigma)$ при $t \to \infty$. Если это неверно, то найдется такая последовательность моментов времени $\{t_i\}$, что $t_i \to \infty$ и $\varrho(\varphi(t_i,\omega), M(f^{t_i}\sigma)) \ge \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Из последнего неравенства получаем оценки

$$\rho_\Omega(g^{t_i}\omega, \mathfrak{M}) = \min_{\widehat\omega\in\mathfrak{M}}\bigl(\rho_\Sigma(f^{t_i}\sigma, \widehat\sigma) + |\varphi(t_i,\omega) - \widehat x|\bigr) \ge \varrho\bigl(\varphi(t_i,\omega), M(f^{t_i}\sigma)\bigr) \ge \varepsilon. \tag{6.1}$$

Так как V определенно положительна, то в силу (6.1) найдется такая константа $\varkappa > 0$, что $V(g^{t_i}\omega) \ge \varkappa$ при всех t_i. Это противоречит равенству $\alpha = 0$. $\square$

Пример 4. Вернемся к примеру 2. Выясним дополнительные условия, при которых множество $\mathfrak{M}$, определенное равенством (4.6), асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Предположим, что в области $H \doteq \{(t,x) \in \mathbb{R}^3 \colon t \ge 0,\ (t,x) \notin \mathfrak{M}\}$ для каждой системы (4.5) $\in \mathfrak{R}$ выполнено условие $\widehat u_*(t,x) \not\equiv 0$. Допустим теперь, что найдется такое решение $x(t)$ включения (4.5), что $\widehat V(x(t)) \equiv \mathrm{const}$ при $t \ge 0$. Тогда $\dot{\widehat V}(x(t)) \equiv 0$ и в силу (4.7) выполнено тождество $x_2(t) \equiv 0$. Следовательно, $x_1(t) \equiv \mathrm{const} = x_1$ и $p(x_1) = 0$. Так как точка $(t, x_1, 0) \in H$, то $|x_1| > \gamma$. Но при всех $|x_1| > \gamma$ выполнено неравенство $p(x_1) \ne 0$. Таким образом, в силу теоремы 4 если выполнено условие $\widehat u_*(t,x) \not\equiv 0$, $(t,x) \in H$, то *множество* $\mathfrak{M}$, *определенное равенством* (4.6), *асимптотически устойчиво по Ляпунову относительно включения* (4.5).

7. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ

В этом разделе мы сформулируем ряд следствий теорем 1–4 для включения

$$\dot x \in F(t,x), \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \tag{7.1}$$

Условие 4. При каждом t функция $x \to F(t,x)$ со значениями в $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ *полунепрерывна сверху*, для любого x функция $t \to F(t,x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, и для всякого $r > 0$ найдется положительная константа k_r такая, что неравенство $|F(t,x)| \le k_r$ имеет место для всех $(t,x) \in \mathbb{R} \times O_r$.

Наряду с включением (7.1) рассмотрим овыпукленное дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \operatorname{co} F(t,x), \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tag{7.2}$$

и определенную на $\mathbb{R}$ функцию $t \to M(t) \in \operatorname{cl}(\mathbb{R}^n)$ такую, что для каждого достаточно большого r функция $t \to M_r(t)$, где $M_r(t) = M(t) \cap O_r$, равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Обозначим

$$\mathcal{M} = \big\{(t,X) \in \mathbb{R} \times \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)\colon\ X \subset M(t)\big\},$$

$$\mathcal{M}^r = \big\{(t,X)\colon\ X \subset M(t) + O_r^n\big\}, \qquad \mathcal{N}^r = \mathcal{M}^r \setminus \mathcal{M},$$

$S(t,t_0,X_0)$ — сечение интегральной воронки в момент времени t овыпукленного включения (7.2), удовлетворяющее начальному условию $S(t,t_0,X_0)|_{t=t_0} = X_0$.

Условие 5. Для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ всякое решение $t \to \varphi(t,t_0,x_0)$ включения (7.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0,t_0,x_0) = x_0$, определено при всех $t \geq t_0$.

Определение 8. Множество $\mathcal{M}$ называется *положительно инвариантным относительно включения* (7.1), если $(t, S(t,t_0,X_0)) \in \mathcal{M}$ для любого $t_0 \in \mathbb{R}$, каждого компактного множества $X_0 \subset M(t_0)$ и всех $t \geq t_0$.

Определение 9. Непрерывная функция $V\colon \mathcal{M}^r \to \mathbb{R}$ называется *функцией Ляпунова* (относительно множества $\mathcal{M}$), если $V(t,x) = 0$ при $(t,x) \in \operatorname{fr}\mathcal{M}$ и $V(t,x) > 0$ при всех $(t,x) \in \mathcal{N}^r$ и некотором $r > 0$. Функция Ляпунова $V\colon \mathcal{M}^r \to \mathbb{R}$ называется *определенно положительной* (относительно множества $\mathcal{M}$), если для всякого $\varepsilon \in (0,r)$ найдется такое $\delta > 0$, что $V(t,x) \geq \delta$ при всех $(t,x) \in \operatorname{fr}\mathcal{M}^\varepsilon$. Если $V(t,x)$ локально липшицева, то существует *производная* $V_F^{\mathrm{o}}(t,x)$ *функции* V *в силу включения* (7.1), определяемая равенством $V_F^{\mathrm{o}}(t,x) = \max_{h \in F(t,x)} V^{\mathrm{o}}(t,x;q)$, где

$$q = (1,h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \qquad V^{\mathrm{o}}(t,x;q) = \limsup_{(\vartheta,y,\varepsilon) \to (t,x,+0)} \frac{V(\vartheta+\varepsilon, y+\varepsilon h) - V(\vartheta,y)}{\varepsilon}. \tag{7.3}$$

Условие 6. Для всякого $r > 0$ найдется константа $l_r > 0$ такая, что неравенство $|V(t+\tau,x_1) - V(t,x_2)| \leq l_r(|\tau| + |x_1 - x_2|)$ справедливо для всех $t \in \mathbb{R}$ и всех $x_1, x_2 \in O_r$.

Теорема 5 (следствие теоремы 1)**.** *Пусть выполнены условия* 4 *и* 5 *и для некоторого* $r > 0$ *существует функция Ляпунова* V, *удовлетворяющая условию* 6 *и такая, что* $V_F^{\mathrm{o}}(t,x) \leq 0$ *для всех* $(t,x) \in \mathcal{N}^r$. *Тогда множество* $\mathcal{M}$ *положительно инвариантно.*

Определение 10. Множество $\mathcal{M}$ называется *равномерно* (по моменту времени t_0) *устойчивым* по Ляпунову *относительно включения* (7.1), если оно положительно инвариантно относительно включения (7.1) и для некоторого $r > 0$ и любого $\varepsilon \in (0,r)$ найдется такое $\delta \in (0,\varepsilon)$, что $(t, S(t,t_0,X_0)) \in \mathcal{M}^\varepsilon$ при всех $(t_0,X_0) \in \mathcal{M}^\delta$ и $t \geq t_0$.

Теорема 6 (следствие теоремы 2)**.** *Пусть выполнены условия* 4 *и* 5 *и существует определенно положительная относительно* $\mathcal{M}$ *функция Ляпунова* V, *удовлетворяющая условию* 6 *и такая, что* $V_F^{\mathrm{o}}(t,x) \leq 0$ *для всех* $(t,x) \in \mathcal{N}^r$. *Тогда множество* $\mathcal{M}$ *равномерно устойчиво относительно включения* (7.1).

Определение 11. Множество $\mathcal{M}$ называется *равномерно* (по моменту времени t_0) *асимптотически устойчивым* по Ляпунову относительно включения (7.1), если оно равномерно устойчиво и $\lim_{t\to\infty} d(S(t,t_0,X_0), M(t)) = 0$ для всякой точки $(t_0,X_0) \in \mathcal{M}^r$.

Напомним, что множество

$$G_\alpha \doteq \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\colon\ V(t,x) = \alpha\} \tag{7.4}$$

не содержит положительных полутраекторий овыпукленного включения (7.2), если для любой начальной точки $(t_0,x_0) \in G_\alpha$ и каждого решения $\varphi(t,t_0,x_0)$ включения (7.2) найдется такое $\tau = \tau(t_0,\varphi) > 0$, что $V(t_0+\tau, \varphi(t_0+\tau,t_0,x_0)) \neq \alpha$.

Условие 7. Для всякого решения $\varphi(t)$ включения (7.2), удовлетворяющего при больших t условию $(t,\varphi(t))\in\mathfrak{N}^r$, найдется такое $\vartheta>0$, что $\lim_{t\to\infty}\int_t^{t+\vartheta}V_F^{\mathrm{o}}(s,\varphi(s))\,ds<0$.

Легко проверить, что если выполнено условие 7, то множество (7.4) не содержит положительных полутраекторий включения (7.2). Обратное неверно.

Теорема 7 (следствие теоремы 4)**.** *Пусть выполнены условия* 4 *и* 5 *и при каждом* $t\in\mathbb{R}$ *множество* $M(t)$ *компактно и* $\sup_{t\in\mathbb{R}}|M(t)|<\infty$. *Если для некоторого* $r>0$ *существует определенно положительная относительно* $\mathfrak{M}$ *функция Ляпунова* V, *для которой выполнены условия* 6 *и* 7 *и производная которой в силу включения* (7.1) *при всех* $(t,x)\in\mathfrak{N}^r$ *удовлетворяет неравенству* $V_F^{\mathrm{o}}(t,x)\le 0$, *то множество* $\mathfrak{M}$ *равномерно асимптотически устойчиво относительно включения* (7.1).

8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 5–7

Доказательства теорем 5–7 основаны на стандартной процедуре построения по включению (7.1) динамической системы сдвигов и на применении к построенной динамической системе результатов разд. 4 и 6. Опишем этот процесс.

По заданным функциям $F(t,x)$ и $M(t)$ построим множество $\{(F_\tau,M_\tau)\colon\tau\in\mathbb{R}\}$ функций $(t,x)\to(F_\tau(t,x),M_\tau(t))\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)\times\mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$, где $(F_\tau(t,x),M_\tau(t))\doteq(F(t+\tau,x),M(t+\tau))$ — сдвиг пары (F,M) по времени t на константу τ. Далее возьмем замыкание этого множества $\Sigma(FM)\doteq\mathrm{cl}\{(F_\tau,M_\tau)\colon\tau\in\mathbb{R}\}$ в топологии равномерной сходимости на компактах. Это означает, что $(\widehat{F},\widehat{M})\in\Sigma(FM)$ в том и только том случае, если существует такая последовательность сдвигов $\{\tau_i\}$, что всякому $\vartheta\ge 0$ и любому $\varepsilon>0$ отвечает номер i_0 последовательности $\{\tau_i\}$, начиная с которого при всех $(t,x)\in[-\vartheta,\vartheta]\times O_\vartheta$ выполнено неравенство $\mathrm{dist}(F(\tau_i+t,x),\widehat{F}(t,x))+\mathrm{dist}(M_\vartheta(\tau_i+t),\widehat{M}_\vartheta(t))\le\varepsilon$, где $M_\vartheta\doteq M\cap O_\vartheta$.

Ниже будет показано, что при высказанных предположениях пространство $\Sigma(FM)$ метризуемо и является в этой метрике полным пространством. Определим на $\Sigma(FM)$ поток $f^\tau\colon\Sigma(FM)\to\Sigma(FM)$ равенством $f^\tau\sigma=(\widehat{F}_\tau,\widehat{M}_\tau)$, где $\sigma=(\widehat{F},\widehat{M})$.

Аналогичным образом по функции $F(t,x)$ построим пространство $\Sigma(F)$ и поток f^τ на $\Sigma(F)$ и для любых $F^1,F^2\in\Sigma(F)$ определим расстояние в смысле Бебутова [16] равенством

$$\beta(F^1,F^2)=\sup_{\vartheta\ge 0}\min\Big\{\max_{|t|,|x|\le\vartheta}\mathrm{dist}(F^1(t,x),F^2(t,x)),\frac{1}{\vartheta}\Big\}.\tag{8.1}$$

Таким же образом на пространстве $\Sigma(FM)$ определим расстояние

$$\beta(F^1M^1,F^2M^2)=\sup_{\vartheta}\min\Big\{\max_{|t|,|x|\le\vartheta}\big[\mathrm{dist}(F^1(t,x),F^2(t,x))+\mathrm{dist}(M^1_\vartheta(t),M^2_\vartheta(t))\big],\frac{1}{\vartheta}\Big\}.$$

Лемма 6. *Если выполнены условия* 4 *и* 5, *то каждая пара* $(\Sigma(F),f^\tau)$ *и* $(\Sigma(FM),f^\tau)$ *образует топологическую динамическую систему с топологией равномерной сходимости по* t *на каждом отрезке* $[-\vartheta,\vartheta]$ *равномерно по* x *на компактах в* $\mathbb{R}^n$. *В этой топологии фазовые пространства* $\Sigma(F)$ *и* $\Sigma(FM)$ *замкнуты.*

Доказательство. Докажем лемму для пары $(\Sigma(F),f^\tau)$. Как несложно проверить, из (8.1) следует, что неравенство $\beta(F^1,F^2)\le\varepsilon$ выполнено в том и только том случае, если для любого $\vartheta\in[0,\varepsilon^{-1}]$ справедливо неравенство

$$\max_{|t|,|x|\le\vartheta}\mathrm{dist}(F^1(t,x),F^2(t,x))\le\varepsilon.\tag{8.2}$$

Действительно, если $\beta(F^1,F^2)\le\varepsilon$, то $\min\big\{\max_{|t|,|x|\le\vartheta}\mathrm{dist}(F^1(t,x),F^2(t,x)),1/\vartheta\big\}\le\varepsilon$ при всех $\vartheta>0$. Если теперь $\vartheta\le\varepsilon^{-1}$, то $1/\vartheta\ge\varepsilon$, поэтому (8.2) выполнено при всех $\vartheta\le\varepsilon^{-1}$. Пусть теперь $\beta(F^1,F^2) > \varepsilon$, тогда найдется такое $\vartheta > 0$, что $1/\vartheta > \varepsilon$ и

$$\max_{|t|,|x|\le\varepsilon^{-1}} \operatorname{dist}(F^1(t,x),F^2(t,x)) \ge \max_{|t|,|x|\le\vartheta} \operatorname{dist}(F^1(t,x),F^2(t,x)) > \varepsilon.$$

Доказанное означает, что сходимость в пространстве $\Sigma(F)$ с метрикой (8.1) эквивалентна сходимости, равномерной по t на отрезках $[-\vartheta,\vartheta]$, равномерно по x на компактах в $\mathbb{R}^n$.

Докажем, что $\Sigma(F)$ замкнуто. Пусть последовательность $\{F^i\}$ такова, что $F^i \in \Sigma(F)$ и $\beta(F^i,\widehat{F}) \to 0$. Покажем, что $\widehat{F} \in \Sigma(F)$. Для каждого $\varepsilon_i > 0$ найдется такой момент времени t_i, что $\beta(F_{t_i},F^i) \le \varepsilon_i$. Пусть $\varepsilon_i \to 0$. Образуем из этих моментов времени последовательность $\{t_i\}$. Тогда $\beta(F_{t_i},F^i) \to 0$ и, следовательно, $\beta(F_{t_i},\widehat{F}) \le \beta(F_{t_i},F^i) + \beta(F^i,\widehat{F}) \to 0$. $\square$

Определим на $\Sigma(FM)\times\mathbb{R}^n$ функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{M}$ со значениями в $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ равенствами $\mathcal{F}(\sigma,x) = \widehat{F}(0,x)$, $\mathcal{M}(\sigma) = \widehat{M}(0)$, где $\sigma = (\widehat{F},\widehat{M})$. Тогда $\mathcal{F}(f^t\sigma,x) = \widehat{F}(t,x)$, $\mathcal{M}(f^t\sigma) = \widehat{M}(t)$. Тем самым мы построили семейство дифференциальных включений $\dot{x} \in \mathcal{F}(f^t\sigma,x)$ и множество

$$\mathfrak{M} = \bigl\{(\sigma,X) \in \Sigma(FM)\times\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)\colon\ X \subset \mathcal{M}(\sigma)\bigr\}, \tag{8.3}$$

аналогичные семейству включений (1.1) и множеству (2.2).

Лемма 7. *Если выполнено условие* 4, *то правая часть включения*

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(f^t\sigma,x), \qquad \sigma \in \Sigma(F), \tag{8.4}$$

удовлетворяет условию 1 (*см. разд.* 2).

Доказательство. Согласно заданию функции $\mathcal{F}$ достаточно доказать, что любая функция $\widehat{F}$ из $\Sigma(F)$ удовлетворяет условию Каратеодори. Пусть $\widehat{F} \in \Sigma(F)$, тогда найдется такая последовательность сдвигов $\{\tau_i\}$, что любым $\vartheta,\varepsilon > 0$ отвечает номер i_0, начиная с которого имеет место оценка

$$\max_{|t|,|x|\le\vartheta} \operatorname{dist}(F(\tau_i+t,x),\widehat{F}(t,x)) \le \varepsilon. \tag{8.5}$$

Очевидно, что F_τ удовлетворяет условию 4 для любого $\tau \in \mathbb{R}$. Кроме того, из неравенства (8.5) следует, что для любых $\vartheta,\varepsilon_i > 0$ найдется такое τ_i, что $\operatorname{dist}(F_{\tau_i}(t,x),\widehat{F}(t,x)) \le \varepsilon_i$ для любого $i = 1,2,\dots$ и всех $(t,x) \in [-\vartheta,\vartheta]\times O_\vartheta$. Покажем, что функция $x \to \widehat{F}(t,x)$ полунепрерывна сверху. Пусть x_0 — произвольная точка в O_ϑ и $x_i \to x_0$ при $i \to \infty$. Не уменьшая общности, будем считать, что $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$d(\widehat{F}(t,x_i),\widehat{F}(t,x_0)) \le d(\widehat{F}(t,x_i),F_{\tau_i}(t,x_i)) + d(F_{\tau_i}(t,x_i),F_{\tau_i}(t,x_0)) + d(F_{\tau_i}(t,x_0),\widehat{F}(t,x_0)) \to 0,$$

которое в силу произвольного выбора ϑ верно для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и всех $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\widehat{F}(t,x)$ полунепрерывна сверху по второму аргументу. Далее из неравенств

$$\varrho(0,\widehat{F}(t,x)) \le \varrho(0,F_{\tau_i}(t,x)) + d(F_{\tau_i}(t,x),\widehat{F}(t,x)) \le k_\vartheta + \varepsilon_i,$$

которые имеют место для всех $(t,x) \in \mathbb{R}\times O_\vartheta$, следует ограниченность на компактах функции $t \to |\widehat{F}(t,x)|$. Кроме того, из условия 4 получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\operatorname{dist}(F_{\tau_i}(t+\tau,x),F_{\tau_i}(t,x)) \le \varepsilon$ при $|\tau| \le \delta$ для всех $(t,x) \in \mathbb{R}\times O_\vartheta$ и любого τ_i. Отсюда вытекают соотношения

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\widehat{F}(t+\tau,x),\widehat{F}(t,x)) &\le \operatorname{dist}(\widehat{F}(t+\tau,x),F_{\tau_i}(t+\tau,x)) + \operatorname{dist}(F_{\tau_i}(t,x),\widehat{F}(t,x)) + \\ &\quad + \operatorname{dist}(F_{\tau_i}(t+\tau,x),F_{\tau_i}(t,x)) \le \\ &\le 2\varepsilon_i + \varepsilon.\end{aligned}$$

Таким образом, функция $t \to |\widehat{F}(t,x)|$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и, значит, измерима для любого $x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Наряду с включением (8.4) будем рассматривать овыпукленное включение

$$\dot{x} \in \operatorname{co} \mathcal{F}(f^t \sigma, x), \qquad \sigma \in \Sigma(\operatorname{co} F). \tag{8.6}$$

Сечение интегральной воронки включения (8.6) при фиксированном σ обозначим $\mathcal{S}(t, \sigma, X_0)$, $\mathcal{S}(0, \sigma, X_0) = X_0$. Отметим теперь, что если $S(t, t_0, X_0)$ — сечение интегральной воронки включения (7.2), $S(t_0, t_0, X_0) = X_0$, то $S_{t_0}(t, 0, X_0) \doteq S(t + t_0, t_0, X_0)$ — сечение интегральной воронки включения $\dot{x} \in \operatorname{co} F_{t_0}(t, x)$, которое можно записать в виде (8.6) при $\sigma = \operatorname{co} F_{t_0}$, где $F_{t_0}(t, x) = F(t + t_0, x)$. Следовательно, $S_{t_0}(t, 0, X_0) = \mathcal{S}(t, \sigma, X_0)$ при $\sigma = \operatorname{co} F_{t_0}$ и всех $t \geq 0$.

Лемма 8. *Если $F(t, x)$ удовлетворяет условиям 4 и 5, то всякому $\sigma \in \Sigma(\operatorname{co} F)$ отвечает такая последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, что при каждом $t \geq 0$ и любом $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$*

$$\lim_{i \to \infty} d(S_{t_i}(t, 0, X), \mathcal{S}(t, \sigma, X)) = 0. \tag{8.7}$$

Доказательство. Если $\sigma \in \Sigma(\operatorname{co} F)$, то $\sigma = \operatorname{co} \widehat{F}$, где $\widehat{F} \in \Sigma(F)$. Следовательно, найдется такая последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, что для любых $\vartheta, \varepsilon > 0$ при всех достаточно больших i имеет место неравенство

$$\max_{|t|, |x| \leq \vartheta} d(\operatorname{co} F_{t_i}(t, x), \operatorname{co} \widehat{F}(t, x)) \leq \varepsilon. \tag{8.8}$$

Поскольку согласно лемме 7 функция $\widehat{F}(t, x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, то интегральная воронка включения $\dot{x} \in \operatorname{co} \widehat{F}(t, x)$ полунепрерывно сверху зависит от правой части. Таким образом, из неравенства (8.8) следует, что для любого $t \in [0, \vartheta]$ и любого $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ имеет место соотношение $d(\mathcal{S}(t, \sigma_i, X), \mathcal{S}(t, \sigma, X)) \to 0$, $i \to \infty$, где $\sigma_i = \operatorname{co} F_{t_i}$. Заменяя $\mathcal{S}(t, \sigma_i, X)$ на $S_{t_i}(t, 0, X)$, получим равенство (8.7), которое в силу произвольного выбора ϑ справедливо для любого $t \geq 0$. $\square$

Пусть $V(t, x)$ — функция Ляпунова (относительно множества $\mathcal{M}$), для которой выполнено условие 6. По функции V построим замыкание $\Sigma(V)$ множества сдвигов V по переменной t в топологии равномерной сходимости на компактах $[-\vartheta, \vartheta] \times K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и стандартным образом введем динамическую систему $(\Sigma(V), f^\tau)$ и функцию

$$\mathcal{V} \colon \Sigma(V) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \text{где} \quad \mathcal{V}(\sigma, x) \doteq \widehat{V}(0, x), \quad \sigma = \widehat{V} \in \Sigma(V). \tag{8.9}$$

Наряду с динамическими системами $(\Sigma(F), f^\tau)$, $(\Sigma(FM), f^\tau)$, $(\Sigma(V), f^\tau)$ будем рассматривать динамическую систему $(\Sigma(FMV), f^\tau)$. Важно подчеркнуть, что $(\widehat{F}\widehat{M}\widehat{V}) \in \Sigma(FMV)$ в том и только том случае, если найдется последовательность $\{\tau_i\}$ (единая для F, M и V) такая, что $(FMV)_{\tau_i}$ сходится к $(\widehat{F}\widehat{M}\widehat{V})$ равномерно на компактах $[-\vartheta, \vartheta] \times K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

По заданному множеству

$$\mathcal{M} \doteq \bigl\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \colon\ x \in M(t)\bigr\} \tag{8.10}$$

и положительному числу r построим множество

$$\mathfrak{M}_0 \doteq \bigl\{(\sigma, x) \in \Sigma(FMV) \times \mathbb{R}^n \colon\ x \in \mathcal{M}(\sigma)\bigr\}, \tag{8.11}$$

аналогичное множеству (8.3), и его внешнюю r-окрестность

$$\mathfrak{N}_0^r \doteq \mathfrak{M}_0^r \setminus \mathfrak{M}_0, \qquad \text{где} \quad \mathfrak{M}_0^r \doteq \bigl\{(\sigma, x) \in \Sigma(FMV) \times \mathbb{R}^n \colon\ x \in \mathcal{M}^r(\sigma)\bigr\}. \tag{8.12}$$

Лемма 9. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Если функция $(t, x) \to V(t, x)$ удовлетворяет условию 6, то функция $\mathcal{V}(\sigma, x)$, определенная равенством (8.9), локально липшицева по (σ, x) в смысле определения 3.*

2. *Если* $V(t,x)$ — *функция Ляпунова относительно множества* (8.10), *то* $\mathcal{V}(\sigma,x)$ — *функция Ляпунова относительно множества* (8.11).

3. *Если* $V(t,x)$ *определенно положительна* (*в смысле определения* 9) *относительно множества* (8.10), *то функция* $\mathcal{V}(\sigma,x)$ *определенно положительна относительно множества* (8.11) *в смысле определения* 4.

4. *Если при всех* $(t,x)\in\mathcal{N}^r$ *выполнено неравенство* $V_F^{\mathrm{o}}(t,x)\le 0$, *то* $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}^{\mathrm{o}}(\sigma,x)\le 0$ *при всех* $(\sigma,x)\in\mathfrak{N}_0^r$.

5. *Если при всех* $(t,x)\in\mathcal{N}^r$ *выполнены неравенство* $V_F^{\mathrm{o}}(t,x)\le 0$ *и условие* 7, *то найдется такое* $\alpha_0>0$, *что для каждого* $\alpha\in(0,\alpha_0)$ *множество* $\mathfrak{S}_\alpha\doteq\{\omega\in\Omega\colon \mathcal{V}(\omega)=\alpha\}$, *построенное в соответствии с определением* 7, *не содержит положительных полутраекторий включения* (8.6).

Доказательство. 1. Достаточно показать, что всякая функция $\widehat{V}$ из $\Sigma(V)$ локально липшицева по совокупности аргументов. Очевидно, что если функция $V(t,x)$ удовлетворяет условию 6, то для всякого $\tau\in\mathbb{R}$ функция $(t,x)\to V_\tau(t,x)$ также удовлетворяет условию 6. Пусть $\widehat{V}\in\Sigma(F)$. Это означает, что существует последовательность сдвигов $\{\tau_i\}$ такая, что для любых $r,\varepsilon_k>0$ найдется номер $i_k=i(r,\varepsilon_k)$, начиная с которого неравенство $|V_{\tau_i}(t,x)-\widehat{V}(t,x)|\le\varepsilon_k$ имеет место для любых $(t,x)\in[-r,r]\times O_r$. Тогда

$$
\begin{aligned}
|\widehat{V}(t_1,x_1)-\widehat{V}(t_2,x_2)| \le |\widehat{V}(t_1,x_1)-V_{\tau_i}(t_1,x_1)| &+ |V_{\tau_i}(t_1,x_1)-V_{\tau_i}(t_2,x_2)|+\\
&+|V_{\tau_i}(t_2,x_2)-\widehat{V}(t_2,x_2)|\le\\
&\le \varepsilon_k+l_r(|t_1-t_2|+|x_1-x_2|)+\varepsilon_k.
\end{aligned}
$$

2. Пусть функция $(t,x)\to V(t,x)$ есть функция Ляпунова относительно множества (8.10). Тогда функция $(\sigma,x)\to\mathcal{V}(\sigma,x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}_0$, поскольку для любой точки $(\sigma,x)\in\mathfrak{M}_0^r$, где $\sigma=(\widehat{F}\widehat{M}\widehat{V})$, имеет место равенство $\mathcal{V}(\sigma,x)=$ $=\widehat{V}(0,x)$, в котором функция $\widehat{V}$ представляет собой функцию Ляпунова относительно множества $\widehat{\mathcal{M}}\doteq\{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\colon x\in\widehat{M}(t)\}$, а включение $x\in\mathcal{M}(\sigma)$ в (8.11) означает включение $x\in\widehat{M}(0)$.

3. Покажем, что для любого $\sigma=(\widehat{F}\widehat{M}\widehat{V})\in\Sigma(FMV)$ функция $\widehat{V}(t,x)$ является определенно положительной относительно множества $\widehat{\mathcal{M}}$. Так как функция $V(t,x)$ определенно положительна относительно $\mathcal{M}$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $V_\tau(t,x)\ge\delta$ для любой точки $(t,x)\in\operatorname{fr}\mathcal{M}_\tau^\varepsilon$ и любого $\tau\in\mathbb{R}$, где $\mathcal{M}_\tau\doteq\{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\colon x\in M_\tau(t)\}$.

Пусть $\varepsilon>0$ и $(t_0,x_0)\in\operatorname{fr}\widehat{\mathcal{M}}^\varepsilon$. Так как $(\widehat{F}\widehat{M}\widehat{V})\in\Sigma(FMV)$, то существует последовательность $\{\tau_i\}$ такая, что для любых $\vartheta,\varepsilon_k>0$ найдется такой номер $i_k=i(\vartheta,\varepsilon_k)$, начиная с которого имеют место неравенства $|V_{\tau_i}(t,x)-\widehat{V}(t,x)|\le\varepsilon_k$, $\operatorname{dist}(M_{\tau_i}(t),\widehat{M}(t))\le\varepsilon_k$ для всех $(t,x)\in[-\vartheta,\vartheta]\times O_\vartheta$. Пусть $\varepsilon_k\to 0$ и ϑ таково, что $(t_0,x_0)\in[-\vartheta,\vartheta]\times O_\vartheta$. Тогда из соотношения $\varrho(x_0,\operatorname{fr}M_{\tau_i}^\varepsilon(t_0))\le\varrho(x_0,\operatorname{fr}\widehat{M}^\varepsilon(t_0))+\operatorname{dist}(\operatorname{fr}\widehat{M}^\varepsilon(t_0),\operatorname{fr}M_{\tau_i}^\varepsilon(t_0))\to 0$ следует, что для каждого i найдется такое $\varkappa_i>0$, что $\varkappa_i\to 0$ и $x_0\in H_i^\varepsilon\doteq\operatorname{fr}M_{\tau_i}^\varepsilon(t_0)+O_{\varkappa_i}$. Далее в силу непрерывности V_{τ_i} по (t,x) и неравенства $V_{\tau_i}(t,x)\ge\delta$ для $(t,x)\in\operatorname{fr}\mathcal{M}_\tau^\varepsilon$ при всех $(t,x)\in H_i^\varepsilon$ и достаточно больших i имеет место оценка $V_{\tau_i}(t,x)\ge\delta/2$. Поэтому

$$
\widehat{V}(t_0,x_0)=(\widehat{V}(t_0,x_0)-V_{\tau_i}(t_0,x_0))+V_{\tau_i}(t_0,x_0)\ge(\widehat{V}(t_0,x_0)-V_{\tau_i}(t_0,x_0))+\delta/2\to\delta/2.
$$

Таким образом, $\widehat{V}(t,x)$ определенно положительна относительно множества $\widehat{\mathcal{M}}$.

4. Пусть $V_F^{\mathrm{o}}(t,x)\le 0$ при всех $(t,x)\in\mathcal{N}^r$. Покажем, что $\widehat{V}_{\widehat{F}}^{\mathrm{o}}(t,x)\le 0$ для всех $(t,x)\in\widehat{\mathcal{N}}^r$, где $\widehat{\mathcal{N}}^r=\widehat{\mathcal{M}}^r\setminus\widehat{\mathcal{M}}$. Из неравенства $V^{\mathrm{o}}(t,x;q)\le 0$, выполненного при всех $(t,x)\in\widehat{\mathcal{N}}^r$, для любого τ

следует неравенство $V^{\mathrm{o}}_{\tau}(t,x;q)\le 0$. Фиксируем такую последовательность $\{\tau_i\}$, что $(FMV)_{\tau_i}$ сходится к $(\widehat{F}\widehat{M}\widehat{V})$ в метрике Бебутова. Так как функция $\widehat{V}$ локально липшицева, то она имеет производную Кларка по любому направлению, поэтому для произвольной точки (t_0,x_0) из $\widehat{\mathfrak{N}}^r$ найдется такая последовательность $\{(\vartheta_k,y_k,\varepsilon_k)\}$, что $\varepsilon_k>0$, $(\vartheta_k,y_k,\varepsilon_k)\to(t_0,x_0,0)$ при $k\to\infty$ и

$$\widehat{V}^{\mathrm{o}}(t_0,x_0;q)=\lim_{k\to\infty}\frac{\widehat{V}(\vartheta_k+\varepsilon_k,y_k+\varepsilon_k h)-\widehat{V}(\vartheta_k,y_k)}{\varepsilon_k},$$

где $q=(1,h)$. Далее для каждого k найдется такой номер i_k последовательности $\{\tau_i\}$, что для всех $i\ge i_k$ неравенства $|V_{\tau_i}(t,x)-\widehat{V}(t,x)|\le(\varepsilon_k)^2$, $\operatorname{dist}(M_{\tau_i}(t),\widehat{M}(t))\le\varepsilon_k$ и $\operatorname{dist}(F_{\tau_i}(t,x),\widehat{F}(t,x))\le\varepsilon_k$ выполнены для любой точки (t,x) из некоторой окрестности точки (t_0,x_0). Утверждение 4 следует теперь из неравенств

$$\begin{aligned}
&\widehat{V}^{\mathrm{o}}(t_0,x_0;q)-V^{\mathrm{o}}_{\tau_i}(t_0,x_0;q)\le\\
&\le\lim_{k\to\infty}\frac{\widehat{V}(\vartheta_k+\varepsilon_k,y_k+\varepsilon_k h)-\widehat{V}(\vartheta_k,y_k)}{\varepsilon_k}-\lim_{k\to\infty}\frac{V_{\tau_i}(\vartheta_k+\varepsilon_k,y_k+\varepsilon_k h)-V_{\tau_i}(\vartheta_k,y_k)}{\varepsilon_k}\le\\
&\le\lim_{k\to\infty}\frac{|\widehat{V}(\vartheta_k+\varepsilon_k,y_k+\varepsilon_k h)-V_{\tau_i}(\vartheta_k+\varepsilon_k,y_k+\varepsilon_k h)|}{\varepsilon_k}+\lim_{k\to\infty}\frac{|\widehat{V}(\vartheta_k,y_k)-V_{\tau_i}(\vartheta_k,y_k)|}{\varepsilon_k}\le 2\varepsilon_k.
\end{aligned}$$

5. Достаточно доказать, что при некотором $\alpha_0>0$ имеет место следующее свойство: для каждого $\alpha\in(0,\alpha_0)$, всякой тройки $(\widehat{F}\widehat{M}\widehat{V})\in\Sigma(FMV)$ и любого решения $\widehat{\varphi}(t)$ включения $\dot{x}\in\operatorname{co}\widehat{F}(t,x)$, удовлетворяющего при всех $t\ge 0$ условиям $(t,\widehat{\varphi}(t))\in\widehat{\mathfrak{N}}^r$, $\widehat{V}(0,\widehat{\varphi}(0))=\alpha$, найдется такой момент времени $\tau>0$, что $\widehat{V}(\tau,\widehat{\varphi}(\tau))<\alpha$.

Допустим, что сказанное неверно, тогда найдутся $\alpha>0$, тройка $(\widehat{F}\widehat{M}\widehat{V})\in\Sigma(FMV)$ и решение $\widehat{\varphi}(t)$ включения $\dot{x}\in\operatorname{co}\widehat{F}(t,x)$ такие, что $(t,\widehat{\varphi}(t))\in\widehat{\mathfrak{N}}^r$ и $\widehat{v}(t)\doteq\widehat{V}(t,\widehat{\varphi}(t))\equiv\alpha$ при всех $t\ge 0$. Для заданного $t_0\in\mathbb{R}$ фиксируем такую последовательность $\{\tau_i\}$, что $\tau_i\to\infty$ и $(FMV)_{\tau_i}\to(\widehat{F}\widehat{M}\widehat{V})$ в метрике Бебутова (см. (8.1)). Далее найдутся подпоследовательность последовательности $\{\tau_i\}$ (которую мы по-прежнему будем обозначать $\{\tau_i\}$) и решение $\varphi(t)$ включения (7.2), для которых $(t,\varphi(t))\in\mathfrak{N}^r$ при $t\ge t_0$, $\varphi_{\tau_i}\to\widehat{\varphi}$ (в метрике Бебутова), когда $i\to\infty$ (доказательство этого свойства аналогично доказательству леммы Филиппова [6, гл. 2, § 7, лемма 1]). В силу условия 7 для функции $v(t)=V(t,\varphi(t))$ при некоторых $\varepsilon>0$, $\vartheta>0$ и всех достаточно больших t выполнено неравенство $v(t+\vartheta)-v(t)=\int_t^{t+\vartheta}\dot{v}(s)\,ds\le-\varepsilon$. Поэтому при замене t на τ_i для больших i получаем $v_{\tau_i}(\vartheta)-v_{\tau_i}(0)=\int_0^{\vartheta}\dot{v}_{\tau_i}(s)\,ds\le-\varepsilon$. Переходя в неравенстве $v_{\tau_i}(\vartheta)-v_{\tau_i}(0)\le-\varepsilon$ к пределу при $i\to\infty$, приходим к оценке $\widehat{v}(\vartheta)\le\alpha-\varepsilon$, противоречащей равенству $\widehat{V}(\vartheta,\varphi(\widehat{\vartheta}))=\alpha$. $\square$

Авторы выражают искреннюю признательность профессору А.И. Булгакову за ряд полезных замечаний, высказанных в процессе работы над этой статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН. 1985. Т. 169. С. 194–252.
2. *Панасенко Е.А.* Устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Изв. Ин-та мат. и информ. УдГУ. Ижевск. 2006. Вып. 3. С. 121–122.
3. *Панасенко Е.А., Тонков Е.Л.* Аттракторы дифференциальных включений // Математическая теория оптимального управления и теория дифференциальных включений: Науч. сем., посв. 60-летию В.И. Благодатских. М.: МИАН, 2006. С. 32.
4. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехтеориздат, 1949. 550 с.

5. *Аносов Д.В., Арансон С.Х., Арнольд В.И., Бронштейн И.У., Гринес В.З., Ильяшенко Ю.С.* Динамические системы–1. М.: ВИНИТИ, 1985. 244 с. (Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фунд. напр.; Т. 1).
6. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 223 с.
7. *Roxin E.* Stability in general control systems // J. Diff. Equat. 1965. V. 1, N 2. P. 115–150.
8. *Сибирский К.С., Шубэ А.С.* Полудинамические системы (топологическая теория). Кишинев: Штиинца, 1987. 271 с.
9. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.
10. *Aubin J.-P.* Viability theory. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1991. 543 p.
11. *Ирисов А.Е., Тонков Е.Л.* Достаточные условия оптимальности рекуррентных по Биркгофу движений дифференциального включения // Вестн. Удмурт. ун-та, Ижевск. 2005. №1. С. 59–74.
12. *Benedetti I., Panasenko E.* Positive invariance and differential inclusions with periodic right-hand side // Nonlin. Dyn. and Syst. Theory. 2007. V. 7, N 4. P. 339–349.
13. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
14. *Deimling K.* Multivalued differential equations. Berlin; New York: W. de Gruyter, 1992. 260 p. (De Gruyter Ser. Nonlin. Anal. and Appl.; V. 1).
15. *Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.* Об устойчивости движения в целом // ДАН СССР. 1952. Т. 86, №3. С. 453–456.
16. *Бебутов М.В.* О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюл. Мех.-мат. фак. МГУ. 1941. №5. С. 1–52.