



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Асеев, А. В. Кряжимский, Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста, *Труды МИАН*, 2007, том 257, 3–271

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.116.28.79

10 января 2025 г., 20:27:44



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
ВВЕДЕНИЕ.....	6
Глава 1. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА БЕС- КОНЕЧНОМ ПОЛУИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ.....	10
1. Постановка задачи.....	10
2. Существование оптимального управления.....	19
3. Основные соотношения принципа максимума и условия трансверсальности на беско- нечности.....	23
4. Гамильтонова система принципа максимума.....	32
5. Экономическая интерпретация принципа максимума.....	39
6. Краевые условия принципа максимума. Контрпримеры.....	50
7. Аппроксимационный принцип максимума. Случай систем, аффинных по управлению... ..	63
8. Обобщенные управления и приближение нелинейных управляемых систем системами, линейными по управлению.....	72
9. Аппроксимационный принцип максимума. Общий нелинейный случай.....	82
10. Условие монотонности.....	94
11. Биаффинный случай.....	106
12. Случай доминирования дисконтирующего множителя.....	110
13. Принцип максимума и достаточные условия оптимальности.....	118
14. Динамическая модель оптимального инвестирования в основные производственные фонды предприятия.....	121
15. Неоклассическая модель оптимального экономического роста.....	129
16. Библиографические комментарии.....	146
Глава 2. ОПТИМАЛЬНЫЙ РОСТ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ.....	153
17. Описание модели.....	153
18. Принцип максимума.....	160
19. Редуцированная задача.....	174
20. Элементы векторного поля.....	182
21. Варианты векторного поля.....	197
22. Решение задачи в неособых невырожденных совмещенных случаях.....	223
23. Решение задачи в вырожденных совмещенных случаях.....	242
24. Решение задачи в особом невырожденном совмещенном случае с двумя точками покоя..	250
25. Решение задачи в особых невырожденных совмещенных случаях с одной точкой покоя..	259
26. Заключительные замечания.....	264
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	269

CONTENTS

Preface.....	5
INTRODUCTION.....	6
Chapter 1. THE MAXIMUM PRINCIPLE FOR AN INFINITE-HORIZON OPTIMAL CONTROL PROBLEM	10
1. Statement of the problem.....	10
2. Existence of an optimal control.....	19
3. Core relations of the maximum principle and transversality conditions at infinity.....	23
4. Hamiltonian system of the maximum principle.....	32
5. Economic interpretation of the maximum principle.....	39
6. Boundary conditions of the maximum principle: Counterexamples.....	50
7. Maximum principle based on approximations: The case of systems affine in control.....	63
8. Generalized controls and approximation of nonlinear control systems by systems linear in control.....	72
9. Maximum principle based on approximations: The general nonlinear case.....	82
10. Monotonicity condition.....	94
11. Biaffine case.....	106
12. The case of dominating discount.....	110
13. Maximum principle and sufficient optimality conditions.....	118
14. Dynamical model of optimal investment in basic production assets of an enterprise.....	121
15. Neoclassical model of optimal economic growth.....	129
16. Bibliographic comments.....	146
Chapter 2. OPTIMAL GROWTH OF A TECHNOLOGICAL FOLLOWER	153
17. Description of the model.....	153
18. Maximum principle.....	160
19. Reduced problem.....	174
20. Elements of the vector field.....	182
21. Variants of the vector field.....	197
22. Solution of the problem in the nonsingular nondegenerate mixed cases.....	223
23. Solution of the problem in the degenerate mixed cases.....	242
24. Solution of the problem in the singular nondegenerate mixed case with two fixed points.....	250
25. Solution of the problem in the singular nondegenerate mixed cases with one fixed point.....	259
26. Concluding remarks.....	264
REFERENCES.....	269

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая монография посвящена теории принципа максимума Понтрягина для специального класса задач оптимального управления, возникающих в экономике при исследовании процессов экономического роста. Главная отличительная черта задач такого рода — это неограниченность полуинтервала времени, на котором осуществляется процесс управления. В монографии развивается новый аппроксимационный подход к получению необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для задач на бесконечном полуинтервале времени. В центре внимания — характеристика поведения сопряженной переменной и гамильтониана задачи на бесконечности. С позиций предложенного подхода исследуется одна задача об оптимальном росте “технологического последователя” — страны, абсорбирующей в своем технологическом секторе часть знаний, произведенных “технологическим лидером”. Оптимизируя свой рост, технологический последователь динамически перераспределяет имеющиеся трудовые ресурсы между производственным и научно-исследовательскими секторами экономики. Эта задача имеет самостоятельное значение в теории эндогенного экономического роста. Кроме того, она служит содержательной иллюстрацией разработанного аппроксимационного подхода.

Основные результаты, представленные в настоящей монографии, являются новыми. Они обобщают и усиливают ряд предыдущих результатов в этом направлении. Эти результаты были получены авторами в ходе совместных исследований в Международном институте прикладного системного анализа (IIASA, Laxenburg, Austria) и Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН (Москва, Россия) в 2000–2006 гг. Частично эти исследования были выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 99-01-01051, 03-01-00737, 06-01-00034) и Fujitsu Research Institute (IIASA–FRI contract 01-109).

Авторы благодарят Д.В. Аносова, Е.Ф. Мищенко и В.М. Тихомирова за внимание к данной работе и полезное обсуждение полученных результатов. Особую благодарность авторы выражают К.О. Бесову, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний и предложений.

С.М. Асеев, А.В. Кряжмский

ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени естественно возникают в экономике при рассмотрении динамических моделей оптимального распределения ресурсов. Часто такие задачи связывают с исследованием процессов экономического роста. Этим обусловлено их название — *задачи оптимального экономического роста*. Максимизируемый функционал полезности в задачах оптимального экономического роста имеет специальный вид. Он задается несобственным интегралом, содержащим экспоненциальный дисконтирующий множитель.

По-видимому, впервые экономическая модель, приводящая к задаче оптимального управления такого вида, была исследована (в рамках классического вариационного исчисления) английским математиком Ф. Рамсеем [72] в 20-х годах прошлого века. Модель Рамсея оказала большое влияние на создание современной концепции устойчивого развития в экономике и послужила прототипом для последующих многочисленных моделей оптимального экономического роста. В 60–70-е годы прошлого века мощный толчок развитию этого направления в экономике (см. [23, 24, 46, 65, 80]) дало открытие (в конце 50-х годов) Л.С. Понтрягиным и его сотрудниками знаменитого принципа максимума Понтрягина [19]. Оказалось, что принцип максимума Понтрягина, первоначально созданный для решения задач оптимального управления техническими системами (см., например, [1]), имеет прозрачную экономическую интерпретацию (см. [49, 53, 82]), а для многих экономических моделей оптимального динамического распределения ресурсов является эффективным (и часто единственным) аналитическим средством их исследования.

В последние годы интерес к задачам оптимального управления в экономике резко возрос. Это вызвано как повышением общего интереса к динамическим моделям в экономике (см. [36, 68]), так и появлением новых моделей оптимального экономического роста — прежде всего моделей развития экономик, основанных на знаниях (см., например, [57]), и моделей, учитывающих глобальные последствия развития мировой экономики (см., например, [71]). Характерно, что во многих случаях соответствующие этим моделям задачи оптимального управления требуют решения именно на бесконечном полуинтервале времени, при этом наибольший интерес представляет характеристика предельного поведения оптимального управления и оптимальной траектории на бесконечности.

С математической точки зрения задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени интересны прежде всего трудностями, вызываемыми неограниченностью времени управления. Неограниченность времени управления вносит в задачу особенность, что является источником специальных эффектов в соотношениях принципа максимума Понтря-

гина. Именно для задач с бесконечным временем необходимые условия оптимальности, вообще говоря, допускают различные “патологии” асимптотического поведения сопряженной переменной на бесконечности (с точки зрения выполнения стандартных условий трансверсальности), что существенно затрудняет использование общего варианта принципа максимума Понтрягина [19, 58] и приводит к необходимости разработки его специализированных версий, учитывающих эффекты такого рода.

Условия трансверсальности на бесконечности играют важную роль в соотношениях принципа максимума Понтрягина для задач оптимального экономического роста (на бесконечном полуинтервале времени). Дело в том, что известный общий вариант принципа максимума Понтрягина для таких задач [19, 58] не дает никакой информации о поведении сопряженной переменной на бесконечности. В этом смысле он неполон. Содержательно это выражается в том, что соответствующие соотношения выделяют, вообще говоря, слишком широкое множество экстремалей (траекторий, подозрительных на оптимальность).

Следует отметить, что выполнение условий трансверсальности, характеризующих поведение сопряженных переменных на бесконечности, важно не только с точки зрения эффективности применения принципа максимума. Условия трансверсальности на бесконечности имеют содержательный экономический смысл и служат важной характеристикой оптимального экономического роста.

В настоящее время имеется обширная литература, посвященная принципу максимума Понтрягина в экономических моделях. В многочисленных публикациях рассматриваются как разнообразные модели оптимального экономического роста и оптимального динамического распределения ресурсов (см. [22, 39, 49, 57, 71, 77]), так и чисто математические вопросы, связанные с развитием аппарата принципа максимума (см. [35, 42, 43, 45, 54, 58, 64, 70, 75, 76, 79, 83]). В экономических публикациях вопрос обоснованности применения той или иной версии принципа максимума Понтрягина, содержащей “естественные” условия трансверсальности на бесконечности, в контексте той или иной конкретной задачи, как правило, не обсуждается. Обычно считается, что условия трансверсальности выполняются автоматически — во всяком случае при положительном параметре дисконтирования (см., например, обсуждение этого вопроса в [39, 49]). Это, однако, не всегда так. И для случая положительного параметра дисконтирования имеются простые примеры, демонстрирующие возможность различного рода нарушений “естественного” поведения сопряженной переменной на бесконечности (ряд таких примеров подробно рассмотрен в настоящей монографии).

Несмотря на многочисленные попытки охарактеризовать поведение сопряженной переменной на бесконечности, положительные результаты в этом направлении были получены лишь при весьма ограничительных дополнительных условиях, обычно предполагавших либо полную выпуклость задачи, либо сильное доминирование дисконтирующего множителя. Это серьезно затрудняет применение соответствующих результатов к изучению многих содержательных экономических моделей (см., например, обсуждение обоснованности принципа максимума Понтрягина для одной экономической модели в [67]). Главная цель настоящей монографии — прояснение вопроса о характере асимптотического поведения сопряженной переменной на бесконечности и заполнение до некоторой степени этого пробела в теории оптимального управления.

Монография состоит из двух глав. В главе 1 развивается аппроксимационный подход к получению необходимых условий оптимальности первого порядка в задачах оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени. Суть подхода состоит в аппроксимации исходной задачи (P) оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$ подходящей последовательностью задач (P_k) , $k = 1, 2, \dots$, оптимального управления на конечных интервалах времени $[0, T_k]$, где $T_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Задачи (P_k) , $k = 1, 2, \dots$, не содержат каких-либо терминальных ограничений на правый конец траекторий и в этом смысле

сохраняют структуру исходной задачи (P). С другой стороны, аппроксимирующие задачи (P_k), $k = 1, 2, \dots$, не являются простыми “сужениями” исходной задачи (P) на конечные интервалы времени $[0, T_k]$, $k = 1, 2, \dots$. Максимизируемый функционал полезности в задачах (P_k), $k = 1, 2, \dots$, содержит специальную функцию штрафа, обеспечивающую сходимость на любом фиксированном интервале времени $[0, T]$ последовательности оптимальных управлений в задачах (P_k) к заранее заданному оптимальному управлению в исходной задаче (P). Необходимые условия оптимальности для задачи (P) получаются в результате предельного перехода в соотношениях принципа максимума Понтрягина для задач (P_k) при $k \rightarrow \infty$. Такой подход позволяет в ряде случаев найти общие соотношения, характеризующие поведение как сопряженной переменной, так и гамильтониана задачи (P) на бесконечности и дополняющие основные соотношения принципа максимума Понтрягина. Стандартные условия трансверсальности на бесконечности, обычно используемые в приложениях, оказываются следствиями этих общих соотношений.

Сначала метод аппроксимаций излагается для случая управляемых систем, аффинных по управлению. Этот случай, с одной стороны, прост в техническом отношении, с другой — важен по существу, поскольку наиболее часто встречается в приложениях. Для систем, аффинных по управлению, метод аппроксимаций имеет весьма прозрачную форму. Это связано с тем, что для таких систем задача (P) оптимального управления имеет “линейно выпуклую” (по управлению) структуру, что существенно упрощает конструкции. Отметим, что в данном случае для любого $T > 0$ сходимость последовательности оптимальных управлений для аппроксимирующих задач (P_k), $k = 1, 2, \dots$, к заданному оптимальному управлению исходной задачи (P) (при $k \rightarrow \infty$) имеет место в пространстве $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ интегрируемых с квадратом векторных функций $u: [0, T] \mapsto \mathbb{R}^m$.

Затем рассматривается общий нелинейный случай, предполагающий, что управляемая система не обязательно аффинна по управлению. В этом случае конструкции усложняются. Исходная задача (P) аппроксимируется задачами (P_k), $k = 1, 2, \dots$, для специально построенных систем, линейных по управлению. Последовательность оптимальных управлений для аппроксимирующих задач (P_k), $k = 1, 2, \dots$, как и раньше, сходится к заданному оптимальному управлению исходной задачи (P) на любом фиксированном интервале времени $[0, T]$; эта сходимость, однако, понимается по-другому, а именно как слабая сходимость обобщенных управлений [56].

В первой главе монографии много внимания уделяется обсуждению содержательной постановки задачи и экономической интерпретации принципа максимума Понтрягина.

Вторая глава посвящена исследованию одной нестандартной задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени, возникающей в теории эндогенного экономического роста (см. [22, 39, 57, 73]).

Рассматривается агрегированная макроэкономическая модель технологического развития двух стран — автаркического “технологического лидера” и “технологического последователя”. Особенность модели состоит в том, что в ней учтен эффект эндогенного распространения знаний (технологий), вырабатываемых технологическим лидером. Предполагается, что часть этих технологий абсорбируется технологическим последователем в процессе выполнения им собственных научно-исследовательских разработок. Ситуация изучается с точки зрения технологического последователя. Механизм управления технологическим последователем состоит в распределении имеющегося у него трудового ресурса между производственным и научно-исследовательским секторами экономики. Результатом деятельности научно-исследовательского сектора являются образцы новых товаров (новые технологии), которые частично заимствуются у технологического лидера. Целью процесса управления технологическим последователем является максимизация так называемого индекса потребления Диксита–Штиглица [52] — функционала полезности, характеризующего в агрегированном виде

абсолютную величину потребления на душу населения и одновременно разнообразие потребляемых товаров.

Ранее в работах [27, 28] (см. также [29]) эта задача рассматривалась для случая, когда объем трудовых ресурсов технологического последователя относительно мал. В работе [30] был рассмотрен частный случай, когда эластичность замещения между различными товарами равна 2, а остальные параметры модели произвольные. Здесь мы приводим аналитическое исследование данной задачи, основанное на применении принципа максимума Понтрягина в общем случае без каких-либо дополнительных ограничений на значения параметров модели. Сначала при помощи развитого в главе 1 аппроксимационного подхода выводится специализированная версия принципа максимума Понтрягина. Затем посредством анализа гамильтоновой системы принципа максимума дается описание всех оптимальных режимов. Приводится экономическая интерпретация результатов.

Глава 1

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПОЛУИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

В этой главе излагается аппроксимационный подход к изучению задач оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени. Основное внимание уделяется получению полных версий принципа максимума Понтрягина, в которых наряду с основными соотношениями содержится дополнительная информация об асимптотическом поведении сопряженной переменной и гамильтониана задачи на бесконечности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать следующую задачу оптимального управления (P):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad (1.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (1.2)$$

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max. \quad (1.3)$$

Здесь $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)) \in \mathbb{R}^n$ и $u(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t)) \in \mathbb{R}^m$ — значения в момент времени $t \geq 0$ фазового вектора управляемой системы (1.1) и ее вектора управления соответственно; U — непустой компакт в \mathbb{R}^m ; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданное начальное состояние системы; $\rho \geq 0$ — параметр дисконтирования. Предполагается, что $x_0 \in G$, где G — заданное открытое множество в \mathbb{R}^n . Далее предполагается, что векторная функция $f: G \times U \mapsto \mathbb{R}^n$, скалярная функция $g: G \times U \mapsto \mathbb{R}^1$, матричная функция $\partial f / \partial x = (\partial f^i / \partial x^j)_{i,j=1,\dots,n}$ и градиент $\partial g / \partial x = (\partial g / \partial x^1, \dots, \partial g / \partial x^n)$ непрерывны на декартовом произведении $G \times U$. Класс допустимых управлений системы (1.1) состоит из всех измеримых (по Лебегу) векторных функций $u: [0, \infty) \mapsto U$. Допустимая траектория системы (1.1), соответствующая допустимому управлению u , понимается как определенное на $[0, \infty)$ решение (в смысле Каратеодори [21]) x системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию (1.2). В дальнейшем считаем, что для любого допустимого управления u существует соответствующая ему траектория x , причем для

любого $t \geq 0$ ее значения $x(t)$ лежат в G . В силу непрерывной дифференцируемости векторной функции f по первой переменной x такая траектория единственная. Произвольная пара (x, u) , где u — допустимое управление и x — соответствующая ему траектория, называется *допустимой парой*. Предполагается, что для любой допустимой пары (x, u) интеграл в (1.3) сходится абсолютно. Допустимая пара (x_*, u_*) называется *оптимальной допустимой парой*, если *функционал полезности* (1.3) принимает на ней свое наибольшее возможное значение. В этом случае u_* — *оптимальное допустимое управление* (в задаче (P)), а x_* — *оптимальная допустимая траектория*.

В дальнейшем будем считать выполненными следующие условия.

(A1) Существует такое $C_0 \geq 0$, что

$$\langle x, f(x, u) \rangle \leq C_0(1 + \|x\|^2) \quad \text{для любых } x \in G, \quad u \in U.$$

(A2) Для всякого $x \in G$ множество

$$Q(x) = \{(z^0, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z^0 \leq g(x, u), z = f(x, u), u \in U\}$$

выпукло.

(A3) Существуют такие положительные функции μ и ω на $[0, \infty)$, что $\mu(t) \rightarrow +0, \omega(t) \rightarrow +0$ при $t \rightarrow \infty$ и, какова бы ни была допустимая пара (x, u) , выполняются неравенства

$$e^{-\rho t} \max_{u \in U} |g(x(t), u)| \leq \mu(t) \quad \text{для любого } t \geq 0, \quad (1.4)$$

$$\int_T^\infty e^{-\rho t} |g(x(t), u(t))| dt \leq \omega(T) \quad \text{для любого } T \geq 0. \quad (1.5)$$

Обсудим сформулированные условия (A1)–(A3).

Условия (A1) ограниченности и (A2) выпуклости часто используются в теоремах существования решений, характерных для теории оптимального управления (см. [20, 21, 48]). В дальнейшем эти условия потребуются главным образом для того, чтобы гарантировать существование оптимальных управлений для конструируемых ниже задач (P_k) , $k = 1, 2, \dots$, оптимального управления на конечных интервалах времени, служащих аппроксимациями задачи (P) .

Далее из условия (A1) следует, что для всякого $T > 0$ множество всех допустимых траекторий на $[0, T]$ равномерно ограничено и (ввиду компактности множества U) равномерно непрерывно. Поэтому в силу теоремы Арцела–Асколи (см., например, [48, 59]) выполнение условия (A1) влечет предкомпактность множества всех траекторий системы (1.1) с начальным условием (1.2) в пространстве $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ непрерывных векторных функций на конечном интервале времени $[0, T]$, $T > 0$, со значениями в \mathbb{R}^n .

Нетрудно видеть, что при выполнении условия (A2) *вектограмма* управляемой системы (1.1), т.е. множество

$$F(x) = \bigcup_{u \in U} f(x, u), \quad (1.6)$$

является выпуклым компактом в \mathbb{R}^n для любого $x \in G$. Поэтому для любого $T > 0$ множество всех допустимых траекторий управляемой системы (1.1) является замкнутым множеством (и, следовательно, компактом) в пространстве $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ (см., например, [20, 21, 48]). Кроме того, условие выпуклости (A2) (при выполнении условия (A1)) в силу непрерывности функции g делает замкнутым (и потому компактом) множество всех траекторий на $[0, T]$ расширенной управляемой системы (см. разд. 2) в $C([0, T], \mathbb{R}^{n+1})$, $T > 0$. Последнее обстоятельство влечет

существование оптимальных допустимых управлений в конструируемых ниже аппроксимируемых задачах (P_k) на конечных интервалах времени $[0, T_k]$, $k = 1, 2, \dots$

Заметим, что в случае, когда управляемая система (1.1) *аффинна по управлению*, т.е. представляема в виде

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m f_i(x(t))u^i(t), \quad (1.7)$$

где $f_i: G \mapsto \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$, — непрерывно дифференцируемые векторные функции, множество U — выпуклый компакт, а функция g вогнута по второй переменной u , условие (A2) выполняется автоматически.

Рассмотрим условие (A3). Неравенство (1.5) означает, что несобственный интеграл в (1.3) сходится абсолютно для любой допустимой пары (x, u) , а его “хвост” $\int_T^\infty e^{-\rho t} |g(x(t), u(t))| dt$ равномерно по всем допустимым парам (x, u) оценивается величиной $\omega(T)$ для любого $T > 0$. Поэтому (1.5) исключает какую-либо неоднозначность в трактовке интеграла, задающего значения функционала (1.3). Заметим, что если функция μ в (1.4) суммируемая, то (1.5) выполняется автоматически. В этом случае фигурирующую в (1.5) функцию ω можно определить равенством

$$\omega(T) = \int_T^\infty \mu(t) dt \quad \text{для любого } T \geq 0.$$

Из условий (A1)–(A3) и результатов [37] (см. [37, Theorem 3.6]) следует существование оптимального управления в задаче (P) (в разд. 2 для полноты изложения мы дадим простое прямое доказательство существования оптимального управления в задаче (P)).

Отметим, что условие (A2) не является обременительным с точки зрения необходимых условий оптимальности. При выводе необходимых условий оптимальности для задачи (P) эту задачу можно “овыпуклить” и считать условие (A2) выполненным. Действительно, если u_* — оптимальное управление для задачи (P) , в которой выполняются условия (A1) и (A3), но не выполняется условие (A2), то управление u_* обязательно оптимально и в соответствующим образом “овыпукленной” задаче, для которой выполняются уже все условия (A1)–(A3). Последнее утверждение вытекает из того факта, что при достаточно общих предположениях на любом конечном интервале времени любую допустимую траекторию овыпукленной управляемой системы можно сколь угодно точно приблизить (в равномерной метрике) некоторой допустимой траекторией исходной управляемой системы (см. [56]).

Приведенная выше постановка задачи (P) оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$ не является единственно возможной. В некоторых ситуациях задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени оказывается целесообразным рассматривать при допущении расходимости интеграла, задающего значение функционала полезности (1.3). В таких случаях понятие оптимальности допустимого управления u может быть определено различными способами (см. обсуждение этого вопроса, например, в [45, 81]). Если рассматриваемые процессы имеют циклический характер, то иногда рассматривают функционалы полезности вида, отличного от (1.3), характеризующие предельное значение усредненного по времени дохода (см. [3]).

В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением только задачи оптимального управления (P) с интегральным функционалом полезности с дисконтированием (1.3) в случае, когда выполняются условия (A1)–(A3) и, следовательно, интеграл, задающий значение функционала полезности (1.3), сходится абсолютно для любой допустимой пары (x, u) . Подчеркнем, что рассматриваемый случай охватывает многие типичные задачи оптимального управления в экономике. С другой стороны, при принятых предположениях удастся развить стройную

теорию принципа максимума Понтрягина и выделить те ситуации, когда основные соотношения принципа максимума для задач на неограниченном полуинтервале времени выполняются вместе с дополнительными условиями на поведение сопряженной переменной и гамильтониана на бесконечности.

Как уже отмечалось выше, основная трудность исследования задачи (P) состоит в том, что процесс управления системой (1.1) рассматривается на бесконечном полуинтервале времени. Эта трудность связана с тем обстоятельством, что наличие бесконечного полуинтервала вносит в задачу (P) особенность. Для иллюстрации этого эффекта в случае $\rho > 0$ сделаем в задаче (P) замену времени

$$\tau(t) = 1 - e^{-\rho t}, \quad t \in [0, \infty). \quad (1.8)$$

Непрерывно дифференцируемая функция $\tau: [0, \infty) \mapsto [0, 1)$ монотонно возрастает. Следовательно, замена (1.8) приводит к следующей задаче оптимального управления (Q) на конечном полуинтервале времени $[0, 1)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}x(\tau) &= \frac{1}{\rho(1-\tau)}f(x(\tau), u(\tau)), & u(\tau) &\in U, \\ x(0) &= x_0, \\ J(x, u) &= \int_0^1 g(x(\tau), u(\tau)) d\tau \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь класс допустимых управлений состоит, как обычно, из всех измеримых функций $u: [0, 1) \mapsto U$.

Построенная задача (Q) эквивалентна исходной задаче (P) (см. результаты [21] о замене переменной в дифференциальном включении). При этом в управляемой системе (1.9) в задаче (Q) имеется особенность в конечный момент $\tau_1 = 1$. В силу этой особенности правая часть управляемой системы (1.9) может стремиться к бесконечности при подходе времени τ слева к единице. Построения же классической теории оптимального управления [15, 19], опирающиеся на стандартные предположения относительно динамики системы и множества допустимых управлений, подразумевают ограниченность правой части управляемой системы вдоль допустимых траекторий на всем рассматриваемом конечном интервале времени. Это играет важную роль при реализации метода игольчатых вариаций. Таким образом, несмотря на то, что задача (Q) есть задача оптимального управления на ограниченном полуинтервале времени $[0, 1)$, она в силу имеющейся в ней особенности не укладывается в рамки стандартной теории оптимального управления [15, 19].

Задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени естественно возникают не только в экономике, но и в некоторых других областях знания (например, в биологии). Это связано с тем фактом, что для многих реальных экономических, биологических или социальных систем так же, как и для живых организмов, любое ограничение на интервал времени, на котором рассматривается процесс управления системой, часто оказывается неестественным. В частности, в экономике процесс управления предприятием, отраслью или государством обычно осуществляется при неявном предположении, что объект управления будет существовать вечно или, во всяком случае, неопределенно долго. При этом оптимальное допустимое управление призвано соответственно не только максимизировать текущую выгоду (интересы сегодняшнего поколения), но и принимать во внимание всю будущую выгоду (интересы всех последующих поколений). Такой подход к оптимизации управления наиболее точно соответствует концепции устойчивого развития в экономике. При этом выбор значения

дисконтирующего параметра ρ характеризует субъективное предпочтение текущей выгоды по отношению к последующей.

Однако даже в случае, когда объект управления существует заведомо конечное время, часто время окончания процесса управления не может быть определено ни в начальный момент $t_0 = 0$, ни в дальнейшем в процессе управления. В этом случае иногда оказывается естественным трактовать это заранее неизвестное время окончания процесса управления (момент гибели системы) как случайную величину.

Пример 1.1. Предположим, что длина заранее неизвестного интервала времени $[0, T]$, $T > 0$, на котором осуществляется процесс управления системой, есть случайная величина пуассоновского типа [13]. Именно для любого $t > 0$ условная вероятность $P(T < t + \Delta t | T \geq t)$, где Δt мало, того, что процесс управления системой прекратится в момент времени $T \in (t, t + \Delta t]$ при условии, что $T \geq t$, удовлетворяет равенству

$$P(T < t + \Delta t | T \geq t) = \rho \Delta t + o(\Delta t), \quad (1.10)$$

где $\rho > 0$ и $o(\Delta t)/\Delta t \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Согласно определению условной вероятности (см. [13]) имеем

$$\begin{aligned} P(T < t + \Delta t) &= P(T < t) + P(T < t + \Delta t | T \geq t)P(T \geq t) = \\ &= P(T < t) + P(T < t + \Delta t | T \geq t)(1 - P(T < t)). \end{aligned}$$

Отсюда в силу равенства (1.10) для функции распределения $\Phi(t) = P(T < t)$ случайной величины T получаем

$$\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t) = \rho(1 - \Phi(t))\Delta t + o(\Delta t).$$

Таким образом, функция Φ является решением линейного дифференциального уравнения

$$\dot{\Phi}(t) = \rho(1 - \Phi(t))$$

с начальным условием

$$\Phi(0) = 0.$$

Решая это дифференциальное уравнение, получаем, что случайная величина T имеет пуассоновские функцию распределения и плотность

$$\Phi(t) = 1 - e^{-\rho t}, \quad \phi(t) = \dot{\Phi}(t) = \rho e^{-\rho t} \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Рассмотрим в качестве значения максимизируемого функционала полезности на допустимой паре (x, u) математическое ожидание $E(J_T(x, u))$ случайной величины

$$J_T(x, u) = \int_0^T g(x(t), u(t)) dt,$$

где функция g характеризует мгновенную полезность допустимой пары (x, u) . Согласно определению математического ожидания имеем

$$E(J_T(x, u)) = \rho \int_0^\infty \int_0^T g(x(t), u(t)) dt e^{-\rho T} dT.$$

После интегрирования по частям, предполагая, что любая допустимая пара (x, u) удовлетворяет условию

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} \int_0^T g(x(t), u(t)) dt = 0$$

(что верно, например, при ограниченности функции g), получаем

$$E(J_T(x, u)) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt.$$

Таким образом, задача максимизации математического ожидания значений интеграла $J_T(x, u)$ со случайным верхним пределом приводит к задаче (P) . Легко видеть, что параметр ρ дисконтирования определяется равенством $\rho = 1/E(T)$, где $E(T)$ — математическое ожидание случайной величины T .

В моделях экономики координаты фазового вектора $x(t)$ часто трактуются как величины различных производственных факторов, участвующих в процессе производства в текущий момент времени $t \geq 0$, таких, как капитал (основные производственные фонды) $K(t)$, материалы $M(t)$, трудовые ресурсы $L(t)$ и т.д. При этом вектор $u(t)$ управления обычно характеризует текущие размеры инвестиций в производственные факторы. Значения же подынтегральной функции $g(x(t), u(t))$, определяющие после интегрирования с дисконтированием итоговую величину показателя полезности $J(x, u)$, обычно характеризуют текущую мгновенную полезность допустимой пары (x, u) .

Задачи оптимального управления в экономике могут формулироваться как на микроуровне (фирма или предприятие), так и на макроуровне (отрасль, государство или вся мировая экономика). Для моделей предприятия в качестве мгновенной полезности $g(x(t), u(t))$ часто рассматривают прибыль, получаемую предприятием в единицу времени, следующую за моментом времени $t \geq 0$ (текущую прибыль). В макроэкономических моделях оптимизации экономического роста мгновенная полезность может определяться величиной потребления на душу населения в единицу времени, величиной прироста потребления на душу населения в единицу времени и др.

В микроэкономических моделях дисконтирующий множитель $e^{-\rho t}$ в интеграле (1.3) иногда связывают с величиной инфляции — удельной скоростью обесценивания “реальной” стоимости используемой денежной единицы.

Пример 1.2. Предположим, что (P) есть некоторая задача оптимального управления предприятием. Пусть $z(t)$ — “реальная” стоимость используемой денежной единицы в момент времени $t \geq 0$. Не ограничивая общности, будем считать реальную стоимость денежной единицы в начальный момент времени $t_0 = 0$ равной единице, т.е. положим $z(0) = 1$. Предположим, что на каждом малом интервале времени $[t, t + \Delta t]$ происходит “обесценивание” денежной единицы таким образом, что реальная стоимость $z(t + \Delta t)$ денежной единицы в момент времени $t + \Delta t$ становится меньше ее стоимости $z(t)$ в момент времени t на величину $\rho z(t)\Delta t$ с точностью до величины более высокого порядка малости, чем Δt . Таким образом, величина $z(t) - z(t + \Delta t)$ обесценивания денежной единицы в течение малого временного интервала $[t, t + \Delta t]$ приблизительно пропорциональна стоимости $z(t)$ в начале интервала и его длине:

$$z(t) - z(t + \Delta t) = \rho z(t)\Delta t + o(\Delta t);$$

здесь $\rho > 0$ — постоянная “величина инфляции”. Тогда реальная стоимость $z(t)$ денежной единицы есть решение дифференциального уравнения

$$\dot{z}(t) = -\rho z(t)$$

с начальным условием

$$z(0) = 1.$$

Отсюда получаем

$$z(t) = e^{-\rho t}.$$

Пусть $g(x(t), u(t))$ — *мгновенная прибыль* предприятия в момент времени t (т.е. прибыль предприятия за единицу времени, следующую за моментом времени t). Эта мгновенная прибыль при учете инфляции (при пересчете в цены, имевшиеся на начальный момент времени $t_0 = 0$) уменьшается до значения $e^{-\rho t}g(x(t), u(t))$. Таким образом, в данном случае значение

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt$$

функционала полезности дает выражение для суммарной прибыли предприятия на всем бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$, исчисленной с учетом инфляции (в ценах на начальный момент времени $t_0 = 0$).

В макроэкономических моделях оптимизации экономического роста часто рассматривают функционал полезности (1.3) с логарифмической функцией g мгновенной полезности, т.е. полагают

$$g(x(t), u(t)) = \ln c(x(t), u(t)) \quad \text{для любого } t \geq 0,$$

где $c(x(t), u(t)) > 0$ — например, величина потребления на душу населения в единицу времени, следующую за моментом времени t . Рассмотрение логарифмической функции g мгновенной полезности вызвано тем обстоятельством, что в этом случае функционал полезности (1.3) характеризует динамику удельной скорости роста величины c на бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$.

Пример 1.3. Предположим, что рассматривается некоторая макроэкономическая задача оптимизации экономического роста. Пусть вдоль допустимой пары (x, u) функция

$$c(t) = c(x(t), u(t)) \quad \text{для любого } t \geq 0$$

положительна и абсолютно непрерывна (на любом конечном интервале времени). Тогда суммарное дисконтированное значение удельной скорости роста функции c вдоль пары (x, u) задается интегралом

$$\tilde{J}(x, u) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} dt. \quad (1.11)$$

Будем считать, что $\rho > 0$. Тогда, интегрируя (1.11) по частям и считая, что $c(0) = 1$ и $e^{-\rho t} \ln c(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, получаем

$$\tilde{J}(x, u) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} dt = \rho \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \ln c(t) dt.$$

Таким образом, на множестве всех таких допустимых пар (x, u) , для которых функция c положительна и (локально) абсолютно непрерывна, максимизация функционала полезности $\tilde{J}(x, u)$ вида (1.11) эквивалентна максимизации функционала

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \ln c(x(t), u(t)) dt$$

с логарифмической функцией g мгновенной полезности.

В заключение данного раздела в качестве примера экономической модели, приводящей к задаче (P), рассмотрим вариант *неоклассической модели* оптимального экономического роста (см. [46, 49, 63, 65, 78, 80]) с логарифмической функцией полезности. Данный класс моделей оптимального экономического роста восходит к первоначальной задаче Ф. Рамсея [72].

Пример 1.4. Неоклассическая модель оптимального экономического роста описывает замкнутую агрегированную экономику, производящую в каждый момент времени $t \geq 0$ единственный однородный продукт (\equiv капитал) со скоростью $Y(t) > 0$. В каждый момент времени t величина $Y(t)$ является функцией текущих значений капитала $K(t) > 0$ и трудовых ресурсов $L(t) > 0$; трудовые ресурсы также предполагаются однородными. Таким образом,

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (1.12)$$

Функция F обычно называется *производственной функцией*. Относительно производственной функции F предполагается, что она определена и непрерывна на положительном квадранте

$$G = \{(K, L) \in \mathbb{R}^2: K > 0, L > 0\},$$

дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет следующим “неоклассическим” условиям (условиям Инады [62]) для всех $K > 0, L > 0$:

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial K^2} < 0, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial L^2} < 0, \quad (1.14)$$

$$\lim_{K \rightarrow +0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = \infty, \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = 0, \quad (1.15)$$

$$\lim_{L \rightarrow +0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = \infty, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = 0. \quad (1.16)$$

Наконец, предполагается, что F положительно однородна первой степени, т.е.

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \quad \text{для любых } \lambda > 0, \quad K > 0, \quad L > 0. \quad (1.17)$$

Последнее условие означает, что объем производства в каждую единицу времени прямо пропорционален величинам имеющихся в эту единицу времени производственных факторов. В качестве производственной функции F может фигурировать, например, стандартная функция Кобба–Дугласа (см., например, [74]) вида

$$F(K, L) = AK^{\alpha_1} L^{\alpha_2},$$

где $A > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Заметим, что в силу равенства (1.17) не все условия в (1.13)–(1.16) независимы. В частности, второе условие в (1.14) следует из второго условия в (1.13) и (1.17).

В замкнутой экономике произведенный продукт либо инвестируется в основные производственные фонды (капитал), либо потребляется. Предположим, что в каждый момент времени $t \geq 0$ минимально возможная часть потребляемого продукта есть $\varepsilon Y(t) > 0$, где $0 < \varepsilon < 1$ — некоторая постоянная, а доля продукта $(1 - \varepsilon)Y(t)$ может быть распределена между производством и потреблением произвольным образом.

Пусть в момент времени $t \geq 0$ часть

$$I(t) = u(t)Y(t), \quad 0 \leq u(t) \leq 1 - \varepsilon, \quad (1.18)$$

произведенного продукта инвестируется в основные производственные фонды, а оставшаяся часть

$$C(t) = (1 - u(t))Y(t) \quad (1.19)$$

потребляется. В дальнейшем величина $u(t) \in [0, 1 - \varepsilon]$ будет трактоваться как значение управления в момент времени t .

В данной модели амортизации капитала не предполагается. Поэтому в силу равенства (1.18) динамика изменения капитала может быть описана при помощи следующего дифференциального уравнения:

$$\dot{K}(t) = I(t) = u(t)Y(t). \quad (1.20)$$

Считаем, что в начальный момент времени $K(0) = K_0 > 0$.

Пусть трудовые ресурсы удовлетворяют условию экспоненциального роста, т.е.

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \quad (1.21)$$

где $\mu > 0$ — некоторая постоянная. Аналогично будем считать, что $L(0) = L_0 > 0$.

Пусть $\rho > 0$ — параметр дисконтирования и в каждый момент времени $t \geq 0$ мгновенная полезность $g(K(t), L(t), u(t))$ текущего процесса управления есть логарифм полного потребления $C(t)$, т.е. (см. (1.12), (1.19))

$$g(K(t), L(t), u(t)) = \ln C(t) = \ln(1 - u(t)) + \ln F(K(t), L(t)).$$

Неоклассическая модель оптимального экономического роста (с логарифмической функцией мгновенной полезности) формулируется в виде следующей задачи оптимального управления (P_ε) , $0 < \varepsilon < 1$:

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= u(t)F(K(t), L(t)), & u(t) &\in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon], \\ \dot{L}(t) &= \mu L(t), \\ K(0) &= K_0, & L(0) &= L_0, \\ J(K, L, u) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\ln(1 - u(t)) + \ln F(K(t), L(t))] dt \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Задача (P_ε) удовлетворяет условиям (A1)–(A3) и является частным случаем задачи (P) .

При исследовании неоклассической задачи оптимального экономического роста обычно, используя условие однородности (1.17), понижают размерность системы и переходят к вспомогательной фазовой переменной $x = K/L$ (величине капитала, приходящегося на единицу рабочей силы) и однофакторной производственной функции f вида $f(x) = F(x, 1)$, $x > 0$. В этом случае в силу условий (1.12) и (1.17) для любого $t \geq 0$

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{1}{L(t)}F(K(t), L(t)) = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = f(x(t)).$$

Функция f определена и непрерывна на $\tilde{G} = (0, \infty)$. В силу условий (1.13) для всех $x > 0$

$$\frac{d}{dx}f(x) > 0, \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x) < 0 \quad (1.23)$$

и вследствие (1.13)–(1.17)

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{d}{dx} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f(x) = 0. \quad (1.24)$$

Для переменной $x(t) = K(t)/L(t)$ в силу равенств (1.20) и (1.21) имеем

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \frac{K(t)}{L(t)} = \dot{K}(t) \frac{1}{L(t)} - \frac{K(t)}{L^2(t)} \dot{L}(t) = u(t) \frac{Y(t)}{L(t)} - \mu \frac{K(t)}{L(t)},$$

откуда в силу определения переменной x и условий (1.12) и (1.17) вытекает равенство

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t).$$

Величина мгновенного потребления на единицу трудовых ресурсов в момент времени $t \geq 0$ есть $c(t) = C(t)/L(t)$. Согласно (1.12) и (1.19) получаем

$$c(t) = (1 - u(t)) \frac{Y(t)}{L(t)} = (1 - u(t))f(x(t)).$$

Заметим, что в силу равенства (1.21) трудовые ресурсы L в рассматриваемой модели подчиняются заранее заданной динамике. Поэтому максимизация интегрального функционала (1.22) эквивалентна задаче максимизации функционала

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \ln c(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} [\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))] dt,$$

характеризующего агрегированную удельную скорость роста потребления на единицу рабочей силы.

Таким образом, в терминах фазовой переменной x задача оптимального управления (P_ε) , $0 < \varepsilon < 1$, переписывается в виде следующей задачи (\tilde{P}_ε) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= u(t)f(x(t)) - \mu x(t), & u(t) &\in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon], \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} [\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))] dt \rightarrow \max.$$

Здесь $x_0 \in \tilde{G} = (0, \infty)$.

Качественное описание оптимальных режимов в задаче (P_ε) (или, что то же самое, в (\tilde{P}_ε)) в случае произвольного достаточно малого $\varepsilon > 0$ приведено ниже в разд. 15.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В этом разделе дается простое прямое доказательство существования оптимального допустимого управления для задачи (P) . Приведенное здесь доказательство основано на использовании стандартных результатов о существовании оптимального управления в задачах на конечных интервалах времени [48] и на использовании приближения задачи (P) последовательностью таких задач. В случае, когда управляемая система (1.1) аффинна по управлению, аналогичное доказательство было дано в [33]. Более общий результат о существовании оптимального допустимого управления в задачах на бесконечном полуинтервале времени см. в работе [37].

Теорема 2.1. Пусть выполняются условия (A1)–(A3). Тогда в задаче (P) существует оптимальное допустимое управление.

Доказательство. Пусть $\{T_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, — такая произвольная возрастающая последовательность положительных чисел, что $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \infty$.

Рассмотрим следующую вспомогательную последовательность $\{(Q_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, задач оптимального управления, каждая из которых определена на своем конечном интервале времени $[0, T_k]$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), & u(t) &\in U, \\ x(0) &= x_0, \\ J_k(x, u) &= \int_0^{T_k} e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Здесь для любого $k = 1, 2, \dots$ функции f , g , множество U и начальное состояние x_0 в задаче (Q_k) те же самые, что и в исходной задаче (P). Единственное отличие задачи (Q_k) от задачи (P) состоит в том, что она рассматривается на конечном интервале времени $[0, T_k]$. Как обычно, класс допустимых управлений в задаче (Q_k) состоит из всех измеримых векторных функций $u: [0, T_k] \mapsto U$.

В силу условий (A1), (A2) и теоремы Филиппова (см. [48, Theorem 9.3.i]) для любого $k = 1, 2, \dots$ существует оптимальная допустимая пара (x_k, u_k) в задаче (Q_k) . Пара (x_k, u_k) определена на конечном интервале времени $[0, T_k]$. Будем считать, что она продолжена произвольным допустимым образом на весь бесконечный полуинтервал времени $[0, \infty)$ и, таким образом, представляет собой допустимую пару для задачи (P).

Рассмотрим последовательность $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, допустимых управлений и последовательность $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, траекторий на конечном интервале времени $[0, T_1]$.

В силу условий (A1), (A2) и теоремы Арцела–Асколи существуют такая подпоследовательность $\{(x_{1,k}, u_{1,k})\}$, $k = 1, 2, \dots$, последовательности $\{(x_k, u_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, и такая абсолютно непрерывная функция $x_*: [0, T_1] \mapsto \mathbb{R}^n$, что последовательность $\{x_{1,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, сходится равномерно (т.е. в пространстве $C([0, T_1], \mathbb{R}^n)$) к x_* на интервале $[0, T_1]$. Покажем, что функция x_* является траекторией управляемой системы (1.1) на $[0, T_1]$, т.е. существует такое допустимое управление $u_*: [0, T_1] \mapsto U$, что

$$\dot{x}_*(t) = f(x_*(t), u_*(t)) \quad \text{при почти всех } t \in [0, T_1]. \quad (2.1)$$

При этом без ограничения общности можно считать, что выполняется неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{T_1} e^{-\rho t} g(x_{1,k}(t), u_{1,k}(t)) dt \leq \int_0^{T_1} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt. \quad (2.2)$$

Действительно, в силу условия (A1) множество всех допустимых траекторий управляемой системы (1.1) равномерно ограничено на интервале времени $[0, T_1]$. Следовательно, в силу компактности множества U существует такая постоянная $\kappa_1 \geq 0$, что для любой траектории x управляемой системы (1.1), любого $u \in U$ и любого $t \in [0, T_1]$ выполняется неравенство

$$e^{-\rho t} |g(x(t), u)| \leq \kappa_1. \quad (2.3)$$

Для любых $x \in G$ и $t \in [0, T_1]$ определим множество

$$W(x, t) = \{(z^0, z) \in \mathbb{R}^{n+1}: -\kappa_1 \leq z^0 \leq e^{-\rho t} g(x, u), z = f(x, u), u \in U\}.$$

В силу компактности множества U и условия (A2) для любых $x \in G$ и $t \in [0, T_1]$ множество $W(x, t)$ — выпуклый компакт. Кроме того, множества $W(x_k(t), t)$ равномерно ограничены для всех $k = 1, 2, \dots$ и $t \in [0, T_1]$, т.е. существует такая постоянная $\kappa_2 \geq 0$, что для любых $k = 1, 2, \dots$, $t \in [0, T_1]$ и любого вектора $(z^0, z) \in W(x_k(t), t)$ выполняется неравенство

$$\|z\| + |z^0| \leq \kappa_2. \quad (2.4)$$

Для каждого $k = 1, 2, \dots$ определим вспомогательную функцию $x_k^0: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ равенством

$$x_k^0(t) = \int_0^t e^{-\rho s} g(x_k(s), u_k(s)) ds.$$

По построению для любого $k = 1, 2, \dots$ векторная функция $(x_k^0, x_k): [0, T_1] \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ удовлетворяет дифференциальному включению

$$(\dot{x}_k^0(t), \dot{x}_k(t)) \in W(x_k(t), t) \quad \text{при почти всех } t \in [0, T_1].$$

Так как в силу (2.4) правая часть этого дифференциального включения равномерно ограничена, то в силу теоремы Арцела–Асколи и выпуклости множеств $W(x, t)$ при всех $x \in G$ и $t \in [0, T_1]$, переходя, если нужно, к подпоследовательности $\{(x_{1,k}^0, x_{1,k})\}$, $k = 1, 2, \dots$, в последовательности $\{(x_k^0, x_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, можно считать, что последовательность $\{(x_{1,k}^0, x_{1,k})\}$, $k = 1, 2, \dots$, сходится к векторной функции (x_*^0, x_*) равномерно на интервале $[0, T_1]$ при $k \rightarrow \infty$ и при этом абсолютно непрерывная функция (x_*^0, x_*) удовлетворяет дифференциальному включению

$$(\dot{x}_*^0(t), \dot{x}_*(t)) \in W(x_*(t), t) \quad \text{при почти всех } t \in [0, T_1].$$

По теореме Филиппова о существовании измеримой однозначной ветви у многозначного отображения (см. [20, 21]) существует такое допустимое управление $u_*: [0, T_1] \mapsto U$, что

$$\dot{x}_*(t) = f(x_*(t), u_*(t)) \quad \text{при почти всех } t \in [0, T_1]$$

и (см. (2.3))

$$-\kappa_1 \leq \dot{x}_*^0(t) \leq e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) \quad \text{при почти всех } t \in [0, T_1].$$

Отсюда в силу равномерной сходимости последовательности $\{x_{1,k}^0\}$, $k = 1, 2, \dots$, к функции x_*^0 на $[0, T_1]$ при $k \rightarrow \infty$ из последнего условия получаем неравенство (2.2). Условия (2.1) и (2.2) доказаны.

Заметим, что из предположений относительно траекторий системы (1.1) следует, что для любого $t \in [0, T_1]$ выполняется включение $x_*(t) \in G$. При этом в силу своего определения каждая допустимая пара $(x_{1,k}, u_{1,k})$, $k = 1, 2, \dots$, является оптимальной в некоторой вспомогательной задаче $(Q_{1,k})$ на соответствующем конечном интервале времени $[0, T_{1,k}]$, $T_1 \leq T_{1,k}$.

Рассмотрим теперь последовательность допустимых пар $\{(x_{1,k}, u_{1,k})\}$, $k = 1, 2, \dots$, на конечном интервале времени $[0, T_2]$.

Аналогично предыдущему случаю в силу условий (A1) и (A2) и теоремы Арцела–Асколи получаем, что существуют такая подпоследовательность $\{(x_{2,k}, u_{2,k})\}$, $k = 1, 2, \dots$, последовательности $\{(x_{1,k}, u_{1,k})\}$, $k = 1, 2, \dots$, и такая абсолютно непрерывная векторная функция, продолжающая x_* с $[0, T_1]$ на интервал $[0, T_2]$ (будем обозначать ее снова через x_*), что последовательность $\{x_{2,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, сходится к векторной функции x_* в пространстве $C([0, T_2], \mathbb{R}^n)$

при $k \rightarrow \infty$. При этом функция x_* является траекторией управляемой системы (1.1), т.е. существует такое допустимое управление, продолжающее управление u_* с интервала $[0, T_1]$ на интервал $[0, T_2]$ (будем обозначать его снова через u_*), что

$$\dot{x}_*(t) = f(x_*(t), u_*(t)) \quad \text{при почти всех } t \in [0, T_2].$$

При этом без ограничения общности можно считать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{T_2} e^{-\rho t} g(x_{2,k}(t), u_{2,k}(t)) dt \leq \int_0^{T_2} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt.$$

По своему определению допустимая пара $(x_{2,k}, u_{2,k})$, $k = 1, 2, \dots$, является оптимальной в некоторой вспомогательной задаче $(Q_{2,k})$ на соответствующем конечном интервале времени $[0, T_{2,k}]$, $T_2 \leq T_{2,k}$.

Повторяя данную процедуру бесконечно много раз, мы последовательно построим допустимую пару (x_*, u_*) на всем бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$. Одновременно мы получим семейство вспомогательных задач оптимального управления $\{(Q_{i,k})\}$, $i = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$, на конечных интервалах времени $[0, T_{i,k}]$, $T_i \leq T_{i,k}$, и семейство оптимальных допустимых пар $\{(x_{i,k}, u_{i,k})\}$ в задачах $(Q_{i,k})$. При этом для любого $i = 1, 2, \dots$ будут выполняться следующие условия:

$$x_{i,k} \rightarrow x_* \quad \text{в } C([0, T_i], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{T_i} e^{-\rho t} g(x_{i,k}(t), u_{i,k}(t)) dt \leq \int_0^{T_i} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt.$$

Выберем диагональную подпоследовательность $\{(Q_{k,k})\}$, $k = 1, 2, \dots$, из семейства задач $\{(Q_{i,k})\}$, $i = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$, и обозначим ее через $\{(Q_{m(k)})\}$, $k = 1, 2, \dots$. Соответственно получим последовательность оптимальных допустимых пар $\{(u_{m(k)}, x_{m(k)})\}$, $k = 1, 2, \dots$, в задачах $(Q_{m(k)})$ на конечных интервалах времени $[0, T_{m(k)}]$, $T_k \leq T_{m(k)}$. В силу построения для любого $i = 1, 2, \dots$ выполняются следующие условия:

$$x_{m(k)} \rightarrow x_* \quad \text{в } C([0, T_i], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{T_i} e^{-\rho t} g(x_{m(k)}(t), u_{m(k)}(t)) dt \leq \int_0^{T_i} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt. \quad (2.5)$$

Докажем, что построенная допустимая пара (x_*, u_*) оптимальна в задаче (P) .

Предположим противное, т.е. что существуют такие допустимая пара (\hat{x}, \hat{u}) и число $\varepsilon > 0$, что

$$J(x_*, u_*) < J(\hat{x}, \hat{u}) - \varepsilon. \quad (2.6)$$

В силу условия (1.5) для выбранного числа ε существует такое натуральное k_1 , что для любого $k \geq k_1$ выполняется неравенство

$$\omega(T_k) < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим последовательность пар $\{(x_{m(k)}, u_{m(k)})\}$, $k = 1, 2, \dots$, на фиксированном интервале времени $[0, T_{k_1}]$. В силу условия (2.5) существует такое натуральное $k_2 \geq k_1$, что для всех

$k \geq k_2$ выполняется неравенство

$$\int_0^{T_{k_1}} e^{-\rho t} g(x_{m(k)}(t), u_{m(k)}(t)) dt \leq \int_0^{T_{k_1}} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt + \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2.8)$$

Ввиду оптимальности пары $(x_{m(k_2)}, u_{m(k_2)})$ в задаче $(Q_{m(k_2)})$ имеем

$$J_{m(k_2)}(x_{m(k_2)}, u_{m(k_2)}) = \int_0^{T_{k_2}} e^{-\rho t} g(x_{m(k_2)}(t), u_{m(k_2)}(t)) dt \geq \int_0^{T_{k_2}} e^{-\rho t} g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt.$$

Отсюда в силу условий (2.7) и (1.5) получаем

$$\int_0^{T_{k_2}} e^{-\rho t} g(x_{m(k_2)}(t), u_{m(k_2)}(t)) dt \geq \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt - \frac{\varepsilon}{4} = J(\hat{x}, \hat{u}) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Следовательно, в силу условий (2.7) и (1.5) выполняются неравенства

$$J(\hat{x}, \hat{u}) \leq \int_0^{T_{k_2}} e^{-\rho t} g(x_{m(k_2)}(t), u_{m(k_2)}(t)) dt + \frac{\varepsilon}{4} \leq \int_0^{T_{k_1}} e^{-\rho t} g(x_{m(k_2)}(t), u_{m(k_2)}(t)) dt + \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда в силу (2.8) вытекает неравенство

$$J(\hat{x}, \hat{u}) \leq \int_0^{T_{k_1}} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt + \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Таким образом, в силу (1.5) получаем

$$J(\hat{x}, \hat{u}) \leq \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt + \varepsilon = J(x_*, u_*) + \varepsilon,$$

что противоречит предположению (2.6). Теорема доказана.

3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА И УСЛОВИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

В данном разделе приводится доказательство известного общего варианта принципа максимума Понтрягина для задачи (P) (см. [19, 58]) и обсуждаются основные наиболее часто используемые в приложениях дополнительные краевые условия для сопряженных переменных и гамильтониана на бесконечности.

Определим функцию Гамильтона–Понтрягина $\mathcal{H}: G \times [0, \infty) \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}^1$ и гамильтониан $H: G \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}^1$ задачи (P) стандартным образом [19]:

$$\mathcal{H}(x, t, u, \psi, \psi^0) = \langle f(x, u), \psi \rangle + \psi^0 e^{-\rho t} g(x, u),$$

$$H(x, t, \psi, \psi^0) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(x, t, u, \psi, \psi^0).$$

Формулировка принципа максимума Понтрягина включает в себя допустимую пару (x_*, u_*) и пару (ψ, ψ^0) сопряженных переменных (или множителей Лагранжа), соответствующую допустимой паре (x_*, u_*) . Сопряженная переменная ψ определяется как (локально) абсолютно непрерывная векторная функция на $[0, \infty)$ со значениями в \mathbb{R}^n , являющаяся решением (Каратеодори) на $[0, \infty)$ следующей линейной системы дифференциальных уравнений (сопряженной системы):

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t), \psi^0)}{\partial x} = -\left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x}\right]^* \psi(t) - \psi^0 e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x}. \quad (3.1)$$

Сопряженная переменная ψ^0 есть неотрицательное действительное число. Пара (ψ, ψ^0) сопряженных переменных называется *нетривиальной*, если

$$\|\psi(0)\| + \psi^0 > 0. \quad (3.2)$$

Будем говорить, что допустимая пара (x_*, u_*) удовлетворяет *основным соотношениям принципа максимума Понтрягина* (для задачи (P)) вместе с соответствующей ей парой (ψ, ψ^0) сопряженных переменных, если пара (ψ, ψ^0) является нетривиальной и на $[0, \infty)$ выполняется следующее *условие максимума*:

$$\mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t), \psi^0) \stackrel{\text{н.в.}}{=} H(x_*(t), t, \psi(t), \psi^0). \quad (3.3)$$

Принцип максимума Понтрягина наиболее информативен в случае, когда задача (P) является *нормальной*, т.е. когда множитель Лагранжа ψ^0 , фигурирующий в соотношениях (3.1)–(3.3), отличен от нуля. В этом случае, не ограничивая общности, можно считать, что $\psi^0 = 1$.

Определим *функцию Гамильтона–Понтрягина в нормальной форме* $\mathcal{H}: G \times [0, \infty) \times U \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$ и *нормальную форму гамильтониана* $H: G \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$ следующим образом:

$$\mathcal{H}(x, t, u, \psi) = \mathcal{H}(x, t, u, \psi, 1) = \langle f(x, u), \psi \rangle + e^{-\rho t} g(x, u),$$

$$H(x, t, \psi) = H(x, t, \psi, 1) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(x, t, u, \psi).$$

Соответственно для всякой допустимой пары (x_*, u_*) введем *нормальную форму сопряженной системы* как систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t))}{\partial x} = -\left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x}\right]^* \psi(t) - e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x}. \quad (3.4)$$

Любое определенное на $[0, \infty)$ решение (Каратеодори) ψ этой системы будем называть *сопряженной переменной* (множителем Лагранжа), соответствующей допустимой паре (x_*, u_*) .

Будем говорить, что допустимая пара (x_*, u_*) удовлетворяет *основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме* вместе с соответствующей ей сопряженной переменной ψ , если на полуинтервале $[0, \infty)$ выполняется следующее *условие максимума в нормальной форме*:

$$\mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) \stackrel{\text{н.в.}}{=} H(x_*(t), t, \psi(t)). \quad (3.5)$$

Заметим, что в этом случае условие (3.2) нетривиальности выполняется автоматически, поскольку $\psi^0 = 1$.

Следующий общий вариант принципа максимума Понтрягина для задачи (P) был получен в работах [19, 58].

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия (A1)–(A3) и допустимая пара (x_*, u_*) оптимальна в задаче (P). Тогда пара (x_*, u_*) удовлетворяет основным соотношениям (3.1)–(3.3) принципа максимума Понтрягина вместе с некоторой соответствующей ей парой (ψ, ψ^0) сопряженных переменных.

Доказательство. Утверждение теоремы 3.1 несложно вытекает из стандартного принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления на фиксированных конечных интервалах времени [19, 58] (см. также [45, 78]).

Действительно, наряду с задачей (P) рассмотрим последовательность вспомогательных задач $\{(Q_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), & u(t) &\in U, \\ x(0) &= x_0, & x(T_k) &= x_*(T_k), \\ J_k(x, u) &= \int_0^{T_k} e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max, \end{aligned}$$

где $\{T_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, $T_1 < T_2 < \dots$, — произвольная возрастающая и стремящаяся к бесконечности последовательность положительных чисел. Остальные данные задач (Q_k) , $k = 1, 2, \dots$, те же самые, что и для задачи (P). Таким образом, вспомогательные задачи (Q_k) , $k = 1, 2, \dots$, являются сужениями исходной задачи (P) на конечные интервалы времени $[0, T_k]$ с дополнительными краевыми условиями $x(T_k) = x_*(T_k)$ на правом конце. Напомним, что здесь x_* — заданная оптимальная траектория в задаче (P).

Нетрудно видеть, что из оптимальности пары (x_*, u_*) в задаче (P) следует ее оптимальность в задаче (Q_k) для любого $k = 1, 2, \dots$. Для любого $k = 1, 2, \dots$ в силу классического принципа максимума Понтрягина [19], применяемого к задаче (Q_k) , существует такая пара сопряженных переменных (ψ_k, ψ_k^0) , где $\psi_k: [0, T_k] \mapsto \mathbb{R}^n$ — абсолютно непрерывная векторная функция и $\psi_k^0 \geq 0$ — неотрицательная постоянная, что на $[0, T_k]$ имеем

$$\dot{\psi}_k(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} - \left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right]^* \psi_k(t) - \psi_k^0 e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x}, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi_k(t), \psi_k^0) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H(x_*(t), t, \psi_k(t), \psi_k^0) \quad (3.7)$$

и, кроме того,

$$\|\psi_k(0)\| + \psi_k^0 > 0. \quad (3.8)$$

Не ограничивая общности (нормируя сопряженные переменные в начальный момент времени $t_0 = 0$), можно считать, что условие нетривиальности (3.8) выполняется в виде равенства

$$\|\psi_k(0)\| + \psi_k^0 = 1. \quad (3.9)$$

Для каждого $k = 1, 2, \dots$ доопределим сопряженную функцию ψ_k на $[0, \infty)$, полагая $\psi_k(t) = \psi_k(T_k)$ при $t > T_k$.

Рассмотрим числовую последовательность $\{\psi_k^0\}$, $k = 1, 2, \dots$. В силу равенства (3.9) эта последовательность ограничена. Следовательно, переходя, если нужно, к подпоследовательности, не ограничивая общности, можно считать, что для некоторой постоянной $\psi^0 \geq 0$ имеем

$$\psi_k^0 \rightarrow \psi^0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

В силу условия (3.9), сопряженной системы (3.6) и леммы Гронуолла–Беллмана (см., например, [59]) последовательность $\{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, равномерно ограничена и равномерно непрерывна на $[0, T_1]$. Следовательно, в силу теоремы Арцела–Асколи (переходя, если нужно, к подпоследовательности) можно считать, что существует такая абсолютно непрерывная векторная функция $\psi: [0, T_1] \mapsto \mathbb{R}^n$, что последовательность $\{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, сходится к ψ равномерно на $[0, T_1]$ при $k \rightarrow \infty$. Легко видеть, что последнее обстоятельство, условие (3.10) и равенство (3.6) влекут выполнение на $[0, T_1]$ равенства

$$\dot{\psi}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} - \left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right]^* \psi(t) - \psi^0 e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x}. \quad (3.11)$$

Переходя в условии максимума (3.7) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем, что на $[0, T_1]$ справедливо равенство

$$\mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t), \psi^0) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H(x_*(t), t, \psi(t), \psi^0). \quad (3.12)$$

В силу (3.9), сходимости последовательности $\{\psi_k^0\}$, $k = 1, 2, \dots$, к ψ^0 и равномерной сходимости последовательности $\{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, к ψ на $[0, T_1]$ при $k \rightarrow \infty$ имеем

$$\|\psi(0)\| + \psi^0 = 1. \quad (3.13)$$

Рассуждая, как выше, заключаем, что, не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $\{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, сходится равномерно на $[0, T_2]$ при $k \rightarrow \infty$ к некоторой абсолютно непрерывной векторной функции $\tilde{\psi}: [0, T_2] \mapsto \mathbb{R}^n$, где $\tilde{\psi}(t) = \psi(t)$ при $t \in [0, T_1]$. Поэтому будем обозначать функцию $\tilde{\psi}$ снова через ψ . Легко видеть, что на интервале времени $[0, T_2]$ функция ψ удовлетворяет сопряженной системе (3.11) и условию максимума (3.12). Кроме того, функция ψ и неотрицательное число ψ^0 удовлетворяют условию нетривиальности (3.13).

Повторяя эту процедуру бесконечно много раз, мы построим сопряженную функцию ψ , которая определена на $[0, \infty)$, абсолютно непрерывна на любом конечном интервале времени, решает сопряженное уравнение (3.1) и удовлетворяет условию нетривиальности (3.2) и условию максимума (3.3). Теорема доказана.

Заметим, что формулировка теоремы 3.1 слабее формулировки соответствующего классического результата, известного для задачи оптимального управления на конечном интервале времени со свободным правым концом.

Действительно, рассмотрим следующую аналогичную задаче (P) задачу на конечном интервале времени со свободным правым концом (P_T) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), & u(t) &\in U, \\ x(0) &= x_0, \\ J_T(x, u) &= \int_0^T e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Здесь $T > 0$ — фиксированный конечный момент времени, а остальные данные те же самые, что и в исходной задаче (P) .

Если (x_*, u_*) — оптимальная допустимая пара в задаче (P_T) , то в силу классического принципа максимума Понтрягина [19], примененного к этой задаче, пара (x_*, u_*) удовлетворяет вместе с некоторой соответствующей ей парой сопряженных переменных (ψ, ψ^0) основным

соотношениям принципа максимума Понтрягина на интервале времени $[0, T]$, т.е.

$$\dot{\psi}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} - \left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right]^* \psi(t) - \psi^0 e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x}, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t), \psi^0) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H(x_*(t), t, \psi(t), \psi^0), \quad (3.15)$$

и, кроме того, сопряженные переменные ψ, ψ^0 удовлетворяют следующим условиям трансверсальности на правом конце:

$$\psi^0 = 1, \quad \psi(T) = 0. \quad (3.16)$$

Теорема 3.1, как видим, не содержит какого-либо аналога условий трансверсальности (3.16).

Условия трансверсальности (3.16) содержат важную информацию о паре сопряженных переменных (ψ, ψ^0) , соответствующей в силу принципа максимума Понтрягина оптимальной допустимой паре (x_*, u_*) в задаче (P_T) . Без условий трансверсальности (3.16) соотношения принципа максимума (3.14), (3.15) (вместе с условием нетривиальности (3.2)) неполны: они выделяют слишком широкое множество экстремалей.

Важность выполнения условий трансверсальности (3.16) обусловлена тем фактом, что, во-первых, они гарантируют нормальность задачи (P_T) , во-вторых, они однозначно определяют сопряженную переменную ψ как решение на $[0, T]$ линейной системы дифференциальных уравнений (3.14), удовлетворяющее краевому условию $\psi(T) = 0$.

Для задачи (P) оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$ вопрос о получении дополнительных условий, характеризующих поведение сопряженной переменной на бесконечности, рассматривался многими авторами (см. [35, 42, 43, 54, 58, 64, 70, 75, 76, 79, 83]). В качестве условий трансверсальности на бесконечности обычно предлагается использовать следующие “естественные” обобщения условий (3.16):

$$\psi^0 = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0 \quad (3.17)$$

или

$$\psi^0 = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \langle x_*(t), \psi(t) \rangle = 0. \quad (3.18)$$

Заметим, что использование условий (3.18) в качестве необходимых условий оптимальности иногда мотивируется тем, что эти условия фигурируют в известных (основанных на соотношениях принципа максимума) достаточных условиях оптимальности для задачи (P) (подробнее о достаточных условиях оптимальности для задачи (P) см. в разд. 13).

В общем случае для оптимальной допустимой пары (x_*, u_*) в задаче (P) и соответствующей ей пары сопряженных переменных (ψ, ψ^0) естественные условия трансверсальности (3.17) или (3.18) не выполняются. Более того, могут нарушаться оба условия как в соотношениях (3.17), так и в (3.18), причем в различных комбинациях.

Для случая $\rho = 0$ примеры такого “патологического” поведения сопряженных переменных были построены в работах [58, 78]. Для случая $\rho > 0$ пример, демонстрирующий возможность аномальности оптимальной допустимой пары в задаче (P) (т.е. ситуации, когда с необходимостью $\psi^0 = 0$), был построен в работе [70]. В разд. 6 для задачи (P) с положительным параметром дисконтирования $\rho > 0$ мы приведем набор примеров, иллюстрирующих разнообразные патологии поведения сопряженных переменных на бесконечности.

В случае $\psi^0 = 1$ поведение сопряженной переменной ψ на бесконечности может характеризоваться также при помощи соотношений, вытекающих из известной для линейных дифференциальных уравнений *формулы Коши*. Напомним в этой связи некоторые сведения из теории линейных дифференциальных уравнений (подробнее см., например, [14, 18, 59]).

На конечном интервале времени $[0, T]$, $T > 0$, рассмотрим неоднородную линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + b(t) \quad (3.19)$$

с начальным условием

$$y(\xi) = y_\xi. \quad (3.20)$$

Здесь $y \in \mathbb{R}^n$, A и b — определенные на $[0, T]$ ($n \times n$)-матричная и n -мерная векторная функции соответственно и y_ξ — заданное состояние системы в момент времени $\xi \in [0, T]$. Пусть все компоненты матричной функции A и все координаты векторной функции b измеримы и ограничены. Тогда на $[0, T]$ существует единственное решение (в смысле Каратеодори) y системы (3.19), удовлетворяющее начальному условию (3.20); кроме того, для любого $t \in [0, T]$ справедлива следующая *формула Коши*:

$$y(t) = Y(t) \left[[Y(\xi)]^{-1} y_\xi + \int_{\xi}^t [Y(s)]^{-1} b(s) ds \right]. \quad (3.21)$$

Здесь Y — нормализованная фундаментальная матрица линейной однородной системы

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t).$$

Точнее, Y есть определенная на $[0, T]$ ($n \times n$)-матричная функция, столбцы y_i , $i = 1, \dots, n$, которой являются (линейно независимыми) решениями на $[0, T]$ системы (3.21), удовлетворяющими начальным условиям

$$y_i^j(0) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где

$$\delta_{i,i} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{и} \quad \delta_{i,j} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим теперь сопряженную систему (3.14), фигурирующую в соотношениях принципа максимума Понтрягина для задачи (P_T) . Это линейная неоднородная система дифференциальных уравнений на конечном интервале времени $[0, T]$. Все компоненты матричной функции

$$A(t) = - \left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right]^*, \quad t \in [0, T],$$

и координаты векторной функции

$$b(t) = -e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x}, \quad t \in [0, T],$$

измеримы и ограничены (здесь мы учли, что в силу условий (3.16) $\psi^0 = 1$). Кроме того, для векторной функции ψ как для сопряженной переменной, соответствующей в силу принципа максимума Понтрягина оптимальной паре (x_*, u_*) , справедливо равенство $\psi(T) = 0$ (см. (3.16)).

Пусть Z_* — нормализованная фундаментальная матрица линейной однородной системы

$$\dot{z}(t) = - \left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right]^* z(t). \quad (3.22)$$

Таким образом, столбцы z_i , $i = 1, \dots, n$, $(n \times n)$ -матричной функции Z_* являются (линейно независимыми) решениями на $[0, T]$ системы (3.22), удовлетворяющими начальным условиям

$$z_i^j(0) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Обозначим через I_*^T следующую векторную функцию на интервале $[0, T]$ со значениями в \mathbb{R}^n :

$$I_*^T(t) = \int_t^T e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds \quad \text{для любого } t \in [0, T].$$

В терминах матричной функции Z_* и векторной функции I_*^T (при $\xi = T$ и с учетом равенства $\psi(T) = 0$) формула Коши (3.21) принимает вид

$$\psi(t) = Z_*(t) I_*^T(t) \quad \text{для любого } t \in [0, T]. \quad (3.23)$$

Обратимся к задаче (P) оптимального управления на бесконечном полуинтервале $[0, \infty)$. Так же как для задачи (P_T) , определим векторную функцию I_* на $[0, \infty)$ со значениями в \mathbb{R}^n следующим равенством (предполагая сходимость интеграла в правой части):

$$I_*(t) = \int_t^\infty e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (3.24)$$

Ниже будет показано, что в некоторых случаях (см. разд. 11, 12) для оптимальной допустимой пары (x_*, u_*) в задаче (P) интеграл (3.24) сходится абсолютно, а соответствующая паре (x_*, u_*) в силу принципа максимума Понтрягина в нормальной форме сопряженная переменная ψ удовлетворяет соотношению, аналогичному формуле Коши (3.23), именно

$$\psi(t) = Z_*(t) I_*(t) \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (3.25)$$

Формула (3.25) (в случае, когда она справедлива) однозначно определяет сопряженную переменную ψ . В этом смысле характеристика сопряженной переменной ψ посредством формулы (3.25) является наиболее информативной. В некоторых ситуациях формула (3.25) (см. разд. 12) влечет выполнение условий трансверсальности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \langle x_*(t), \psi(t) \rangle = 0.$$

Важной особенностью задачи (P) оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени является тот факт, что основные соотношения (3.1)–(3.3) принципа максимума всегда можно дополнить следующим условием *асимптотической стационарности гамильтониана* на бесконечности:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(x_*(t), t, \psi(t), \psi^0) = 0. \quad (3.26)$$

Впервые это обстоятельство было отмечено в работе [70]. Условие (3.26) асимптотической стационарности аналогично *условию трансверсальности по времени*, входящему в набор соотношений принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления со свободным (конечным) временем [19]. Легко видеть, что в рамках задачи (P) условие (3.26) эквивалентно следующему условию *стационарности гамильтониана*:

$$H(x_*(t), t, \psi(t), \psi^0) = \rho \psi^0 \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (3.27)$$

Действительно, в силу условия (1.5) равенство (3.26) вытекает из (3.27). С другой стороны, при выполнении условия (1.5) условие (3.27) следует из равенства (3.26) и соотношения

$$\frac{d}{dt}H(x_*(t), t, \psi(t), \psi^0) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t), \psi^0),$$

выполнение которого на полуинтервале $[0, \infty)$ в свою очередь вытекает из уравнений сопряженной системы (3.1) и условия максимума (3.3) (см. [19]). Таким образом, в рамках задачи (P) условия (3.26) и (3.27) эквивалентны.

Заметим, что так как факт эквивалентности условий (3.26) и (3.27) не связан со свойством оптимальности допустимой пары (x_*, u_*) , а вытекает из выполнения для этой пары соотношений принципа максимума Понтрягина, то справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. Пусть $\rho > 0$ и (x_*, u_*) — допустимая пара системы (1.1), удовлетворяющая соотношениям (3.4), (3.5) принципа максимума Понтрягина в нормальной форме с соответствующей ей сопряженной переменной ψ . Пусть, кроме того, интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds$$

сходится абсолютно (в задаче (P) это всегда так) и выполняется условие стационарности (3.26) (при $\psi^0 = 1$). Тогда имеем

$$\int_t^{\infty} e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds = \frac{1}{\rho} H(x_*(t), t, \psi(t)) \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (3.28)$$

Равенство (3.28) позволяет производить прямое сравнение значений функционала полезности (1.3) на различных допустимых парах системы (1.1), удовлетворяющих условиям леммы 3.1.

При исследовании задачи (P) оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени часто бывает удобно переходить в соотношениях принципа максимума Понтрягина к так называемым текущим сопряженной переменной, функции Гамильтона–Понтрягина и гамильтониану, значения которых в каждый момент времени $t \geq 0$ отличаются от значений введенных выше стандартных сопряженной переменной, функции Гамильтона–Понтрягина и гамильтониана экспоненциальным множителем $e^{\rho t}$. Использование термина “текущий” вызвано тем, что во многих экономических задачах дисконтирующий множитель $e^{-\rho t}$ характеризует предпочтение величины текущей полезности $g(x(t), u(t))$ в момент времени $t > 0$ по отношению к полезности в начальный момент $t_0 = 0$. Например, в рассмотренном выше примере 1.2 величина $g(x(t), u(t))$ есть текущая прибыль в единицу времени, следующую за моментом t , а $e^{-\rho t} g(x(t), u(t))$ есть величина этой прибыли с учетом инфляции (т.е. выраженная в ценах на начальный момент $t_0 = 0$). Дадим соответствующие пояснения.

Пусть ψ — сопряженная переменная, фигурирующая в соотношениях (3.1)–(3.3) принципа максимума Понтрягина для задачи (P). Определим *текущую сопряженную переменную* p равенством

$$p(t) = e^{\rho t} \psi(t) \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (3.29)$$

Соответственно для любых $x \in G$, $u \in U$, $p \in \mathbb{R}^n$ и $\psi^0 \geq 0$ определим значения *текущей функции Гамильтона–Понтрягина* $\mathcal{M}(x, u, p, \psi^0)$ и *текущего гамильтониана* $M(x, p, \psi^0)$ равенствами

$$\mathcal{M}(x, u, p, \psi^0) = e^{\rho t} \mathcal{H}(x, u, t, \psi, \psi^0) = \langle f(x, u), p \rangle + \psi^0 g(x, u), \quad (3.30)$$

$$M(x, p, \psi^0) = e^{\rho t} H(x, t, \psi, \psi^0) = \sup_{u \in U} (\langle f(x, u), p \rangle + \psi^0 g(x, u)). \quad (3.31)$$

В терминах текущей сопряженной переменной p и функций \mathcal{M} и M соотношения (3.1)–(3.3) принципа максимума Понтрягина для задачи (P) переписываются в следующем эквивалентном автономном виде:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &\stackrel{\text{п.в.}}{=} \rho p(t) - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), p(t), \psi^0) = \\ &= \rho p(t) - \left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right]^* p(t) - \psi^0 \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), p(t), \psi^0) \stackrel{\text{п.в.}}{=} M(x_*(t), p(t), \psi^0), \quad (3.33)$$

$$\|p(0)\| + \psi^0 > 0. \quad (3.34)$$

Условия трансверсальности (3.17) и (3.18) в терминах переменной p приобретают соответственно вид

$$\psi^0 = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} p(t) = 0 \quad (3.35)$$

и

$$\psi^0 = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \langle x_*(t), p(t) \rangle = 0, \quad (3.36)$$

а условие стационарности гамильтониана (3.27) записывается как

$$M(x_*(t), p(t), \psi^0) = \psi^0 \rho e^{\rho t} \int_t^{\infty} e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (3.37)$$

Наконец, принцип максимума Понтрягина в нормальной форме ($\psi^0 = 1$) для задачи (P) в терминах текущей сопряженной переменной p записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &\stackrel{\text{п.в.}}{=} \rho p(t) - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), p(t)) = \\ &= \rho p(t) - \left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right]^* p(t) - \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), p(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} M(x_*(t), p(t)). \quad (3.39)$$

Здесь для любых $x \in G$, $u \in U$, $p \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{M}(x, u, p) = e^{\rho t} \mathcal{H}(x, u, \psi) = \langle f(x, u), p \rangle + g(x, u), \quad (3.40)$$

$$M(x, p) = e^{\rho t} H(x, t, \psi) = \sup_{u \in U} (\langle f(x, u), p \rangle + g(x, u)). \quad (3.41)$$

Заметим, что условие нетривиальности (3.34) в соотношениях принципа максимума (3.38), (3.39) выполняется автоматически, поскольку $\psi^0 = 1$, а условие (3.37) стационарности в нормальной форме в терминах текущей сопряженной переменной p записывается в виде

$$M(x_*(t), p(t)) = \rho e^{\rho t} \int_t^{\infty} e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (3.42)$$

4. ГАМИЛЬТОНОВА СИСТЕМА ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Доказанный в предыдущем разделе общий вариант принципа максимума Понтрягина для задачи (P) (теорема 3.1) утверждает, что каждой оптимальной паре (x_*, u_*) соответствует некоторая пара (ψ, ψ^0) сопряженных переменных, удовлетворяющих основным соотношениям принципа максимума (3.1)–(3.3). Если же соотношения принципа максимума Понтрягина имеют нормальную форму (т.е. $\psi^0 = 1$), то, переходя к текущей сопряженной переменной p вида $p(t) = e^{\rho t} \psi(t)$, $t \geq 0$, получаем основные соотношения принципа максимума в виде (3.38), (3.39).

Всюду далее в этом разделе будем считать, что принцип максимума Понтрягина для задачи (P) выполняется в нормальной форме. Тогда равенства (3.38), (3.39) суть необходимые условия оптимальности допустимой пары (x_*, u_*) в задаче (P) ; напомним, что в (3.38) и (3.39) векторная функция p есть текущая сопряженная переменная, соответствующая допустимой паре (x_*, u_*) . Необходимые условия оптимальности (3.38), (3.39) позволяют свести поиск оптимальной пары (x_*, u_*) к анализу поведения совокупности всех траекторий (решений) так называемой *гамильтоновой системы принципа максимума* (для задачи (P)).

В классической механике (см., например, [2]) *гамильтонова система* — это система $2n$ дифференциальных уравнений относительно неизвестных n -мерных векторных функций x (координаты) и ψ (импульсы) вида

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial}{\partial \psi} H(x(t), \psi(t)), \quad (4.1)$$

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(x(t), \psi(t)). \quad (4.2)$$

Здесь H — некоторая гладкая функция (гамильтониан) переменных x и ψ , принимающих значения в открытом множестве $\Gamma \subset \mathbb{R}^{2n}$, и, возможно, времени.

Гамильтонова система принципа максимума для задачи (P) отличается от гамильтоновой системы классической механики формой правой части, которая может быть многозначной (в общем случае гамильтонова система принципа максимума записывается в форме дифференциального включения). Строится гамильтонова система принципа максимума для задачи (P) следующим образом. Сначала в пространстве \mathbb{R}^{2n} переменных x и p выделяют открытое множество Γ , которому могут принадлежать значения всех возможных пар (x_*, p) , где x_* — оптимальная допустимая траектория в задаче (P) , а p — соответствующая ей в силу принципа максимума (теорема 3.1) текущая сопряженная переменная (см. предыдущий раздел). Затем обращаются к условию (3.39) максимума, куда вместо неизвестных значений $x_*(t)$ и $p(t)$ записывают свободные переменные $(x, p) \in \Gamma$ и связывают с ними (вообще говоря, многозначную) функцию u , определенную на множестве Γ равенством

$$u(x, p) = \arg \max_{u \in U} \mathcal{M}(x, u, p) = \{u \in U : \mathcal{M}(x, u, p) = M(x, p)\} \quad \text{при } (x, p) \in \Gamma.$$

Подставляя так определенную функцию u в управляемую систему (1.1) и сопряженную систему (3.38), получают гамильтонову систему принципа максимума для задачи (P) в виде следующей системы дифференциальных включений:

$$\dot{x}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{\in} \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{M}(x(t), u(x(t), p(t)), p(t)), \quad (4.3)$$

$$\dot{p}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{\in} \rho p(t) - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M}(x(t), u(x(t), p(t)), p(t)). \quad (4.4)$$

Система дифференциальных включений (4.3), (4.4) определена в открытом множестве Γ . Ее фазовой траекторией (решением) является пара (локально) абсолютно непрерывных функций

(x, p) , определенных на некотором конечном или бесконечном интервале времени, удовлетворяющая на этом интервале включениям (4.3), (4.4). В силу теоремы 3.1 (напомним еще раз, что согласно нашему предположению принцип максимума выполняется в нормальной форме) оптимальная допустимая траектория x_* и соответствующая ей текущая сопряженная переменная p удовлетворяют системе дифференциальных включений (4.3), (4.4) на бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$. Таким образом, поиск оптимальной допустимой траектории x_* может быть сведен к анализу совокупности всех решений системы (4.3), (4.4).

В общем случае правая часть системы дифференциальных включений (4.3), (4.4) может иметь сложную структуру. Однако в некоторых ситуациях система (4.3), (4.4) приводится к гамильтоновой системе (4.1), (4.2). В частности, несложно показать, что, если функция максимума M в задаче (P) (см. (3.41)) является дважды непрерывно дифференцируемой функцией переменных x, p в множестве Γ , соотношения (4.3), (4.4) переписываются в виде

$$\dot{x}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{\partial}{\partial p} M(x(t), p(t)), \quad (4.5)$$

$$\dot{p}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \rho p(t) - \frac{\partial}{\partial x} M(x(t), p(t)). \quad (4.6)$$

В этом случае в переменных $x, \psi = e^{-\rho t} p$ гамильтонова система принципа максимума для задачи (P) является обычной гамильтоновой системой с гамильтонианом $H(x, t, \psi) = e^{-\rho t} M(x, p)$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда открытое множество Γ может быть представлено в виде объединения конечного числа имеющих непустую внутренность множеств, внутри каждого из которых гамильтонова система принципа максимума имеет вид (4.5), (4.6).

Пусть векторная функция f , скалярная функция g , матричная функция $\partial f / \partial x$ и векторная функция $\partial g / \partial x$ непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных (x, u) на открытом множестве $G \times \tilde{U}$, где \tilde{U} — некоторая окрестность компакта U . Предположим, что открытое множество Γ может быть разбито на конечное число q таких множеств $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_q$ (каждое из которых имеет непустую внутренность), что

$$\bigcup_{i=1}^q \Gamma_i = \Gamma, \quad \text{int } \Gamma_i \cap \text{int } \Gamma_j = \emptyset \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, q,$$

и, кроме того, внутри каждого множества Γ_i , $i = 1, \dots, q$, условие максимума (3.39) однозначно (и гладко) разрешается относительно переменной u , т.е. для любого $i = 1, \dots, q$ в открытом множестве $\text{int } \Gamma_i$ управление u однозначно определяется условием (3.39) как некоторая непрерывно дифференцируемая по переменным x, p функция $u_i: \text{int } \Gamma_i \mapsto U$. Тогда, подставляя функцию u_i в управляемую систему (1.1) и сопряженную систему (3.38), для каждого $i = 1, \dots, q$ в открытом множестве $\text{int } \Gamma_i$ получаем представление гамильтоновой системы принципа максимума (4.3), (4.4) в виде следующей автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{M}(x(t), u_i(x(t), p(t)), p(t)), \quad (4.7)$$

$$\dot{p}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \rho p(t) - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M}(x(t), u_i(x(t), p(t)), p(t)). \quad (4.8)$$

Нетрудно показать, что однозначная и гладкая разрешимость условия максимума (3.39) относительно управления u в множестве $\text{int } \Gamma_i$, $i = 1, \dots, q$, влечет непрерывную дифференцируемость гамильтониана M на этом множестве $\text{int } \Gamma_i$. При этом для любых $(x, p) \in \Gamma_i$ справедливы

равенства

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M}(x, u_i(x, p), p) = \frac{\partial}{\partial x} M(x, p), \quad \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{M}(x, u_i(x, p), p) = \frac{\partial}{\partial p} M(x, p).$$

Таким образом, в данном случае в множестве $\text{int } \Gamma_i$, $i = 1, \dots, q$, система дифференциальных уравнений (4.7), (4.8) совпадает с системой (4.5), (4.6). Последнее обстоятельство дает основание называть определенную выше систему дифференциальных включений (4.3), (4.4) *гамильтоновой системой принципа максимума* (для задачи (P)), поскольку в каждом из открытых множеств $\text{int } \Gamma_i$, $i = 1, \dots, q$, система (4.3), (4.4) представляет собой гамильтонову систему вида (4.5), (4.6).

Анализ гамильтоновой системы принципа максимума (4.3), (4.4) состоит в характеристике поведения фазовых траекторий системы дифференциальных уравнений (4.7), (4.8) в множествах $\text{int } \Gamma_i$, $i = 1, \dots, q$, в исследовании характера возможного пересечения этими траекториями границ $\partial \Gamma_i$ множеств Γ_i , а также в изучении движения фазовых траекторий по границам $\partial \Gamma_i$. Здесь в качестве начальных значений для фазовых траекторий гамильтоновой системы (4.3), (4.4) рассматривают все возможные точки множества Γ . В этом анализе важную роль играет выяснение характера поведения фазовых траекторий системы (4.7), (4.8) в окрестностях ее *положений равновесия* в множествах $\text{int } \Gamma_i$, $i = 1, \dots, q$.

Характеризация локального поведения траекторий автономной системы дифференциальных уравнений (4.7), (4.8) в окрестности ее гиперболического положения равновесия может быть дана при помощи следующей теоремы Гробмана–Хартмана (см. [38; 59, Ch. 9]).

Теорема 4.1. Пусть ξ — положение равновесия автономной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = \tilde{f}(x(t)), \quad (4.9)$$

т.е. $\tilde{f}(\xi) = 0$. Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ и \tilde{f} — непрерывно дифференцируемая векторная функция в некоторой окрестности точки ξ . Пусть далее все собственные значения $(n \times n)$ -матрицы

$$A = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(\xi)$$

имеют ненулевые действительные части. Тогда существуют такие окрестности Ω , Θ точки ξ и гомеоморфизм $h: \Omega \rightarrow \Theta$, что для любой лежащей в Ω траектории $\phi(t, x_0)$ системы (4.9) с начальным условием $\phi(0, x_0) = x_0 \in \Omega$ векторная функция $\eta(t, h(x_0)) = h(\phi(t, x_0))$ является лежащей в Θ траекторией линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - A\xi \quad (4.10)$$

с начальным условием $\eta(0, h(x_0)) = h(x_0)$.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 4.1 топологическая структура множества решений дифференциального уравнения (4.9) в окрестности положения равновесия ξ совпадает со структурой множества решений линейной системы (4.10) вблизи точки ξ (подробнее см. [38; 59, Ch. 9]).

Гамильтоновы системы обладают рядом свойств, выделяющих их из общих систем дифференциальных уравнений (см. [3]). Однако, как правило, этих свойств оказывается недостаточно, чтобы однозначно охарактеризовать оптимальные траектории x_* (и соответствующие им сопряженные переменные p) и тем самым выделить их из семейства всех траекторий гамильтоновой системы принципа максимума (4.3), (4.4). Именно поэтому при выделении оптимальных траекторий из семейства всех экстремалей принципа максимума важную роль играют

различные условия, дополняющие основные соотношения принципа максимума, такие, как условия трансверсальности (3.35) и (3.36), условие стационарности гамильтониана (3.42) или условие (3.25).

В некоторых случаях дополнительную характеристику фазовых траекторий гамильтоновой системы принципа максимума (4.3), (4.4), соответствующих оптимальным траекториям в задаче (P) , можно получить при помощи *принципа оптимальности Беллмана* [40].

При заданных $\alpha \geq 0$ и $x_\alpha \in G$ обозначим через $(P(x_\alpha, \alpha))$ следующую задачу оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени $[\alpha, \infty)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), & u(t) &\in U, \\ x(\alpha) &= x_\alpha, \\ J(x, u) &= \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Единственное отличие задачи $(P(x_\alpha, \alpha))$ от задачи (P) состоит в том, что задача $(P(x_\alpha, \alpha))$ рассматривается на бесконечном полуинтервале $[\alpha, \infty)$ с начальным условием $x(\alpha) = x_\alpha$, остальные же данные в ней те же самые, что и в исходной задаче (P) . В дальнейшем, когда мы будем рассматривать задачу $(P(x_\alpha, \alpha))$ при различных значениях параметров $\alpha \geq 0$ и $x_\alpha \in G$, каждый раз из контекста будет следовать, что задача $(P(x_\alpha, \alpha))$ определена корректно, все ее допустимые траектории лежат в множестве G , а оптимальное управление в ней существует.

Заметим, что задача $(P(x_0, 0))$ есть исходная задача (P) .

Для задачи (P) принцип оптимальности Беллмана может быть сформулирован в виде следующего утверждения.

Теорема 4.2. Пусть (x_*, u_*) — оптимальная допустимая пара в задаче (P) . Тогда для любого $\alpha \geq 0$ пара (x_*, u_*) является оптимальной допустимой парой в задаче оптимального управления $(P(x_*(\alpha), \alpha))$ на полуинтервале времени $[\alpha, \infty)$.

Легко видеть, что справедливость сформулированной теоремы 4.2 немедленно вытекает из свойства аддитивности интегрального функционала (1.3).

Таким образом, в каждый момент времени $\alpha \geq 0$ оптимальная траектория x_* в задаче (P) является оптимальной траекторией (соответствующей оптимальному управлению u_*) и в новой задаче $(P(x_\alpha, \alpha))$ с начальным состоянием $x_\alpha = x_*(\alpha)$ независимо от начального состояния x_0 в задаче (P) .

Следующий результат вытекает из принципа оптимальности Беллмана.

Теорема 4.3. Пусть (x_1, u_1) и (x_2, u_2) — две оптимальные допустимые пары, каждая в своей задаче $(P(\zeta_i, 0))$, $i = 1, 2$, отличающейся от исходной задачи (P) , возможно, начальным состоянием $x(0) = \zeta_i$, $i = 1, 2$, остальные данные в них те же самые. Пусть далее существуют такие моменты времени $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$, что $x_1(\alpha) = x_2(\beta)$. Тогда пара (\tilde{x}, \tilde{u}) , где

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= x_1(t) \quad \text{при } t \in [0, \alpha] & \text{и} & \quad \tilde{x}(t) = x_2(t + \beta - \alpha) \quad \text{при } t \in [\alpha, \infty), \\ \tilde{u}(t) &= u_1(t) \quad \text{при } t \in [0, \alpha] & \text{и} & \quad \tilde{u}(t) = u_2(t + \beta - \alpha) \quad \text{при } t \in [\alpha, \infty), \end{aligned}$$

является оптимальной допустимой парой в задаче $(P(\zeta_1, 0))$.

Доказательство. Очевидно, что так определенная пара (\tilde{x}, \tilde{u}) является допустимой в задаче $(P(\zeta_1, 0))$. Докажем ее оптимальность в этой задаче. Прежде всего заметим, что сужение пары (\tilde{x}, \tilde{u}) на интервал $[0, \alpha]$ совпадает с сужением на этот интервал пары (x_1, u_1) . Следова-

тельно, имеем

$$\int_0^{\alpha} e^{-\rho t} g(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt = \int_0^{\alpha} e^{-\rho t} g(x_1(t), u_1(t)) dt. \quad (4.11)$$

Далее из определения пары (\tilde{x}, \tilde{u}) вытекает равенство

$$\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\rho t} g(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt = e^{\rho(\beta-\alpha)} \int_{\beta}^{\infty} e^{-\rho t} g(x_2(t), u_2(t)) dt.$$

Однако последнее равенство означает, что пара (\tilde{x}, \tilde{u}) является оптимальной парой в задаче $(P(x_1(\alpha), \alpha))$. Действительно, имеется взаимно однозначное соответствие между допустимыми парами в задачах $(P(x_1(\alpha), \alpha))$ и $(P(x_2(\beta), \beta))$. Именно если (x_{α}, u_{α}) — произвольная допустимая пара в задаче $(P(x_1(\alpha), \alpha))$, то в силу условия $x_1(\alpha) = x_2(\beta)$ пара (x_{β}, u_{β}) , определенная равенствами

$$x_{\beta}(t) = x_{\alpha}(t + \alpha - \beta), \quad u_{\beta} = u_{\alpha}(t + \alpha - \beta) \quad \text{для любого } t \geq \beta,$$

является допустимой парой в задаче $(P(x_2(\beta), \beta))$. Легко видеть, что это соответствие взаимно однозначное, а для соответствующих друг другу пар (x_{α}, u_{α}) и (x_{β}, u_{β}) выполняется равенство

$$\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\rho t} g(x_{\alpha}(t), u_{\alpha}(t)) dt = e^{\rho(\beta-\alpha)} \int_{\beta}^{\infty} e^{-\rho t} g(x_{\beta}(t), u_{\beta}(t)) dt.$$

В силу последнего равенства оптимальные пары в задачах $(P(x_1(\alpha), \alpha))$ и $(P(x_2(\beta), \beta))$ также взаимно однозначно соответствуют друг другу. Следовательно, поскольку в силу условий теоремы $x_1(\alpha) = x_2(\beta)$, а в силу принципа оптимальности Беллмана (теорема 4.2) пара (x_2, u_2) оптимальна в задаче $(P(x_2(\beta), \beta))$, то пара (\tilde{x}, \tilde{u}) оптимальна в задаче $(P(x_1(\alpha), \alpha))$. Из данного факта и теоремы 4.2 вытекает равенство

$$\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\rho t} g(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt = \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\rho t} g(x_1(t), u_1(t)) dt.$$

Следовательно, учитывая равенство (4.11), получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x_1(t), u_1(t)) dt.$$

Отсюда следует, что пара (\tilde{x}, \tilde{u}) оптимальна в задаче $(P(x_1(0), 0))$, т.е. в задаче $(P(\zeta_1, 0))$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы 4.3 вытекает, что если две траектории (x_1, p_1) и (x_2, p_2) гамильтоновой системы принципа максимума (4.3), (4.4) в открытом множестве Γ (выбранном исходя из задачи $(P(\zeta_1, 0))$) соответствуют оптимальным парам (x_1, u_1) и (x_2, u_2) каждая в своей задаче $(P(\zeta_1, 0))$ и $(P(\zeta_2, 0))$ (при этом неважно, какое начальное состояние $\zeta_2 \in G$ задано в задаче $(P(\zeta_2, 0))$) и для моментов времени $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ выполняется равенство $x_1(\alpha) = x_2(\beta)$, то, переключившись в момент времени α с траектории x_1 на траекторию \tilde{x} вида $\tilde{x}(t) = x_2(t + \beta - \alpha)$, $t \in [\alpha, \infty)$, мы снова получим оптимальную траекторию в задаче $(P(\zeta_1, 0))$. Следовательно, этой траектории \tilde{x} должна соответствовать такая текущая сопряженная переменная \tilde{p} , что пара (\tilde{x}, \tilde{p}) является траекторией гамильтоновой системы принципа максимума (4.3), (4.4) в множестве Γ . Если же такой траектории (\tilde{x}, \tilde{p}) у системы (4.3), (4.4) не существует, то или

траектория x_1 не является оптимальной в задаче $(P(\zeta_1, 0))$, или траектория x_2 не является оптимальной в задаче $(P(\zeta_2, 0))$ ни для какого начального условия $\zeta_2 \in G$. В ряде ситуаций данное наблюдение позволяет исключить некоторые фазовые траектории (x, p) гамильтоновой системы принципа максимума (4.3), (4.4) из числа траекторий, соответствующих оптимальным парам (x_*, u_*) в задаче (P) .

Рассмотрим теперь случай $n = 1$. В этом случае фазовым пространством гамильтоновой системы (4.3), (4.4) является плоскость \mathbb{R}^2 , что существенно упрощает исследование ее фазового портрета.

Теорема 4.4. Пусть $n = 1$. Предположим, что для некоторого интервала $[x_\alpha, x_\beta] \subset G$, $x_\alpha < x_\beta$, существуют две такие траектории x_1 и x_2 управляемой системы (1.1), являющиеся оптимальными каждая в своей задаче $(P(\zeta_i, 0))$, $i = 1, 2$, отличающейся от исходной задачи (P) , возможно, начальным состоянием $x(0) = \zeta_i \in G$, что на некотором интервале времени $[\alpha_1, \beta_1]$, $\alpha_1 < \beta_1$, траектория x_1 движется из точки x_α в точку x_β (т.е. $x_1(\alpha_1) = x_\alpha$ и $x_1(\beta_1) = x_\beta$), а на интервале времени $[\alpha_2, \beta_2]$, $\alpha_2 < \beta_2$, траектория x_2 движется из точки x_β в точку x_α (т.е. $x_2(\alpha_2) = x_\beta$ и $x_2(\beta_2) = x_\alpha$). Тогда каждая точка ξ интервала $[x_\alpha, x_\beta]$ является оптимальной стационарной траекторией в задаче оптимального управления $(P(\xi, 0))$, т.е. в задаче (P) с начальным условием $x(0) = \xi$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), & u(t) &\in U, \\ x(0) &= \xi, \end{aligned}$$

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max.$$

Доказательство. Выберем произвольную точку $\xi \in [x_\alpha, x_\beta]$ и такие последовательности точек $\{x_{\alpha_i}\}$, $\{x_{\beta_i}\}$, $i = 1, 2, \dots$, из интервала $[x_\alpha, x_\beta]$, что $x_{\alpha_i} \rightarrow \xi$, $x_{\beta_i} \rightarrow \xi$ при $i \rightarrow \infty$ и, кроме того, $x_{\alpha_i} < x_{\beta_i}$, $\xi \in [x_{\alpha_i}, x_{\beta_i}]$ для любого $i = 1, 2, \dots$. Поскольку $n = 1$, то, не ограничивая общности, можно считать, что существуют такие стягивающиеся последовательности интервалов $\{[\alpha_{1,i}, \beta_{1,i}]\}$, $\alpha_{1,i} < \beta_{1,i}$, $i = 1, 2, \dots$, и $\{[\alpha_{2,i}, \beta_{2,i}]\}$, $\alpha_{2,i} < \beta_{2,i}$, $i = 1, 2, \dots$, что для любого $i = 1, 2, \dots$ имеем

$$\begin{aligned} x_1(\alpha_{1,i}) &= x_{\alpha_i}, & x_1(\beta_{1,i}) &= x_{\beta_i} & \text{и} & & x_1(t) \in [x_{\alpha_i}, x_{\beta_i}] & \text{для любого } t \in [\alpha_{1,i}, \beta_{1,i}], \\ x_2(\alpha_{2,i}) &= x_{\beta_i}, & x_2(\beta_{2,i}) &= x_{\alpha_i} & \text{и} & & x_2(t) \in [x_{\alpha_i}, x_{\beta_i}] & \text{для любого } t \in [\alpha_{2,i}, \beta_{2,i}]. \end{aligned}$$

Пусть ξ_i — такая точка из интервала $[\alpha_{1,i}, \beta_{1,i}]$, что $x_1(\xi_i) = \xi$, $i = 1, 2, \dots$. Очевидно, что такая точка ξ_i , $i = 1, 2, \dots$, существует.

Далее из оптимальности траектории x_1 в задаче $(P(\zeta_1, 0))$, оптимальности траектории x_2 в задаче $(P(\zeta_2, 0))$ и теоремы 4.3 следует, что допустимая пара $(\tilde{x}_1, \tilde{u}_1)$ управляемой системы (1.1) с начальным условием $\tilde{x}_1(0) = \xi$, определенная равенствами

$$\tilde{x}_1(t) = x_1(t + \xi_1), \quad \tilde{u}_1(t) = u_1(t + \xi_1)$$

на интервале

$$t \in [0, \beta_{1,1} - \xi_1],$$

равенствами

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &= x_2(t + \alpha_{2,1} - (\beta_{1,1} - \xi_1) - (i-1)(\beta_{1,1} - \alpha_{1,1} + \beta_{2,1} - \alpha_{2,1})), \\ \tilde{u}_1(t) &= u_2(t + \alpha_{2,1} - (\beta_{1,1} - \xi_1) - (i-1)(\beta_{1,1} - \alpha_{1,1} + \beta_{2,1} - \alpha_{2,1})) \end{aligned}$$

на интервалах

$$t \in [\beta_{1,1} - \xi_1 + (i-1)(\beta_{1,1} - \alpha_{1,1} + \beta_{2,1} - \alpha_{2,1}), \beta_{1,1} - \xi_1 + (i-1)(\beta_{1,1} - \alpha_{1,1}) + i(\beta_{2,1} - \alpha_{2,1})],$$

$i = 1, 2, \dots$, и равенствами

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(t) &= x_1(t + \alpha_{1,1} - (\beta_{1,1} - \xi_1) - (i-1)(\beta_{1,1} - \alpha_{1,1}) - i(\beta_{2,1} - \alpha_{2,1})), \\ \tilde{u}_1(t) &= u_1(t + \alpha_{1,1} - (\beta_{1,1} - \xi_1) - (i-1)(\beta_{1,1} - \alpha_{1,1}) - i(\beta_{2,1} - \alpha_{2,1}))\end{aligned}$$

на интервалах

$$t \in [\beta_{1,1} - \xi_1 + (i-1)(\beta_{1,1} - \alpha_{1,1}) + i(\beta_{2,1} - \alpha_{2,1}), \beta_{1,1} - \xi_1 + i(\beta_{1,1} - \alpha_{1,1} + \beta_{2,1} - \alpha_{2,1})],$$

$i = 1, 2, \dots$, является оптимальной траекторией в задаче $(P(\xi, 0))$. Геометрически траектория \tilde{x}_1 стартует из точки ξ в момент времени $t_0 = 0$ и движется (по интегральной кривой, соответствующей траектории x_1) в точку x_{β_1} , затем она совершает обратное движение из точки x_{β_1} в точку x_{α_1} (по интегральной кривой траектории x_2), затем на бесконечном интервале времени она последовательно совершает движения из точки x_{α_1} в точку x_{β_1} и обратно.

Аналогично определим допустимую пару $(\tilde{x}_j, \tilde{u}_j)$ управляемой системы (1.1) с начальным условием $x_j(0) = \xi$ при $j = 2, 3, \dots$ равенствами

$$\tilde{x}_j(t) = x_1(t + \xi_j), \quad \tilde{u}_j(t) = u_1(t + \xi_j)$$

на интервале

$$t \in [0, \beta_{1,j} - \xi_j],$$

равенствами

$$\begin{aligned}\tilde{x}_j(t) &= x_2(t + \alpha_{2,j} - (\beta_{1,j} - \xi_j) - (i-1)(\beta_{1,j} - \alpha_{1,j} + \beta_{2,j} - \alpha_{2,j})), \\ \tilde{u}_j(t) &= u_2(t + \alpha_{2,j} - (\beta_{1,j} - \xi_j) - (i-1)(\beta_{1,j} - \alpha_{1,j} + \beta_{2,j} - \alpha_{2,j}))\end{aligned}$$

на интервалах

$$t \in [\beta_{1,j} - \xi_j + (i-1)(\beta_{1,j} - \alpha_{1,j} + \beta_{2,j} - \alpha_{2,j}), \beta_{1,j} - \xi_j + (i-1)(\beta_{1,j} - \alpha_{1,j}) + i(\beta_{2,j} - \alpha_{2,j})],$$

$i = 1, 2, \dots$, и равенствами

$$\begin{aligned}\tilde{x}_j(t) &= x_1(t + \alpha_{1,j} - (\beta_{1,j} - \xi_j) - (i-1)(\beta_{1,j} - \alpha_{1,j}) - i(\beta_{2,j} - \alpha_{2,j})), \\ \tilde{u}_j(t) &= u_1(t + \alpha_{1,j} - (\beta_{1,j} - \xi_j) - (i-1)(\beta_{1,j} - \alpha_{1,j}) - i(\beta_{2,j} - \alpha_{2,j}))\end{aligned}$$

на интервалах

$$t \in [\beta_{1,j} - \xi_j + (i-1)(\beta_{1,j} - \alpha_{1,j}) + i(\beta_{2,j} - \alpha_{2,j}), \beta_{1,j} - \xi_j + i(\beta_{1,j} - \alpha_{1,j} + \beta_{2,j} - \alpha_{2,j})],$$

$i = 1, 2, \dots$ Геометрически для каждого $j = 2, 3, \dots$ траектория \tilde{x}_j системы (1.1) стартует из точки ξ в момент времени $t_0 = 0$ и движется (по интегральной кривой, соответствующей траектории x_1) в точку x_{β_j} , затем она совершает обратное движение из точки x_{β_j} в точку x_{α_j} (по интегральной кривой траектории x_2), затем на бесконечном интервале времени она совершает периодические движения из точки x_{α_j} в точку x_{β_j} и обратно. При этом для любого $j = 2, 3, \dots$ в силу оптимальности траектории x_1 в задаче $(P(\zeta_1, 0))$ и оптимальности траектории x_2 в задаче $(P(\zeta_2, 0))$, а также в силу теоремы 4.3 пара $(\tilde{x}_j, \tilde{u}_j)$ является оптимальной допустимой парой в задаче $(P(\xi, 0))$.

Далее для любого $j = 1, 2, \dots$ и для любого $t \geq 0$ в силу построения выполняется включение $x_j(t) \in [x_{\alpha_j}, x_{\beta_j}]$. Поскольку $\xi \in [x_{\alpha_j}, x_{\beta_j}]$ для любого $j = 1, 2, \dots$ и $\beta_j - \alpha_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, то последовательность траекторий $\{x_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, сходится к постоянной функции $x_\xi(t) \equiv \xi$ равномерно на всем бесконечном полуинтервале $[0, \infty)$. В силу замкнутости (на любом конечном интервале времени) множества траекторий управляемой системы (1.1) с начальным условием (1.2) отсюда получаем, что функция x_ξ является допустимой стационарной траекторией в задаче $(P(\xi, 0))$, а в силу оптимальности траектории x_j , $j = 1, 2, \dots$, в этой задаче получаем, что стационарная траектория $x(t) \equiv \xi$ является оптимальной допустимой траекторией в задаче $(P(\xi, 0))$. Теорема доказана.

В некоторых случаях доказанный результат позволяет исключать некоторые фазовые траектории (x, p) гамильтоновой системы принципа максимума (4.3), (4.4) из числа траекторий, соответствующих оптимальным парам (x_*, u_*) в задаче (P) .

Действительно, если в множестве $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ построен фазовый портрет гамильтоновой системы (4.3), (4.4), то может оказаться, что у некоторых траекторий имеются интервалы рекурсии, т.е. интервалы времени, на которых траектория x совершает движение сначала из некоторой точки $x_\alpha \in \mathbb{R}^1$ в некоторую точку $x_\beta \in \mathbb{R}^1$, $x_\alpha \neq x_\beta$, а затем обратно из точки x_β в точку x_α . Тогда в силу теоремы 4.4 для оптимальности этой траектории в задаче оптимального управления (P) необходимо, чтобы семейство экстремалей принципа максимума содержало все стационарные траектории вида $x_\xi(t) \equiv \xi$, $\xi \in [x_\alpha, x_\beta]$. Однако таких траекторий среди экстремалей принципа максимума может и не быть (среди фазовых траекторий гамильтоновой системы (4.3), (4.4) таким экстремалам могут соответствовать только или положения равновесия гамильтоновой системы (4.3), (4.4), или ее траектории, движущиеся по фазовой плоскости \mathbb{R}^2 по (вертикальным) прямым, параллельным оси p).

5. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

В данном разделе обсуждается экономическая интерпретация принципа максимума Понтрягина на примере задачи об оптимальном инвестировании в основные производственные фонды (капитал) некоторого абстрактного предприятия. При этом рассматривается весьма идеализированная ситуация, когда экономика, в которой действует предприятие, находится в состоянии динамического равновесия¹. В целом изложение следует устоявшемуся в экономической литературе пониманию экономического смысла принципа максимума Понтрягина (см. [49, 53, 63, 82]).

Рассматриваемая здесь экономическая интерпретация принципа максимума основана на его связи с методом динамического программирования Беллмана [19, 40] и интерпретации функции оптимального значения как *внутренней стоимости* основных производственных фондов (капитала). Сначала в предположении о достаточной гладкости функции оптимального значения при помощи метода динамического программирования мы получим некоторый вариант принципа максимума Понтрягина для задачи (P) в нормальной форме ($\psi^0 = 1$) в терминах текущей сопряженной переменной p и текущих функции Гамильтона–Понтрягина \mathcal{M} и гамильтониана M . Наряду со своими основными соотношениями (3.38), (3.39) полученный таким образом вариант принципа максимума содержит дополнительное условие стационарности гамильтониана (3.42), а в качестве текущей сопряженной переменной p в нем фигурирует градиент функции оптимального значения вдоль рассматриваемой оптимальной траектории.

¹Содержательно данное предположение означает, что в экономике отсутствуют неопределенности. Все участники экономического процесса обладают полной информацией как о текущем, так и о всех последующих состояниях системы во все моменты времени $t \geq 0$. Обладая полной информацией, они движутся по заранее известным оптимальным траекториям, отклонение от которых нецелесообразно. По поводу планирования инвестиций в условиях неопределенности см. [51].

Последнее обстоятельство позволяет в дальнейшем трактовать значения координат вектора $p(t)$ как “переходные” или “невидимые” цены единиц координат вектора капитала $x(t)$ в моменты времени $t \geq 0$, что придает соотношениям принципа максимума содержательный экономический смысл.

Будем считать, что в каждый момент времени $t \geq 0$ состояние предприятия полностью характеризуется фазовым вектором $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)) \in \mathbb{R}^n$, координаты которого отождествляются с различными основными производственными фондами. Далее будем считать, что координаты вектора управления $u(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t)) \in \mathbb{R}^m$ характеризуют количества приобретаемого или продаваемого капитала в единицу времени, следующую за моментом времени $t \geq 0$ (в общем случае мы допускаем, что предприятие может как приобретать новые производственные фонды, так и продавать, если это целесообразно, имеющиеся). В этом случае управление u можно отождествить с инвестиционной политикой предприятия.

Пусть в каждый момент времени $t \geq 0$ величина вектора $u(t)$ ограничена, т.е. $u(t) \in U$ для любого $t \geq 0$, где U — непустой компакт из \mathbb{R}^m .

Таким образом, мы считаем, что управляемая система

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U$$

(см. (1.1)) описывает динамику изменения капитала предприятия x в зависимости от выбранной инвестиционной политики u .

Например, в случае, когда основные производственные фонды однородны ($x \in \mathbb{R}^1$), оборудование не изнашивается и не устаревает, а приобретенное оборудование не может быть продано или каким-то другим способом выведено из процесса производства (например, законсервировано), динамика капитала предприятия описывается при помощи следующей управляемой системы:

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^1 : 0 \leq u \leq u_{\max}\}.$$

Здесь $u_{\max} > 0$ — максимально возможная скорость увеличения основных производственных фондов. Если мы учтем амортизацию оборудования, то управляемая система, описывающая динамику капитала, примет вид

$$\dot{x}(t) = u(t) - \delta x(t), \quad u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^1 : 0 \leq u \leq u_{\max}\}.$$

Здесь $\delta > 0$ — удельная скорость устаревания (износа) оборудования.

В общем случае мы будем считать, что в момент времени $t_0 = 0$ задано начальное состояние системы

$$x(0) = x_0 \in G,$$

где G — некоторое заданное непустое открытое подмножество из \mathbb{R}^n .

Используемые на предприятии технологии будем считать неизменными, а имеющиеся в каждый момент времени $t \geq 0$ производственные фонды $x(t)$ полностью загруженными. В этом случае выпуск готовой продукции и расходы на различные производственные факторы такие, как рабочая сила, материалы, энергия и т.д., в каждый момент времени t однозначно определяются вектором $x(t)$.

Пусть мгновенная прибыль предприятия $g(x(t), u(t))$ в каждый момент времени $t \geq 0$ (в ценах на текущий момент времени t) полностью определяется значениями имеющихся в этот момент времени основных производственных фондов $x(t)$ и вектором управления $u(t)$. В этом случае в величине $g(x(t), u(t))$ учтены расходы на текущее производство, которые полностью определяются имеющимся капиталом $x(t)$, расходы на приобретение новых производственных мощностей и их введение в эксплуатацию, а также доходы от продажи готовой продукции и, возможно, части уже имеющегося оборудования.

Рассмотрим ситуацию, когда предприятие действует бесконечно долго. Пусть $\rho > 0$ — величина инфляции (удельная скорость обесценивания используемой денежной единицы; см. пример 1.2). Тогда величина агрегированной прибыли с учетом инфляции (в ценах на начальный момент времени $t_0 = 0$) предприятия на всем бесконечном полуинтервале времени его функционирования задается функционалом полезности вида

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt.$$

Итак, мы считаем, что математическая модель оптимального управления основными производственными фондами предприятия формулируется в виде следующей задачи оптимального управления:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad (5.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (5.2)$$

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max. \quad (5.3)$$

Будем предполагать, что для любого начального состояния $x_0 \in G$ задача (5.1)–(5.3) удовлетворяет условиям (A1)–(A3), т.е. является частным случаем задачи (P).

Заметим, что во многих экономических задачах оптимального управления вида (5.1)–(5.3) векторная функция f , скалярная функция g и множество G могут удовлетворять достаточно общим дополнительным условиям, типичным для различных классов экономических моделей. Например, часто оказывается, что естественно рассматривать ситуацию, когда все координаты фазового вектора (капитала) $x(t)$ положительны в любой момент времени $t \geq 0$. В этом случае

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : x^i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Относительно функции g иногда естественно предполагать, что она монотонно возрастает по каждой координате вектора x , т.е. $\partial g(x)/\partial x^i > 0$, $i = 1, \dots, n$, для любого $x \in G$. Последнее условие означает, что мгновенная прибыль $g(x, u)$ увеличивается с увеличением количества имеющегося оборудования. При этом часто мгновенная прибыль g оказывается вогнутой функцией координат переменной x . Во многих экономических задачах функция f такова, что управляемая система (5.1) является системой с насыщением. В этом случае все траектории управляемой системы (5.1) с заданным начальным условием (5.2) принимают значения в некотором ограниченном подмножестве фазового пространства \mathbb{R}^n . Выделение специальных подклассов общей задачи (P) позволяет в некоторых ситуациях усилить общую формулировку принципа максимума (теорему 3.1) и получить дополнительные условия, характеризующие сопряженные переменные.

В силу теоремы 2.1 для любого начального состояния $x(0) = x_0 \in G$ решение в задаче (5.1)–(5.3) существует. Обозначим соответствующее оптимальное значение функционала полезности через $V(x_0)$. Таким образом, величина $V(x)$ определена для любого $x \in G$. Обычно функционал V называют *функцией оптимального значения* или *функцией цены* в задаче (5.1)–(5.3). В нашем случае содержательно $V(x_0)$ есть величина всей максимально возможной, взятой с учетом инфляции прибыли предприятия, имеющего в начальный момент времени $t_0 = 0$ основные производственные фонды x_0 . Это та прибыль, которая может быть получена при условии, что в дальнейшем на всем бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$ управление предприятием осуществляется оптимальным образом. Как уже отмечалось выше, мы считаем, что экономика, в которой действует предприятие, находится в состоянии равновесия и, следовательно, эта максимально возможная прибыль известна.

Определим *внутреннюю стоимость* (или просто *стоимость*) производственных фондов (вектора капитала) $x \in G$ как значение величины $V(x)$. Подчеркнем, что величина $V(x)$ определена как стоимость капитала x в ценах на начальный момент времени $t_0 = 0$. Так определенная стоимость вектора капитала x никак не связана с его “рыночной” стоимостью в этот момент времени, т.е. со стоимостью производственных фондов x на соответствующих рынках оборудования в момент времени $t_0 = 0$. Она выражает исключительно потенциальную прибыль, которую могут принести данные производственные фонды x на бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$ при условии, что предприятием осуществляется оптимальная инвестиционная политика. В этом смысле внутренняя стоимость $V(x)$ капитала x является его “истинной” стоимостью с точки зрения данного предприятия. Именно внутренняя стоимость капитала x должна учитываться при определении инвестиционной политики предприятия.

В отличие от внутренней стоимости $V(x)$ капитала x его рыночная стоимость в момент времени $t_0 = 0$ может наблюдаться непосредственно. Однако она определяется не потенциальной агрегированной прибылью предприятия, а субъективными ожиданиями действующих на соответствующих рынках агентов (продавцов и покупателей). В результате на реальных рынках производственные фонды предприятия могут быть как недооценены, так и переоценены относительно их внутренней стоимости.

Предположим, что функция цены V в задаче (5.1)–(5.3) дважды непрерывно дифференцируема на множестве G .

Пусть (x_*, u_*) — оптимальная допустимая пара в задаче (5.1)–(5.3). Прежде всего заметим, что в силу аддитивности интегрального функционала полезности (5.3) для любого $\tau \geq 0$ из оптимальности пары (x_*, u_*) в задаче (5.1)–(5.3) следует оптимальность пары (x_τ, u_τ) , где $x_\tau(s) = x_*(s + \tau)$, $u_\tau(s) = u_*(s + \tau)$, $s \geq 0$, в задаче $(P(x_*(\tau), 0))$ (в задаче (P) с начальным условием $x(0) = x_*(\tau)$):

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= f(x(s), u(s)), & u(s) &\in U, \\ x(0) &= x_*(\tau), \\ J(x, u) &= \int_0^\infty e^{-\rho s} g(x(s), u(s)) ds \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной интегрирования $t = s + \tau$, для пары (x_τ, u_τ) получаем

$$J(x_\tau, u_\tau) = e^{\rho\tau} \int_\tau^\infty e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt,$$

откуда для любого $\tau \geq 0$ в силу оптимальности пары (x_τ, u_τ) в задаче $(P(x_*(\tau), 0))$ вытекает равенство

$$V(x_*(\tau)) = e^{\rho\tau} \int_\tau^\infty e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt. \quad (5.4)$$

Рассмотрим движение системы вдоль оптимальной траектории x_* .

В момент времени $t \geq 0$ система находится в состоянии $x_*(t)$. На малом интервале времени $[t, t + \Delta t]$, $\Delta t > 0$, система перейдет в состояние $x_*(t + \Delta t)$. В силу условия (5.4) имеем

$$e^{-\rho(t+\Delta t)} V(x_*(t + \Delta t)) - e^{-\rho t} V(x_*(t)) = - \int_t^{t+\Delta t} e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds.$$

Отсюда, разделив последнее равенство на $\Delta t > 0$ и устремив Δt к нулю, в силу непрерывной дифференцируемости функции цены V получаем, что при п.в. $t \geq 0$ для оптимальной пары (x_*, u_*) выполняется равенство

$$\left\langle f(x_*(t), u_*(t)), \frac{\partial}{\partial x} V(x_*(t)) \right\rangle - \rho V(x_*(t)) + g(x_*(t), u_*(t)) = 0. \quad (5.5)$$

Пусть $x_0 \in G$ — произвольная начальная точка. Определим допустимую пару (\tilde{x}, \tilde{u}) с начальным условием $x(0) = x_0$ следующим образом. Выберем малый интервал времени $\Delta = [0, \Delta t]$, $\Delta t > 0$, и определим на интервале Δ траекторию \tilde{x} как траекторию, выходящую из точки x_0 при постоянном управлении $\tilde{u}(t) = \bar{u}$, $t \in \Delta$, где $\bar{u} \in U$ произвольно. При таком движении вектор капитала $x(0) = x_0$ перейдет на интервале времени Δ в положение

$$\tilde{x}(\Delta t) = x_0 + \Delta t f(x_0, \bar{u}) + o(\Delta t).$$

Будем считать, что далее из точки $\tilde{x}(\Delta t)$ на бесконечном полуинтервале $[\Delta t, \infty)$ движение системы осуществляется оптимальным образом (в силу теоремы 2.1 оптимальное допустимое управление в задаче $(P(\tilde{x}(\Delta t), 0))$ существует). В этом случае значение функционала полезности на так определенной допустимой паре (\tilde{x}, \tilde{u}) есть величина (см. (5.4))

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \int_0^{\Delta t} e^{-\rho t} g(\tilde{x}(t), \bar{u}) dt + e^{-\rho \Delta t} V(\tilde{x}(\Delta t)).$$

Поскольку допустимая пара (\tilde{x}, \tilde{u}) не обязательно оптимальна в задаче (5.1)–(5.3), то $J(\tilde{x}, \tilde{u}) \leq V(x_0)$ и, следовательно, имеет место неравенство

$$e^{-\rho \Delta t} V(\tilde{x}(\Delta t)) - V(x_0) + \int_0^{\Delta t} e^{-\rho t} g(\tilde{x}(t), \bar{u}) dt \leq 0.$$

Отсюда, разделив последнее неравенство на $\Delta t > 0$ и устремив Δt к нулю, в силу непрерывной дифференцируемости функции V получаем

$$\left\langle f(x_0, \bar{u}), \frac{\partial}{\partial x} V(x_0) \right\rangle - \rho V(x_0) + g(x_0, \bar{u}) \leq 0.$$

Следовательно, в силу произвольности $x_0 \in G$ и $\bar{u} \in U$ имеем

$$\left\langle f(x, u), \frac{\partial}{\partial x} V(x) \right\rangle - \rho V(x) + g(x, u) \leq 0 \quad \text{для любых } x \in G \text{ и } u \in U. \quad (5.6)$$

Пусть $t \geq 0$ таково, что в данный момент времени выполняется равенство (5.5). Тогда в силу (5.6) в этот момент времени для любого $x \in G$ выполняется неравенство

$$\left\langle f(x, u_*(t)), \frac{\partial}{\partial x} V(x) \right\rangle - \rho V(x) + g(x, u_*(t)) \leq 0,$$

а при $x = x_*(t)$ справедливо равенство

$$\left\langle f(x_*(t), u_*(t)), \frac{\partial V(x_*(t))}{\partial x} \right\rangle - \rho V(x_*(t)) + g(x_*(t), u_*(t)) = 0.$$

Таким образом, функция $\phi: G \mapsto \mathbb{R}^1$, определенная равенством

$$\phi(x) = \left\langle f(x, u_*(t)), \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\rangle - \rho V(x) + g(x, u_*(t)) \quad \text{для любого } x \in G,$$

достигает своего максимального значения в точке $x_*(t) \in G$. Следовательно, в силу непрерывной дифференцируемости функции V на G при п.в. $t \geq 0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x_*(t)) = 0,$$

т.е.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x_*(t)) f(x_*(t), u_*(t)) + \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_*(t), u_*(t)) \right]^* \frac{\partial}{\partial x} V(x_*(t)) - \rho \frac{\partial}{\partial x} V(x_*(t)) + \frac{\partial}{\partial x} g(x_*(t), u_*(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0. \quad (5.7)$$

Далее в силу (5.6) для любого $u \in U$ и любого $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$\left\langle f(x_*(t), u), \frac{\partial}{\partial x} V(x_*(t)) \right\rangle + g(x_*(t), u) \leq \rho V(x_*(t)), \quad (5.8)$$

а в силу (5.5) при п.в. $t \geq 0$ при $u = u_*(t)$ последнее неравенство обращается в равенство. Следовательно,

$$\rho V(x_*(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \max_{u \in U} \left\{ \left\langle f(x_*(t), u), \frac{\partial}{\partial x} V(x_*(t)) \right\rangle + g(x_*(t), u) \right\}. \quad (5.9)$$

Таким образом, из условий (5.5), (5.8) и (5.9) следует, что на всем бесконечном полуинтервале $[0, \infty)$ справедливо следующее условие максимума:

$$\left\langle f(x_*(t), u_*(t)), \frac{\partial}{\partial x} V(x_*(t)) \right\rangle + g(x_*(t), u_*(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \max_{u \in U} \left\{ \left\langle f(x_*(t), u), \frac{\partial}{\partial x} V(x_*(t)) \right\rangle + g(x_*(t), u) \right\}. \quad (5.10)$$

Определим векторную функцию $p: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ равенством

$$p(t) = \frac{\partial}{\partial x} V(x_*(t)), \quad t \in [0, \infty). \quad (5.11)$$

Тогда в силу того, что функция V дважды непрерывно дифференцируема на G и траектория x_* абсолютно непрерывна на любом конечном интервале времени $[0, T]$, $T > 0$, векторная функция p также абсолютно непрерывна на любом конечном интервале времени $[0, T]$, $T > 0$, т.е. локально абсолютно непрерывна. Следовательно, в силу (5.7) при п.в. $t \in [0, \infty)$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x_*(t)) f(x_*(t), u_*(t)) = \\ &= - \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_*(t), u_*(t)) \right]^* \frac{\partial}{\partial x} V(x_*(t)) + \rho \frac{\partial}{\partial x} V(x_*(t)) - \frac{\partial}{\partial x} g(x_*(t), u_*(t)), \end{aligned}$$

или

$$\dot{p}(t) = \rho p(t) - \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_*(t), u_*(t)) \right]^* p(t) - \frac{\partial}{\partial x} g(x_*(t), u_*(t)). \quad (5.12)$$

В терминах функции p (см. (5.11)) условие максимума (5.10) записывается в виде

$$\left\langle f(x_*(t), u_*(t)), p(t) \right\rangle + g(x_*(t), u_*(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \max_{u \in U} \left\{ \left\langle f(x_*(t), u), p(t) \right\rangle + g(x_*(t), u) \right\}. \quad (5.13)$$

Кроме того, в силу (5.4) и (5.5) при п.в. $t \geq 0$ получаем

$$\langle f(x_*(t), u_*(t)), p(t) \rangle + g(x_*(t), u_*(t)) = \rho e^{\rho t} \int_t^{\infty} e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds. \quad (5.14)$$

В соответствии с (3.40) и (3.41) для любых $x \in G$, $u \in U$ и $p \in \mathbb{R}^n$ определим значения текущей функции Гамильтона–Понтрягина \mathcal{M} и текущего гамильтониана M в нормальной форме равенствами

$$\mathcal{M}(x, u, p) = \langle f(x, u), p \rangle + g(x, u), \quad M(x, p) = \sup_{u \in U} (\langle f(x, u), p \rangle + g(x, u)),$$

т.е. положим

$$\psi^0 = 1. \quad (5.15)$$

Тогда в терминах функций \mathcal{M} и M соотношение (5.12) принимает вид (см. (3.38))

$$\dot{p}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \rho p(t) - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), p(t)), \quad (5.16)$$

а условие максимума (5.13) записывается в виде (см. (3.39))

$$\mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), p(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} M(x_*(t), p(t)). \quad (5.17)$$

Условие стационарности (5.14) в терминах функции M запишется в виде (см. (3.42))

$$M(x_*(t), p(t)) = \rho e^{\rho t} \int_t^{\infty} e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (5.18)$$

При этом в силу равенства (5.15) условие невырожденности (3.34) выполняется автоматически.

Таким образом, в предположении, что функция цены V дважды непрерывно дифференцируема, установлен следующий вариант принципа максимума Понтрягина для задачи (P).

Теорема 5.1. *Предположим, что для любого начального состояния $x_0 \in G$ задача (P) удовлетворяет условиям (A1)–(A3) и функция цены V дважды непрерывно дифференцируема на множестве G . Пусть далее допустимая пара (x_*, u_*) оптимальна в задаче (P). Тогда пара (x_*, u_*) удовлетворяет соотношениям (5.16), (5.17) принципа максимума Понтрягина вместе с текущей сопряженной переменной p , где*

$$p(t) = \frac{\partial}{\partial x} V(x_*(t)) \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Кроме того, для оптимальной пары (x_*, u_*) и сопряженной переменной p выполняется условие стационарности (5.18).

Доказанная теорема 5.1 сформулирована в терминах текущей сопряженной переменной p (см. (3.29)). Она является более сильным утверждением, чем доказанная выше теорема 3.1. Теорема 5.1 содержит дополнительную информацию о паре сопряженных переменных (p, ψ^0) (однако дополнительные условия получены здесь в предположении о дважды непрерывной дифференцируемости функции цены V). Во-первых, теорема 5.1 является вариантом принципа максимума Понтрягина в нормальной форме ($\psi^0 = 1$), что в общем случае неверно (см. ниже пример 6.1, в котором с необходимостью выполняется равенство $\psi^0 = 0$). Во-вторых, теорема 5.1 содержит дополнительное условие стационарности (5.18). Последнее условие не следует из остальных соотношений принципа максимума и в некоторых случаях позволяет существенно сузить множество экстремалей (см. ниже пример 6.6). Заметим также, что хотя

условие стационарности (5.18) и получено в теореме 5.1 при дополнительном предположении относительно гладкости функции цены V , данное условие выполняется и в общем случае (см. [70]). Ниже мы докажем несколько различных вариантов принципа максимума Понтрягина для задачи (P) , содержащих условие стационарности (5.18).

Перейдем теперь непосредственно к экономической интерпретации принципа максимума Понтрягина.

Прежде всего напомним, что внутренняя стоимость $V(x)$ вектора капитала $x \in G$ определена выше как его стоимость в начальный момент времени $t_0 = 0$ (в ценах на момент времени $t_0 = 0$). На самом деле данная величина $V(x)$ всегда равна *текущей внутренней стоимости* (net present value) вектора капитала x и в любой последующий момент времени $t \geq 0$, т.е. внутренней стоимости капитала x в текущих ценах в любой момент времени $t \geq 0$. Действительно, если в некоторый момент времени $\tau \geq 0$ предприятие обладает капиталом $x \in G$, то, двигаясь по соответствующей оптимальной паре (x_*, u_*) из начального состояния $x_*(\tau) = x$, предприятие получит агрегированную прибыль с учетом инфляции на бесконечном полуинтервале времени $[\tau, \infty)$ в ценах на момент времени τ , равную величине

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-\rho(t-\tau)} g(x_*(t), u_*(t)) dt = e^{\rho\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt.$$

Однако в силу равенства (5.4) данная величина равна $V(x_*(\tau))$, т.е. стоимости капитала $x_*(\tau)$ в ценах на момент времени $t_0 = 0$. Таким образом, в задаче (P) внутренняя стоимость капитала в текущих ценах не зависит от времени. Если предприятие имеет в момент времени τ начальный капитал $x \in G$, то при условии оптимальной инвестиционной политики оно получит агрегированную прибыль с учетом инфляции в ценах на момент времени τ , равную $V(x)$. Итак, $V(x)$ — это внутренняя стоимость вектора капитала x в текущих ценах в любой момент времени $t \geq 0$.

Рассмотрим функцию Гамильтона–Понтрягина M и условия максимума (5.17).

Поскольку функция V внутренней стоимости вектора капитала непрерывно дифференцируема, то при переходе системы из состояния $x \in G$ в состояние $x + \Delta x \in G$ соответствующее приращение внутренней стоимости капитала записывается в виде

$$V(x + \Delta x) - V(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} V(x), \Delta x \right\rangle + o(\|\Delta x\|).$$

Таким образом, координаты вектора $\partial V(x)/\partial x$ характеризуют приращение внутренней стоимости вектора капитала при переходе из точки x в близкую точку $x + \Delta x$. При этом при малой величине приращения капитала Δx получающееся приращение внутренней стоимости капитала есть взвешенная сумма координат Δx с весами, равными координатам вектора $\partial V(x)/\partial x$. Следовательно, i -я ($i = 1, 2, \dots, n$) координата вектора $\partial V(x)/\partial x$ может трактоваться как “переходная” цена единицы i -й координаты вектора капитала x . Поскольку величина $V(x)$ есть внутренняя стоимость вектора капитала x в текущих ценах на любой момент времени $t \geq 0$, то переходная цена $\partial V(x)/\partial x$ также является переходной ценой в текущих ценах в любой момент времени $t \geq 0$.

Поскольку в силу теоремы 5.1 текущая сопряженная переменная p определяется равенством

$$p(t) = \frac{\partial}{\partial x} V(x_*(t)) \quad \text{для любого } t \geq 0,$$

то координаты вектора $p(t)$ суть *текущие переходные цены* (current valued marginal prices) соответствующих единиц вектора капитала $x_*(t)$ (по состоянию на произвольный текущий

момент времени $t \geq 0$). Данные переходные цены часто называют также “невидимыми” ценами (shadow prices), поскольку они, вообще говоря, отличаются от рыночных цен единиц координат вектора капитала $x_*(t)$, которые можно наблюдать на соответствующих рынках в моменты времени t .

Напомним, что сопряженная переменная ψ , фигурирующая в теореме 3.1, отличается от текущей сопряженной переменной p , фигурирующей в теореме 5.1, экспоненциальным множителем (см. (3.29)):

$$\psi(t) = e^{-\rho t} p(t) \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Учитывая, что величина $e^{-\rho t}$ есть стоимость используемой денежной единицы в момент времени t с учетом инфляции (см. пример 1.2), координаты сопряженной переменной $\psi(t)$ естественно трактовать как “приведенные” переходные цены единиц соответствующих координат вектора капитала в точке $x_*(t)$, имея в виду, что они приведены на начальный момент времени $t_0 = 0$ (выражают переходную стоимость единиц капитала в точке $x_*(t)$ с учетом инфляции, т.е. в ценах на начальный момент времени t_0).

Рассмотрим значения $\mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), p(t))$ текущей функции Гамильтона–Понтрягина в нормальной форме \mathcal{M} в моменты времени t . Согласно определению функции Гамильтона–Понтрягина имеем

$$\mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), p(t)) = \langle f(x_*(t), u_*(t)), p(t) \rangle + g(x_*(t), u_*(t)). \quad (5.19)$$

Здесь в соответствии со сказанным ранее

$$p(t) = \frac{\partial}{\partial x} V(x_*(t)) \quad \text{для любого } t \geq 0$$

есть вектор переходных цен капитала $x_*(t)$. Следовательно, для почти всех t в силу равенства

$$V(x_*(t + \Delta t)) - V(x_*(t)) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} V(x_*(t)), f(x_*(t), u_*(t)) \right\rangle \Delta t + o(\Delta t)$$

первое слагаемое $\langle f(x_*(t), u_*(t)), p(t) \rangle$ в правой части равенства (5.19) есть приращение внутренней стоимости капитала $x_*(t)$ в единицу времени в момент времени t при осуществлении оптимальной инвестиционной политики $u_*(t)$ (мгновенная текущая внутренняя прибыль). Данное слагаемое отражает качество процесса управления $u_*(t)$ в момент времени t с точки зрения изменения внутренней стоимости капитала или, что по сути то же самое, с точки зрения всей последующей выгоды. Второе слагаемое $g(x_*(t), u_*(t))$ есть фактическая текущая прибыль предприятия в единицу времени в момент t (мгновенная текущая фактическая прибыль). Таким образом, величина $\mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), p(t))$ состоит из мгновенной текущей внутренней прибыли $\langle f(x_*(t), u_*(t)), p(t) \rangle$ и мгновенной текущей фактической прибыли $g(x_*(t), u_*(t))$ предприятия, т.е. данная величина может трактоваться как агрегированное выражение для всей мгновенной *совокупной прибыли* предприятия в момент времени t , причем она выражена в текущих ценах на момент времени t . Именно эта величина наиболее полно характеризует выбранную инвестиционную политику предприятия. В силу условия максимума (см. (5.17)) оптимальная инвестиционная политика $u_*(t)$ должна при п.в. $t \geq 0$ максимизировать мгновенную совокупную текущую прибыль. При этом в каждый момент t в качестве весовых коэффициентов, соответствующих изменению внутренней стоимости вектора капитала $x_*(t)$, выступают координаты вектора переходных цен $p(t)$. Такова экономическая интерпретация функции Гамильтона–Понтрягина и условия максимума (5.17).

Перейдем теперь к экономической интерпретации сопряженной системы (5.16).

Напомним, что согласно нашему предположению экономика, в которой действует предприятие, находится в состоянии динамического равновесия. В частности, это означает, что

рыночные цены единиц основных производственных фондов $x_*^i(t)$, $i = 1, \dots, n$, в каждый момент времени $t \geq 0$ совпадают с переходными² $p^i(t)$, $i = 1, \dots, n$.

Сопряженная система дает выражение для скоростей изменения текущих переходных цен единиц капитала в единицу времени вдоль оптимальной траектории x_* .

Запишем сопряженную систему в виде

$$\dot{p}(t) + \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_*(t), u_*(t)) \right]^* p(t) + \frac{\partial}{\partial x} g(x_*(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \rho p(t). \quad (5.20)$$

Умножая обе части равенства (5.20) скалярно на вектор $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, имеющий все единичные координаты, получаем

$$\langle \dot{p}(t), e \rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x} f(x_*(t), u_*(t)) e, p(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x} g(x_*(t)), e \right\rangle \stackrel{\text{п.в.}}{=} \rho \langle p(t), e \rangle.$$

В левой части последнего равенства стоит приращение всей совокупной прибыли предприятия в единицу времени, получающейся в результате приобретения в момент времени t единичного вектора капитала e вдоль оптимальной траектории. Действительно, первое слагаемое $\langle \dot{p}(t), e \rangle$ в левой части есть приращение прибыли в единицу времени, следующую за моментом времени t , связанной с изменением вектора переходных цен $p(t)$. Второе слагаемое дает выражение для приращения прибыли в единицу времени, следующую за моментом времени t , связанной с изменением внутренней стоимости капитала. Третье слагаемое в левой части дает выражение для приращения прибыли в единицу времени, следующую за моментом времени t , связанной с изменением потока текущей прибыли в результате приобретения единичного вектора капитала e . В правой части последнего равенства $\rho \langle p(t), e \rangle$ есть величина, на которую средства $\langle p(t), e \rangle$, затраченные на приобретение единичного вектора капитала e , обесценятся в единицу времени в результате инфляции.

Таким образом, сопряженная система (5.20) является балансовым соотношением, утверждающим, что вдоль оптимальной траектории приращение всей совокупной прибыли предприятия в единицу времени, получаемой в результате приобретения единичного вектора капитала, равно величине, на которую обесценятся в эту единицу времени средства, истраченные на приобретение этого единичного вектора капитала.

Предположим теперь, что предприятие, помимо инвестирования средств в приобретение основных производственных фондов, имеет возможность воспользоваться некоторым имеющимся в экономике финансовым инструментом (способом вложения денег), например разместить эти средства на банковском депозите с процентной ставкой (interest rate) ν . В этом случае на единичном интервале времени, следующем за моментом времени t , средства величины $\langle p(t), e \rangle$ принесут доход $\nu \langle p(t), e \rangle$. Если выполняется неравенство

$$\rho < \nu,$$

то вложение средств в приобретение основных производственных фондов оказывается менее выгодным, чем размещение этих средств на банковском депозите (ситуация высокой стоимости денег). Наоборот, выполнение неравенства

$$\rho > \nu$$

²Вообще говоря, рыночные цены отличаются от переходных. Однако переходные цены характеризуют изменение внутренней стоимости капитала (всю последующую выгоду, связанную с изменением вектора капитала). Поэтому если рыночные цены выше переходных, то приобретение соответствующего капитала невыгодно в том смысле, что затраты на его приобретение в этом случае выше принесенной в дальнейшем в результате этого приобретения прибыли. В противоположной ситуации, когда рыночные цены ниже переходных, приобретение капитала становится выгодным. Поэтому переходные цены влияют на рыночные ("невидимая рука" рынка) и существует объективная тенденция их сближения. Таким образом, мы считаем, что в состоянии динамического равновесия рыночные цены совпадают с переходными.

означает, что вложение средств в приобретение основных производственных фондов более выгодно, чем их размещение на банковском депозите (ситуация низкой стоимости денег). Однако обе эти ситуации противоречат предположению о том, что экономика находится в состоянии динамического равновесия, когда любое отклонение от оптимального режима нецелесообразно. Поэтому в рассматриваемом случае должно выполняться равенство

$$\rho = \nu. \quad (5.21)$$

Последнее равенство означает, что в ситуации динамического равновесия доходность производства совпадает с доходностью имеющегося в экономике альтернативного финансового инструмента.

Из полученного условия (5.21) следует еще одна интерпретация параметра дисконтирования ρ как величины действующей в экономике банковской процентной ставки.

Перейдем теперь к интерпретации условий трансверсальности на бесконечности.

Выполнение краевого условия (3.35)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} p(t) = 0$$

означает, что при осуществлении оптимальной инвестиционной политики текущая переходная стоимость единиц основных производственных фондов растет вдоль оптимальной траектории медленнее инфляции, т.е. приведенные (на начальный момент времени) переходные цены единиц капитала $\psi(t) = e^{-\rho t} p(t)$ стремятся к нулю на бесконечности. Таким образом, в этом случае при осуществлении оптимальной инвестиционной политики стоимости единиц капитала (в ценах на исходный момент времени) в пределе полностью исчерпываются.

Рассмотрим альтернативное краевое условие на бесконечности (3.36):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \langle x_*(t), p(t) \rangle = 0. \quad (5.22)$$

Предположим, что вдоль оптимальной траектории x_* данное условие не выполняется. Пусть также $x_*(t) > 0$ и $p(t) > 0$ для любого $t \geq 0$. Тогда существуют такая возрастающая последовательность моментов времени T_i , $i = 1, 2, \dots$, $\lim_{i \rightarrow \infty} T_i = \infty$, и такое число $A > 0$, что справедливо неравенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} e^{-\rho T_i} \langle x_*(T_i), p(T_i) \rangle \geq A.$$

Следовательно, существует такое натуральное N , что для любого $i \geq N$ имеем

$$e^{-\rho T_i} \langle x_*(T_i), p(T_i) \rangle > \frac{A}{2}.$$

В силу условия (A3) интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt$$

сходится абсолютно. Следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что для всех $i \geq N$ справедливо неравенство

$$\int_0^{T_i} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt > \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt - \frac{A}{2},$$

откуда получаем, что для всех $i \geq N$

$$J(x_*, u_*) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt < \int_0^{T_i} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt + e^{-\rho T_i} \langle x_*(T_i), p(T_i) \rangle.$$

Однако последнее неравенство означает, что в ситуации, когда переходные цены $p(T_i)$ совпадают с рыночными в моменты времени T_i , продажа всех имеющихся производственных фондов $x_*(T_i)$ в эти моменты времени даст предприятию суммарный доход с учетом инфляции больший, чем продолжение их эксплуатации оптимальным образом на всем оставшемся бесконечном полуинтервале времени. В этом случае в моменты времени T_i производственные фонды $x_*(T_i)$ объективно переоценены. Однако это противоречит нашему предположению о том, что экономика находится в динамическом равновесии.

Итак, выполнение краевого условия (5.22) означает, что на бесконечности ситуация переоценки капитала невозможна, т.е. и на бесконечности экономика находится в равновесии.

Рассмотрим, наконец, условие стационарности (5.18). В силу (5.4) данное условие означает, что вдоль оптимальной траектории справедливо равенство

$$\rho V(x_*(t)) = \langle f(x_*(t), u_*(t)), p(t) \rangle + g(x_*(t), u_*(t)) \quad \text{при почти всех } t \geq 0. \quad (5.23)$$

Величина

$$\langle f(x_*(t), u_*(t)), p(t) \rangle + g(x_*(t), u_*(t)),$$

стоящая в правой части равенства (5.23), есть совокупная прибыль предприятия, принесенная капиталом $x_*(t)$ за единицу времени, следующую за моментом времени t (приращение внутренней стоимости капитала плюс фактическая прибыль в денежном выражении). Величина $V(x_*(t))$, стоящая слева, есть стоимость капитала $x_*(t)$ в ценах на текущий момент времени t . Если разместить эту сумму на банковском депозите с доходностью ρ , то в последующую за моментом времени t единицу времени это принесет доход

$$\rho V(x_*(t)).$$

Таким образом, равенство (5.23) дает правило для определения внутренней стоимости $V(x_*(t))$ капитала $x_*(t)$: стоимость $V(x_*(t))$ капитала $x_*(t)$ в каждый момент времени $t \geq 0$ равна той сумме, которая, будучи размещена на банковском депозите с доходностью ρ , принесет в последующую единицу времени доход, равный совокупной прибыли предприятия за эту единицу времени.

Такова экономическая интерпретация условия стационарности (5.18).

Ниже в разд. 14 при помощи принципа максимума Понтрягина мы исследуем одну простейшую модель оптимального управления инвестиционной деятельностью предприятия.

6. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА. КОНТРИМЕРЫ

В данном разделе приводятся ряд примеров, иллюстрирующих возможные патологии поведения сопряженных переменных в соотношениях принципа максимума Понтрягина для задачи (P) . Основное внимание уделяется условиям трансверсальности на бесконечности (3.17) и (3.18) в случае задачи (P) с дисконтированием ($\rho > 0$). Для задачи (P) без дисконтирования ($\rho = 0$) примеры, иллюстрирующие аналогичные эффекты в условиях трансверсальности (3.17) и (3.18), хорошо известны (см., например, [58, 78]).

Мы начнем с демонстрации возможности аномальности задачи (P) , т.е. ситуации, когда основные соотношения принципа максимума (3.1)–(3.3) для оптимальной в задаче (P) пары (x_*, u_*) могут выполняться вместе с парой сопряженных переменных (ψ, ψ^0) только при $\psi^0 = 0$. В этом случае нарушается первое условие как в условиях трансверсальности (3.17), так и в (3.18). Следующий пример представляет собой адаптацию на случай задачи (P) примера, рассмотренного в работе [70].

Пример 6.1. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x}(t) = (2x(t) + u(t))\phi(x(t)), \quad u(t) \in U = [-1, 0], \quad (6.1)$$

$$x(0) = 0, \quad (6.2)$$

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} e^{-t}(2x(t) + u(t)) dt \rightarrow \max. \quad (6.3)$$

Здесь $\phi: \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}^1$ — такая гладкая неотрицательная ограниченная функция, что $\phi(x) = 1$ при $|x| \leq 1$ и $\phi(x) = 0$ при $|x| \geq 2$.

Положим $G = \mathbb{R}^1$. Легко видеть, что сформулированная задача (6.1)–(6.3) удовлетворяет условиям (A1)–(A3), т.е. является частным случаем задачи (P). Единственная оптимальная допустимая пара (x_*, u_*) в задаче (6.1)–(6.3) имеет вид

$$x_*(t) = 0 \quad \text{для всех } t \geq 0, \quad u_*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0.$$

Действительно, любое допустимое управление u , отличное от u_* , принимает отрицательные значения на множестве положительной меры. Поскольку соответствующая допустимая траектория x удовлетворяет неравенству $x(t) \leq 0$ для любого $t \geq 0$ (см. (6.1) и (6.2)), это немедленно дает отрицательное значение функционала полезности $J(x, u)$ (см. (6.3)) на паре (x, u) , в то время как $J(x_*, u_*) = 0$.

В силу теоремы 3.1 оптимальная пара (x_*, u_*) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина (3.1)–(3.3) вместе с некоторой соответствующей ей парой сопряженных переменных (ψ, ψ^0) .

Покажем, что для любого набора множителей Лагранжа (ψ, ψ^0) , соответствующего оптимальной паре (x_*, u_*) в силу принципа максимума Понтрягина (теорема 3.1), справедливо равенство $\psi^0 = 0$.

Функция Гамильтона–Понтрягина для задачи (6.1)–(6.3) имеет вид

$$\mathcal{H}(x, t, u, \psi, \psi^0) = \psi(2x + u)\phi(x) + \psi^0 e^{-t}(2x + u) = (\psi\phi(x) + \psi^0 e^{-t})(2x + u).$$

Следовательно, переменная ψ является решением следующей сопряженной системы (см. (3.1)):

$$\dot{\psi}(t) = -2(\psi(t) + \psi^0 e^{-t}). \quad (6.4)$$

Здесь мы учитываем, что согласно определению функции ϕ выполняются равенства

$$\phi(x_*(t)) = 1 \quad \text{и} \quad \frac{d\phi(x_*(t))}{dx} = 0 \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Легко видеть, что условие максимума (3.3) в данном случае влечет выполнение неравенства

$$\psi(t) + \psi^0 e^{-t} \geq 0 \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (6.5)$$

Решая сопряженное уравнение (6.4), получаем

$$\psi(t) = -2\psi^0 e^{-t} + (\psi(0) + 2\psi^0)e^{-2t} \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Отсюда следует, что если $\psi^0 > 0$, то для всех достаточно больших t имеем

$$\psi(t) + \psi^0 e^{-t} = -\psi^0 e^{-t} + (\psi(0) + 2\psi^0)e^{-2t} < 0,$$

что противоречит условию (6.5) и, следовательно, условию максимума (3.3).

Таким образом, в соотношениях принципа максимума Понтрягина для задачи (6.1)–(6.3) с необходимостью справедливо равенство $\psi^0 = 0$.

Рассмотрим теперь предельные соотношения на бесконечности в условиях трансверсальности (3.17) и (3.18). В общем случае эти соотношения различны; они не следуют из соотношений принципа максимума (3.1)–(3.3) и не являются следствиями друг друга. Здесь возможны различные комбинации выполнения или невыполнения этих условий вместе с соотношениями (3.1)–(3.3).

Следующий пример показывает, что возможна ситуация, когда вне зависимости от значения сопряженной переменной ψ^0 условия принципа максимума (3.1)–(3.3) для задачи (P) не могут выполняться ни с одним из предельных соотношений на бесконечности, ни в условиях трансверсальности (3.17), ни в условиях (3.18).

Пример 6.2. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x}(t) = u(t) - x(t), \quad u(t) \in U = [1/2, 1], \quad (6.6)$$

$$x(0) = 1, \quad (6.7)$$

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln \frac{1}{x(t) - 1/2} dt \rightarrow \max. \quad (6.8)$$

Положим $G = (1/2, \infty)$. Очевидно, что в этом случае условия (A1)–(A3) выполняются. Единственная оптимальная допустимая пара (x_*, u_*) в задаче (6.6)–(6.8) имеет вид

$$x_*(t) = \frac{1 + e^{-t}}{2} \quad \text{для любого } t \geq 0, \quad u_*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{1}{2}.$$

Пусть (ψ, ψ^0) — пара сопряженных переменных, удовлетворяющих вместе с оптимальной парой (x_*, u_*) основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в силу теоремы 3.1. Функция Гамильтона–Понтрягина для задачи (6.6)–(6.8) имеет вид

$$\mathcal{H}(x, t, u, \psi, \psi^0) = \psi(u - x) - \psi^0 e^{-t} \ln(x - 1/2).$$

Следовательно, переменная ψ является решением следующей сопряженной системы (см. (3.1)):

$$\dot{\psi}(t) = \psi(t) + 2\psi^0. \quad (6.9)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\frac{d}{dx} \ln(x_*(t) - 1/2) = \frac{1}{x_*(t) - 1/2} = 2e^t.$$

Легко видеть, что условие максимума (3.3) в данном случае влечет выполнение неравенства

$$\psi(t) \leq 0 \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Проверим возможность выполнения предельных условий на бесконечности в условиях трансверсальности (3.17) и (3.18).

Решая сопряженное уравнение (6.9), получаем

$$\psi(t) = (\psi(0) + 2\psi^0)e^t - 2\psi^0.$$

Если $\psi^0 = 0$, то $\psi(t) = \psi(0)e^t$. В этом случае в силу условия максимума (3.3) и условия нетривиальности (3.2) имеем $\psi(0) < 0$. Следовательно,

$$\psi(t) \rightarrow -\infty \quad \text{и} \quad x_*(t)\psi(t) = \psi(t)\frac{1+e^{-t}}{2} \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty,$$

что противоречит обоим предельным условиям как в (3.17), так и в (3.18).

Пусть $\psi^0 > 0$. В этом случае, не ограничивая общности (или домножая обе сопряженные переменные ψ и ψ^0 на $1/\psi^0$), можно считать, что $\psi^0 = 1$. Тогда

$$\psi(t) = (\psi(0) + 2)e^t - 2.$$

Если $\psi(0) \neq -2$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = -\infty$, а если $\psi(0) = -2$, то $\psi(t) = -2$ для любого $t \geq 0$. В обоих случаях предельное условие в (3.17) нарушается. Поскольку $\lim_{t \rightarrow \infty} x_*(t) = 1/2$, то в обоих случаях $\lim_{t \rightarrow \infty} x_*(t)\psi(t) \neq 0$. Таким образом, предельное условие в (3.18) также нарушается.

Следующий пример показывает, что соотношения принципа максимума для задачи (P) могут не выполняться вместе с предельным условием на бесконечности из (3.17) и могут выполняться с условиями трансверсальности (3.18).

Пример 6.3. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x}(t) = u(t) - x(t), \quad u(t) \in U = [0, 1], \quad (6.10)$$

$$x(0) = 1, \quad (6.11)$$

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln \frac{1}{x(t)} dt \rightarrow \max. \quad (6.12)$$

Положим $G = (0, \infty)$. Условия (A1)–(A3) в этом случае, очевидно, выполняются.

Для произвольной допустимой траектории x управляемой системы (6.10) имеем

$$e^{-t} \leq x(t) \leq 1 \quad \text{для любого} \quad t \geq 0.$$

Следовательно, пара (x_*, u_*) , где $x_*(t) = e^{-t}$ для любого $t \geq 0$ и $u_*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0$, является единственной оптимальной допустимой парой в задаче (6.10)–(6.12).

Пусть (ψ, ψ^0) — произвольная пара сопряженных переменных, соответствующая оптимальной паре (x_*, u_*) в силу принципа максимума Понтрягина (теорема 3.1).

Функция Гамильтона–Понтрягина в задаче (6.10)–(6.12) имеет вид

$$\mathcal{H}(x, t, u, \psi, \psi^0) = (u - x)\psi - \psi^0 e^{-t} \ln x,$$

а сопряженная система (3.1) в данном случае следующая:

$$\dot{\psi}(t) = \psi(t) + \psi^0 e^{-t} \frac{1}{x_*(t)} = \psi(t) + \psi^0.$$

Далее условие максимума (3.3) влечет

$$\psi(t) \leq 0 \quad \text{для любого} \quad t \geq 0. \quad (6.13)$$

Предположим, что $\psi^0 = 0$. Тогда $\psi(0) < 0$ и $\psi(t) = e^t \psi(0) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. предельное условие на бесконечности в условиях трансверсальности (3.17) нарушается.

Пусть $\psi^0 > 0$. В этом случае, не ограничивая общности, можно считать, что $\psi^0 = 1$. Тогда $\psi(t) = (\psi(0) + 1)e^t - 1$ и в силу условия (6.13) могут выполняться только следующие два случая:

- (i) если $\psi(0) = -1$, то $\psi(t) \equiv -1$;
- (ii) если $\psi(0) < -1$, то $\psi(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$.

В обоих случаях предельное условие на бесконечности в условиях трансверсальности (3.17) нарушается.

Итак, в задаче (6.10)–(6.12) второе краевое условие на бесконечности в (3.17) не выполняется ни для каких сопряженных переменных (ψ, ψ^0) , удовлетворяющих соотношениям принципа максимума (3.1)–(3.3). Однако легко видеть, что пара сопряженных переменных (ψ, ψ^0) , где $\psi(t) \equiv -1$ при $t \geq 0$ и $\psi^0 = 1$, удовлетворяет соотношениям принципа максимума (3.1)–(3.3) и условиям трансверсальности (3.18).

Следующий пример дополняет предыдущие примеры 6.1–6.3. Он показывает, что соотношения принципа максимума для задачи (P) могут выполняться с условиями трансверсальности (3.17), в то время как второе предельное условие в (3.18) может не выполняться.

Пример 6.4. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in U = [0, 1], \quad (6.14)$$

$$x(0) = 0, \quad (6.15)$$

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} e^{-t} g(x(t)) dt \rightarrow \max. \quad (6.16)$$

Положим $G = \mathbb{R}^1$ и определим функцию $g: G \mapsto \mathbb{R}^1$ следующим образом. На полуинтервале $[0, \infty)$ зададим функцию g формулой

$$g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^s}{(s+1)^2} ds. \quad (6.17)$$

Ясно, что так определенная функция g непрерывно дифференцируема при $x > 0$ и монотонно возрастает на бесконечном полуинтервале $[0, \infty)$. На бесконечный интервал $(-\infty, 0)$ продолжим g произвольным дифференцируемым образом с сохранением свойства монотонного возрастания и так, что $g(x) \in [0, 1]$ при $x \leq 0$. Ясно, что такое продолжение функции g на $(-\infty, 0)$ существует. Условия (A1) и (A2) в этом случае, очевидно, выполняются.

Докажем выполнение условия (A3). Для этого в силу неотрицательности функции g достаточно установить, что существует такая суммируемая на $[0, \infty)$ неотрицательная функция μ , что

$$e^{-t} g(x(t)) \leq \mu(t) \quad (6.18)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = 0 \quad (6.19)$$

для любой допустимой пары (x, u) (см. (1.4), (1.5)). Из возрастания функции g и того факта, что для произвольной допустимой пары (x, u) выполняется неравенство $x(t) \leq t$ для любого $t \geq 0$, следует, что условие (6.18) достаточно установить лишь для $x(t) \equiv t$. Поэтому мы завершим проверку условия (A3), положив

$$\mu(t) = e^{-t} g(t) \quad (6.20)$$

и показав, что μ удовлетворяет (6.19) и суммируема на $[0, \infty)$. Используя (6.17), получаем

$$\mu(t) = \frac{1}{e^t} \left(1 + \int_0^t \frac{e^s}{(s+1)^2} ds \right).$$

По правилу Лопиталя имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} \frac{e^t}{(t+1)^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t+1)^2} = 0.$$

Таким образом, соотношение (6.19) установлено.

Установим суммируемость функции μ на $[0, \infty)$. Для этого достаточно показать, что

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \mu(t) dt < \infty. \quad (6.21)$$

При $T > 0$ имеем (см. (6.17) и (6.20))

$$\begin{aligned} \int_0^T \mu(t) dt &= \int_0^T e^{-t} g(t) dt = \int_0^T e^{-t} \left[1 + \int_0^t \frac{e^s}{(s+1)^2} ds \right] dt \leq \\ &\leq (1 - e^{-T}) + \int_0^T \frac{1}{(s+1)^2} ds = (1 - e^{-T}) + \left(1 - \frac{1}{T+1} \right) < 2. \end{aligned}$$

Таким образом, условие (6.21) установлено. Тем самым суммируемость функции μ на $[0, \infty)$ доказана. Итак, условие (A3) в задаче (6.14)–(6.16) выполняется.

Так как функция g монотонно возрастает, то единственная оптимальная допустимая пара (x_*, u_*) в задаче (6.14)–(6.16) имеет вид

$$x_*(t) = t \quad \text{для любого } t \geq 0, \quad u_*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 1. \quad (6.22)$$

Пусть (ψ, ψ^0) — пара сопряженных переменных, удовлетворяющих в силу теоремы 3.1 вместе с (x_*, u_*) основным соотношениям принципа максимума Понтрягина. Функция Гамильтона–Понтрягина для задачи (6.14)–(6.16) имеет вид

$$\mathcal{H}(x, t, u, \psi, \psi^0) = u\psi + \psi^0 e^{-t} g(x).$$

В силу условия максимума (3.3) имеем

$$\psi(t) \geq 0 \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (6.23)$$

Далее согласно (6.17) при $t \geq 0$ имеем

$$\dot{g}(t) = \frac{e^t}{(t+1)^2}. \quad (6.24)$$

Следовательно, сопряженное уравнение, которому удовлетворяет переменная ψ , в данном случае имеет вид

$$\dot{\psi}(t) = -\psi^0 e^{-t} \frac{d}{dx} g(x_*(t)) = -\frac{\psi^0}{(t+1)^2}. \quad (6.25)$$

Если $\psi^0 = 0$, то $\psi(t) = \psi(0) > 0$ для всех $t \geq 0$. В этом случае $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t)x_*(t) = \infty$, что противоречит предельному условию на бесконечности в условиях трансверсальности (3.18).

Пусть теперь $\psi^0 > 0$. В этом случае, не ограничивая общности, будем считать, что $\psi^0 = 1$. Тогда, решая сопряженное уравнение (6.25), получаем

$$\psi(t) = \psi(0) - \int_0^t \dot{g}(s)e^{-s} ds. \quad (6.26)$$

Следовательно, в силу (6.24) имеем

$$\psi(t) = \psi(0) - \int_0^t \frac{1}{(s+1)^2} ds = \psi(0) - \left(1 - \frac{1}{t+1}\right). \quad (6.27)$$

При $\psi(0) = 1$ для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство (6.23) (полученное из условия максимума) и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0, \quad (6.28)$$

т.е. справедливо условие трансверсальности (3.17).

Рассмотрим предельное условие из условий трансверсальности (3.18). Из (6.27) вытекает

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \psi(0) - 1.$$

Если $\psi(0) \neq 1$, то (см. (6.27))

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_*(t)\psi(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |t\psi(t)| = \infty.$$

Пусть $\psi(0) = 1$. Тогда справедливо равенство (6.28). Поэтому с использованием теоремы Лопиталя получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_*(t)\psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(t)}{1/t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{\dot{\psi}(t)}{1/t^2}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{(1+t)^2} = 1;$$

в последнем равенстве мы приняли во внимание (6.25).

Итак, мы установили, что $x_*(t)\psi(t) \not\rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) при любом выборе $\psi(0)$. Таким образом, не существует связанной с (x_*, u_*) пары (ψ, ψ^0) сопряженных переменных, удовлетворяющих условию трансверсальности (3.18).

В следующем примере, как и в предыдущем примере 6.4, при выполнении (3.17) не выполняется предельное условие на бесконечности в условиях трансверсальности (3.18). Однако если в примере 6.4 предел на бесконечности (конечный или бесконечный) в условиях трансверсальности (3.18) всегда существует, хотя и отличен от нуля, то в приведенном ниже примере при выполнении условий (3.17) данный предел не существует.

Пример 6.5. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in U = \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad (6.29)$$

$$x(0) = 0,$$

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} e^{-t}(1 + \gamma(x(t)))u(t) dt \rightarrow \max. \quad (6.30)$$

Здесь γ — такая неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция, что

$$I = \int_0^{\infty} e^{-t} \gamma(t) dt < \infty. \quad (6.31)$$

Положим $G = \mathbb{R}^1$. Ясно, что условия (A1), (A2) в этом случае выполняются. Ниже мы уточним вид функции γ и покажем, что условие (A3) также выполняется.

Допустимая пара (x_*, u_*) , где $u_*(t) \stackrel{\text{п.б.}}{=} 1$ и $x_*(t) = t$ для всех $t \geq 0$, является оптимальной в задаче (6.29)–(6.31).

Действительно, пусть (x, u) — произвольная допустимая пара. Тогда в силу (6.29) имеем $\dot{x}(t) > 0$ для любого $t \geq 0$. Делая замену переменной интегрирования $\tau(t) = x(t)$ в (6.30), получаем $d\tau = u(t) dt$ и

$$t(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{1}{u(t(s))} ds \quad \text{для любого } \tau \geq 0.$$

Так как

$$\int_0^{\tau} \frac{1}{u(t(s))} ds \geq \tau,$$

имеем

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \int_0^{\infty} e^{-t} (1 + \gamma(x(t))) u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\int_0^{\tau} \frac{1}{u(t(s))} ds} (1 + \gamma(\tau)) d\tau \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-\tau} (1 + \gamma(\tau)) d\tau = J(x_*, u_*). \end{aligned}$$

Следовательно, (x_*, u_*) — допустимая оптимальная пара в задаче (6.29)–(6.31). Легко видеть, что данная оптимальная пара единственная. Функция Гамильтона–Понтрягина в задаче (6.29)–(6.31) имеет вид

$$\mathcal{H}(x, t, u, \psi, \psi^0) = u\psi + \psi^0 e^{-t} (1 + \gamma(x)) u.$$

Пусть (ψ, ψ^0) — произвольная пара сопряженных переменных, удовлетворяющая вместе с оптимальной парой (x_*, u_*) основным соотношениям (3.1)–(3.3) принципа максимума Понтрягина.

Сопряженная система (3.1) в данном случае имеет вид

$$\dot{\psi}(t) = -\psi^0 e^{-t} \dot{\gamma}(t).$$

Если $\psi^0 = 0$, то условие максимума (3.3) влечет выполнение неравенства $\psi(t) = \psi(0) > 0$ для любого $t \geq 0$; следовательно, в этом случае $\psi(t)x_*(t) = \psi(0)t \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ и предельное условие на бесконечности в условиях (3.18) не выполняется при произвольном выборе функции γ . Заметим, что в этом случае нарушаются и оба условия в (3.17).

Предположим, что $\psi^0 > 0$, что эквивалентно $\psi^0 = 1$. Тогда в силу сопряженной системы (3.1) имеем

$$\psi(t) = \psi(0) - \int_0^t e^{-s} \dot{\gamma}(s) ds.$$

Предельное условие в (3.18) в этом случае имеет вид $\lim_{t \rightarrow \infty} t\psi(t) = 0$. Покажем, что функция γ может быть определена таким образом, что последнее условие не выполняется, причем для любого $\psi(0) \in \mathbb{R}^1$ предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t\psi(t) \quad (6.32)$$

не существует, в то время как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0. \quad (6.33)$$

Положим $q(t) = t\psi(t)$ для любого $t \geq 0$. Представим величину $q(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} q(t) &= t\psi(0) - t \int_0^t e^{-s} \dot{\gamma}(s) ds = t\psi(0) - t \left[\gamma(s)e^{-s} \Big|_0^t + \int_0^t \gamma(s)e^{-s} ds \right] = \\ &= t\psi(0) - t\gamma(t)e^{-t} + t\gamma(0) - tI(t), \end{aligned}$$

где

$$I(t) = \int_0^t \gamma(s)e^{-s} ds.$$

Обозначая $\nu(t) = \gamma(t)e^{-t}$, для всех $t \geq 0$ получим

$$I(t) = \int_0^t \nu(s) ds, \quad (6.34)$$

$$q(t) = t\psi(0) - t\nu(t) + t\nu(0) - tI(t). \quad (6.35)$$

В силу (6.31) имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = I. \quad (6.36)$$

Уточним теперь вид функции ν . Для каждого натурального числа k зафиксируем положительное $\varepsilon_k < 1/2$ и определим интервал Δ_k как ε_k -окрестность числа k . Ясно, что $\Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset$ для любого $k \neq j$. Положим

$$\begin{aligned} \nu(k) &= \frac{1}{k} \quad \text{для } k = 1, 2, \dots, & \nu(t) &= 0 \quad \text{для } t \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \\ \nu(t) &\in \left[0, \frac{1}{k} \right] \quad \text{для } t \in \Delta_k, & k &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Кроме того, мы потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=j}^{\infty} \int_{\Delta_k} \nu(t) dt \leq \frac{1}{j^2}. \quad (6.37)$$

Это выполняется, например, если потребовать выполнение условия

$$\frac{2\varepsilon_k}{k} \leq \frac{a_k}{k^2} \quad \text{для любого } k = 1, 2, \dots,$$

где $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$, $a_k > 0$. Действительно, в этом случае имеем

$$\sum_{k=j}^{\infty} \int_{\Delta_k} \nu(t) dt \leq \sum_{k=j}^{\infty} \frac{2\varepsilon_k}{k} \leq \sum_{k=j}^{\infty} \frac{a_k}{k^2} \leq \frac{1}{j^2} \sum_{k=j}^{\infty} a_k \leq \frac{1}{j^2},$$

т.е. (6.37) выполняется. Заметим, что для $j = 1$ левая часть в условии (6.37) равна I (см. (6.31)) и, таким образом, (6.37) влечет выполнение условия (6.31).

Далее из условия (6.37) следует равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t(I - I(t)) = 0. \quad (6.38)$$

Действительно, в силу условия (6.34) имеем $I(j + \varepsilon_j) = \sum_{k=1}^j \int_{\Delta_k} \nu(t) dt$. Следовательно, в силу (6.37)

$$I - I(j + \varepsilon_j) = \sum_{k=j+1}^{\infty} \int_{\Delta_k} \nu(t) dt \leq \frac{1}{(j+1)^2}.$$

Далее для $t \in [j + \varepsilon_j, j + 1 + \varepsilon_{j+1}]$ имеем $I(j + \varepsilon_j) \leq I(t) \leq I$, откуда для $t \geq 1$ получаем

$$0 \leq I - I(t) \leq \frac{1}{(j+1)^2} \leq \frac{1}{(t - \varepsilon_{j+1})^2} \leq \frac{1}{(t - 1/2)^2},$$

что влечет выполнение (6.38). Функция ν имеет выбранный вид только в том случае, когда функция γ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= \frac{e^k}{k} \quad \text{для } k = 1, 2, \dots, & \gamma(t) &= 0 \quad \text{для } t \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \\ \gamma(t) &\in \left[0, \frac{e^k}{k}\right] \quad \text{для } t \in \Delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (6.39)$$

и выполняется условие (6.37).

Покажем, что условие (A3) в этом случае выполняется. Пусть (x, u) — произвольная допустимая пара. В силу условия (6.29) имеем $t/2 \leq x(t) \leq t$ для всех $t \geq 0$. Следовательно, в силу определения функции ν имеем $\nu(x(t)) \leq (t/2 - 1)^{-1} = 2/(t - 2)$ для всех $t > 2$. Таким образом,

$$0 \leq e^{-t} \max_{u \in U} [(1 + \gamma(x(t)))u] \leq \mu(t) = e^{-t} + \frac{2}{(t-2)} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Итак, первое условие в (A3) выполняется. Далее, вводя новую переменную интегрирования $\tau(t) = x(t)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_T^{\infty} e^{-t} (1 + \gamma(x(t))) u(t) dt &= \int_{x(T)}^{\infty} e^{-\int_0^{\tau} \frac{1}{u(t(s))} ds} (1 + \gamma(\tau)) d\tau \leq \int_{x(T)}^{\infty} e^{-\tau} (1 + \gamma(\tau)) d\tau \leq \\ &\leq \omega(T) = \int_{T/2}^{\infty} e^{-t} (1 + \gamma(t)) dt \rightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, второе условие в (A3) также выполняется. Итак, мы установили выполнение условия (A3).

В силу определения функции γ для $t \in \Delta_k$, $k = 1, 2, \dots$, имеем

$$0 \leq t\nu(t) \leq \frac{k + \varepsilon_k}{k} \leq 1 + \frac{1}{k}.$$

Следовательно,

$$0 \leq t\nu(t) \leq 2 \quad \text{для всех } t \geq 0, \quad (6.40)$$

т.е. функция $t\nu(t)$ ограниченная. Далее $k\nu(k) = 1$ и в силу условия (6.39) для любой такой последовательности $t_k \rightarrow \infty$, что $t_k \in [k, k+1] \setminus (\Delta_k \cup \Delta_{k+1})$, имеем $t_k\nu(t_k) = 0$. Таким образом, $\lim_{t \rightarrow \infty} t\nu(t)$ не существует.

В силу $\nu(0) = 0$ и определения (6.35) функции q получаем

$$q(t) = t\psi(0) - t\nu(t) - tI(t). \quad (6.41)$$

Если $\psi(0) > I$, то в силу (6.36) имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} t(\psi(0) - I(t)) = \infty$, что влечет выполнение равенства $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \infty$, поскольку величина $t\nu(t)$ ограничена. Аналогично получаем, что если $\psi(0) < I$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = -\infty$. Пусть, наконец, $\psi(0) = I$. Тогда в силу (6.38) имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t(\psi(0) - I(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} t(I - I(t)) = 0.$$

Таким образом, в правой части равенства (6.41) сумма первого и третьего слагаемых стремится к нулю при t , стремящемся к бесконечности, в то время как второе слагаемое $t\nu(t)$, как показано выше, не имеет предела при t , стремящемся к бесконечности. Следовательно, величина $q(t)$, являющаяся левой частью равенства (6.41), не имеет предела на бесконечности. Мы показали, что предел (6.32) не существует ни при каких $\psi(0) \in \mathbb{R}^1$.

Итак, предельное условие в условиях трансверсальности (3.18) не выполняется ни при каком выборе ψ^0 . Однако, выбирая $\psi^0 = 1$ и $\psi(0) = I$, мы удовлетворяем условия трансверсальности (3.17). В самом деле, в этом случае $\psi(t) = q(t)/t = \psi(0) - I(t) - \nu(t)$ для всех $t > 0$, а условия $\psi(0) = I$ и (6.40) влекут условие $\psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Однако, как показано выше, в этом случае предел величины $q(t)$ не существует.

В заключение данного раздела рассмотрим пример, иллюстрирующий дополнительный характер условия стационарности гамильтониана (см. (3.26))

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(x_*(t), t, \psi(t), \psi^0) = 0. \quad (6.42)$$

Пример 6.6. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x}(t) = u(t) - x(t), \quad u(t) \in U = [0, 1], \quad (6.43)$$

$$x(0) = 1/2, \quad (6.44)$$

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-t} \ln \frac{1}{x(t)} dt \rightarrow \max. \quad (6.45)$$

Положим $G = (0, 1)$. Поскольку для любой допустимой траектории x управляемой системы (6.43) с начальным условием (6.44) имеем

$$\frac{1}{2}e^{-t} \leq x(t) \leq 1 - \frac{1}{2}e^{-t} \quad \text{для любого } t \geq 0, \quad (6.46)$$

то для задачи (6.43)–(6.45), очевидно, выполняются условия (A1)–(A3). Таким образом, данная задача является частным случаем задачи (P).

Заметим, что сформулированная задача (6.43)–(6.45) отличается от задачи (6.10)–(6.12), рассмотренной выше в примере 6.3, начальным условием (6.44) и множеством G .

Покажем, что в задаче (6.43)–(6.45) имеется бесконечное семейство допустимых пар (x_*, u_*) , удовлетворяющих вместе с соответствующими парами сопряженных переменных (ψ, ψ^0) основным соотношениям принципа максимума Понтрягина (3.1)–(3.3), в то время как условию стационарности (6.42) в этой задаче удовлетворяет единственная оптимальная пара

$$\tilde{x}_*(t) = \frac{e^{-t}}{2} \quad \text{для любого } t \geq 0, \quad \tilde{u}_*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0.$$

Функция Гамильтона–Понтрягина в задаче (6.43)–(6.45) имеет вид

$$\mathcal{H}(x, t, u, \psi, \psi^0) = (u - x)\psi - \psi^0 e^{-t} \ln x,$$

а сопряженная система (вдоль произвольной допустимой пары (x_*, u_*)) в данном случае следующая:

$$\dot{\psi}(t) = \psi(t) + \psi^0 e^{-t} \frac{1}{x_*(t)}. \quad (6.47)$$

Далее условие максимума (3.3) принимает вид

$$\max_{u \in [0,1]} u\psi(t) = u_*(t)\psi(t) \quad \text{при почти всех } t \geq 0, \quad (6.48)$$

а условие стационарности (6.42) влечет выполнение равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{u \in U} [(u - x_*(t))\psi(t)] = 0. \quad (6.49)$$

Решая сопряженную систему (6.47) при произвольном начальном значении $\psi(0)$, получаем равенство

$$\psi(t) = e^t \left[\psi(0) + \psi^0 \int_0^t \frac{e^{-2s}}{x_*(s)} ds \right] \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (6.50)$$

Следовательно, если $\psi^0 = 0$, то $\psi(t) = \psi(0)e^t$ для любого $t \geq 0$. Таким образом, в этом случае в силу условия максимума (6.48) в зависимости от знака $\psi(0)$ имеются две возможности.

(i) Если $\psi(0) < 0$, то $u_*(t) = 0$ при почти всех $t \geq 0$ и $x_*(t) = \frac{1}{2}e^{-t}$ для любого $t \geq 0$. В этой ситуации пара (x_*, u_*) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума (3.1)–(3.3) вместе с парой сопряженных переменных $\psi(t) = \psi(0)e^t$, $\psi(0) < 0$, и $\psi^0 = 0$. Однако в этом случае

$$\max_{u \in U} [(u - x_*(t))\psi(t)] = \frac{\psi(0)}{2} < 0 \quad \text{для любого } t \geq 0,$$

что противоречит условию (6.49), и, следовательно, условие стационарности (6.42) нарушается.

(ii) Если $\psi(0) > 0$, то $u_*(t) = 1$ при почти всех $t \geq 0$ и $x_*(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t}$ для любого $t \geq 0$. В этой ситуации пара (x_*, u_*) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума (3.1)–(3.3) вместе с парой сопряженных переменных $\psi(t) = \psi(0)e^t$, $\psi(0) > 0$, и $\psi^0 = 0$.

Однако в этом случае

$$\max_{u \in U} (u - x_*(t))\psi(t) = \frac{\psi(0)}{2} > 0 \quad \text{для любого } t \geq 0,$$

что противоречит условию (6.49), и, следовательно, условие стационарности (6.42) также нарушается.

Таким образом, условие стационарности (6.42) исключает возможность аномальности задачи (6.43)–(6.45).

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\psi^0 = 1$. В этом случае согласно равенству (6.50) имеем

$$\psi(t) = e^t \left[\psi(0) + \int_0^t \frac{e^{-2s}}{x_*(s)} ds \right] \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (6.51)$$

Рассмотрим все возможные начальные состояния $\psi(0)$ для сопряженной переменной ψ .

Пусть $\psi(0) \geq 0$. Тогда в силу (6.51) для любого $t > 0$ выполняется неравенство $\psi(t) > 0$. Следовательно, в этом случае условие максимума (6.48) влечет выполнение равенства $u_*(t) = 1$ при почти всех $t \geq 0$. Тогда $x_*(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t}$ для любого $t \geq 0$. Подставляя это выражение для x_* в равенство (6.51), получаем

$$\psi(t) = e^t \left[\psi(0) + 2 \int_0^t \frac{e^{-2s}}{2 - e^{-s}} ds \right].$$

Итак, в данном случае допустимая пара (x_*, u_*) вместе с данной сопряженной переменной ψ удовлетворяют основным соотношениям принципа максимума в нормальной форме, однако

$$\max_{u \in U} [(u - x_*(t))\psi(t)] = \frac{\psi(0)}{2} + \int_0^t \frac{e^{-2s}}{2 - e^{-s}} ds > \frac{1}{4}(1 - e^{-2t}) \quad \text{для любого } t \geq 0,$$

что противоречит условию (6.49) и, следовательно, условию стационарности (6.42).

Пусть $\psi(0) \in (-2, 0)$. В этом случае на некотором примыкающем к нулю справа интервале времени имеем $\psi(t) < 0$ и, следовательно, $u_*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0$. Тогда на этом интервале времени

$$x_*(t) = \frac{1}{2}e^{-t} \quad \text{и} \quad \psi(t) = e^t [\psi(0) + 2(1 - e^{-t})].$$

Следовательно, каково бы ни было значение $\psi(0) \in (-2, 0)$, за конечное время $\xi > 0$ сопряженная переменная ψ обратится в нуль, т.е. $\psi(\xi) = 0$. В силу равенства (6.51) сопряженная переменная ψ при этом обязательно меняет знак и соответствующее в силу условия максимума (6.48) управление u_* меняет значение с 0 на 1. При этом каждому начальному значению $\psi(0)$ однозначно соответствует свое управление u_* , так что таких управлений u_* бесконечно много.

Итак, в зависимости от начального значения $\psi(0) \in (-2, 0)$ мы имеем бесконечное семейство допустимых пар (x_*, u_*) , удовлетворяющих основным соотношениям принципа максимума в нормальной форме вместе с соответствующей сопряженной переменной ψ . Однако в этом случае имеем

$$\psi(t) = e^t \left[e^{-\xi}\psi(\xi) + \int_{\xi}^t \frac{e^{-2s}}{x_*(s)} ds \right] > 2e^t \int_{\xi}^t \frac{e^{-2s}}{2 - e^{-s}} ds > e^{t-2\xi} - e^{-t} \quad \text{для любого } t > \xi,$$

что противоречит условию (6.49) и, следовательно, условию стационарности (6.42).

Пусть $\psi(0) < -2$. В этом случае на некотором примыкающем к нулю справа интервале времени имеем $\psi(t) < 0$ и, следовательно, $u_*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0$. Тогда на этом интервале времени

$$x_*(t) = \frac{1}{2}e^{-t} \quad \text{и} \quad \psi(t) = e^t[\psi(0) + 2(1 - e^{-t})].$$

Следовательно, $\psi(t) < 0$ для любого $t \geq 0$. Таким образом, при начальном условии $\psi(0) < -2$ сопряженной переменной ψ в силу условия максимума соответствует допустимая пара

$$x_*(t) = \tilde{x}_*(t) = \frac{e^{-t}}{2} \quad \text{для любого } t \geq 0, \quad u_*(t) = \tilde{u}_*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0.$$

В этом случае

$$\max_{u \in U} (u - x_*(t))\psi(t) = \frac{\psi(0) + 2(1 - e^{-t})}{2} \rightarrow \frac{\psi(0) + 2}{2} < 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

что противоречит условию (6.49) и, следовательно, условию стационарности (6.42).

Рассмотрим, наконец, случай $\psi(0) = -2$. В этом случае $\psi(t) \equiv -2$ и

$$x_*(t) = \tilde{x}_*(t) = \frac{e^{-t}}{2} \quad \text{для любого } t \geq 0, \quad u_*(t) = \tilde{u}_*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0.$$

В этом случае

$$\max_{u \in U} (u - x_*(t))\psi(t) = e^{-t} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Таким образом в данном примере условие стационарности вместе с основными соотношениями принципа максимума Понтрягина в нормальной форме выделяют единственную оптимальную пару $(\tilde{x}_*, \tilde{u}_*)$ и единственную соответствующую этой паре сопряженную переменную ψ .

Рассмотренные примеры демонстрируют качественное отличие задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени (P) от аналогичной задачи на конечном интервале (P_T) (см. разд. 3). В частности, в случае задачи (P) естественные условия трансверсальности (3.17) и (3.18) могут не выполняться вместе с основными соотношениями (3.1)–(3.3) принципа максимума Понтрягина, а условие стационарности гамильтониана (3.26) несет дополнительную содержательную информацию.

В следующих разделах мы докажем несколько различных вариантов принципа максимума Понтрягина в нормальной форме, содержащих дополнительные условия на сопряженную переменную и гамильтониан.

7. АППРОКСИМАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА. СЛУЧАЙ СИСТЕМ, АФФИННЫХ ПО УПРАВЛЕНИЮ

Здесь рассматривается ситуация, когда управляемая система (1.1) аффинна по управлению. В этом случае специальным образом строится последовательность классических задач оптимального управления $\{(P_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, определенных каждая на своем конечном интервале времени $[0, T_k]$ и аппроксимирующих исходную задачу (P). При этом последовательность $\{T_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, выбирается таким образом, что $T_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Выделение случая систем, аффинных по управлению, вызвано главным образом соображениями технического характера. В этом случае конструкции существенно упрощаются, а основной аппроксимационный результат данного раздела (лемма 7.1) имеет несколько более сильную форму, чем аналогичный результат в общем нелинейном случае. Этот случай представляет интерес и с практической точки зрения, поскольку аффинные по управлению системы часто встречаются в приложениях.

Перейдем к построению последовательности аппроксимирующих задач $\{(P_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$. При этом всюду в данном разделе мы будем предполагать, что управляемая система (1.1) в задаче (P) представима в виде (1.7), множество U — выпуклый компакт, а скалярная функция g вогнутая по переменной u . В этом случае условие выпуклости (A2) для задачи (P) выполняется автоматически.

Пусть u_* — заданное оптимальное управление в задаче (P) . Выберем такие последовательность непрерывно дифференцируемых векторных функций $\{z_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, $z_k: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^m$, и последовательность положительных чисел $\{\sigma_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, что

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|z_k(t)\| \leq \max_{u \in U} \|u\| + 1, \quad (7.1)$$

$$\int_0^\infty e^{-(\rho+1)t} \|z_k(t) - u_*(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{k}, \quad (7.2)$$

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|\dot{z}_k(t)\| \leq \sigma_k < \infty, \quad (7.3)$$

$$\sigma_k \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Очевидно, такие последовательности $\{z_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, и $\{\sigma_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, существуют.

Далее выберем такую монотонно возрастающую последовательность положительных чисел $\{T_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, что

$$T_k \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty$$

и

$$\omega(T_k) \leq \frac{1}{k(1 + \sigma_k)} \quad \text{для любого} \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.4)$$

Напомним, что согласно условию (A3) функция ω удовлетворяет неравенству (1.5).

Для произвольного $k = 1, 2, \dots$ определим задачу (P_k) следующим образом:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U,$$

$$x(0) = x_0,$$

$$J_k(x, u) = \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \left[g(x(t), u(t)) - \frac{1}{1 + \sigma_k} e^{-t} \|u(t) - z_k(t)\|^2 \right] dt \rightarrow \max.$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $x_0 \in G$, векторная функция f , скалярная функция g , параметр дисконтирования ρ , множества U и G те же самые, что и в исходной задаче (P) . Как обычно, класс допустимых управлений в задаче (P_k) , $k = 1, 2, \dots$, состоит из всех измеримых векторных функций $u: [0, T_k] \mapsto U$.

Будем говорить, что $\{(P_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, — *аппроксимирующая последовательность задач, соответствующих оптимальному управлению u_** .

Поскольку задача (P) удовлетворяет условиям (A1) и (A2), то для любого $k = 1, 2, \dots$ задача (P_k) также удовлетворяет условиям (A1) и (A2). Следовательно, в силу теоремы Филишова (см. [48, Theorem 9.3.i]) для любого $k = 1, 2, \dots$ в задаче (P_k) существует оптимальная допустимая пара (x_k, u_k) (на интервале времени $[0, T_k]$). В дальнейшем будем считать, что любая оптимальная в задаче (P_k) , $k = 1, 2, \dots$, пара (x_k, u_k) продолжена с интервала времени $[0, T_k]$ на весь бесконечный полуинтервал $[0, \infty)$ произвольным допустимым для управляемой системы (1.1) образом.

В случае систем, аффинных по управлению, следующий результат является основным инструментом изучения задачи (P) посредством ее аппроксимации последовательностью задач (P_k) , $k = 1, 2, \dots$

Лемма 7.1. Пусть управляемая система (1.1) аффинна по управлению, множество U — выпуклый компакт, а функция g вогнута по u . Пусть для задачи (P) выполняются условия (A1) и (A3). Пусть далее u_* — заданное оптимальное допустимое управление в задаче (P), а $\{(P_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, — соответствующая u_* аппроксимирующая последовательность задач оптимального управления. Наконец, пусть u_k — оптимальное управление в задаче (P_k) , $k = 1, 2, \dots$. Тогда для любого $T > 0$ имеем

$$u_k \rightarrow u_* \quad \text{в } L^2([0, T], \mathbb{R}^m) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Выберем произвольное $T > 0$. Пусть k_1 — такое натуральное число, что $T_{k_1} \geq T$. Тогда для каждого $k \geq k_1$ имеем

$$\begin{aligned} J_k(x_k, u_k) &= \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \left[g(x_k(t), u_k(t)) - e^{-t} \frac{\|u_k(t) - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right] dt \leq \\ &\leq \int_0^{T_k} e^{-\rho t} g(x_k(t), u_k(t)) dt - \frac{e^{-(\rho+1)T}}{1 + \sigma_k} \int_0^T \|u_k(t) - z_k(t)\|^2 dt, \end{aligned}$$

где x_k — траектория управляемой системы (1.1), соответствующая управлению u_k (на интервале времени $[0, T_k]$). Напомним, что оптимальная пара (x_k, u_k) продолжена с интервала времени $[0, T_k]$ на весь бесконечный полуинтервал $[0, \infty)$ произвольным допустимым для управляемой системы (1.1) образом.

Пусть x_* — траектория, соответствующая управлению u_* . Тогда в силу оптимальности управления u_k в задаче (P_k) , $k = 1, 2, \dots$, и оптимальности управления u_* в задаче (P), условий (1.5), (7.2) и (7.4), а также допустимости пары (x_*, u_*) в задаче (P_k) и допустимости пары (x_k, u_k) в задаче (P) для всех $k \geq k_1$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{e^{-(\rho+1)T}}{1 + \sigma_k} \int_0^T \|u_k(t) - z_k(t)\|^2 dt &\leq \int_0^{T_k} e^{-\rho t} g(x_k(t), u_k(t)) dt - J_k(x_*, u_*) \leq \\ &\leq \int_0^{T_k} e^{-\rho t} g(x_k(t), u_k(t)) dt - J(x_*, u_*) + \omega(T_k) + \int_0^\infty \frac{e^{-(\rho+1)t}}{1 + \sigma_k} \|u_*(t) - z_k(t)\|^2 dt \leq \\ &\leq \int_0^{T_k} e^{-\rho t} g(x_k(t), u_k(t)) dt - J(x_*, u_*) + \frac{2}{k(1 + \sigma_k)} \leq \\ &\leq J(x_k, u_k) - J(x_*, u_*) + \frac{3}{k(1 + \sigma_k)} \leq \frac{3}{k(1 + \sigma_k)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^T \|u_k(t) - z_k(t)\|^2 dt \leq \frac{3e^{(\rho+1)T}}{k},$$

откуда в силу условия (7.2) имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T \|u_k(t) - u_*(t)\|^2 dt \right)^{1/2} &\leq \left(\int_0^T \|u_*(t) - z_k(t)\|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_0^T \|u_k(t) - z_k(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\frac{e^{(\rho+1)T}}{k} \right)^{1/2} + \left(\frac{3e^{(\rho+1)T}}{k} \right)^{1/2} = (1 + \sqrt{3}) \left(\frac{e^{(\rho+1)T}}{k} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $k_2 \geq k_1$, что

$$\left(\int_0^T \|u_k(t) - u_*(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \leq \varepsilon \quad \text{для любого } k \geq k_2.$$

Лемма доказана.

Заметим, что в силу леммы 7.1, переходя, если нужно, к подпоследовательности, всегда можно считать, что для любого $T > 0$ имеем (см., например, [16])

$$u_k(t) \rightarrow u_*(t) \quad \text{при почти всех } t \in [0, T] \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (7.5)$$

Далее для последовательности $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, соответствующих траекторий имеем

$$x_k \rightarrow x_* \quad \text{в } C([0, T], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (7.6)$$

Действительно, если это не так, то в силу теоремы Арцела–Асколи существуют такая абсолютно непрерывная векторная функция $\tilde{x}: [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$ и такая подпоследовательность последовательности $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ (снова будем обозначать ее через $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$), что $\tilde{x} \neq x_*$ и $x_k \rightarrow \tilde{x}$ в $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ при $k \rightarrow \infty$. Далее для любого $k = 1, 2, \dots$ и любого $t \in [0, T]$ справедливо равенство

$$x_k(t) = x_0 + \int_0^t f(x_k(s), u_k(s)) ds.$$

При этом в силу непрерывности функции f , условия (A1) и компактности множества U подынтегральные функции здесь равномерно ограничены на интервале $[0, T]$. Следовательно, в силу условия (7.5), равномерной сходимости последовательности $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, к функции \tilde{x} и теоремы Лебега (см., например, [12, 16]), переходя к пределу под знаком интеграла в последнем равенстве при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\tilde{x}(t) = x_0 + \int_0^t f(\tilde{x}(s), u_*(s)) ds \quad \text{для любого } t \in [0, T].$$

Однако это означает, что абсолютно непрерывная функция \tilde{x} есть отличная от x_* допустимая траектория системы (1.1), соответствующая управлению u_* , чего не может быть в силу теоремы о единственности решения дифференциального уравнения. Следовательно, $x_k \rightarrow x_*$ в $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ при $k \rightarrow \infty$.

Используя лемму 7.1, докажем аппроксимационный вариант принципа максимума Понтрягина для задачи (P) в случае, когда система (1.1) аффинна по управлению.

Будем использовать следующую формулировку принципа максимума Понтрягина [19] для задачи (P_k) , $k = 1, 2, \dots$

Пусть допустимая пара (x_k, u_k) оптимальна в задаче (P_k) для некоторого $k = 1, 2, \dots$. Тогда существует такая пара (ψ_k, ψ_k^0) сопряженных переменных, соответствующих паре (x_k, u_k) , что пара (x_k, u_k) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина (3.1)–(3.3) (для задачи (P_k)) вместе с множителями Лагранжа (ψ_k, ψ_k^0) и, кроме того, выполняются условие $\psi_k^0 > 0$ и условие трансверсальности

$$\psi_k(T_k) = 0. \quad (7.7)$$

Напомним, что сопряженная переменная ψ_k является решением сопряженной системы для задачи (P_k) , соответствующим паре (x_k, u_k) , т.е. на интервале времени $[0, T_k]$ имеем

$$\dot{\psi}_k(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} - \left[\frac{\partial f(x_k(t), u_k(t))}{\partial x} \right]^* \psi_k(t) - \psi^0 e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_k(t), u_k(t))}{\partial x} \quad (7.8)$$

и, кроме того, на интервале $[0, T_k]$ выполняется условие максимума

$$\mathcal{H}_k(x_k(t), t, u_k(t), \psi_k(t), \psi_k^0) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H_k(x_k(t), t, \psi_k(t), \psi_k^0). \quad (7.9)$$

Здесь функция Гамильтона–Понтрягина \mathcal{H}_k и гамильтониан H_k для задачи (P_k) , $k = 1, 2, \dots$, для любых $x \in G$, $t \in \mathbb{R}^1$, $u \in U$, $\psi \in \mathbb{R}^n$ и $\psi^0 \in \mathbb{R}^1$ определяются равенствами

$$\mathcal{H}_k(x, t, u, \psi, \psi^0) = \langle f(x, u), \psi \rangle + \psi^0 e^{-\rho t} g(x, u) - \psi^0 e^{-(\rho+1)t} \frac{\|u - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k}, \quad (7.10)$$

$$H_k(x, t, \psi, \psi^0) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}_k(x, t, u, \psi, \psi^0).$$

Как известно (см. [19, 56]), сопряженная система (7.8) и условие максимума (7.9) влекут выполнение на интервале $[0, T_k]$ следующего условия стационарности для задачи (P_k) , $k = 1, 2, \dots$:

$$\frac{d}{dt} H_k(x_k(t), t, \psi_k(t), \psi_k^0) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_k(x_k(t), t, u_k(t), \psi_k(t), \psi_k^0). \quad (7.11)$$

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что для любого $k = 1, 2, \dots$ векторная функция ψ_k продолжена на бесконечный полуинтервал $[0, \infty)$ нулем по непрерывности (см. (7.7)), т.е. положим $\psi_k(t) = \psi_k(T_k) = 0$ для любого $t \geq T_k$.

Следующий вариант принципа максимума Понтрягина для задачи (P) формулируется в терминах аппроксимирующей последовательности $\{(P_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, что дает основание называть его *аппроксимационным принципом максимума*.

Теорема 7.1. *Предположим, что управляемая система (1.1) аффинна по управлению, множество U — выпуклый компакт, а функция g вогнута по u . Пусть для задачи (P) выполняются условия (A1) и (A3). Пусть далее (x_*, u_*) — оптимальная допустимая пара в задаче (P) и $\{(P_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, — аппроксимирующая последовательность задач оптимального управления, соответствующая управлению u_* . Пусть, кроме того, для каждого $k = 1, 2, \dots$ пара (x_k, u_k) является оптимальной допустимой парой в задаче (P_k) и (ψ_k, ψ_k^0) — пара сопряженных переменных, соответствующих паре (x_k, u_k) в задаче (P_k) , так что пара (x_k, u_k) удовлетворяет основным соотношениям (7.8), (7.9) принципа максимума Понтрягина для задачи (P_k) вместе с множителями Лагранжа (ψ_k, ψ_k^0) и для любого $k = 1, 2, \dots$ выполняются неравенство $\psi_k^0 > 0$ и условие трансверсальности (7.7). Наконец, пусть последовательности $\{\psi_k(0)\}$, $k = 1, 2, \dots$, и $\{\psi_k^0\}$, $k = 1, 2, \dots$, ограничены и для некоторого $a > 0$ справедливы неравенства*

$$\|\psi_k(0)\| + \psi_k^0 \geq a, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.12)$$

Тогда существует такая подпоследовательность последовательности $\{(u_k, x_k, \psi_k, \psi_k^0)\}$, $k = 1, 2, \dots$ (в дальнейшем будем обозначать ее снова через $\{(u_k, x_k, \psi_k, \psi_k^0)\}$), что

1) для любого $T > 0$ имеем

$$u_k(t) \rightarrow u_*(t) \quad \text{при почти всех } t \in [0, T] \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (7.13)$$

$$x_k \rightarrow x_* \quad \text{в } C([0, T], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (7.14)$$

$$\psi_k^0 \rightarrow \psi^0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (7.15)$$

$$\psi_k \rightarrow \psi \quad \text{в } C([0, T], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (7.16)$$

где (ψ, ψ^0) — нетривиальная пара сопряженных переменных, соответствующая паре (x_*, u_*) , т.е. пара (x_*, u_*) удовлетворяет основным соотношениям (3.1)–(3.3) принципа максимума Понтрягина для задачи (P) вместе с множителями Лагранжа (ψ, ψ^0) ;

2) выполняется следующее условие стационарности:

$$H(x_*(t), t, \psi(t), \psi^0) = \psi^0 \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (7.17)$$

Доказательство. В силу леммы 7.1, переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, получаем условия (7.13), (7.14) для произвольного $T > 0$.

Далее, в силу условий теоремы числовая последовательность $\{\psi_k^0\}$, $k = 1, 2, \dots$, ограниченная. Следовательно, переходя, если нужно, к подпоследовательности, не ограничивая общности, можно считать, что условие (7.15) выполняется для некоторого $\psi^0 \geq 0$.

Перейдем теперь к выделению такой подпоследовательности из последовательности $\{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, что для любого $T > 0$ выполняется условие (7.16), где (ψ, ψ^0) — ненулевая пара сопряженных переменных, соответствующая оптимальной паре (x_*, u_*) .

Рассмотрим последовательность абсолютно непрерывных функций $\{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, на интервале времени $[0, T_1]$. В силу сопряженной системы (7.8), ограниченности последовательности $\{\psi_k(0)\}$, $k = 1, 2, \dots$ (см. условия теоремы), а также в силу леммы Гронуолла–Беллмана эта последовательность равномерно ограничена на $[0, T_1]$. Более того, последовательность ее производных $\{\dot{\psi}_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, также равномерно ограничена на $[0, T_1]$. Поэтому в силу теоремы Арцела–Асколи, переходя, если нужно, к подпоследовательности, которую в дальнейшем будем обозначать через $\{\psi_{1,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, получаем

$$\psi_{1,k} \rightarrow \psi \quad \text{в } C([0, T_1], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

где $\psi: [0, T_1] \mapsto \mathbb{R}^n$ — некоторая абсолютно непрерывная функция.

Рассмотрим теперь последовательность $\{\psi_{1,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, на интервале времени $[0, T_2]$. Аналогично предыдущему случаю, переходя, если нужно, к подпоследовательности $\{\psi_{2,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, в последовательности $\{\psi_{1,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, получаем

$$\psi_{2,k} \rightarrow \tilde{\psi} \quad \text{в } C([0, T_2], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

где $\tilde{\psi}: [0, T_2] \mapsto \mathbb{R}^n$ — абсолютно непрерывная функция, очевидно совпадающая на интервале $[0, T_1]$ с функцией ψ . Для краткости снова будем обозначать ее через ψ .

Последовательно повторяя эту процедуру на интервалах времени $[0, T_i]$, $i = 3, 4, \dots$, получаем, что существуют такая локально абсолютно непрерывная функция $\psi: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ и такие подпоследовательности абсолютно непрерывных функций $\psi_{i,k}: [0, T_i] \mapsto \mathbb{R}^n$, $i, k = 1, 2, \dots$,

что для любого $i = 1, 2, \dots$ последовательность $\{\psi_{i+1,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, является подпоследовательностью последовательности $\{\psi_{i,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, и для любого $i = 1, 2, \dots$ имеем

$$\psi_{i,k} \rightarrow \psi \quad \text{в } C([0, T_i], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Поскольку

$$T_i \rightarrow \infty \quad \text{при } i \rightarrow \infty,$$

то для любого $T > 0$ получаем

$$\psi_{k,k} \rightarrow \psi \quad \text{в } C([0, T], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Для простоты обозначений будем в дальнейшем обозначать последовательность $\{\psi_{k,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, снова через $\{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \dots$.

Непосредственно из построения последовательности $\{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, следует, что для любого $T > 0$ выполняется условие (7.16).

Далее для любого $t \geq 0$ и всех достаточно больших номеров k в силу сопряженной системы (7.8) имеем

$$\psi_k(t) = \psi_k(0) - \int_0^t \left(\left[\frac{\partial f(x_k(s), u_k(s))}{\partial x} \right]^* \psi_k(s) + \psi_k^0 e^{-\rho s} \frac{\partial g(x_k(s), u_k(s))}{\partial x} \right) ds. \quad (7.18)$$

При этом подынтегральные функции в равенстве (7.18) равномерно ограничены и при п.в. $s \in [0, t]$ в силу уже доказанных условий (7.13)–(7.16) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{\partial f(x_k(s), u_k(s))}{\partial x} \right]^* \psi_k(s) + \psi_k^0 e^{-\rho s} \frac{\partial g(x_k(s), u_k(s))}{\partial x} \right) = \\ = \left[\frac{\partial f(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} \right]^* \psi(s) + \psi_*^0 e^{-\rho s} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x}. \end{aligned}$$

Следовательно, поскольку $\psi_k(0) \rightarrow \psi(0)$ при $k \rightarrow \infty$, то, переходя к пределу под знаком интеграла в (7.18) при $k \rightarrow \infty$, в силу теоремы Лебега получаем

$$\psi(t) = \psi(0) - \int_0^t \left(\left[\frac{\partial f(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} \right]^* \psi(s) + \psi_*^0 e^{-\rho s} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} \right) ds.$$

Таким образом, локально абсолютно непрерывная векторная функция ψ удовлетворяет на бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$ сопряженной системе (3.1).

Для $k = 1, 2, \dots$ рассмотрим теперь условие максимума (7.9) на интервале $[0, T_k]$

$$\begin{aligned} \langle f(x_k(t), u_k(t)), \psi_k(t) \rangle + \psi_k^0 e^{-\rho t} g(x_k(t), u_k(t)) - \psi_k^0 e^{-(\rho+1)t} \frac{\|u_k(t) - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \stackrel{\text{п.в.}}{=} \\ \stackrel{\text{п.в.}}{=} \max_{u \in U} \left[\langle f(x_k(t), u), \psi_k(t) \rangle + \psi_k^0 e^{-\rho t} g(x_k(t), u) - \psi_k^0 e^{-(\rho+1)t} \frac{\|u - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $T_k \rightarrow \infty$ и $\sigma_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то в силу условий (7.13)–(7.16) (выполняющихся для любого $T > 0$) получаем условие максимума (3.3) как предел условия (7.9).

Нетривиальность пары (ψ, ψ^0) (см. условие (3.2)) следует из условия (7.12).

Следовательно, оптимальная пара (x_*, u_*) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина вместе с парой множителей Лагранжа (ψ, ψ^0) , т.е. пара (ψ, ψ^0) является парой сопряженных переменных, соответствующей оптимальной паре (x_*, u_*) . Первая часть теоремы доказана.

Рассмотрим условие (7.11). Из определения функции \mathcal{H}_k (см. (7.10)) на интервале времени $[0, T_k]$ вытекает равенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H_k(x_k(t), t, \psi_k(t), \psi_k^0) &\stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}_k(x_k(t), t, u_k(t), \psi_k(t), \psi_k^0) = \\ &= -\psi_k^0 \rho e^{-\rho t} g(x_k(t), u_k(t)) + \psi_k^0 (\rho + 1) e^{-(\rho+1)t} \frac{\|u_k(t) - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} + \\ &\quad + 2\psi_k^0 e^{-(\rho+1)t} \frac{\langle u_k(t) - z_k(t), \dot{z}_k(t) \rangle}{1 + \sigma_k}. \end{aligned}$$

Выберем такие произвольные $t > 0$ и k , что $T_k > t$, и проинтегрируем последнее равенство на интервале времени $[t, T_k]$, принимая во внимание краевое условие (7.7). Тогда получаем

$$\begin{aligned} H_k(x_k(t), t, \psi_k(t), \psi_k^0) &= \psi_k^0 e^{-\rho T_k} \max_{u \in U} \left[g(x_k(T_k), u) - e^{-T_k} \frac{\|u - z_k(T_k)\|^2}{1 + \sigma_k} \right] - \\ &\quad - \psi_k^0 \rho \int_t^{T_k} e^{-\rho s} g(x_k(s), u_k(s)) ds + \psi_k^0 (\rho + 1) \int_t^{T_k} e^{-(\rho+1)s} \frac{\|u_k(s) - z_k(s)\|^2}{1 + \sigma_k} ds + \\ &\quad + 2\psi_k^0 \int_t^{T_k} e^{-(\rho+1)s} \frac{\langle u_k(s) - z_k(s), \dot{z}_k(s) \rangle}{1 + \sigma_k} ds. \end{aligned}$$

Перейдем в последнем равенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, используя оценки (7.3), (7.4), уже доказанные условия (7.13)–(7.16) (выполняющиеся для любого $T > 0$) и неравенства (7.1)–(7.3). В пределе получим условие (7.17). Вторая часть теоремы доказана. Теорема доказана.

В качестве непосредственного следствия доказанного аппроксимационного принципа максимума получаем следующее усиление теоремы 3.1 в случае, когда система (1.1) аффинна по управлению (см. [70]).

Теорема 7.2. *Предположим, что управляемая система (1.1) аффинна по управлению, множество U — выпуклый компакт, а функция g вогнута по u . Пусть для задачи (P) выполняются условия (A1) и (A3). Пусть далее пара (x_*, u_*) оптимальна в задаче (P). Тогда пара (x_*, u_*) удовлетворяет основным соотношениям (3.1)–(3.3) принципа максимума Понтрягина вместе с некоторой соответствующей ей парой сопряженных переменных (ψ, ψ^0) . Кроме того, выполняется условие стационарности (7.17).*

Доказательство. Пусть $\{(P_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, — последовательность аппроксимирующих задач, соответствующих оптимальному управлению u_* . Пусть далее (x_k, u_k) — допустимая оптимальная пара в задаче (P_k) . В соответствии с классическим принципом максимума Понтрягина для любого $k = 1, 2, \dots$ существует пара сопряженных переменных (ψ_k, ψ_k^0) , соответствующих оптимальной паре (x_k, u_k) в задаче (P_k) , т.е. таких, что пара (x_k, u_k) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума (7.8), (7.9) вместе с переменными (ψ_k, ψ_k^0) , и для каждого $k = 1, 2, \dots$ имеем $\psi_k^0 > 0$ и выполняется условие трансверсальности (7.7).

Поскольку $\psi_k^0 > 0$, величина $c_k = \|\psi_k(0)\| + \psi_k^0$ положительна. Перейдем в соотношениях принципа максимума для задачи (P_k) к нормализованным сопряженным переменным ψ_k/c_k и

ψ_k^0/c_k , сохранив за ними прежние обозначения ψ_k и ψ_k^0 . Тогда для нормализованных сопряженных переменных выполняется условие нетривиальности

$$\|\psi_k(0)\| + \psi_k^0 = 1, \quad (7.19)$$

сохраняется условие трансверсальности (7.7) и очевидно, что пара (x_k, u_k) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина (для задачи (P_k)) вместе с нормализованными сопряженными переменными (ψ_k, ψ_k^0) , $k = 1, 2, \dots$. В силу условия нетривиальности (7.19) последовательности $\{\psi_k(0)\}$, $k = 1, 2, \dots$, и $\{\psi_k^0\}$, $k = 1, 2, \dots$, ограничены, а условие (7.12) выполняется с $a = 1$. Следовательно, последовательность $\{(x_k, u_k, \psi_k, \psi_k^0)\}$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяет всем предположениям теоремы 7.1. В силу теоремы 7.1 существует такая подпоследовательность последовательности $\{(x_k, u_k, \psi_k, \psi_k^0)\}$, $k = 1, 2, \dots$ (будем обозначать ее снова через $\{(x_k, u_k, \psi_k, \psi_k^0)\}$, $k = 1, 2, \dots$), что для пар сопряженных переменных (ψ_k, ψ_k^0) условия (7.15), (7.16) выполняются для любого $T > 0$. Пределом же ее является нетривиальная пара сопряженных переменных (ψ, ψ^0) , соответствующих оптимальной паре (x_*, u_*) в задаче (P) . Таким образом, пара (x_*, u_*) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина (3.1)–(3.3) в задаче (P) вместе с парой сопряженных переменных (ψ, ψ^0) и, наконец, пара (x_*, u_*) вместе с сопряженными переменными (ψ, ψ^0) удовлетворяют условию стационарности (7.17). Теорема доказана.

В заключение раздела сформулируем вариант теоремы 7.1 в случае, когда аппроксимационный принцип максимума для задачи (P) выполняется в нормальной форме. Данный результат может быть использован для получения различных вариантов принципа максимума в нормальной форме для задачи (P) в случае, когда управляемая система (1.1) аффинна по управлению (см. [9, 31, 32]).

Будем использовать следующую формулировку принципа максимума в нормальной форме для задачи (P_k) .

Пусть (x_k, u_k) — оптимальная допустимая пара в задаче (P_k) для некоторого натурального $k \in \{1, 2, \dots\}$. Тогда существует такая сопряженная переменная ψ_k , соответствующая паре (x_k, u_k) , что пара (x_k, u_k) удовлетворяет принципу максимума в нормальной форме (для задачи (P_k)) вместе с сопряженной переменной ψ_k и выполняется условие трансверсальности (7.7). Напомним, что ψ_k является решением сопряженной системы в нормальной форме, соответствующим паре (x_k, u_k) , т.е. на интервале времени $[0, T_k]$ имеем

$$\dot{\psi}_k(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} - \left[\frac{\partial f(x_k(t), u_k(t))}{\partial x} \right]^* \psi_k(t) - e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_k(t), u_k(t))}{\partial x}. \quad (7.20)$$

Кроме того, пара (x_k, u_k) удовлетворяет на интервале $[0, T_k]$ условию максимума в нормальной форме вместе с сопряженной переменной ψ_k , т.е.

$$\mathcal{H}_k(x_k(t), t, u_k(t), \psi(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H_k(x_k(t), t, \psi_k(t)). \quad (7.21)$$

Здесь функция Гамильтона–Понтрягина \mathcal{H}_k и гамильтониан H_k в нормальной форме для задачи (P_k) определяются стандартным образом (см. разд. 3):

$$\mathcal{H}_k(x, t, u, \psi) = \langle f(x, u), \psi \rangle + e^{-\rho t} g(x, u) - e^{-(\rho+1)t} \frac{\|u - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k},$$

$$H_k(x, t, \psi) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}_k(x, t, u, \psi)$$

для любых $x \in G$, $t \in \mathbb{R}^1$, $u \in U$ и $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 7.3. *Предположим, что управляемая система (1.1) аффинна по управлению, множество U — выпуклый компакт, а функция g вогнута по u . Пусть для задачи (P) выполняются условия (A1), (A3) и пара (x_*, u_*) является оптимальной допустимой парой в задаче (P) . Пусть $\{(P_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, — последовательность аппроксимирующих задач, соответствующих оптимальному управлению u_* , и (x_k, u_k) — некоторая оптимальная пара в задаче (P_k) , $k = 1, 2, \dots$. Кроме того, для каждого $k = 1, 2, \dots$ пусть ψ_k — сопряженная переменная, соответствующая паре (x_k, u_k) в задаче (P_k) , т.е. ψ_k удовлетворяет вместе с (x_k, u_k) условиям (7.20), (7.21) принципа максимума в нормальной форме для задачи (P_k) на соответствующем интервале времени $[0, T_k]$ и выполняется условие трансверсальности (7.7). Пусть, наконец, последовательность $\{\psi_k(0)\}$, $k = 1, 2, \dots$, ограничена. Тогда существует такая подпоследовательность последовательности $\{(x_k, u_k, \psi_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, далее обозначаемая снова через $\{(x_k, u_k, \psi_k)\}$, что*

1) для любого $T > 0$ выполняются условия (7.13), (7.14) и (7.16) теоремы 7.1:

$$\begin{aligned} u_k(t) &\rightarrow u_*(t) && \text{при почти всех } t \in [0, T] && \text{при } k \rightarrow \infty, \\ x_k &\rightarrow x_* && \text{в } C([0, T], \mathbb{R}^n) && \text{при } k \rightarrow \infty, \\ \psi_k &\rightarrow \psi && \text{в } C([0, T], \mathbb{R}^n) && \text{при } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где ψ — сопряженная переменная, соответствующая паре (x_*, u_*) в задаче (P) , т.е. пара (x_*, u_*) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме (3.4), (3.5) для задачи (P) вместе с сопряженной переменной ψ ;

2) выполняется следующее условие стационарности в нормальной форме:

$$H(x_*(t), t, \psi(t)) = \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (7.22)$$

Как показывает пример, рассмотренный в [70] (см. пример 6.1), выполнение условий теоремы 7.2 не исключает возможности аномальности задачи (P) , т.е. ситуации, когда для любой пары (ψ, ψ^0) сопряженных переменных, соответствующей оптимальной в задаче (P) паре (x_*, u_*) , имеем $\psi^0 = 0$. В дальнейшем мы приведем условия, исключающие аномальность задачи (P) , а также условия, гарантирующие выполнение дополнительных краевых условий на бесконечности (в общем случае без предположения об аффинности по управлению системы (1.1)). Однако, прежде чем переходить к более детальному исследованию свойств сопряженных переменных в условиях принципа максимума Понтрягина, в разд. 8, 9 мы адаптируем изложенную здесь аппроксимационную схему применительно к случаю общей нелинейной задачи оптимального управления (P) .

8. ОБОБЩЕННЫЕ УПРАВЛЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ СИСТЕМАМИ, ЛИНЕЙНЫМИ ПО УПРАВЛЕНИЮ

Рассмотренный в предыдущем разделе метод аппроксимации задачи (P) задачами оптимального управления (P_k) , $k = 1, 2, \dots$, на конечных интервалах времени $[0, T_k]$ существенно опирается на предположение об аффинности по управлению системы (1.1). В этом случае квадратичный “штраф” в функционале J_k для задачи (P_k) не нарушает условие выпуклости (A2). Тем самым для любого $k = 1, 2, \dots$ для аппроксимирующей задачи (P_k) оказываются выполненными все условия теоремы Филиппова о существовании оптимального управления (см. [48, Theorem 9.3.i]). Данное обстоятельство имеет важное значение для применения используемого метода аппроксимаций.

В случае общей нелинейной управляемой системы (1.1) нам потребуется таким образом модифицировать изложенную выше схему аппроксимаций, чтобы гарантировать существование оптимального управления в аппроксимирующих задачах (P_k) , $k = 1, 2, \dots$, и в этом случае. При этом мы будем приближать исходную задачу (P) для общей нелинейной системы (1.1) последовательностью задач $\{(P_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, оптимального управления на конечных интервалах времени с управляемыми системами, линейными по управлению. Излагаемый здесь подход к аппроксимации общих нелинейных управляемых систем системами, линейными по управлению, основывается на использовании так называемых *обобщенных управлений* [56].

Рассмотрим сначала следующую неавтономную нелинейную управляемую систему общего вида на некотором фиксированном конечном интервале времени $[0, T]$, $T > 0$:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}(\tilde{x}(t), t, u(t)), \quad u \in U, \quad (8.1)$$

с краевым условием

$$\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0. \quad (8.2)$$

Здесь $\tilde{x} \in \mathbb{R}^q$ и $u \in \mathbb{R}^m$, множество U — непустой компакт из пространства \mathbb{R}^m . Кроме того, предполагается, что векторная функция $\tilde{f}: \tilde{G} \times [0, T] \times U \mapsto \mathbb{R}^q$ и матричная функция $\partial \tilde{f} / \partial \tilde{x} = (\partial \tilde{f}^i / \partial \tilde{x}^j)_{i,j=1,\dots,q}$ непрерывны на декартовом произведении $\tilde{G} \times [0, T] \times U$, где \tilde{G} — заданное открытое подмножество пространства \mathbb{R}^q . Как обычно, класс допустимых управлений системы (8.1) состоит из всех измеримых векторных функций $u: [0, T] \mapsto U$. Будем предполагать, что $\tilde{x}_0 \in \tilde{G}$ и любая допустимая траектория \tilde{x} системы (8.1) с начальным условием (8.2) определена на интервале $[0, T]$ и лежит в \tilde{G} . Более того, предполагается, что для любого $t \in [0, T]$ замыкание $\text{cl } \tilde{X}(t)$ множества достижимости $\tilde{X}(t)$ управляемой системы (8.1) с начальным условием (8.2) (т.е. множества всех тех точек пространства \mathbb{R}^q , куда можно попасть по допустимым траекториям системы (8.1) на интервале времени $[0, t]$ из начального состояния \tilde{x}_0) также содержится в открытом множестве \tilde{G} . Таким образом, для любого $t \in [0, T]$ имеем $\tilde{X}(t) \neq \emptyset$ и $\text{cl } \tilde{X}(t) \subset \tilde{G}$.

Всюду далее будем считать, что для управляемой системы (8.1) выполнено следующее условие ограниченности, аналогичное условию (A1).

(A1') Существует такая постоянная $\tilde{C}_0 \geq 0$, что

$$\langle \tilde{x}, \tilde{f}(\tilde{x}, t, u) \rangle \leq \tilde{C}_0(1 + \|\tilde{x}\|^2) \quad \text{для любых } \tilde{x} \in \tilde{G}, \quad t \in [0, T] \quad \text{и} \quad u \in U.$$

Нетрудно видеть, что в силу условия (A1') траектории \tilde{x} управляемой системы (8.1) с начальным условием (8.2) равномерно ограничены на интервале $[0, T]$.

Напомним теперь некоторые факты, относящиеся к обобщенным управлениям применительно к случаю управляемой системы (8.1) с начальным условием (8.2). При этом в основном мы будем следовать работе [56].

Пусть μ_t , $t \in [0, T]$, $T > 0$, — семейство мер Радона на \mathbb{R}^m , т.е. семейство конечных регулярных борелевских мер на \mathbb{R}^m , с носителем, лежащим в компакте U (соответствующие определения теории меры см., например, в [12]).

Семейство мер μ_t , $t \in [0, T]$, называется *слабо измеримым*, если для любой непрерывной векторной функции $\xi: [0, T] \times U \mapsto \mathbb{R}^q$ векторная функция $\phi: [0, T] \mapsto \mathbb{R}^q$, определенная равенством

$$\phi(t) = \int_U \xi(t, u) d\mu_t \quad \text{для любого } t \in [0, T],$$

измерима (по Лебегу). Любое слабо измеримое семейство μ_t , $t \in [0, T]$, вероятностных мер Радона с носителем, лежащим в U , называется *обобщенным управлением* для управляемой системы (8.1) на интервале времени $[0, T]$. Множество всех обобщенных управлений обозначим через Ω . Очевидно, множество Ω выпуклое.

Пусть μ_t , $t \in [0, T]$, $T > 0$, — произвольное обобщенное управление на интервале времени $[0, T]$. Применяя обобщенное управление μ_t , $t \in [0, T]$, к правой части управляемой системы (8.1), получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \langle \mu_t, \tilde{f}(\tilde{x}(t), t, u) \rangle = \int_U \tilde{f}(\tilde{x}(t), t, u) d\mu_t. \quad (8.3)$$

При заданном начальном условии (8.2) в классе абсолютно непрерывных векторных функций $\tilde{x}: [0, T] \mapsto \mathbb{R}^q$ дифференциальное уравнение (8.3) эквивалентно интегральному уравнению

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 + \int_0^t \langle \mu_s, \tilde{f}(\tilde{x}(s), s, u) \rangle ds = \tilde{x}_0 + \int_0^t \left[\int_U \tilde{f}(\tilde{x}(s), s, u) d\mu_s \right] ds.$$

Из условия (A1') следует, что (единственное) решение дифференциального уравнения (8.3) с начальным условием (8.2) существует на всем интервале времени $[0, T]$, на котором определено обобщенное управление μ_t . Все траектории управляемой системы (8.3) с начальным условием (8.2) лежат в множестве \tilde{G} при всех значениях $t \in [0, T]$ (справедливость этого утверждения следует из сделанного выше предположения о том, что для любого $t \in [0, T]$ замыкание множества достижимости $\tilde{X}(t)$ системы (8.1) с начальным условием (8.2) лежит в множестве \tilde{G} , и сформулированной ниже леммы 8.1).

Последовательность обобщенных управлений $\{\mu_{t,k}\}$, $t \in [0, T]$, $T > 0$, $k = 1, 2, \dots$, называется *слабо сходящейся* к обобщенному управлению μ_t , $t \in [0, T]$, если для любой непрерывной векторной функции $\xi: [0, T] \times U \mapsto \mathbb{R}^q$ справедливо равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_U \xi(t, u) d\mu_{t,k} = \int_U \xi(t, u) d\mu_t. \quad (8.4)$$

Покажем, что слабая сходимость последовательности обобщенных управлений $\{\mu_{t,k}\}$, $t \in [0, T]$, $T > 0$, $k = 1, 2, \dots$, к обобщенному управлению μ_t , $t \in [0, T]$, влечет равномерную сходимость последовательности траекторий $\{\tilde{x}_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, соответствующих обобщенным управлениям $\mu_{t,k}$, $k = 1, 2, \dots$, к траектории \tilde{x} , соответствующей обобщенному управлению μ_t на интервале $[0, T]$.

Действительно, если это не так, то, переходя, если нужно, к подпоследовательности, не ограничивая общности, можно считать, что существует такая абсолютно непрерывная векторная функция $\tilde{y}: [0, T] \mapsto \mathbb{R}^q$, отличная от траектории \tilde{x} , что $\tilde{x}_k \rightarrow \tilde{y}$ в $C([0, T], \mathbb{R}^q)$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда, очевидно, последовательность векторных функций

$$\xi_k(t, u) = \tilde{f}(\tilde{x}_k(t), t, u), \quad t \in [0, T], \quad u \in U, \quad k = 1, 2, \dots,$$

сходится равномерно на компакте $[0, T] \times U$ к векторной функции

$$\xi(t, u) = \tilde{f}(\tilde{y}(t), t, u), \quad t \in [0, T], \quad u \in U,$$

при $k \rightarrow \infty$.

Согласно определению решения дифференциального уравнения (8.3) с начальным условием (8.2) имеем

$$\begin{aligned}\tilde{x}_k(t) &= \tilde{x}_0 + \int_0^t \left[\int_U \xi_k(s, u) d\mu_{s,k} \right] ds = \\ &= \tilde{x}_0 + \int_0^t \left[\int_U \xi(s, u) d\mu_{s,k} \right] ds + \int_0^t \left[\int_U (\xi_k(s, u) - \xi(s, u)) d\mu_{s,k} \right] ds.\end{aligned}\quad (8.5)$$

В силу равномерной сходимости последовательности непрерывных функций $\{\xi_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, к непрерывной функции ξ на компакте $[0, T] \times U$ и равномерной ограниченности мер $\mu_{s,k}$, $s \in [0, T]$, $k = 1, 2, \dots$, последний интеграл в равенстве (8.5) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Поэтому в силу слабой сходимости последовательности мер $\{\mu_{t,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, к мере μ_t , $t \in [0, T]$, переходя к пределу в равенстве (8.5) при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}_0 + \int_0^t \left[\int_U \xi(t, u) d\mu_s \right] ds.$$

Следовательно, векторная функция \tilde{y} оказывается еще одним отличным от \tilde{x} решением дифференциального уравнения (8.3) с начальным условием (8.2), что противоречит единственности решения дифференциального уравнения (8.3). Таким образом, последовательность траекторий $\{\tilde{x}_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, соответствующая последовательности обобщенных управлений $\{\mu_{t,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, $t \in [0, T]$, сходится равномерно к траектории \tilde{x} , соответствующей обобщенному управлению μ_t на интервале $[0, T]$.

Очевидно, что любое “обычное” допустимое управление u системы (8.1), определенное на конечном интервале времени $[0, T]$, $T > 0$, т.е. измеримая векторная функция $u: [0, T] \mapsto U$, может быть рассмотрено как семейство мер Дирака $\delta_{u(t)}$, $t \in [0, T]$ (см. [12]), сконцентрированных в моменты времени t в точках $u(t)$. В этом случае для произвольного $t \in [0, T]$ действие меры Дирака $\delta_{u(t)}$ на произвольную непрерывную функцию $\xi: [0, T] \times U \mapsto \mathbb{R}^q$ определяется равенством

$$\phi(t) = \int_U \xi(t, u) d\delta_{u(t)} = \xi(t, u(t)).$$

Так как определенная таким образом функция ϕ обязательно измерима, то семейство мер Дирака $\delta_{u(t)}$, $t \in [0, T]$, соответствующих произвольному допустимому управлению u , является слабо измеримым. Поскольку все допустимые управления принимают значения из компактного множества U , то семейство мер Дирака $\delta_{u(t)}$, $t \in [0, T]$, принадлежит множеству Ω обобщенных управлений для системы (8.1). В обратную сторону, если $\delta_{u(t)}$, $t \in [0, T]$, — слабо измеримое семейство мер Дирака, сконцентрированных в моменты времени $t \in [0, T]$ в точках $u(t) \in U$, то, полагая $\xi(t, u) = u$ для любых $t \in [0, T]$ и $u \in U$, получаем, что векторная функция $u: [0, T] \mapsto U$, определяемая равенством

$$u(t) = \int_U u d\delta_{u(t)} \quad \text{для любого } t \in [0, T],$$

измерима и, следовательно, принадлежит классу допустимых управлений для системы (8.1).

Легко видеть, что независимо от того, рассматривается измеримая функция $u: [0, T] \mapsto U$ или как обычное допустимое управление, или же как обобщенное управление управляемой

системы (8.1) с начальным условием (8.2), допустимая траектория x , соответствующая управлению u , будет одна и та же.

Обобщенные управления являются удобным расширением класса обычных допустимых управлений. Во многом это связано с тем обстоятельством, что использование обобщенных управлений вносит в динамику рассматриваемой управляемой системы свойство линейности по управлению (и вследствие этого факта и выпуклости множества обобщенных управлений Ω “овыпукляет” ее). При этом множество обобщенных управлений Ω обладает важным свойством слабой компактности. Данное свойство означает, что из любой последовательности мер Радона $\{\mu_{t,k}\} \in \Omega$, $t \in [0, T]$, $k = 1, 2, \dots$, можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому обобщенному управлению $\mu_t \in \Omega$. Подробно свойства обобщенных управлений и их применения в теории оптимального управления изложены в монографии [56].

Заметим, что для последовательности обычных допустимых управлений $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, рассматриваемой на конечном интервале времени $[0, T]$, $T > 0$, понятие ее слабой сходимости (как последовательности обобщенных управлений $\{\delta_{u_k(t)}\}$, $t \in [0, T]$, $k = 1, 2, \dots$) отличается от известного для последовательности $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, понятия слабой сходимости (как последовательности измеримых функций) в пространстве $L^1([0, T], \mathbb{R}^m)$ (подробнее см. [56]).

В дальнейшем нам потребуется следующий результат об аппроксимации траекторий управляемой системы (8.1) с начальным условием (8.2), рассматриваемой в классе обобщенных управлений, траекториями этой же системы, но рассматриваемой в классе обычных управлений.

Лемма 8.1. Пусть \tilde{x} — траектория управляемой системы (8.1) с начальным условием (8.2) на конечном интервале времени $[0, T]$, $T > 0$, в классе обобщенных управлений. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая допустимая траектория \tilde{x}_ε системы (8.1) с начальным условием (8.2) на интервале времени $[0, T]$ в классе обычных управлений, что выполняется неравенство

$$\|\tilde{x}(t) - \tilde{x}_\varepsilon(t)\| \leq \varepsilon \quad \text{для любого } t \in [0, T]. \quad (8.6)$$

Утверждение леммы 8.1 является следствием более общего утверждения, доказанного в [56] (см. [56, Theorem 3.2]).

Вернемся к рассмотрению исходной задачи (P) и соответствующей управляемой системы (1.1) с начальным условием (1.2).

Определим один специальный класс обычных допустимых управлений в задаче (P), которые естественно также трактовать как обобщенные.

Пусть $\{u_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, — некоторый конечный набор из $N \geq 1$ точек компакта U . Для $x_0 \in G$ и $t \in [0, T]$, $T > 0$, рассмотрим следующую управляемую систему:

$$\dot{x}(t) = f_N(x(t), v(t)) = \sum_{i=1}^N v^i(t) f(x, u_i), \quad v(t) \in V_N, \quad (8.7)$$

$$V_N = \{v = (v^1, \dots, v^N): v^i \geq 0, i = 1, \dots, N; v^1 + \dots + v^N = 1\},$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0. \quad (8.8)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, векторная функция f , начальное состояние x_0 и множество G те же самые, что и в исходной задаче (P) (см. (1.1), (1.2)). В качестве допустимых управлений в системе (8.7), как обычно, рассматриваются все измеримые векторные функции $v: [0, T] \mapsto V_N$.

Управляемая система (8.7), так же как и система (1.1), удовлетворяет условию ограниченности (A1). Кроме того, система (8.7) линейная по управлению. В силу этого факта, а

также в силу того обстоятельства, что множество V_N — выпуклый компакт, для любых $x \in G$ множество

$$F_N(x) = \bigcup_{v \in V_N} f_N(x, v) \quad (8.9)$$

(вектограмма скоростей системы (8.7)) — также выпуклый компакт в \mathbb{R}^n . Следовательно, множество всех траекторий x системы (8.7) с начальным условием (8.8) на интервале времени $[0, T]$ является компактом в пространстве $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ непрерывных векторных функций на интервале времени $[0, T]$ (см. [21, 48]).

Важным свойством управляемой системы (8.7) является тот факт, что для любого $T > 0$ и любого N произвольная траектория x системы (8.7) на интервале $[0, T]$ является одновременно траекторией исходной системы (1.1). Действительно, в силу условия выпуклости (A2) для любого $x \in G$ вектограмма $F(x)$ (см. (1.6)) системы (1.1) есть выпуклый компакт в \mathbb{R}^n . Следовательно, для любого $x \in G$ в силу своего определения (см. (8.9)) вектограмма $F_N(x)$ системы (8.7) удовлетворяет включению

$$F_N(x) \subset F(x).$$

Таким образом, для любого $T > 0$ любая траектория x системы (8.7) на интервале $[0, T]$ является одновременно траекторией системы (1.1). Отсюда, в частности, вытекает, что все траектории системы (8.7) с начальным условием (8.8) лежат в открытом множестве G .

Управляемая система (8.7) рассматривается в классе обычных управлений, однако она может быть рассмотрена и как расширение в классе обобщенных управлений следующей подсистемы исходной управляемой системы (1.1) на интервале времени $[0, T]$:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u \in U_N = \bigcup_{i=1}^N u_i, \quad (8.10)$$

с начальным условием (1.2).

Действительно, если v — некоторое допустимое управление системы (8.7), то нетрудно видеть, что семейство мер Радона

$$\mu_t = \sum_{i=1}^N v^i(t) \delta_{u_i}, \quad t \in [0, T], \quad (8.11)$$

является обобщенным управлением для управляемой системы (8.10). С другой стороны, если μ_t , $t \in [0, T]$, — некоторое обобщенное управление системы (8.10), то в силу конечности множества U_N оно представимо в виде (8.11) с некоторыми функциями v^i , $i = 1, \dots, N$. При этом каждая функция v^i , $i = 1, \dots, N$, обязательно измерима по Лебегу. Докажем последнее утверждение. Для этого заметим, что в силу конечности множества U_N существует такое $\varepsilon > 0$, что для любых $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, N$, имеем $\|u_i - u_j\| \geq \varepsilon$. Пусть теперь $\phi_i: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$, $i = 1, \dots, N$, — такая произвольная непрерывно дифференцируемая неотрицательная функция, что $\phi_i(u_i) = 1$, $\phi_i(u) \leq 1$ для любых $u \in \mathbb{R}^n$ и $\phi_i(u) = 0$ при $\|u - u_i\| \geq \varepsilon$ (т.е. функция ϕ_i сконцентрирована на шаре радиуса ε с центром в точке u_i). Тогда в силу слабой измеримости обобщенного управления μ_t , $t \in [0, T]$, для любого $i = 1, \dots, N$ функция

$$v^i(t) = \int_{U_N} \phi_i(u) d\mu_t, \quad t \in [0, T],$$

измерима по Лебегу. Отсюда вытекает, что векторная функция $v = (v^1, \dots, v^N)$ — допустимое управление системы (8.7).

Заметим, что обобщенные управления вида (8.11) часто называют *скользящими режимами* (см. [56]).

Поскольку выпукление системы (8.7) посредством введения обобщенных управлений не приводит к появлению новых траекторий (так как вектограмма системы (8.7) — уже выпуклое множество), то рассмотрение этой управляемой системы эквивалентно как в классе обычных, так и в классе обобщенных управлений [21].

В дальнейшем мы будем использовать линейные по управлению системы вида (8.7) для построения аппроксимирующей последовательности задач оптимального управления для исходной задачи (P).

Пусть $\{u_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, — некоторое счетное всюду плотное множество в U . Фиксируем произвольное $T > 0$ и при $N = 1, 2, \dots$ на интервале времени $[0, T]$ рассмотрим управляемую систему (8.7) с начальным условием (8.8).

Напомним, что допустимыми управлениями системы (8.7) являются измеримые по Лебегу векторные функции v вида

$$v(t) = (v^1(t), \dots, v^N(t)) \in V_N, \quad t \in [0, T].$$

Оказывается, что при достаточно больших N управляемая система (8.7) с начальным условием (1.2) “равномерно” аппроксимирует систему (1.1) в смысле функционала (1.3). Именно справедливо следующее утверждение.

Теорема 8.1. *Пусть задано некоторое $T > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N_* , что для любого $N \geq N_*$ и любой допустимой пары (x, u) управляемой системы (1.1) с начальным условием (1.2) существует такая допустимая пара системы (8.7) с начальным условием (8.8), что выполняются следующие условия:*

$$\|u(t) - u_i\| \leq \varepsilon \quad \text{для любых } t \in [0, T] \text{ и } i \in \{1, \dots, N\}: v_N^i(t) \neq 0, \quad (8.12)$$

$$\|x(t) - x_N(t)\| \leq \varepsilon \quad \text{для любого } t \in [0, T] \quad (8.13)$$

и, кроме того,

$$\int_0^T e^{-\rho t} \left[\sum_{i=1}^N v_N^i(t) \|g(x(t), u(t)) - g(x_N(t), u_i)\| \right] dt \leq \varepsilon. \quad (8.14)$$

Доказательство. Пусть $X(t)$ — множество достижимости управляемой системы (1.1) с начальным условием (1.2) в момент времени $t \in [0, T]$, т.е. множество всех тех точек пространства \mathbb{R}^n , куда можно попасть по допустимым траекториям системы (1.1) на интервале времени $[0, t]$. В силу условий (A1) и (A2) множество траекторий управляемой системы (1.1) с начальным условием (1.2) является компактом в пространстве $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ (см. [20, 21]). Следовательно, множество

$$\Pi = \bigcup_{t \in [0, T]} \{X(t)\} \times U$$

— компакт в пространстве \mathbb{R}^{n+m} .

В силу непрерывности векторной функции f и матричной функции $\partial f / \partial x$ на компакте Π существуют такие постоянные $M_1 \geq 0$ и $M_2 \geq 0$, что для любых $(x, u) \in \Pi$ выполняются неравенства

$$\|f(x, u)\| \leq M_1, \quad \left\| \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right\| \leq M_2.$$

Заметим, что в силу последнего неравенства векторная функция f удовлетворяет условию Липшица по переменной x равномерно по $u \in U$ с постоянной M_2 на любом выпуклом множестве $V \subset G$, т.е. для произвольного выпуклого множества $V \subset G$ имеем

$$\|f(x_1, u) - f(x_2, u)\| \leq M_2 \|x_1 - x_2\| \quad \text{для любых } x_i \in V, i = 1, 2, \quad u \in U.$$

Непрерывная функция g равномерно непрерывна на компакте Π . Следовательно, существует такое $\delta_1 > 0$, что для любых $(x_1, w_1) \in \Pi$ и $(x_2, w_2) \in \Pi$ таких, что

$$\|x_1 - x_2\| \leq \delta_1, \quad \|w_1 - w_2\| \leq \delta_1,$$

выполняется неравенство

$$|g(x_1, w_1) - g(x_2, w_2)| \leq \frac{\varepsilon e^{-\rho T}}{T}.$$

Далее для любого $t \in [0, T]$ выполняется включение

$$\bigcup_{t \in [0, T]} X(t) \subset G.$$

Следовательно, существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любой траектории x системы (1.1) с начальным условием (1.2) на интервале времени $[0, T]$ имеем

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x(t)\| \leq \varepsilon_0\} \subset G \quad \text{для любого } t \in [0, T],$$

т.е. траектория x на интервале $[0, T]$ лежит в множестве G вместе со своей ε_0 -окрестностью. Не ограничивая общности, можно считать, что $\varepsilon_0 < \min\{\delta_1, \varepsilon\}$.

Положим

$$l = \frac{\varepsilon_0}{4M_1(T+1)}$$

и разобьем интервал $[0, T]$ на $R \geq T/l$ таких интервалов $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 1, \dots, R$, что

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_R = T \quad \text{и} \quad \tau_i - \tau_{i-1} \leq l, \quad i = 1, \dots, R.$$

Нетрудно видеть, что на каждом интервале $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 1, \dots, R$, любая траектория y системы (1.1) с таким начальным условием $y(\tau_{i-1})$, что

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y(\tau_{i-1})\| \leq \varepsilon_0\} \subset G,$$

целиком лежит в $\frac{\varepsilon_0}{4}$ -окрестности точки $y(\tau_{i-1})$ на всем интервале $[\tau_{i-1}, \tau_i]$.

Векторная функция f равномерно непрерывна на компакте Π . Следовательно, существует такое $\delta_2 > 0$, что для любых $(x_1, w_1) \in \Pi$ и $(x_2, w_2) \in \Pi$ таких, что

$$\|x_1 - x_2\| \leq \delta_2, \quad \|w_1 - w_2\| \leq \delta_2,$$

имеем

$$\|f(x_1, w_1) - f(x_2, w_2)\| \leq \frac{\varepsilon_0 e^{-M_1 l}}{4R}.$$

Положим

$$\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon_0, \delta_2\}.$$

Поскольку $\{u_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, — счетное всюду плотное множество в U , то существует такое натуральное число N_* , что выполняется включение

$$U \subset \bigcup_{i=1}^{N_*} \{u \in \mathbb{R}^m: \|u - u_i\| \leq \varepsilon_1\}.$$

Пусть теперь (x, u) — произвольная допустимая пара управляемой системы (1.1) с начальным условием (1.2) на интервале $[0, T]$, $T > 0$.

Выберем произвольное $N \geq N_*$ и для каждого $i = 1, 2, \dots, N$ рассмотрим измеримое множество

$$I'_i = \{t \in I: \|u(t) - u_i\| \leq \varepsilon_1\}.$$

Далее положим

$$I_1 = I'_1, \quad I_{i+1} = I'_{i+1} \setminus \bigcup_{j \leq i} I_j, \quad i = 2, \dots, N-1.$$

Очевидно, что все множества I_i , $i = 1, 2, \dots, N$, измеримы, взаимно не пересекаются и их объединение дает весь интервал времени $[0, T]$.

Для $i = 1, 2, \dots, N$ и $t \in [0, T]$ положим

$$v_N^i(t) = 1, \quad \text{если } t \in I_i, \quad \text{и} \quad v_N^i(t) = 0 \quad \text{в противном случае.}$$

Поскольку все множества I_i , $i = 1, 2, \dots, N$, взаимно не пересекаются, то для любого $t \in [0, T]$ имеем

$$v_N^1(t) + \dots + v_N^N(t) = 1$$

и, следовательно, измеримая векторная функция

$$v_N(t) = (v_N^1(t), v_N^2(t), \dots, v_N^N(t)), \quad t \in [0, T],$$

является допустимым управлением системы (8.7).

В силу построения управления v_N для любого $t \in [0, T]$ у него существует (причем только одна) такая координата $v_N^{i_*}$, что $v_N^{i_*}(t) = 1$, для остальных же координат управления v_N справедливо равенство $v_N^i(t) = 0$, $i \neq i_*$. Следовательно, для любого $t \in [0, T]$ имеем

$$\|u(t) - u_i\| \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon \quad \text{для любых } t \in [0, T] \quad \text{и} \quad i \in \{1, \dots, N\}: v_N^i(t) \neq 0.$$

Таким образом, условие (8.12) доказано.

Пусть x_N — соответствующая v_N допустимая траектория системы (8.7), удовлетворяющая начальному условию (8.8) (или, что то же самое, начальному условию (1.2)). Напомним, что траектория x_N является одновременно допустимой траекторией системы (1.1) с начальным условием (1.2).

Далее для любого $t \in [\tau_0, \tau_1]$ справедливо равенство

$$x(t) - x_N(t) = \int_0^t \left[f(x(t), u(t)) - \sum_{i=1}^N v_N^i(t) f(x_N(t), u_i) \right] dt.$$

Поскольку обе траектории x и x_N не покидают выпуклого подмножества множества G , именно ε_0 -окрестности точки $x(\tau_0) = x_0$ на интервале $[\tau_0, \tau_1]$, то для любого $t \in [\tau_0, \tau_1]$ имеем

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_N(t)\| &\leq \int_0^t \left[\sum_{i=1}^N v_N^i(t) \|f(x(t), u(t)) - f(x_N(t), u_i)\| \right] dt \leq \\ &\leq \int_0^t \|f(x(t), u(t)) - f(x_N(t), u(t))\| dt + \int_0^t \left[\sum_{i=1}^N v_N^i(t) \|f(x_N(t), u(t)) - f(x_N(t), u_i)\| \right] dt \leq \\ &\leq M_1 \int_0^t \|x(t) - x_N(t)\| dt + \frac{\varepsilon_0}{4R} e^{-M_1 t}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла–Беллмана получаем

$$\|x(t) - x_N(t)\| \leq \frac{\varepsilon_0}{4R} \quad \text{для любого } t \in [\tau_0, \tau_1].$$

Рассмотрим теперь интервал $[\tau_1, \tau_2]$. Поскольку

$$\|x(\tau_1) - x_N(\tau_1)\| \leq \frac{\varepsilon_0}{4R} \quad \text{и} \quad \frac{\varepsilon_0}{4R} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{(2R+1)\varepsilon_0}{4R} < \varepsilon_0,$$

то на интервале $[\tau_1, \tau_2]$ обе эти траектории не покинут выпуклого подмножества открытого множества G , именно ε_0 -окрестности точки $x(\tau_1)$. Поэтому, рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем

$$\|x(t) - x_N(t)\| \leq \frac{\varepsilon_0}{4R} + \frac{\varepsilon_0}{4R} = \frac{\varepsilon_0}{2R} \quad \text{для любого } t \in [\tau_1, \tau_2].$$

Повторяя эту процедуру, на интервале $[\tau_2, \tau_3]$ получим

$$\|x(t) - x_N(t)\| \leq \frac{\varepsilon_0}{2R} + \frac{\varepsilon_0}{4R} = \frac{3\varepsilon_0}{4R} \quad \text{для любого } t \in [\tau_2, \tau_3].$$

Наконец, на R -м шаге получим

$$\|x(t) - x_N(t)\| \leq \frac{(3R-1)\varepsilon_0}{4R} + \frac{\varepsilon_0}{4R} < \varepsilon_0 \quad \text{для любого } t \in [\tau_{R-1}, \tau_R].$$

Таким образом, условие (8.13) доказано.

Далее в силу построения для допустимой пары (x_N, v_N) управляемой системы (8.10) с начальным условием (1.2) выполняются условия

$$\|u(t) - u_i\| \leq \delta_1 \quad \text{для любых } t \in [0, T] \quad \text{и} \quad i \in \{1, \dots, N\}: v_N^i(t) \neq 0$$

и

$$\|x(t) - x_N(t)\| \leq \delta_1 \quad \text{для любого } t \in [0, T].$$

В этом случае для всех $t \in [0, T]$ и всех номеров i таких, что $v_N^i(t) \neq 0$, имеем

$$\|g(x(t), u(t)) - g(x_N(t), u_i)\| dt \leq \frac{\varepsilon e^{-\rho T}}{T}.$$

Следовательно,

$$\int_0^t \left[\sum_{i=1}^N v_N^i(t) e^{-\rho t} \|g(x_N(t), u(t)) - g(x_N(t), u_i)\| \right] dt \leq \varepsilon.$$

Таким образом, условие (8.14) доказано. Теорема доказана.

9. АППРОКСИМАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА.
ОБЩИЙ НЕЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ

Здесь мы модифицируем изложенную в разд. 7 аппроксимационную схему применительно к случаю общей нелинейной задачи оптимального управления (P) , удовлетворяющей условиям (A1)–(A3).

Пусть u_* — заданное оптимальное управление в задаче (P) . Так же как и в случае, когда управляемая система (1.1) аффинна по управлению, выберем такие последовательность непрерывно дифференцируемых векторных функций $\{z_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, $z_k: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^m$, и последовательность положительных чисел $\{\sigma_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, что

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|z_k(t)\| \leq \max_{u \in U} \|u\| + 1, \quad (9.1)$$

$$\int_0^\infty e^{-(\rho+1)t} \|z_k(t) - u_*(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{k}, \quad (9.2)$$

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|\dot{z}_k(t)\| \leq \sigma_k < \infty, \quad (9.3)$$

$$\sigma_k \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Очевидно, что такие последовательности $\{z_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, и $\{\sigma_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, существуют.

Далее выберем такую монотонно возрастающую последовательность положительных чисел $\{T_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, что

$$T_k \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty$$

и

$$\omega(T_k) \leq \frac{1}{k(1 + \sigma_k)} \quad \text{для любого} \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.4)$$

Напомним, что функция ω удовлетворяет условию (1.5).

Наконец, для каждого $k = 1, 2, \dots$ выберем такое натуральное число N_k , что при $N \geq N_k$ на интервале времени $[0, T_k]$ управляемая система (8.7) с начальным условием (8.8) аппроксимирует управляемую систему (1.1) с начальным условием (1.2) в смысле теоремы 8.1 при

$$\varepsilon = \frac{1}{k(1 + \sigma_k)}.$$

Последнее, в частности, означает, что натуральное число N_k таково, что для любого $N \geq N_k$ и любой допустимой пары (x, u) управляемой системы (1.1) на интервале времени $[0, T_k]$ существует такая допустимая пара (x_N, v_N) управляемой системы (8.7) (рассматриваемой при данном натуральном N с начальным условием (8.8)), что выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^N v_N^i(t) \|u_i - u(t)\| \leq \frac{1}{k(1 + \sigma_k)} \quad \text{для любого} \quad t \in [0, T_k],$$

$$\int_0^{T_k} e^{-\rho t} \left[\sum_{i=1}^N v_N^i(t) \|g(x(t), u(t)) - g(x_N(t), u_i)\| \right] dt \leq \frac{1}{k(1 + \sigma_k)}. \quad (9.5)$$

Не ограничивая общности, можно считать последовательность $\{N_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, монотонно возрастающей: $N_1 < N_2 < \dots$

Для произвольного $k = 1, 2, \dots$ определим задачу (\tilde{P}_k) на конечном интервале времени $[0, T_k]$ следующим образом:

$$\dot{x}(t) = f_{N_k}(x(t), v(t)) = \sum_{i=1}^{N_k} v^i(t) f(x(t), u_i), \quad v(t) \in V_k, \quad (9.6)$$

$$V_k = \{v = (v^1, \dots, v^{N_k}): v^i \geq 0, i = 1, \dots, N_k; v^1 + \dots + v^{N_k} = 1\},$$

$$x(0) = x_0, \quad (9.7)$$

$$\tilde{J}_k(x, v) = \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} v^i(t) \left[g(x(t), u_i) - e^{-t} \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right] dt \rightarrow \max.$$

Таким образом, в качестве допустимых управлений в задаче (\tilde{P}_k) , $k = 1, 2, \dots$, мы рассматриваем измеримые по Лебегу векторные функции v на интервале времени $[0, T_k]$ вида

$$v(t) = (v^1(t), \dots, v^{N_k}(t)) \in V_k, \quad t \in [0, T_k].$$

Будем говорить, что $\{(\tilde{P}_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, — аппроксимирующая последовательность задач, соответствующая оптимальному управлению u_* .

Легко видеть, что построенная последовательность $\{(\tilde{P}_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, задач оптимального управления, так же как и исходная задача (P) , удовлетворяет условию (A1). Далее поскольку система (9.6) линейна по управлению, а множество V_k — выпуклый компакт, то для каждой задачи (\tilde{P}_k) , $k = 1, 2, \dots$, очевидно, выполняется и условие (A2). Таким образом, в силу теоремы Филиппова (см. [48, Theorem 9.3.i]) для любого $k = 1, 2, \dots$ в задаче (\tilde{P}_k) существует оптимальная допустимая пара (x_k, v_k) .

В дальнейшем будем считать, что любая оптимальная в задаче (\tilde{P}_k) , $k = 1, 2, \dots$, пара (x_k, v_k) продолжена с интервала времени $[0, T_k]$ на весь бесконечный полуинтервал $[0, \infty)$ произвольным допустимым для управляемой системы (9.6) образом.

Следующий результат является основным инструментом изучения задачи (P) (в случае общей нелинейной управляемой системы (1.1)) посредством ее аппроксимации последовательностью линейных по управлению задач (\tilde{P}_k) , $k = 1, 2, \dots$.

Лемма 9.1. Пусть для задачи (P) выполняются условия (A1)–(A3). Пусть далее u_* — заданное оптимальное допустимое управление в задаче (P) , а $\{(\tilde{P}_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, — соответствующая u_* последовательность аппроксимирующих задач оптимального управления. Пусть, наконец, v_k — оптимальное управление в задаче (\tilde{P}_k) . Тогда для любого $T > 0$ имеем

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \|u_i - u_*(t)\|^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (9.8)$$

Доказательство. Выберем произвольное $T > 0$. Пусть k_1 — такое натуральное число, что $T_{k_1} \geq T$. Тогда для произвольного $k \geq k_1$ согласно определению функционала \tilde{J}_k имеем

$$\begin{aligned} \tilde{J}_k(x_k, v_k) &= \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \left[g(x_k(t), u_i) - e^{-t} \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right] dt \leq \\ &\leq \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) g(x_k(t), u_i) \right] dt - \frac{e^{-(\rho+1)T}}{1 + \sigma_k} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \|u_i - z_k(t)\|^2 \right] dt. \end{aligned}$$

Здесь x_k — траектория управляемой системы (9.6) с начальным условием (9.7), соответствующая управлению v_k (на интервале времени $[0, T_k]$). Из последнего неравенства получаем

$$\frac{e^{-(\rho+1)T}}{1 + \sigma_k} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \|u_i - z_k(t)\|^2 \right] dt \leq \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) g(x_k(t), u_i) \right] dt - \tilde{J}_k(x_k, v_k). \quad (9.9)$$

Пусть x_* — траектория управляемой системы (1.1) с начальным условием (1.2), соответствующая управлению u_* . В силу выбора последовательности $\{N_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ (см. условие (9.5)), для допустимой на интервале времени $[0, T_k]$ пары (x_*, u_*) управляемой системы (1.1) с начальным условием (1.2) существует такая допустимая пара $(\tilde{x}_k, \tilde{v}_k)$ управляемой системы (9.6) с тем же самым начальным условием (9.7), что выполняются неравенства $\sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \|u_i - u_*(t)\| \leq \frac{1}{k(1+\sigma_k)}$ для любого $t \in [0, T_k]$ и

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{T_k} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt - \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \left[\sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) g(\tilde{x}_k(t), u_i) \right] dt \right\| &\leq \\ &\leq \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \left[\sum_{i=1}^{N_k} \tilde{v}_k^i(t) \|g(x_*(t), u_*(t)) - g(\tilde{x}_k(t), u_i)\| \right] dt \leq \frac{1}{k(1 + \sigma_k)}. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу оптимальности пары (x_k, v_k) в задаче (\tilde{P}_k) , $k = 1, 2, \dots$, допустимости пары $(\tilde{x}_k, \tilde{v}_k)$ в этой задаче и неравенств (9.2), (9.4), (9.9) имеем

$$\begin{aligned} \frac{e^{-(\rho+1)T}}{1 + \sigma_k} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \|u_i - z_k(t)\|^2 dt &\leq \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) g(x_k(t), u_i) \right] dt - \tilde{J}_k(\tilde{x}_k, \tilde{v}_k) \leq \\ &\leq \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) g(x_k(t), u_i) \right] dt - \int_0^{T_k} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt + \frac{3}{k(1 + \sigma_k)} \end{aligned} \quad (9.10)$$

для любого достаточно большого k .

Допустимое управление v_k (в задаче (\tilde{P}_k)) можно трактовать как обобщенное управление (скользящий режим) для следующей расширенной системы (см. разд. 8):

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}(x(t), t, u(t)) = (f(x(t), u(t)), e^{-\rho t} g(x(t), u(t))), \quad u \in U, \quad (9.11)$$

с начальным условием

$$\tilde{x}(0) = (x(0), x^0(0)) = (x_0, 0) \quad (9.12)$$

на интервале времени $[0, T_k]$. При этом мы считаем, что $\tilde{x} = (x, x^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Таким образом, расширенная управляемая система (9.11) объединяет стандартным образом управляемую систему (1.1)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u \in U,$$

и описание динамики интегрального функционала

$$x^0(t) = \int_0^t e^{-\rho s} g(x(s), u(s)) ds \quad \text{для любого } t \in [0, T_k].$$

В силу леммы 8.1 для любого обобщенного управления μ_t системы (9.11) с начальным условием (9.12) и любого $\varepsilon > 0$ существует такое обычное допустимое управление u_ε системы (9.11) с начальным условием (9.12), определенное на интервале времени $[0, T_k]$, что для траектории \tilde{x}_μ , соответствующей обобщенному управлению μ_t , и траектории \tilde{x}_ε , соответствующей управлению u_ε , выполняется неравенство

$$\|\tilde{x}_\mu(t) - \tilde{x}_\varepsilon(t)\| \leq \varepsilon \quad \text{для любого } t \in [0, T_k]$$

и, в частности, для любого $t \in [0, T_k]$ имеем

$$|x_\mu^0(T_k) - x_\varepsilon^0(T_k)| = \left| \int_0^{T_k} e^{-\rho t} g(x_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) dt - \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \langle g(x_\mu(t), u), \mu_t \rangle dt \right| \leq \varepsilon.$$

В силу этого факта для допустимого управления v_k задачи (\tilde{P}_k) и

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k(1 + \sigma_k)}$$

(при этом векторная функция v_k рассматривается как обобщенное управление для системы (9.11)) найдется такое допустимое управление u_{ε_k} системы (9.11), определенное на интервале времени $[0, T_k]$, что для траектории \tilde{x}_k , соответствующей обобщенному управлению v_k с начальным условием (9.12), и траектории $\tilde{x}_{\varepsilon_k}$, соответствующей управлению u_{ε_k} с начальным условием (9.12), выполняется неравенство

$$\|\tilde{x}_k(t) - \tilde{x}_{\varepsilon_k}(t)\| \leq \frac{1}{k(1 + \sigma_k)} \quad \text{для любого } t \in [0, T_k],$$

откуда, в частности, имеем

$$\left| \int_0^{T_k} e^{-\rho t} g(x_{\varepsilon_k}(t), u_{\varepsilon_k}(t)) dt - \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) g(x_k(t), u_i) \right] dt \right| \leq \frac{1}{k(1 + \sigma_k)}.$$

Из последнего неравенства и неравенства (9.10) получаем

$$\begin{aligned} \frac{e^{-(\rho+1)T}}{1 + \sigma_k} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \|u_i - z_k(t)\|^2 \right] dt &\leq \int_0^{T_k} e^{-\rho t} g(x_{\varepsilon_k}(t), u_{\varepsilon_k}(t)) dt - \\ &- \int_0^{T_k} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt + \frac{4}{k(1 + \sigma_k)}. \end{aligned}$$

Отсюда, считая, что допустимая пара $(x_{\varepsilon_k}, u_{\varepsilon_k})$ системы (1.1) продолжена с интервала $[0, T_k]$ произвольным допустимым образом на весь бесконечный полуинтервал времени $[0, \infty)$, и принимая во внимание неравенство (9.4), получаем

$$\begin{aligned} \frac{e^{-(\rho+1)T}}{1 + \sigma_k} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \|u_i - z_k(t)\|^2 \right] dt &\leq \int_0^\infty e^{-\rho t} g(x_{\varepsilon_k}(t), u_{\varepsilon_k}(t)) dt - \\ &- \int_0^\infty e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt + \frac{6}{k(1 + \sigma_k)}. \end{aligned}$$

Так как пара (x_*, u_*) оптимальна в задаче (P) , а $(x_{\varepsilon_k}, u_{\varepsilon_k})$ — некоторая допустимая пара в этой же задаче, то

$$\frac{e^{-(\rho+1)T}}{1 + \sigma_k} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \|u_i - z_k(t)\|^2 \right] dt \leq \frac{6}{k(1 + \sigma_k)}.$$

Следовательно, имеем

$$\int_0^T \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \|u_i - z_k(t)\|^2 \right] dt \leq \frac{6e^{(\rho+1)T}}{k}.$$

Из последнего неравенства, используя условие (9.2) и неравенство треугольника, окончательно получаем

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^T \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \|u_i - u_*(t)\|^2 dt \right]^{1/2} \leq \\ & \leq \left[\int_0^T \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \|u_i - z_k(t)\|^2 dt \right]^{1/2} + \left[\int_0^T \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \|u_*(t) - z_k(t)\|^2 dt \right]^{1/2} \leq 4 \left[\frac{e^{(\rho+1)T}}{k} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \|u_i - u_*(t)\|^2 dt \leq \frac{16e^{(\rho+1)T}}{k}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $k_2 \geq k_1$, что

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \|u_i - u_*(t)\|^2 dt \leq \varepsilon$$

для всех $k \geq k_2$. Лемма доказана.

Следующие два результата являются следствиями леммы 9.1.

Лемма 9.2. Пусть u_* — заданное оптимальное допустимое управление в задаче (P) и $\{(\tilde{P}_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, — соответствующая u_* аппроксимирующая последовательность задач оптимального управления, а v_k — оптимальное управление в задаче (\tilde{P}_k) . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого $T > 0$ имеем

$$\int_0^T \sum_{i \in \{1, \dots, N_k\}: \|u_i - u_*(t)\| > \varepsilon} v_k^i(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (9.13)$$

Доказательство. Предположим, что условие (9.13) не выполняется. Тогда найдутся такие $\varepsilon_0 > 0$ и $a > 0$, что, переходя, если нужно, к подпоследовательности, имеем

$$\int_0^T \sum_{i \in \{1, \dots, N_k\}: \|u_i - u_*(t)\| > \varepsilon_0} v_k^i(t) dt \geq a.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \|u_i - u_*(t)\|^2 \right] dt &= \int_0^T \sum_{i \in \{1, \dots, N_k\}: \|u_i - u_*(t)\| > \varepsilon_0} v_k^i(t) \|u_i - u_*(t)\|^2 dt + \\ &+ \int_0^T \sum_{i \in \{1, \dots, N_k\}: \|u_i - u_*(t)\| \leq \varepsilon_0} v_k^i(t) \|u_i - u_*(t)\|^2 dt \geq \\ &\geq \varepsilon_0^2 a \quad \text{для любого } k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Однако это противоречит утверждению леммы 9.1. Лемма доказана.

Лемма 9.3. Пусть u_* — заданное оптимальное допустимое управление в задаче (P) и $\{\tilde{P}_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, — соответствующая u_* аппроксимирующая последовательность задач оптимального управления, а v_k — оптимальное управление в задаче (\tilde{P}_k) . Тогда для любого фиксированного $T > 0$ и любой непрерывной функции $\xi: [0, T] \times U \mapsto \mathbb{R}^q$ последовательность $\{\phi_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, измеримых векторных функций $\phi_k: [0, T] \mapsto \mathbb{R}^q$, $k = 1, 2, \dots$, определенных равенством

$$\phi_k(t) = \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \xi(t, u_i) \quad \text{для любого } t \in [0, T],$$

сходится в пространстве $L^1([0, T], \mathbb{R}^q)$ к измеримой функции ϕ , определенной равенством

$$\phi(t) = \xi(t, u_*(t)) \quad \text{для любого } t \in [0, T].$$

Доказательство. Непрерывная функция ξ ограничена на компакте $[0, T] \times U$. Следовательно, существует такая постоянная $M \geq 0$, что выполняется неравенство

$$\|\xi(t, u)\| \leq M \quad \text{для любых } t \in [0, T], \quad u \in U. \quad (9.14)$$

Непрерывная функция ξ равномерно непрерывна на $[0, T] \times U$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $t \in [0, T]$ и $w_1, w_2 \in U$: $\|w_1 - w_2\| \leq \delta$ выполняется неравенство

$$\|\xi(t, w_1) - \xi(t, w_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2T}. \quad (9.15)$$

Согласно определению функций ϕ_k , $k = 1, 2, \dots$, и ϕ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\| \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \xi(t, u_i) - \xi(t, u_*(t)) \right\| dt &\leq \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \|\xi(t, u_i) - \xi(t, u_*(t))\| \right] dt \leq \\ &\leq \int_0^T \left[\sum_{i \in \{1, \dots, N_k\}: \|u_i - u_*(t)\| \leq \delta} v_k^i(t) \|\xi(t, u_i) - \xi(t, u_*(t))\| \right] dt + \\ &+ \int_0^T \left[\sum_{i \in \{1, \dots, N_k\}: \|u_i - u_*(t)\| > \delta} v_k^i(t) \|\xi(t, u_i) - \xi(t, u_*(t))\| \right] dt. \end{aligned}$$

Отсюда в силу условий (9.14) и (9.15) получаем

$$\int_0^T \left\| \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \xi(t, u_i) - \xi(t, u_*(t)) \right\| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \int_0^T \left[\sum_{i \in \{1, \dots, N_k\}: \|u_i - u_*(t)\| > \delta} v_k^i(t) \right] dt.$$

В силу леммы 9.2 существует такое натуральное N , что для любого $k \geq N$ имеем

$$\int_0^T \left[\sum_{i \in \{1, \dots, N_k\}: \|u_i - u_*(t)\| > \delta} v_k^i(t) \right] dt \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Следовательно, для всех $k \geq N$ выполняется неравенство

$$\int_0^T \left\| \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \xi(t, u_i) - \xi(t, u_*(t)) \right\| dt \leq \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Из доказанной леммы 9.3 вытекает равномерная сходимость последовательности траекторий $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, соответствующих оптимальным управлениям v_k , $k = 1, 2, \dots$, в задаче (\tilde{P}_k) к оптимальной траектории x_* , соответствующей оптимальному в исходной задаче (P) управлению u_* на любом фиксированном интервале времени $[0, T]$.

Следствие 9.1. Для любого $T > 0$ имеем

$$x_k \rightarrow x_* \quad \text{в } C([0, T], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (9.16)$$

Доказательство. Действительно, предположим противное. Тогда в силу теоремы Арцела–Асколи существуют такая отличная от x_* абсолютно непрерывная векторная функция $\tilde{x}: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и такая подпоследовательность последовательности $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ (снова будем обозначать ее через $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$), что $\tilde{x} \neq x_*$ и $x_k \rightarrow \tilde{x}$ в $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ при $k \rightarrow \infty$. Далее для любого $k = 1, 2, \dots$ и любого $t \in [0, T]$ справедливо равенство

$$x_k(t) = x_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) f(x_k(s), u_i) ds.$$

Следовательно, для любого $t \in [0, T]$ имеем

$$x_k(t) = x_0 + \int_0^t \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) f(\tilde{x}(s), u_i) \right] ds + \int_0^t \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) [f(x_k(s), u_i) - f(\tilde{x}(s), u_i)] \right] ds. \quad (9.17)$$

В силу непрерывности векторной функции f , абсолютной непрерывности траектории \tilde{x} и леммы 9.3 для первого интеграла в правой части (9.17) справедливо равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) f(\tilde{x}(s), u_i) \right] ds = \int_0^t f(\tilde{x}(s), u_*(s)) ds \quad \text{для любого } t \in [0, T].$$

Для второго интеграла в правой части (9.17) в силу равномерной непрерывности векторной функции f на $[0, T] \times U$ и равномерной сходимости последовательности $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, к

траектории \tilde{x} на интервале $[0, T]$ получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) [f(x_k(s), u_i) - f(\tilde{x}(s), u_i)] \right] ds = 0 \quad \text{для любого } t \in [0, T].$$

Следовательно, для любого $t \in [0, T]$, переходя к пределу в равенстве (9.17) при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\tilde{x}(t) = x_0 + \int_0^t f(\tilde{x}(s), u_*(s)) ds.$$

Таким образом, векторная функция \tilde{x} оказывается еще одной отличной от x_* траекторией управляемой системы (1.1) на интервале времени $[0, T]$, удовлетворяющей начальному условию (1.2). Однако этого не может быть в силу теоремы о единственности решения дифференциального уравнения. Следовательно, $x_k \rightarrow x_*$ в $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ при $k \rightarrow \infty$. Следствие доказано.

Из леммы 9.3 и следствия 9.1 вытекает, что для любого фиксированного $T > 0$ из последовательности оптимальных в задачах (\tilde{P}_k) пар $\{(x_k, v_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, можно выбрать такую подпоследовательность (будем обозначать ее снова через $\{(x_k, v_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$), что

$$x_k \rightarrow x_* \quad \text{в } C([0, T], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (9.18)$$

$$\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\partial}{\partial x} f(x_k(t), u_i) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x_*(t), u_*(t)) \quad \text{при почти всех } t \in [0, T] \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (9.19)$$

$$\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\partial}{\partial x} g(x_k(t), u_i) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} g(x_*(t), u_*(t)) \quad \text{при почти всех } t \in [0, T] \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (9.20)$$

Используя лемму 9.1 и вытекающие из нее условия (9.18)–(9.20), докажем вариант аппроксимационного принципа максимума Понтрягина для задачи (P) в случае общей нелинейной управляемой системы (1.1).

Будем использовать следующую формулировку принципа максимума Понтрягина [19] для задачи (\tilde{P}_k) , $k = 1, 2, \dots$

Пусть допустимая пара (x_k, v_k) оптимальна в задаче (\tilde{P}_k) , $k = 1, 2, \dots$. При этом управление v_k рассматривается как обычное допустимое управление, т.е. как измеримая векторная функция $v_k: [0, T_k] \mapsto V_k$. Тогда существует такая пара (ψ_k, ψ_k^0) сопряженных переменных, соответствующих паре (x_k, v_k) , что пара (x_k, v_k) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина (3.1)–(3.3) (для задачи (\tilde{P}_k)) вместе с множителями Лагранжа (ψ_k, ψ_k^0) и, кроме того, выполняются условие $\psi_k^0 > 0$ и условие трансверсальности

$$\psi_k(T_k) = 0. \quad (9.21)$$

Напомним, что сопряженная переменная ψ_k является решением сопряженного уравнения задачи (\tilde{P}_k) , соответствующим паре (x_k, v_k) , т.е. на интервале времени $[0, T_k]$ имеем

$$\dot{\psi}_k(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} - \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\partial f(x_k(t), u_i)}{\partial x} \right]^* \psi_k(t) - \psi_k^0 e^{-\rho t} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\partial g(x_k(t), u_i)}{\partial x} \right]. \quad (9.22)$$

Условие максимума на интервале времени $[0, T_k]$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{H}_k(x_k(t), t, v_k(t), \psi_k(t), \psi_k^0) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H_k(x_k(t), t, \psi_k(t), \psi_k^0). \quad (9.23)$$

Здесь функция Гамильтона–Понтрягина \mathcal{H}_k и гамильтониан H_k в задаче (\tilde{P}_k) , $k = 1, 2, \dots$, определяются равенствами

$$\mathcal{H}_k(x, t, v, \psi, \psi^0) = \sum_{i=1}^{N_k} v^i \langle f(x, u_i), \psi \rangle + \psi^0 e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} v^i \left[g(x, u_i) - e^{-t} \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right], \quad (9.24)$$

$$H_k(x, t, \psi, \psi^0) = \sup_{v \in V_k} \mathcal{H}_k(x, t, v, \psi, \psi^0).$$

Как показано в [19], сопряженная система (9.22) и условие максимума (9.23) влекут выполнение следующего условия стационарности для задачи (\tilde{P}_k) на интервале $[0, T_k]$:

$$\frac{d}{dt} H_k(x_k(t), t, \psi_k(t), \psi_k^0) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_k(x_k(t), t, v_k(t), \psi_k(t), \psi_k^0). \quad (9.25)$$

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что для любого $k = 1, 2, \dots$ векторная функция ψ_k продолжена на бесконечный полуинтервал $[0, \infty)$ нулем по непрерывности (см. (9.21)), т.е. положим $\psi_k(t) = \psi_k(T_k) = 0$ для любого $t \geq T_k$.

Следующий вариант принципа максимума Понтрягина обобщает на общий нелинейный случай аппроксимационный принцип максимума для задачи (P) , полученный ранее в разд. 7 в ситуации, когда управляемая система (1.1) аффинна по управлению.

Теорема 9.1. *Предположим, что для задачи (P) выполняются условия (A1)–(A3). Далее пусть (x_*, u_*) — оптимальная допустимая пара в задаче (P) , а $\{(\tilde{P}_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, — аппроксимирующая последовательность задач оптимального управления, соответствующая управлению u_* . Пусть, кроме того, для каждого $k = 1, 2, \dots$ пара (x_k, v_k) является оптимальной допустимой парой в задаче (\tilde{P}_k) и (ψ_k, ψ_k^0) — пара сопряженных переменных, соответствующих паре (x_k, v_k) в задаче (\tilde{P}_k) , так что пара (x_k, v_k) удовлетворяет основным соотношениям (9.22), (9.23) принципа максимума Понтрягина для задачи (\tilde{P}_k) вместе с множителями Лагранжа (ψ_k, ψ_k^0) и для любого $k = 1, 2, \dots$ выполняются неравенство $\psi_k^0 > 0$ и условие трансверсальности (9.21). Наконец, пусть последовательности $\{\psi_k(0)\}$, $k = 1, 2, \dots$, и $\{\psi_k^0\}$, $k = 1, 2, \dots$, ограничены и для некоторого $a > 0$ справедливы неравенства*

$$\|\psi_k(0)\| + \psi_k^0 \geq a, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.26)$$

Тогда существует такая подпоследовательность последовательности $\{(x_k, v_k, \psi_k, \psi_k^0)\}$, $k = 1, 2, \dots$ (в дальнейшем будем обозначать ее снова через $\{(x_k, v_k, \psi_k, \psi_k^0)\}$, $k = 1, 2, \dots$), что

1) для любого $T > 0$ и произвольной непрерывной векторной функции $\xi: [0, T] \times U \mapsto \mathbb{R}^q$ имеем

$$\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \xi(t, u_i) \rightarrow \xi(t, u_*(t)) \quad \text{при почти всех } t \in [0, T] \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (9.27)$$

$$x_k \rightarrow x_* \quad \text{в } C([0, T], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (9.28)$$

$$\psi_k^0 \rightarrow \psi^0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty \quad (9.29)$$

и

$$\psi_k \rightarrow \psi \quad \text{в } C([0, T], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (9.30)$$

где (ψ, ψ^0) — нетривиальная пара сопряженных переменных, соответствующая паре (x_*, u_*) , т.е. пара (x_*, u_*) удовлетворяет основным соотношениям (3.1)–(3.3) принципа максимума Понтрягина для задачи (P) вместе с множителями Лагранжа (ψ, ψ^0) ;

2) выполняется следующее условие стационарности:

$$H(x_*(t), t, \psi(t), \psi^0) = \psi^0 \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (9.31)$$

Доказательство. В силу леммы 9.1, переходя, если это необходимо, к подпоследовательности, получаем условия (9.27), (9.28) для произвольного $T > 0$. По условиям теоремы 9.1 последовательность $\{\psi_k^0\}$, $k = 1, 2, \dots$, ограниченная. Следовательно, переходя, если нужно, к подпоследовательности, не ограничивая общности, можно считать, что условие (9.29) выполняется для некоторого $\psi^0 \geq 0$.

Перейдем теперь к выделению такой подпоследовательности из последовательности $\{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, что для любого $T > 0$ выполняется условие (9.30), где (ψ, ψ^0) — ненулевая пара сопряженных переменных, соответствующая оптимальной паре (x_*, u_*) (при этом при переходе к подпоследовательности мы не меняем ее обозначения).

Рассмотрим последовательность $\{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, на интервале времени $[0, T_1]$. В силу условия (9.22), ограниченности последовательности $\{\psi_k(0)\}$, $k = 1, 2, \dots$ (см. условия теоремы 9.1), и в силу леммы Гронуолла–Беллмана, переходя, если нужно, к подпоследовательности, которую в дальнейшем будем обозначать через $\{\psi_{1,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, получаем

$$\psi_{1,k} \rightarrow \psi \quad \text{в } C([0, T_1], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

где $\psi: [0, T_1] \mapsto \mathbb{R}^n$ — некоторая абсолютно непрерывная векторная функция.

Рассмотрим теперь последовательность $\{\psi_{1,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, на интервале времени $[0, T_2]$. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности $\{\psi_{2,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, в последовательности $\{\psi_{1,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, получаем

$$\psi_{2,k} \rightarrow \tilde{\psi} \quad \text{в } C([0, T_2], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

где $\tilde{\psi}: [0, T_2] \mapsto \mathbb{R}^n$ — некоторая абсолютно непрерывная векторная функция, совпадающая на интервале $[0, T_1]$ с функцией ψ . Будем обозначать эту функцию $\tilde{\psi}$ снова через ψ .

Последовательно повторяя эту процедуру на интервалах времени $[0, T_i]$, $i = 3, 4, \dots$, получаем, что существуют такая (локально) абсолютно непрерывная векторная функция $\psi: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ и такая последовательность вложенных друг в друга подпоследовательностей $\{\psi_{i,k}\}$, $i, k = 1, 2, \dots$, $\psi_{i,k}: [0, T_i] \mapsto \mathbb{R}^n$, что для любого $i = 1, 2, \dots$ последовательность $\{\psi_{i+1,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, на $[0, T_i]$ является подпоследовательностью последовательности $\{\psi_{i,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, и, кроме того,

$$\psi_{i,k} \rightarrow \psi \quad \text{в } C([0, T_i], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Так как $T_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, то для любого $T > 0$ получаем, что диагональная последовательность $\{\psi_{k,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, сходится равномерно к векторной функции ψ на $[0, T]$. Для простоты обозначений будем в дальнейшем писать ψ_k вместо $\psi_{k,k}$, $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, для любого $T > 0$ выполняется условие (9.30). Заметим, что для каждой функции ψ_k , $k = 1, 2, \dots$, выполняется условие (9.21).

Из выполнения условий (9.27)–(9.30) и сопряженной системы (9.22) для сопряженной переменной ψ_k , $k = 1, 2, \dots$, следует, что векторная функция ψ является решением сопряженного уравнения (3.1). Действительно, для любого $t \geq 0$ и всех достаточно больших номеров k в силу сопряженной системы (9.22) имеем

$$\psi_k(t) = \psi_k(0) - \int_0^t \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) \frac{\partial f(x_k(s), u_i)}{\partial x} \right]^* \psi_k(s) ds - \psi_k^0 \int_0^t e^{-\rho s} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) \frac{\partial g(x_k(s), u_i)}{\partial x} \right] ds,$$

откуда в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и условий (9.19), (9.20), (9.28)–(9.30), переходя к пределу в последнем равенстве при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\psi(t) = \psi(0) - \int_0^t \left[\frac{\partial f(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} \right]^* \psi(s) ds - \psi^0 \int_0^t e^{-\rho s} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds.$$

На произвольном интервале $[0, T]$, $T > 0$, для достаточно больших номеров k ($T_k > T$) рассмотрим условие максимума (9.23):

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \langle f(x_k(t), u_i), \psi_k(t) \rangle + \psi_k^0 e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \left[g(x_k(t), u_i) - e^{-t} \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right] \stackrel{\text{п.в.}}{=} \\ & \stackrel{\text{п.в.}}{=} \max_{v \in V_k} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i \langle f(x_k(t), u_i), \psi_k(t) \rangle + \psi_k^0 e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i \left[g(x_k(t), u_i) - e^{-t} \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $\sigma_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то в силу условий (9.27)–(9.30) (выполняющихся для любого $T > 0$), переходя при п.в. $t \in [0, T]$ в последнем равенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем условие максимума (3.1) как предел условия (9.23).

Нетривиальность пары (ψ, ψ^0) (см. условие (3.2)) следует из условия (9.26).

Таким образом, оптимальная пара (x_*, u_*) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина вместе с парой соответствующих множителей Лагранжа (ψ, ψ^0) . Первая часть теоремы доказана.

Выпишем условие (9.25), используя вид функции \mathcal{H}_k (см. (9.24)). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_k(x_k(t), t, \psi_k(t), \psi_k^0) & \stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_k(x_k(t), t, v_k(t), \psi_k(t), \psi_k^0) = \\ & = -\psi_k^0 \rho e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) g(x_k(t), u_i) + \psi_k^0 (\rho + 1) e^{-(\rho+1)t} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} + \\ & \quad + 2\psi_k^0 e^{-(\rho+1)t} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\langle u_i - z_k(t), \dot{z}_k(t) \rangle}{1 + \sigma_k}. \end{aligned}$$

Выберем такие произвольные $t > 0$ и k , что $T_k > t$, и проинтегрируем последнее равенство на $[t, T_k]$, принимая во внимание краевое условие (9.21). Тогда получаем

$$\begin{aligned} H_k(x_k(t), t, \psi_k(t), \psi_k^0) & = \psi_k^0 e^{-\rho T_k} \max_{v \in V_k} \left\{ \sum_{i=1}^{N_k} v^i \left[g(x_k(T_k), u_i) - e^{-T_k} \frac{\|u_i - z_k(T_k)\|^2}{1 + \sigma_k} \right] \right\} + \\ & \quad + \psi_k^0 \rho \int_t^{T_k} e^{-\rho s} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) g(x_k(s), u_i) ds - \psi_k^0 (\rho + 1) \int_t^{T_k} e^{-(\rho+1)s} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) \frac{\|u_i - z_k(s)\|^2}{1 + \sigma_k} ds - \\ & \quad - 2\psi_k^0 \int_t^{T_k} e^{-(\rho+1)s} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) \frac{\langle u_i - z_k(s), \dot{z}_k(s) \rangle}{1 + \sigma_k} ds. \end{aligned}$$

Перейдем теперь в последнем равенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, используя условия (9.27)–(9.30) (выполняющиеся для любого $T > 0$) и оценки (9.1)–(9.4). В пределе получим условие (9.31). Вторая часть теоремы доказана. Теорема доказана.

Следующий вариант принципа максимума Понтрягина (см. [70]) является следствием теоремы 9.1. Данный результат обобщает теорему 7.2, доказанную выше, на случай общей нелинейной задачи (P).

Теорема 9.2. Пусть выполняются условия (A1)–(A3) и (x_*, u_*) — оптимальная допустимая пара в задаче (P). Тогда пара (x_*, u_*) удовлетворяет основным соотношениям (3.1)–(3.3) принципа максимума Понтрягина вместе с некоторой соответствующей ей парой сопряженных переменных (ψ, ψ^0) . Кроме того, выполняется условие стационарности (9.31).

Доказательство. Пусть $\{(\tilde{P}_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, — последовательность аппроксимирующих задач, соответствующих оптимальному управлению u_* . Пусть далее (x_k, v_k) — оптимальная допустимая пара в задаче (\tilde{P}_k) . В соответствии с классическим принципом максимума Понтрягина для любого $k = 1, 2, \dots$ существует пара сопряженных переменных (ψ_k, ψ_k^0) , соответствующих оптимальной паре (x_k, v_k) в задаче (\tilde{P}_k) , т.е. таких, что пара (x_k, u_k) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума вместе с переменными (ψ_k, ψ_k^0) (см. (9.22), (9.23)), для каждого $k = 1, 2, \dots$ имеем $\psi_k^0 > 0$ и выполняется условие трансверсальности (9.21).

Поскольку $\psi_k^0 > 0$, величина $c_k = \|\psi_k(0)\| + \psi_k^0$ положительна. Перейдем в соотношениях принципа максимума для задачи (\tilde{P}_k) к нормализованным сопряженным переменным ψ_k/c_k и ψ_k^0/c_k , сохранив за ними прежние обозначения ψ_k и ψ_k^0 . Тогда для нормализованных сопряженных переменных выполняется условие нетривиальности

$$\|\psi_k(0)\| + \psi_k^0 = 1, \quad (9.32)$$

сохраняется условие трансверсальности (9.21) и очевидно, что пара (x_k, v_k) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина (для задачи (\tilde{P}_k)) вместе с нормализованными сопряженными переменными (ψ_k, ψ_k^0) , $k = 1, 2, \dots$. В силу условия нетривиальности (9.32) последовательности $\{\psi_k(0)\}$, $k = 1, 2, \dots$, и $\{\psi_k^0\}$, $k = 1, 2, \dots$, ограничены и условие (9.26) выполняется с $a = 1$. Следовательно, последовательность $\{(x_k, v_k, \psi_k, \psi_k^0)\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 9.1. В силу теоремы 9.1 существует такая подпоследовательность последовательности $\{(x_k, v_k, \psi_k, \psi_k^0)\}$, $k = 1, 2, \dots$ (будем обозначать ее снова через $\{(x_k, v_k, \psi_k, \psi_k^0)\}$, $k = 1, 2, \dots$), что для пар сопряженных переменных (ψ_k, ψ_k^0) условия (9.29) и (9.30) выполняются при любом $T > 0$. Пределом же ее является нетривиальная пара сопряженных переменных (ψ, ψ^0) , соответствующих оптимальной паре (x_*, u_*) в задаче (P). Таким образом, пара (x_*, u_*) вместе с парой сопряженных переменных (ψ, ψ^0) удовлетворяют основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в задаче (P) и, наконец, пара (x_*, u_*) вместе с сопряженными переменными (ψ, ψ^0) удовлетворяют условию стационарности (9.31). Теорема доказана.

Наконец, приведем еще одно следствие теоремы 9.1 в случае, когда принцип максимума Понтрягина в аппроксимирующей задаче (\tilde{P}_k) , $k = 1, 2, \dots$, выполняется в нормальной форме (см. разд. 3).

Напомним, что принцип максимума Понтрягина для допустимой пары (x_k, v_k) в задаче (\tilde{P}_k) , $k = 1, 2, \dots$, выполняется в нормальной форме с сопряженной переменной ψ_k , если ψ_k является решением сопряженной системы в нормальной форме на интервале времени $[0, T_k]$, соответствующим паре (x_k, v_k) , т.е.

$$\dot{\psi}_k(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} - \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\partial f(x_k(t), u_i)}{\partial x} \right]^* \psi_k(t) - e^{-\rho t} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\partial g(x_k(t), u_i)}{\partial x} \right], \quad (9.33)$$

выполняется условие трансверсальности (9.21) и, кроме того, пара (x_k, v_k) удовлетворяет на $[0, T_k]$ условию максимума в нормальной форме вместе с сопряженной переменной ψ_k , т.е.

$$\mathcal{H}_k(x_k(t), t, v_k(t), \psi(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H_k(x_k(t), t, \psi_k(t)). \quad (9.34)$$

Здесь функция Гамильтона–Понтрягина \mathcal{H}_k и гамильтониан H_k для задачи (\tilde{P}_k) определяются обычным образом:

$$\mathcal{H}_k(x, t, v, \psi) = \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i \langle f(x, u_i), \psi \rangle + e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i \left[g(x, u_i) - e^{-t} \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right],$$

$$H_k(x, t, \psi) = \sup_{v \in V_k} \mathcal{H}_k(x, t, v, \psi).$$

Теорема 9.3. Пусть выполняются условия (A1)–(A3) и (x_*, u_*) является допустимой оптимальной парой в задаче (P) . Пусть далее $\{(\tilde{P}_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, — последовательность аппроксимирующих задач, соответствующих u_* , и для каждого $k = 1, 2, \dots$ пара (x_k, v_k) — некоторая оптимальная пара в задаче (\tilde{P}_k) . Кроме того, для каждого $k = 1, 2, \dots$ пусть ψ_k — сопряженная переменная, соответствующая паре (x_k, v_k) в задаче (\tilde{P}_k) , т.е. ψ_k удовлетворяет вместе с (x_k, v_k) условиям (9.33), (9.34) принципа максимума в нормальной форме для задачи (\tilde{P}_k) на интервале времени $[0, T_k]$ и выполняется условие трансверсальности (9.21). Пусть, наконец, последовательность $\{\psi_k(0)\}$, $k = 1, 2, \dots$, ограничена. Тогда существует такая подпоследовательность $\{(x_k, v_k, \psi_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, далее обозначаемая снова через $\{(x_k, v_k, \psi_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, что

- 1) для любого $T > 0$ и произвольной непрерывной векторной функции $\xi: [0, T] \times U \mapsto \mathbb{R}^q$ выполняются условия (9.27), (9.28) и (9.30) теоремы 9.1:

$$\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \xi(t, u_i) \rightarrow \xi(t, u_*(t)) \quad \text{при почти всех } t \in [0, T] \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (9.35)$$

$$x_k \rightarrow x_* \quad \text{в } C([0, T], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (9.36)$$

$$\psi_k \rightarrow \psi \quad \text{в } C([0, T], \mathbb{R}^n) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (9.37)$$

где ψ — сопряженная переменная, соответствующая паре (x_*, u_*) , т.е. пара (x_*, u_*) удовлетворяет основным соотношениям (3.4), (3.5) принципа максимума Понтрягина в нормальной форме для задачи (P) вместе с сопряженной переменной ψ ;

- 2) выполняется следующее условие стационарности в нормальной форме:

$$H(x_*(t), t, \psi(t)) = \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (9.38)$$

В дальнейшем теорема 9.3 нам потребуются для получения условий, исключающих аномальность задачи (P) , и доказательства различных версий принципа максимума Понтрягина, содержащих дополнительную информацию о поведении сопряженной переменной ψ и гамильтониана H на бесконечности в общем нелинейном случае.

10. УСЛОВИЕ МОНОТОННОСТИ

В данном разделе рассматривается ситуация, характеризующаяся выполнением сформулированного ниже условия монотонности (A4). Мы покажем, что в этом случае соотношения принципа максимума Понтрягина для оптимальной в задаче (P) пары (x_*, u_*) выполняются в нормальной форме (т.е. при $\psi^0 = 1$). Более того, в этом случае все координаты сопряженной переменной ψ оказываются положительными, а поведение сопряженной переменной ψ характеризуется выполнением некоторого неравенства.

Далее будем рассматривать общую нелинейную задачу оптимального управления (P) и использовать соответствующую аппроксимационную схему, изложенную в разд. 9. В случае, когда управляемая система аффинна по управлению, приведенные доказательства могут быть значительно упрощены (в этом случае они могут опираться на результаты разд. 7; см. [31, 32]). Однако эти упрощения не приводят к каким-либо существенным усовершенствованиям в формулировках соответствующих необходимых условий оптимальности. Поэтому мы сконцентрируем рассмотрение сразу на общем нелинейном случае.

В дальнейшем, не оговаривая этого каждый раз, будем писать $a > 0$ (соответственно $a \geq 0$), если все координаты вектора $a \in \mathbb{R}^n$ положительны (соответственно неотрицательны). Аналогично запись $A > 0$ (соответственно $A \geq 0$) для $(n \times n)$ -матрицы A будет означать, что все компоненты матрицы A положительны (соответственно неотрицательны).

Следующее условие мы будем называть *условием монотонности*.

(A4) Для любой допустимой траектории x управляемой системы (1.1) и любого вектора $u \in U$ выполняются неравенства

$$\frac{\partial g(x(t), u)}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial f^i(x(t), u)}{\partial x^j} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Заметим, что в одномерном случае ($n = 1$) второе неравенство в условии (A4) выполняется автоматически.

Выполнение условия монотонности (A4) и ряда других условий положительности характерно для многих задач оптимального экономического роста (см., например, неоклассическую модель в разд. 15). Действительно, в задачах оптимального экономического роста, как правило, координаты фазового вектора x представляют собой различные (положительные) производственные факторы. Далее обычно предполагается, что мгновенная полезность в таких задачах, а иногда и скорости роста всех производственных факторов увеличиваются при росте самих производственных факторов. В рамках задачи (P) такого рода предположения означают, что подинтегральная функция g в функционале полезности (1.3) монотонно возрастает, а координаты векторной функции f в управляемой системе (1.1) монотонно не убывают при возрастании координат фазового вектора x . Данные предположения влекут выполнение условия (A4).

Функция мгновенной полезности g и скорость роста производственных факторов часто оказываются положительными вдоль оптимальной пары (x_*, u_*) , что влечет выполнение условий $g(x_*(t), u_*(t)) > 0$ и $f(x_*(t), u_*(t)) > 0$ для любого $t \geq 0$. Эти условия, так же как и упомянутое выше условие положительности вектора $x > 0$, присутствуют (в различных комбинациях) в постановках многих задач оптимального экономического роста.

В дальнейшем нам потребуется ряд фактов из теории линейных дифференциальных уравнений.

На конечном отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$, рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{10.1}$$

с начальным условием

$$x(\xi) = x_\xi. \tag{10.2}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $x_\xi \in \mathbb{R}^n$, A — заданная $(n \times n)$ -матричная функция, b — заданная n -мерная векторная функция. Предполагается, что все компоненты a_i^j , $i, j = 1, \dots, n$, матричной функции A и все координаты b^i , $i = 1, \dots, n$, векторной функции b — измеримые и ограниченные функции на $[0, T]$. Далее мы считаем, что начальный момент времени ξ — произвольная точка интервала $[0, T]$.

Наряду с неоднородной системой (10.1) будем рассматривать на интервале $[0, T]$ соответствующие ей однородную линейную систему

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) \quad (10.3)$$

и сопряженную систему

$$\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t). \quad (10.4)$$

$(n \times n)$ -Матричная функция Y называется *нормализованной фундаментальной матрицей* однородной линейной системы дифференциальных уравнений (10.3), если столбцы y_i , $i = 1, \dots, n$, этой матрицы являются решениями (Каратеодори) системы (10.3) с начальными условиями $y_i^j(0) = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$, где $\delta_{i,i} = 1$, $i = 1, \dots, n$, и $\delta_{i,j} = 0$ при всех $i \neq j$.

При сделанных предположениях существует (единственная) нормализованная фундаментальная матрица Y системы (10.3) [21, 59]. Фундаментальная матрица Y определена на всем интервале $[0, T]$. Кроме того, для любого $t \in [0, T]$ матрица $Y(t)$ невырожденная; всегда существует ее обратная матрица $[Y(t)]^{-1}$.

Пусть Z — нормализованная фундаментальная матрица сопряженной системы (10.4). Матричные функции Y и Z связаны между собой. В частности, если y_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, — произвольный i -й столбец матрицы Y , а z_j , $j \in \{1, \dots, n\}$, — произвольный j -й столбец матрицы Z , то, как непосредственно следует из определения матричных функций Y и Z , на интервале времени $[0, T]$ имеем

$$\langle y_i(t), z_j(t) \rangle \equiv \delta_{i,j}.$$

Отсюда немедленно вытекает равенство

$$[Z(t)]^{-1} = [Y(t)]^* \quad \text{для любого } t \in [0, T]. \quad (10.5)$$

В силу сделанных предположений на интервале времени $[0, T]$ существует (единственное) решение x линейной системы дифференциальных уравнений (10.1) с начальным условием (10.2) и, кроме того, справедлива следующая *формула Коши* (см., например, [14, 59]):

$$x(t) = Y(t) \left[[Y(\xi)]^{-1} x_\xi + \int_{\xi}^t [Y(s)]^{-1} b(s) ds \right] \quad \text{для любого } t \in [0, T]. \quad (10.6)$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда все внедиагональные компоненты матрицы A неотрицательные при п.в. $t \in [0, T]$, т.е.

$$a_{i,j}^j(t) \stackrel{\text{п.в.}}{\geq} 0 \quad \text{для любых } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.7)$$

Лемма 10.1. Пусть выполняется условие (10.7). Тогда

$$Y(t) \geq 0 \quad \text{для любого } t \in [0, T]. \quad (10.8)$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим через A_ε $(n \times n)$ -матричную функцию с диагональными компонентами такими же, как у матрицы A , и внедиагональными компонентами, увеличенными на ε , т.е. для любого $t \in [0, T]$ компоненты $a_{\varepsilon,i}^j(t)$, $i, j = 1, \dots, n$, матрицы $A_\varepsilon(t)$ имеют вид

$$a_{\varepsilon,i}^i(t) = a_i^i(t), \quad i = 1, \dots, n; \quad a_{\varepsilon,i}^j(t) = a_i^j(t) + \varepsilon \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Тогда все внедиагональные элементы $a_{\varepsilon,i}^j(t)$ матричной функции $A_\varepsilon(t)$ положительны при п.в. $t \in [0, T]$. Мы докажем, что в этом случае все компоненты фундаментальной матрицы $Y_\varepsilon(t)$ линейной системы

$$\dot{y}(t) = A_\varepsilon(t)y(t) \quad (10.9)$$

положительны на всем полуинтервале $(0, T]$. Отсюда, устремляя положительное число ε к нулю, в силу непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений (10.9) от параметра ε [59] в пределе получаем неотрицательность фундаментальной матрицы $Y(t)$ линейной системы (10.3) для любого $t \in [0, T]$.

Рассмотрим произвольный столбец $y_{\varepsilon,i}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, фундаментальной матрицы Y_ε линейной системы (10.9). В начальный момент времени $t_0 = 0$ для его i -й координаты имеем

$$y_{\varepsilon,i}^i(0) = 1.$$

Следовательно, координата $y_{\varepsilon,i}^i(t)$ столбца $y_{\varepsilon,i}(t)$ положительна на некотором интервале времени, примыкающем к нулю справа.

Пусть теперь $j \neq i$. Тогда для координаты $y_{\varepsilon,i}^j$ столбца $y_{\varepsilon,i}$ в начальный момент времени $t_0 = 0$ имеем

$$y_{\varepsilon,i}^j(0) = 0.$$

Следовательно, в случае $j \neq i$ все координаты $y_{\varepsilon,i}^j(t)$ вектора $y_{\varepsilon,i}(t)$ сколь угодно малы при всех достаточно малых $t > 0$.

Поскольку

$$\dot{y}_{\varepsilon,i}^j(t) = a_{\varepsilon,j}^i(t)y_{\varepsilon,i}^i(t) + \sum_{k \neq i} a_{\varepsilon,j}^k(t)y_{\varepsilon,i}^k(t)$$

и $a_{\varepsilon,j}^i(t) \geq \varepsilon > 0$ при $j \neq i$, то отсюда получаем, что первое слагаемое в данном равенстве положительно и ограничено снизу почти всюду на некотором интервале времени, примыкающем к нулю справа, а остальные слагаемые стремятся к нулю при t , стремящемся к нулю. Отсюда вытекает, что для любого $j \neq i$ координата $y_{\varepsilon,i}^j(t) > 0$ положительна на некотором интервале времени, примыкающем к нулю справа.

Итак, мы доказали, что существует такое $\tau > 0$, что все координаты $y_{\varepsilon,i}^j(t)$, $j = 1, \dots, n$, столбца $y_{\varepsilon,i}(t)$ положительны на полуинтервале $(0, \tau]$. Покажем, что в качестве момента времени τ можно взять $\tau = T$.

Предположим противное. Тогда существует такое минимальное $0 < \tau < T$, что $y_{\varepsilon,i}^j(t) > 0$ для любых $t \in (0, \tau)$, $j = 1, \dots, n$, и существует такой индекс $j_0 \in \{1, \dots, n\}$, что $y_{\varepsilon,i}^{j_0}(\tau) = 0$. Заметим, что в этом случае существует такой индекс $j_1 \neq j_0$, что $y_{\varepsilon,i}^{j_1}(\tau) \neq 0$ (и, следовательно, $y_{\varepsilon,i}^{j_1}(\tau) > 0$). Действительно, $y_{\varepsilon,i}$ — столбец фундаментальной матрицы Y_ε . Поэтому его координаты не могут все одновременно обращаться в нуль. Далее поскольку $y_{\varepsilon,i}^{j_1}(\tau) > 0$, то существует такое число $\xi < \tau$, что $y_{\varepsilon,i}^{j_1}(t) > 0$ для любого $t \in [\xi, \tau]$. Приближая ξ к τ слева, не ограничивая общности, можно считать, что на интервале времени $[\xi, \tau]$ значения координаты $y_{\varepsilon,i}^{j_0}(t)$ сколь угодно малы.

Для координаты $y_{\varepsilon,i}^{j_0}$ в момент времени τ справедливо равенство

$$y_{\varepsilon,i}^{j_0}(\tau) = y_{\varepsilon,i}^{j_0}(\xi) + \int_{\xi}^{\tau} \sum_{k=1}^n a_{\varepsilon,j_0}^k(s)y_{\varepsilon,i}^k(s) ds.$$

Здесь в подинтегральной сумме при п.в. $s \in [\xi, \tau]$ слагаемое $a_{\varepsilon, j_0}^{j_0}(s)y_{\varepsilon, i}^{j_0}(s)$ сколь угодно мало, слагаемое $a_{\varepsilon, j_0}^{j_1}(s)y_{\varepsilon, i}^{j_1}(s)$ положительно (так как $j_1 \neq j_0$) и ограничено снизу положительным числом, не зависящим от ξ , а все остальные слагаемые неотрицательные. Отсюда получаем, что $y_{\varepsilon, i}^{j_0}(\tau) > 0$, что противоречит предположению $y_{\varepsilon, i}^{j_0}(\tau) = 0$. Таким образом, можно положить $\tau = T$. Лемма доказана.

Напомним, что функция Гамильтона–Понтрягина в нормальной форме $\mathcal{H}: G \times [0, \infty) \times U \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$ и нормальная форма гамильтониана $H: G \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$ определены в разд. 3 следующим образом:

$$\mathcal{H}(x, t, u, \psi) = \mathcal{H}(x, t, u, \psi, 1) = \langle f(x, u), \psi \rangle + e^{-\rho t} g(x, u),$$

$$H(x, t, \psi) = H(x, t, \psi, 1) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(x, t, u, \psi).$$

Далее для заданной допустимой пары (x, u) задачи (P) обозначим через $Y_{(x, u)}$ нормализованную фундаментальную матрицу следующей линейной системы дифференциальных уравнений (линеаризованной системы):

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} y(t). \quad (10.10)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что матричная функция $Y_{(x, u)}$ определена на всем бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$. Далее для произвольного $t \geq 0$ обозначим через $\|Y_{(x, u)}(t)\|$ стандартную норму матрицы $Y_{(x, u)}(t)$, рассматриваемой в качестве линейного оператора в \mathbb{R}^n , т.е. положим

$$\|Y_{(x, u)}(t)\| = \max_{y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0} \frac{\|Y_{(x, u)}(t)y\|}{\|y\|}.$$

Аналогично для допустимой пары (x, u) задачи (P) обозначим через $Z_{(x, u)}$ нормализованную фундаментальную матрицу соответствующей сопряженной системы

$$\dot{z}(t) = - \left[\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} \right]^* z(t).$$

Матричная функция $Z_{(x, u)}$ также определена на всем бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$. В силу условия (10.5) для любого $t \geq 0$ имеем

$$[Z_{(x, u)}(t)]^{-1} = [Y_{(x, u)}(t)]^*. \quad (10.11)$$

Следующий результат усиливает утверждения общих вариантов принципа максимума Понтрягина (теоремы 3.1, 7.2 и 9.2) для задачи (P) при выполнении дополнительного условия монотонности (A4).

Теорема 10.1. Пусть выполняются условия (A1)–(A4). Пусть, кроме того, существует такой вектор $u_0 \in U$, что $f(x_0, u_0) > 0$. Далее предположим, что (x_*, u_*) — оптимальная допустимая пара в задаче (P) . Тогда существует такая сопряженная переменная ψ (соответствующая паре (x_*, u_*)), что выполняются следующие условия:

- (i) допустимая пара (x_*, u_*) вместе с сопряженной переменной ψ удовлетворяют на бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$ основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме (см. (3.4), (3.5)):

$$\dot{\psi}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} - \left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right]^* \psi(t) - e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x}, \quad (10.12)$$

$$\mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H(x_*(t), t, \psi(t)); \quad (10.13)$$

(ii) для любого $t \geq 0$ имеем

$$\psi(t) > 0; \tag{10.14}$$

(iii) допустимая пара (x_*, u_*) вместе с сопряженной переменной ψ удовлетворяют условию стационарности в нормальной форме (см. (9.38)):

$$H(x_*(t), t, \psi(t)) = \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds \quad \text{для любого } t \geq 0; \tag{10.15}$$

(iv) для любого $t \geq 0$ интеграл

$$I_*(t) = \int_t^\infty e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds, \tag{10.16}$$

где $Z_* = Z_{(x_*, u_*)}$, сходится абсолютно и выполняется следующее неравенство:

$$\psi(t) \geq Z_*(t)I_*(t). \tag{10.17}$$

Доказательство. Пусть $\{(\tilde{P}_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, — аппроксимирующая последовательность задач оптимального управления, соответствующая управлению u_* (см. разд. 9). Не ограничивая общности, можно положить $u_1 = u_0$. Тогда для любого $k = 1, 2, \dots$ в начальный момент времени $t_0 = 0$ справедливо включение (см. (8.9))

$$f(x_0, u_0) \in F_{N_k}(x_0). \tag{10.18}$$

Пусть (x_k, v_k) — оптимальная допустимая пара в задаче (\tilde{P}_k) , $k = 1, 2, \dots$. В соответствии со стандартной формулировкой принципа максимума Понтрягина в нормальной форме (т.е. при $\psi_k^0 = 1$) для любого $k = 1, 2, \dots$ существует такая сопряженная переменная ψ_k , соответствующая оптимальной паре (x_k, v_k) в задаче (\tilde{P}_k) , что допустимая пара (x_k, v_k) удовлетворяет принципу максимума Понтрягина в нормальной форме (для задачи (\tilde{P}_k)) вместе с сопряженной переменной ψ_k на интервале времени $[0, T_k]$ (см. (3.4), (3.5)):

$$\dot{\psi}_k(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} - \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\partial f(x_k(t), u_i)}{\partial x} \right]^* \psi_k(t) - e^{-\rho t} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\partial g(x_k(t), u_i)}{\partial x} \right], \tag{10.19}$$

$$\mathcal{H}_k(x_k(t), t, v_k(t), \psi_k(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H_k(x_k(t), t, \psi_k(t)). \tag{10.20}$$

При этом выполняются условия трансверсальности (см. (9.21))

$$\psi_k(T_k) = 0. \tag{10.21}$$

Здесь

$$\mathcal{H}_k(x, t, v, \psi) = \sum_{i=1}^{N_k} v^i \langle f(x, u_i), \psi \rangle + e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} v^i \left[g(x, u_i) - e^{-t} \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right],$$

$$H_k(x, t, \psi) = \sup_{v \in V_k} \mathcal{H}_k(x, t, v, \psi).$$

Кроме того, для любого $k = 1, 2, \dots$ (см. (9.25)) на интервале $[0, T_k]$ имеем

$$\frac{d}{dt} H_k(x_k(t), t, \psi_k(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_k(x_k(t), t, v_k(t), \psi_k(t)). \tag{10.22}$$

Легко видеть, что в силу условия (A4), сопряженной системы (10.19) и условия трансверсальности (10.21) при любом $k = 1, 2, \dots$ для сопряженной переменной выполняется неравенство $\psi_k(t) > 0$ для всех t из некоторого интервала, примыкающего к T_k слева.

Покажем, что на самом деле

$$\psi_k(t) > 0 \quad \text{для любого } t \in [0, T_k]. \quad (10.23)$$

Предположим противное. Тогда для некоторого натурального k существует такое $\tau \in [0, T_k)$, что по крайней мере одна координата вектора $\psi_k(\tau)$ обращается в нуль. Пусть ξ максимальное из всех таких чисел τ . Тогда, очевидно, $\xi < T_k$. Пусть далее натуральное $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ таково, что $\psi_k^i(\xi) = 0$. Тогда

$$\psi_k(t) > 0 \quad \text{для любого } t \in (\xi, T_k) \quad (10.24)$$

и в силу сопряженной системы (10.19) на интервале $t \in [\xi, T_k]$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_k^i(t) &\stackrel{\text{п.в.}}{=} - \sum_{j=1}^n \left[\sum_{l=1}^{N_k} v_k^l(t) \frac{\partial f^j(x_k(t), u_l)}{\partial x^i} \right] \psi_k^j(t) - \sum_{l=1}^{N_k} v_k^l(t) e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_k(t), u_l)}{\partial x^i} = \\ &= - \sum_{l=1}^{N_k} v_k^l(t) \frac{\partial f^i(x_k(t), u_l)}{\partial x^i} \psi_k^i(t) - \sum_{j \neq i} \left[\sum_{l=1}^{N_k} v_k^l(t) \frac{\partial f^j(x_k(t), u_l)}{\partial x^i} \right] \psi_k^j(t) - \\ &\quad - e^{-\rho t} \sum_{l=1}^{N_k} v_k^l(t) \frac{\partial g(x_k(t), u_l)}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (10.25)$$

На конечном интервале времени $[0, T_k]$ все траектории управляемой системы (1.1) с начальным условием (1.2) равномерно ограничены (в силу условия (A1)), а управление u принимает значения в компактном множестве U . Поэтому в силу непрерывности частной производной $\partial f^i / \partial x^i$, $i = 1, 2, \dots, n$, на множестве $G \times U$ существует такая постоянная $C_1 \geq 0$, что

$$\left| \frac{\partial f^i(x_k(t), u)}{\partial x^i} \right| \leq C_1 \quad \text{для любых } t \in [\xi, T_k], \quad u \in U, \quad i = 1, \dots, n.$$

Из условия (A4) следует, что измеримая функция $w: [\xi, T_k] \mapsto \mathbb{R}^1$, определяемая равенством

$$w(t) = - \sum_{j \neq i} \left[\sum_{l=1}^{N_k} v_k^l(t) \frac{\partial f^j(x_k(t), u_l)}{\partial x^i} \right] \psi_k^j(t) - e^{-\rho t} \sum_{l=1}^{N_k} v_k^l(t) \frac{\partial g(x_k(t), u_l)}{\partial x^i}, \quad t \in [\xi, T_k],$$

отрицательна при п.в. $t \in [\xi, T_k]$. В силу дифференциального уравнения (10.25) при п.в. $t \in [\xi, T_k]$ скалярная функция ψ_k^i удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\dot{\psi}_k^i(t) \leq C_1 \psi_k^i(t) + w(t)$$

с краевым условием

$$\psi_k^i(\xi) = 0.$$

Отсюда в силу формулы Коши для линейных дифференциальных уравнений получаем

$$\psi_k^i(t) \leq e^{C_1 t} \int_{\xi}^t e^{-C_1 s} w(s) ds < 0 \quad \text{для любого } t \in (\xi, T_k),$$

что противоречит неравенству (10.24). Следовательно, справедливо условие (10.23).

Покажем теперь, что последовательность $\{\psi_k(0)\}$, $k = 1, 2, \dots$, ограничена.

Действительно, в силу условия (10.22) на интервале $[0, T_k]$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_k(x_k(t), t, \psi_k(t)) &\stackrel{\text{п.б.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_k(x_k(t), t, v_k(t), \psi_k(t)) = \\ &= -\rho e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) g(x_k(t), u_i) + (\rho + 1) e^{-(\rho+1)t} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} + \\ &\quad + 2e^{-(\rho+1)t} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\langle u_i - z_k(t), \dot{z}_k(t) \rangle}{1 + \sigma_k}. \end{aligned}$$

Проинтегрировав последнее равенство на интервале времени $[0, T_k]$, в силу условия трансверсальности в правом конце (10.21) получаем

$$\begin{aligned} H_k(x_0, 0, \psi_k(0)) &= e^{-\rho T_k} \max_{v \in V_k} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i g(x_k(T_k), u_i) - e^{-T_k} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i \frac{\|u_i - z_k(T_k)\|^2}{1 + \sigma_k} \right] + \\ &\quad + \rho \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) g(x_k(t), u_i) dt - (\rho + 1) \int_0^{T_k} e^{-(\rho+1)t} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} dt - \\ &\quad - 2 \int_0^{T_k} e^{-(\rho+1)t} \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\langle u_i - z_k(t), \dot{z}_k(t) \rangle}{1 + \sigma_k} dt. \end{aligned}$$

Из последнего равенства и условий (1.4), (1.5), (9.1), (9.3) следует, что существует такое $C_2 > 0$, что

$$H_k(x_0, 0, \psi_k(0)) \leq C_2 \quad \text{для любых } k = 1, 2, \dots$$

Далее из включения (10.18) вытекает неравенство

$$\langle f(x_0, u_0), \psi_k(0) \rangle + g(x_0, u_0) - \frac{\|u_0 - z_k(0)\|^2}{1 + \sigma_k} \leq H_k(x_0, 0, \psi_k(0)),$$

откуда получаем

$$\langle f(x_0, u_0), \psi_k(0) \rangle \leq C_2 + |g(x_0, u_0)| + (2|U| + 1)^2,$$

где $|U| = \max_{u \in U} \|u\|$. Из последнего неравенства, условия $f(x_0, u_0) > 0$ и условия (10.23) получаем, что последовательность $\{\psi_k(0)\}$, $k = 1, 2, \dots$, ограничена.

Таким образом, последовательность $\{(x_k, v_k, \psi_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяет всем условиям теоремы 9.3. Следовательно, существует такая подпоследовательность последовательности $\{(x_k, v_k, \psi_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$ (в дальнейшем будем обозначать ее снова через $\{(x_k, v_k, \psi_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$), что для любого $T > 0$ последовательность сопряженных переменных ψ_k , $k = 1, 2, \dots$, сходится равномерно на интервале времени $[0, T]$ к сопряженной переменной ψ , соответствующей оптимальной паре (x_*, u_*) в задаче (P) , т.е. пара (x_*, u_*) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме (10.12), (10.13) для задачи (P) вместе с сопряженной переменной ψ . Наконец, пара (x_*, u_*) и сопряженная переменная ψ удовлетворяют условию стационарности (10.15). Таким образом, для оптимальной пары (x_*, u_*) и сопряженной переменной ψ утверждения теоремы (i) и (iii) доказаны.

Из положительности сопряженных переменных ψ_k на интервалах времени $[0, T_k]$, $k = 1, \dots$, следует неотрицательность сопряженной переменной ψ на всем бесконечном полуинтервале

$[0, \infty)$. При этом ни одна из координат векторной функции ψ не может обратиться в нуль ни в какой момент времени $t \geq 0$. Действительно, если такой момент времени существует, то аналогично тому, как это было сделано при доказательстве положительности векторных функций ψ_k на полуинтервалах $[0, T_k)$, $k = 1, \dots$, в силу условия (A4) и того факта, что сопряженная переменная ψ является решением сопряженной системы (10.12), получаем противоречие. Таким образом, $\psi(t) > 0$ для любого $t \geq 0$. Следовательно, утверждение (ii) доказано.

Докажем утверждение (iv). В силу формулы (10.6) для сопряженной переменной ψ_k , $k = 1, 2, \dots$ (как для решения сопряженной системы (10.19) на интервале времени $[0, T_k]$), имеем

$$\psi_k(t) = Z_k(t)[Z_k(T_k)]^{-1}\psi_k(T_k) + Z_k(t) \left[\int_t^{T_k} e^{-\rho s} [Z_k(s)]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) \frac{\partial g(x_k(s), u_i)}{\partial x} \right] ds \right],$$

где $Z_k = Z_{(x_k, v_k)}$ — нормализованная фундаментальная матрица соответствующей (10.19) однородной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}(t) = - \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\partial f(x_k(t), u_i)}{\partial x} \right]^* z(t)$$

на интервале времени $[0, T_k]$. Так как в силу условия трансверсальности $\psi_k(T_k) = 0$ (см. (10.21)), то для любого $t \in [0, T_k]$, $k = 1, 2, \dots$, имеем

$$\psi_k(t) = Z_k(t) \int_t^{T_k} e^{-\rho s} [Z_k(s)]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) \frac{\partial g(x_k(s), u_i)}{\partial x} \right] ds. \quad (10.26)$$

Зафиксируем произвольные моменты времени t, T такие, что $T > t \geq 0$, и рассмотрим интеграл

$$I_{k,T} = \int_t^T e^{-\rho s} [Z_k(s)]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) \frac{\partial g(x_k(s), u_i)}{\partial x} \right] ds \quad (10.27)$$

при $k = 1, 2, \dots$. Здесь подынтегральная функция ограничена на интервале $[0, T]$ и, кроме того, в силу (9.27)

$$[Z_k]^{-1} \rightarrow [Z_*]^{-1} \quad \text{равномерно на } [0, T] \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

$$\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\partial g(x_k(t), u_i)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \quad \text{при почти всех } t \in [0, T] \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Следовательно, в силу теоремы Лебега

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_{k,T} = \int_t^T e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds.$$

Так как $[Z_k]^{-1} = [Y_{(x_k, v_k)}]^*$, $k = 1, 2, \dots$, то все компоненты матрицы $[Z_k]^{-1}$ — неотрицательные функции. Поэтому в силу условия (A4) для любого $k = 1, 2, \dots$ подынтегральная векторная функция

$$e^{-\rho t} [Z_k(t)]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\partial g(x_k(t), u_i)}{\partial x} \right]$$

в интеграле (10.27) неотрицательна на $[0, T_k]$. Следовательно, в силу (10.26), (10.27) при $T_k > T$ имеем

$$I_{k,T} \leq [Z_k(t)]^{-1} \psi_k(t).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\int_t^T e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds \leq [Z_*(t)]^{-1} \psi(t) \quad \text{для любых } T \geq t.$$

Поскольку в последнем неравенстве подынтегральная векторная функция неотрицательна на любом интервале $[0, T]$, $T > t$, то отсюда вытекает, что интеграл

$$I_*(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_t^T e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds$$

сходится абсолютно и выполняется неравенство

$$\psi(t) \geq Z_*(t) I_*(t) \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Таким образом, условие (iv) доказано. Теорема доказана.

Извлечем теперь из доказанной теоремы 10.1 ряд следствий.

Следствие 10.1. В силу формулы Коши (10.6) сопряженная переменная ψ (как решение сопряженной системы (10.19)) для любых $t, \tau \geq 0$ удовлетворяет равенству

$$\psi(t) = Z_*(t) \left([Z_*(\tau)]^{-1} \psi(\tau) - \int_{\tau}^t e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds \right).$$

Следовательно, в силу абсолютной сходимости интеграла (10.16) (см. условие (iv) в теореме 10.1) получаем

$$\psi(t) = Z_*(t) ([Z_*(\tau)]^{-1} \psi(\tau) - I_*(\tau)) + Z_*(t) I_*(t) \quad \text{для любых } t, \tau \geq 0. \quad (10.28)$$

Ниже в разд. 11 будет показано, что в случае, когда управляемая система (1.1) аффинна как по фазовому вектору x , так и по вектору управления u , и при выполнении некоторых дополнительных условий положительности неравенство (10.17) обращается в равенство

$$\psi(t) = Z_*(t) I_*(t) \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

В этом случае теорема 10.1 дает полный набор необходимых условий оптимальности для задачи (P).

Следствие 10.2. В силу условия стационарности (iii) в теореме 10.1 в начальный момент времени получаем

$$\langle f(x_0, u_0), \psi(0) \rangle + g(x_0, u_0) \leq H(x_0, 0, \psi(0)) = \rho \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt.$$

Следовательно, в силу неравенства (1.5) имеем

$$\langle f(x_0, u_0), \psi(0) \rangle \leq \rho \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt - g(x_0, u_0) \leq \rho \omega(0) - g(x_0, u_0).$$

Так как координаты вектора $f(x_0, u_0)$ положительны (см. условия теоремы 10.1) и координаты вектора $\psi(0)$ также положительны (условие (ii) теоремы 10.1), то последнее неравенство дает оценку сверху на начальное состояние $\psi(0)$ сопряженной переменной ψ .

Следствие 10.3. Пусть выполняются условия теоремы 10.1 и, кроме того, существует такой вектор $a \in \mathbb{R}^n$ со всеми положительными координатами ($a > 0$), что начиная с некоторого момента времени $\tau \geq 0$ выполняется неравенство

$$f(x_*(t), u_*(t)) \geq a \quad \text{при почти всех } t \geq \tau. \quad (10.29)$$

Тогда сопряженная переменная ψ , соответствующая оптимальной паре (x_*, u_*) в силу теоремы 10.1 (т.е. выполняются условия (i), (ii), (iii) и (iv)), удовлетворяет условию трансверсальности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0. \quad (10.30)$$

Доказательство. Докажем, что для переменной ψ выполняется условие (10.30). Действительно, из условий (10.15) и (10.29) получаем

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \langle a, \psi(t) \rangle \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \max_{u \in U} \langle f(x_*(t), u), \psi(t) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} H(x_*(t), t, \psi(t)) = 0;$$

последнее условие вместе с (10.14) влекут выполнение равенства (10.30). Следствие доказано.

Следствие 10.4. Пусть выполняются условия теоремы 10.1. Пусть, кроме того, существует такое $\theta > 0$, что начиная с некоторого момента времени $\tau \geq 0$ имеем

$$x_*(t) \geq 0 \quad \text{для любого } t \geq \tau \quad (10.31)$$

и

$$\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} - \theta I \geq 0 \quad \text{при почти всех } t \geq \tau, \quad (10.32)$$

где I — $(n \times n)$ -единичная диагональная матрица. Тогда сопряженная переменная ψ , соответствующая оптимальной паре (x_*, u_*) в силу теоремы 10.1 (т.е. выполняются условия (i), (ii), (iii) и (iv)), удовлетворяет условию трансверсальности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x_*(t), \psi(t) \rangle = 0. \quad (10.33)$$

Доказательство. В силу управляемой системы (1.1) и сопряженной системы в нормальной форме (10.19) на бесконечном полуинтервале времени $[\tau, \infty)$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x_*(t), \psi(t) \rangle &\stackrel{\text{п.в.}}{=} \langle f(x_*(t), u_*(t)), \psi(t) \rangle - \left\langle x_*(t), \left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right]^* \psi(t) \right\rangle - \\ &- e^{-\rho t} \left\langle x_*(t), \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right\rangle. \end{aligned}$$

В силу условия (10.31) и условия (A4) на полуинтервале $[\tau, \infty)$ имеем

$$e^{-\rho t} \left\langle x_*(t), \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right\rangle \stackrel{\text{п.в.}}{\geq} 0.$$

Следовательно, на $[\tau, \infty)$ выполняется неравенство

$$\frac{d}{dt} \langle x_*(t), \psi(t) \rangle \stackrel{\text{п.в.}}{\leq} - \left\langle x_*(t), \left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right]^* \psi(t) \right\rangle + \mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) - e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)).$$

Отсюда, принимая во внимание условие (1.4) из (A3) и условие (10.32), получаем

$$\frac{d}{dt} \langle x_*(t), \psi(t) \rangle \leq -\theta \langle x_*(t), \psi(t) \rangle + \mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) + \mu(t) \quad \text{при почти всех } t \geq \tau.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt} \langle x_*(t), \psi(t) \rangle \stackrel{\text{п.в.}}{\leq} -\theta \langle x_*(t), \psi(t) \rangle + \alpha(t),$$

где α — некоторая положительная на $[\tau, \infty)$ функция такая, что

$$\alpha(t) \geq H(x_*(t), t, \psi(t)) + \mu(t)$$

и

$$\alpha(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Очевидно, что в силу условий (10.15) и (1.4) такая функция α существует. Тогда в силу (10.31), (10.14) и формулы Коши для линейных систем получаем

$$0 \leq \langle x_*(t), \psi(t) \rangle \leq e^{-\theta(t-\tau)} \langle x_*(\tau), \psi(\tau) \rangle + e^{-\theta t} \int_{\tau}^t e^{\theta s} \alpha(s) ds. \quad (10.34)$$

Поскольку

$$e^{-\theta(t-\tau)} \langle x_*(\tau), \psi(\tau) \rangle \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

то для доказательства условия трансверсальности (10.33) достаточно доказать, что

$$e^{-\theta t} \int_{\tau}^t e^{\theta s} \alpha(s) ds \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Докажем этот факт. В силу положительности функции α достаточно рассмотреть ситуацию, когда

$$\int_{\tau}^t e^{\theta s} \alpha(s) ds \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

В этом случае в силу правила Лопиталья имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\theta t} \int_{\tau}^t e^{\theta s} \alpha(s) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dt} \int_{\tau}^t e^{\theta s} \alpha(s) ds}{\frac{d}{dt} e^{\theta t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha(t)}{\theta} = 0.$$

Таким образом, условие трансверсальности (10.33) доказано. Следствие доказано.

Заметим, что условие трансверсальности (10.33) часто используется в достаточных условиях оптимальности, основанных на принципе максимума Понтрягина (см. разд. 13).

11. БИАФФИННЫЙ СЛУЧАЙ

Здесь мы рассмотрим ситуацию, когда управляемая система (1.1) является аффинной как по фазовой переменной x , так и по управлению u . В этом случае при выполнении условий следствия 10.4 из теоремы 10.1 и при некоторых дополнительных условиях положительности неравенство (10.17) обращается в равенство, которое дает полное описание сопряженной переменной ψ .

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления ($P1$):

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t)u^i(t) + Bu(t), \quad u(t) \in U, \quad (11.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (11.2)$$

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max. \quad (11.3)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, A_i , $i = 0, \dots, m$, — постоянные действительные $(n \times n)$ -матрицы, B — постоянная действительная $(n \times m)$ -матрица, $x_0 \in G$, где G — заданное открытое множество, множество U — выпуклый компакт из \mathbb{R}^m , функция g непрерывна вместе со своим градиентом $\partial g/\partial x$ на $G \times U$. Пусть, кроме того, функция g вогнута по переменной u . Множество допустимых управлений в задаче ($P1$) состоит из всех измеримых векторных функций $u: [0, \infty) \mapsto U$. Как обычно, все траектории управляемой системы (11.1) с начальным условием (11.2) удовлетворяют включению $x(t) \in G$ для любого $t \geq 0$.

В силу сделанных предположений для задачи ($P1$) выполняются условия (A1) и (A2). Пусть выполняются также условия (A3) и (A4). Тогда в силу теоремы 2.1 в задаче ($P1$) существует оптимальная допустимая пара (x_*, u_*) . Выполнение условия (A4) в данном случае означает, что для любой допустимой траектории x и любого вектора $u \in U$ выполняется неравенство

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x(t), u) > 0 \quad \text{для любого } t \geq 0$$

и все внедиагональные элементы матрицы

$$A_0 + \sum_{i=1}^m A_i u^i$$

неотрицательны.

Пусть (x_*, u_*) — некоторая оптимальная допустимая пара в задаче ($P1$). Рассмотрим ситуацию, когда для пары (x_*, u_*) выполняются условия следствия 10.4 из теоремы 10.1. Последнее означает, что существует такой вектор $u_0 \in U$, для которого

$$A_0x_0 + \sum_{i=1}^m A_i x_0 u_0^i + Bu_0 > 0,$$

и, кроме того, для рассматриваемой оптимальной допустимой пары (x_*, u_*) справедливы условия (10.31), (10.32), т.е. существует такое $\theta > 0$, что начиная с некоторого момента времени $\tau \geq 0$ имеем

$$x_*(t) \geq 0 \quad \text{для любого } t \geq \tau \quad \text{и} \quad A_0 + \sum_{i=1}^m A_i u_*^i(t) - \theta I \geq 0 \quad \text{при почти всех } t \geq \tau.$$

В этом случае для пары (x_*, u_*) и соответствующей ей в силу теоремы 10.1 сопряженной переменной ψ выполняются соотношения (10.12)–(10.15), (10.17) вместе с условием трансверсальности (см. (10.33))

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x_*(t), \psi(t) \rangle = 0. \quad (11.4)$$

Предположим, наконец, что выполняются следующие условия положительности:

$$x_*(\tau) > 0 \quad \text{и} \quad Bu_*(t) \geq 0 \quad \text{при почти всех } t \geq \tau. \quad (11.5)$$

Сопряженная система для переменной ψ (см. (10.12)) имеет вид

$$\dot{\psi}(t) = -[A_0]^* \psi(t) - \sum_{i=1}^m [A_i]^* \psi(t) u_*^i(t) - e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x},$$

а соответствующая ей линейная однородная система следующая:

$$\dot{z}(t) = -[A_0]^* z(t) - \sum_{i=1}^m [A_i]^* z(t) u_*^i(t). \quad (11.6)$$

Пусть Z_* — нормализованная фундаментальная матрица системы (11.6).

Далее линеаризованная система дифференциальных уравнений для управляемой системы (11.1) (при заданном управлении u_*) имеет вид

$$\dot{y}(t) = A_0 y(t) + \sum_{i=1}^m A_i y(t) u_*^i(t). \quad (11.7)$$

Пусть Y_* — нормализованная фундаментальная матрица системы (11.7).

Напомним, что в силу условия (10.5) справедливо равенство

$$[Z_*(t)]^{-1} = [Y_*(t)]^* \quad \text{для любого } t \in [0, \infty). \quad (11.8)$$

В силу условия (10.28) (см. следствие 10.1 из теоремы 10.1) для сопряженной переменной ψ имеем

$$\psi(t) = Z_*(t) ([Z_*(\tau)]^{-1} \psi(\tau) - I_*(\tau)) + Z_*(t) I_*(t) \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (11.9)$$

Здесь для любого $t \geq 0$ интеграл

$$I_*(t) = \int_t^\infty e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds$$

сходится абсолютно и, кроме того, справедливо неравенство (см. (10.17))

$$\psi(t) - Z_*(t) I_*(t) \geq 0. \quad (11.10)$$

Далее для оптимальной траектории x_* в силу формулы Коши для линейных систем дифференциальных уравнений (см. (3.21)) имеем

$$x_*(t) = Y_*(t) \left([Y_*(\tau)]^{-1} x_*(\tau) + \int_\tau^t [Y_*(s)]^{-1} B u_*(s) ds \right) \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (11.11)$$

Следовательно, в силу (11.8), (11.9) и (11.11) имеем

$$\begin{aligned} \langle \psi(t), x_*(t) \rangle &= \langle [Z_*(\tau)]^{-1} \psi(\tau) - I_*(\tau), [Y_*(\tau)]^{-1} x_*(\tau) \rangle + \langle I_*(t), [Y_*(\tau)]^{-1} x_*(\tau) \rangle + \\ &+ \left\langle \psi(t), Y_*(t) \int_{\tau}^t [Y_*(s)]^{-1} B u_*(s) ds \right\rangle \quad \text{для любого } t \geq \tau. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \langle \psi(t), x_*(t) \rangle &= \langle \psi(\tau) - Z_*(\tau) I_*(\tau), x_*(\tau) \rangle + \langle I_*(t), [Y_*(\tau)]^{-1} x_*(\tau) \rangle + \\ &+ \left\langle \psi(t), Y_*(t) \int_{\tau}^t [Y_*(s)]^{-1} B u_*(s) ds \right\rangle \quad \text{для любого } t \geq 0. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Векторная функция

$$y(t) = Y_*(t) \int_{\tau}^t [Y_*(s)]^{-1} B u_*(s) ds \quad \text{для любого } t \geq \tau$$

является траекторией на $[\tau, \infty)$ управляемой системы (11.1), соответствующей управлению u_* , с начальным условием

$$y(\tau) = 0.$$

В силу сделанных предположений все координаты векторной функции y неотрицательны для всех значений $t \geq \tau$. Из теоремы 10.1 вытекает, что все координаты сопряженной переменной ψ положительны для всех $t \geq 0$. Таким образом, последнее слагаемое в равенстве (11.12) неотрицательно для любого $t \geq \tau$. Следовательно, из равенства (11.12) вытекает неравенство

$$\langle \psi(\tau) - Z_*(\tau) I_*(\tau), x_*(\tau) \rangle + \langle I_*(t), [Y_*(\tau)]^{-1} x_*(\tau) \rangle \leq \langle \psi(t), x_*(t) \rangle \quad \text{для любого } t \geq \tau.$$

В левой части последнего неравенства второе слагаемое (поскольку интеграл $I_*(t)$ сходится абсолютно) стремится к нулю при t , стремящемся к бесконечности. Следовательно, переходя в последнем неравенстве к пределу при $t \rightarrow \infty$, в силу (11.4), (11.5) и (11.10) получаем

$$\langle \psi(\tau) - Z_*(\tau) I_*(\tau), x_*(\tau) \rangle = 0.$$

Так как $x_*(\tau)$ — вектор с положительными координатами (см. (11.5)), то в силу условий (11.10) из последнего равенства вытекает

$$\psi(\tau) - Z_*(\tau) I_*(\tau) = 0.$$

Отсюда при помощи равенства (11.9) окончательно получаем

$$\psi(t) = Z_*(t) I_*(t) \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 11.1. Пусть (x_*, u_*) — оптимальная допустимая пара в задаче (P1), для которой выполняются условия следствия 10.4 из теоремы 10.1 и условия положительности (11.5). Тогда для сопряженной переменной ψ , соответствующей в силу теоремы 10.1 оптимальной паре (x_*, u_*) , неравенство (10.17) обращается в равенство

$$\psi(t) = Z_*(t) I_*(t) \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (11.13)$$

Здесь Z_* — нормализованная фундаментальная матрица системы (11.6), а интеграл

$$I_*(t) = \int_t^\infty e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds$$

сходится абсолютно для любого $t \geq 0$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в задаче (P1)

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : x^i > 0, i = 1, \dots, n\},$$

$\rho > 0$, матрица B в управляемой системе (11.1) нулевая, а функция g в функционале (11.3) имеет вид

$$g(x, u) = \sum_{i=1}^n \mu_i \ln x^i + \phi(u). \quad (11.14)$$

Здесь $\mu_i \in \mathbb{R}^1$, $i = 1, \dots, n$, — некоторые постоянные, $\phi: U \mapsto \mathbb{R}^1$ — вогнутая непрерывная функция (функции мгновенной полезности g такого вида часто встречаются в экономических приложениях).

Очевидно, в этом случае для любой допустимой пары (x_*, u_*) условия положительности (11.5) выполняются автоматически.

Пусть для оптимальной допустимой пары (x_*, u_*) в задаче (P1) выполняются условия следствия 10.4 из теоремы 10.1.

Тогда из теоремы 11.1 вытекает, что в этом случае для оптимальной пары (x_*, u_*) и соответствующей ей сопряженной переменной ψ справедливо равенство (см. условие (11.13))

$$\psi(t) = Z_*(t) \int_t^\infty e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} \left[\frac{\mu}{x_*(s)} \right] ds \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Здесь мы используем следующее обозначение:

$$\left[\frac{\mu}{x_*(s)} \right] = \left(\frac{\mu_1}{x_*^1(s)}, \dots, \frac{\mu_n}{x_*^n(s)} \right) \quad \text{для любого } s \geq 0.$$

Следовательно, при п.в. $t \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \psi(t), x_*(t) \rangle &= \langle [\dot{Z}_*(t)] I_*(t), x_*(t) \rangle + \langle Z_*(t) [\dot{I}_*(t)], x_*(t) \rangle + \langle Z_*(t) I_*(t), \dot{x}_*(t) \rangle = \\ &= - \left\langle \left[A_0 + \sum_{i=1}^m A_i u_*^i(t) \right]^* Z_*(t) I_*(t), x_*(t) \right\rangle - e^{-\rho t} \sum_{i=1}^n \mu_i + \\ &\quad + \left\langle Z_*(t) I_*(t), \left[A_0 + \sum_{i=1}^m A_i u_*^i(t) \right] x_*(t) \right\rangle = \\ &= -e^{-\rho t} \sum_{i=1}^n \mu_i. \end{aligned}$$

В терминах текущей сопряженной переменной $p(t) = e^{\rho t} \psi(t)$, $t \geq 0$ (см. разд. 3) последнее равенство записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \langle p(t), x_*(t) \rangle = \rho \langle p(t), x_*(t) \rangle - \sum_{i=1}^n \mu_i \quad \text{при почти всех } t \geq 0. \quad (11.15)$$

Так как в силу (11.8) справедливы равенства

$$\begin{aligned} \langle p(0), x_0 \rangle &= \int_0^\infty e^{-\rho s} \left\langle [Z_*(s)]^{-1} \left[\frac{\mu}{x_*(s)} \right], x_0 \right\rangle ds = \int_0^\infty e^{-\rho s} \left\langle \left[\frac{\mu}{x_*(s)} \right], x_*(s) \right\rangle ds = \\ &= \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n \mu_i, \end{aligned} \quad (11.16)$$

то, решая дифференциальное уравнение (11.15) с начальным условием (11.16), получаем

$$\langle p(t), x_*(t) \rangle = e^{\rho t} \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n \mu_i - e^{\rho t} \int_0^t e^{-\rho s} ds \sum_{i=1}^n \mu_i = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n \mu_i \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Таким образом, окончательно заключаем, что в случае, когда все допустимые траектории положительны, функция g в функционале (11.3) имеет вид (11.14), $\rho > 0$, матрица B в управляемой системе (11.1) нулевая и для оптимальной в задаче (P1) пары (x_*, u_*) выполняются условия следствия 10.4 из теоремы 10.1, для оптимальной траектории x_* и соответствующей ей в силу принципа максимума (теорема 10.1) текущей сопряженной переменной p справедливо равенство

$$\langle p(t), x_*(t) \rangle = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n \mu_i \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

12. СЛУЧАЙ ДОМИНИРОВАНИЯ ДИСКОНТИРУЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ

В данном разделе рассматривается ситуация относительно большого параметра дисконтирования $\rho \geq 0$. В этом случае дисконтирующий множитель $e^{-\rho t}$ в функционале (1.3) подавляет рост градиента $\partial g / \partial x$ функции текущей полезности g , а также рост допустимых траекторий x управляемой системы (1.1) и траекторий соответствующей линеаризованной системы дифференциальных уравнений, что приводит к выполнению варианта принципа максимума Понтрягина в нормальной форме, содержащего полное описание сопряженной переменной ψ .

Для линейных управляемых систем случай доминирования дисконтирующего множителя рассматривался ранее в работе [35]. При этом глобальное поведение сопряженной переменной характеризовалось в терминах сходимости некоторого интегрального функционала. В данном разделе рассматривается общая нелинейная задача (P), а описание сопряженной переменной, так же как и в биаффинном случае (см. разд. 11), дается при помощи формулы (11.13). В случае линейных управляемых систем такая характеристика сопряженной переменной является более точной, чем предложенная в [35] (см. разд. 16).

По аналогии с [35] введем следующее условие, характеризующее рост градиента функции мгновенной полезности g .

(A5) Существуют такие постоянные $\kappa \geq 0$ и $r \geq 0$, что

$$\left\| \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right\| \leq \kappa(1 + \|x\|^r) \quad \text{для любых } x \in G \text{ и } u \in U.$$

Как и в предыдущих разделах, для заданной допустимой пары (x, u) управляемой системы (1.1) будем обозначать через $Y_{(x,u)}$ нормализованную фундаментальную матрицу линейной системы дифференциальных уравнений (линеаризованной системы)

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} y(t), \quad (12.1)$$

а через $Z_{(x,u)}$ нормализованную фундаментальную матрицу соответствующей сопряженной системы

$$\dot{z}(t) = - \left[\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} \right]^* z(t).$$

Здесь мы подразумеваем, что матричные функции $Y_{(x,u)}$ и $Z_{(x,u)}$ рассматриваются на всем бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$.

Напомним, что между матричными функциями $Y_{(x,u)}$ и $Z_{(x,u)}$ существует взаимосвязь:

$$[Z_{(x,u)}(t)]^{-1} = [Y_{(x,u)}(t)]^* \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (12.2)$$

Следующее условие характеризует рост траекторий систем (1.1) и (12.1).

(А6) Существуют такие числа $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$ и $C_3 \geq 0$, что для любой допустимой пары (x, u) системы (1.1) выполняются следующие условия:

$$\|x(t)\| \leq C_1 + C_2 e^{\lambda t} \quad \text{для любого } t \geq 0$$

и

$$\|Y_{(x,u)}(t)\| \leq C_3 e^{\lambda t} \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

В случае выпуклого множества G из условия (А5) и первого неравенства в (А6) следует существование таких постоянных $C_4 \geq 0$ и $C_5 \geq 0$, что для любой допустимой пары (x, u) управляемой системы (1.1) выполняется неравенство

$$|g(x(t), u(t))| \leq C_4 + C_5 \|x(t)\|^{r+1} \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (12.3)$$

Действительно, в этом случае для любого $t \geq 0$ имеем

$$g(x(t), u(t)) - g(x_0, u(t)) = \int_0^1 \left\langle \frac{\partial}{\partial x} g(x_0 + s(x(t) - x_0), u(t)), x(t) - x_0 \right\rangle ds.$$

Отсюда при выполнении условия (А5) и первого неравенства в (А6) в силу компактности множества U вытекает неравенство (12.3).

Далее из условия (12.3) и первого неравенства в (А6) следует выполнение неравенства

$$e^{-\rho t} |g(x(t), u(t))| \leq C_6 e^{-\rho t} + C_7 e^{-(\rho - (r+1)\lambda)t} \quad \text{для любого } t \geq 0$$

вдоль любой допустимой пары (x, u) системы (1.1) (с постоянными $C_6 \geq 0$ и $C_7 \geq 0$, не зависящими от пары (x, u)).

Таким образом, если множество G выпукло и $\rho > 0$, то из условий (А5), (А6) и неравенства $\rho > (r+1)\lambda$ следует выполнение условия (А3).

Следующее условие будем называть *условием доминирования дисконтирующего множителя*.

(А7) Выполняется неравенство

$$\rho > (r+1)\lambda. \quad (12.4)$$

Содержательно выполнение условия (А7) означает, что параметр дисконтирования ρ в функционале полезности (1.3) доминирует над параметрами роста r и λ (см. условия (А5), (А6)).

Заметим, что сформулированное условие доминирования дисконтирующего множителя (A7) является обобщением аналогичного условия из работы [35] на случай общей нелинейной задачи оптимального управления (P).

Доказательство следующего варианта принципа максимума Понтрягина для задачи (P) опирается на полученную выше теорему 9.3.

Теорема 12.1. Пусть выполняются условия (A1)–(A3), (A5), (A6) и условие доминирования дисконтирующего множителя (A7). Пусть далее (x_*, u_*) — оптимальная допустимая пара в задаче (P). Тогда существует такая сопряженная переменная ψ (соответствующая паре (x_*, u_*)), что выполняются следующие условия:

- (i) оптимальная допустимая пара (x_*, u_*) вместе с сопряженной переменной ψ удовлетворяют на бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$ основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме (см. (3.4), (3.5)):

$$\dot{\psi}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} - \left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right]^* \psi(t) - e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x}, \quad (12.5)$$

$$\mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H(x_*(t), t, \psi(t)); \quad (12.6)$$

- (ii) оптимальная допустимая пара (x_*, u_*) вместе с сопряженной переменной ψ удовлетворяют условию стационарности в нормальной форме (см. (9.38))

$$H(x_*(t), t, \psi(t)) = \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds \quad \text{для любого } t \geq 0; \quad (12.7)$$

- (iii) для любого $t \geq 0$ интеграл

$$I_*(t) = \int_t^\infty e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds, \quad (12.8)$$

где $Z_* = Z_{(x_*, u_*)}$, сходится абсолютно и выполняется следующее равенство:

$$\psi(t) = Z_*(t)I_*(t). \quad (12.9)$$

Доказательство. Пусть $\{(\tilde{P}_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, — последовательность аппроксимирующих задач оптимального управления, соответствующая управлению u_* (см. разд. 9), и пусть (x_k, v_k) — оптимальная допустимая пара в задаче (\tilde{P}_k) (на интервале времени $[0, T_k]$). В соответствии с классическим принципом максимума Понтрягина для любого $k = 1, 2, \dots$ существует такая сопряженная переменная ψ_k (соответствующая паре (x_k, v_k)), что пара (x_k, v_k) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме (для задачи (\tilde{P}_k)) вместе с сопряженной переменной ψ_k :

$$\dot{\psi}_k(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} - \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\partial f(x_k(t), u_i)}{\partial x} \right]^* \psi_k(t) - e^{-\rho t} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\partial g(x_k(t), u_i)}{\partial x} \right], \quad (12.10)$$

$$\mathcal{H}_k(x_k(t), t, v_k(t), \psi_k(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H_k(x_k(t), t, \psi_k(t)). \quad (12.11)$$

При этом выполняется условие трансверсальности (см. (9.21))

$$\psi_k(T_k) = 0. \quad (12.12)$$

Далее будем считать, что для любого $k = 1, 2, \dots$ сопряженная переменная ψ_k продолжена на весь бесконечный полуинтервал $[0, \infty)$ постоянной по непрерывности, т.е. $\psi_k(t) = 0$ для любого $t \geq T_k$.

Обозначим через Z_k и Y_k , $k = 1, 2, \dots$, нормализованные фундаментальные матрицы однородных систем линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}(t) = - \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\partial f(x_k(t), u_i)}{\partial x} \right]^* z(t)$$

и

$$\dot{y}(t) = \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\partial f(x_k(t), u_i)}{\partial x} \right] y(t)$$

на интервале $[0, T_k]$. В силу (A6) имеем

$$\|Y_k(t)\| \leq C_3 e^{\lambda t} \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Напомним, что функция Гамильтона–Понтрягина \mathcal{H}_k и гамильтониан H_k для задачи (\tilde{P}_k) , $k = 1, 2, \dots$, определяются равенствами (см. разд. 9)

$$\mathcal{H}_k(x, t, v, \psi) = \sum_{i=1}^{N_k} v^i \langle f(x, u_i), \psi \rangle + e^{-\rho t} \sum_{i=1}^{N_k} v^i \left[g(x, u_i) - e^{-t} \frac{\|u_i - z_k(t)\|^2}{1 + \sigma_k} \right],$$

$$H_k(x, t, \psi) = \sup_{v \in V_k} \mathcal{H}_k(x, t, v, \psi).$$

Кроме того, для любого $k = 1, 2, \dots$ (см. (9.25)) на интервале $[0, T_k]$ имеем

$$\frac{d}{dt} H_k(x_k(t), t, \psi_k(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_k(x_k(t), t, v_k(t), \psi_k(t)). \quad (12.13)$$

Покажем, что последовательность $\{\psi_k(0)\}$, $k = 1, 2, \dots$, ограничена.

Используя стандартное представление решения ψ_k сопряженной системы (12.10) с краевым условием (12.12) посредством формулы Коши через матрицу $Z_k = Z_{(x_k, v_k)}$, получаем

$$\psi_k(0) = \int_0^{T_k} e^{-\rho s} [Z_k(s)]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \frac{\partial g(x_k(t), u_i)}{\partial x} \right] ds.$$

Следовательно, в силу (12.2) имеем

$$\|\psi_k(0)\| \leq \int_0^{T_k} e^{-\rho s} \|Y_k(s)\| \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(t) \left\| \frac{\partial g(x_k(t), u_i)}{\partial x} \right\| \right] ds$$

и в силу условий (A5) и (A6) получаем

$$\|\psi_k(0)\| \leq \int_0^{T_k} (C_8 e^{-(\rho-\lambda)s} + C_9 e^{-(\rho-(r+1)\lambda)s}) ds,$$

где $C_8 \geq 0$ и $C_9 \geq 0$ не зависят от $k = 1, 2, \dots$. Отсюда и из условия доминирования (A7) вытекает, что последовательность $\{\psi_k(0)\}$, $k = 1, 2, \dots$, ограничена.

Таким образом, последовательность $\{(x_k, v_k, \psi_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяет условиям теоремы 9.3. В силу теоремы 9.3 существует такая подпоследовательность последовательности $\{(x_k, v_k, \psi_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$ (далее будем обозначать ее снова через $\{(x_k, v_k, \psi_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$), что для любого $T > 0$ выполняются условия (9.35), (9.36) для допустимых пар (x_k, v_k) , $k = 1, 2, \dots$, в задачах (\tilde{P}_k) и условие (9.37) для сопряженных переменных ψ_k , $k = 1, 2, \dots$. При этом в последнем условии предельная функция ψ является сопряженной переменной, соответствующей паре (x_*, u_*) в задаче (P) . Таким образом, оптимальная пара (x_*, u_*) удовлетворяет основным соотношениям (3.4), (3.5) принципа максимума Понтрягина в нормальной форме для задачи (P) вместе с сопряженной переменной ψ . Наконец, пара (x_*, u_*) и переменная ψ удовлетворяют условию стационарности (12.7).

Таким образом, утверждения (i) и (ii) доказаны.

Докажем утверждение (iii). Рассмотрим, интеграл $I_*(t)$ (см. (12.8)) при произвольном $t \geq 0$. Прежде всего заметим, что условия (9.35) и (9.36) влекут сходимость

$$Z_k(s) \rightarrow Z_*(s) \quad \text{для любого } s \geq 0. \quad (12.14)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_*(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_t^T e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_t^T e^{-\rho s} [Z_k(s)]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) \frac{\partial g(x_k(s), u_i)}{\partial x} \right] ds, \end{aligned}$$

если все фигурирующие здесь пределы существуют. Покажем, что это действительно так. Из условий (12.2), (A5) и (A6) следует, что для всех $s \geq 0$ выполняется неравенство

$$e^{-\rho s} \left\| [Z_k(s)]^{-1} \left\| \sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) \frac{\partial g(x_k(s), u_i)}{\partial x} \right\| \right\| \leq C_{10} e^{-(\rho-\lambda)s} + C_{11} e^{-(\rho-(r+1)\lambda)s}$$

с некоторыми (не зависящими от $k = 1, 2, \dots$) постоянными $C_{10} \geq 0$ и $C_{11} \geq 0$. Следовательно, в силу условия доминирования (A7) и теоремы Лебега имеем

$$\int_t^T e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_t^T e^{-\rho s} [Z_k(s)]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) \frac{\partial g(x_k(s), u_i)}{\partial x} \right] ds.$$

Таким образом, получаем, что интеграл

$$I_*(t) = \int_t^\infty e^{-\rho s} [Z_*(s)]^{-1} \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds$$

сходится абсолютно.

Докажем теперь равенство (12.9). Для этого проинтегрируем сопряженное уравнение для ψ_k (см. (12.10)) на интервале $[t, T_k]$ при достаточно больших k (т.е. при $T_k \geq t$), принимая во внимание условие трансверсальности (12.12). Получим

$$\psi_k(t) = Z_k(t) \int_t^{T_k} e^{-\rho s} Z_k^{-1}(s) \left[\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) \frac{\partial g(x_k(s), u_i)}{\partial x} \right] ds. \quad (12.15)$$

В силу условий (9.35) и (9.36) (выполняющихся для любого фиксированного $T > 0$) имеем

$$x_k(s) \rightarrow x_*(s) \quad \text{для любого } s \geq 0$$

и

$$\sum_{i=1}^{N_k} v_k^i(s) \frac{\partial g(x_k(s), u_i)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} \quad \text{при почти всех } s \geq 0.$$

Данные сходимости, а также условия (12.14), (9.37) и абсолютная сходимость интеграла $I_*(t)$ влекут выполнение требуемого равенства (12.9) как предела равенства (12.15) при $k \rightarrow \infty$. Утверждение (iii) доказано. Теорема доказана.

Напомним ряд потребующихся в дальнейшем понятий и результатов теории устойчивости (более подробное изложение этих результатов, а также их доказательства см. в [14, 47]).

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \quad (12.16)$$

Здесь $t \in [0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$ и все компоненты действительной $(n \times n)$ -матрицы A — измеримые и ограниченные функции.

Пусть x — некоторое ненулевое решение дифференциальной системы (12.16). Тогда число

$$\lambda = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|$$

называется *характеристическим показателем Ляпунова* или для краткости *характеристическим показателем* решения x . Заметим, что характеристический показатель λ отличается от введенного А.М. Ляпуновым характеристического числа тем, что имеет противоположный знак (см. [66]).

Известно, что характеристический показатель λ любого ненулевого решения x системы (12.16) конечен. Множество характеристических показателей, соответствующих всем ненулевым решениям системы (12.16), называется *спектром* системы (12.16). При этом спектр системы (12.16) всегда состоит из не более чем n различных чисел.

Решения линейной системы дифференциальных уравнений (12.16) образуют конечномерное линейное пространство размерности n . Любой базис этого пространства, т.е. любые n линейно независимых решений x_1, \dots, x_n , называется *фундаментальной системой* решений системы (12.16). Фундаментальная система решений x_1, \dots, x_n называется *нормальной*, если сумма характеристических показателей этих решений x_1, \dots, x_n минимальная среди всех фундаментальных систем решений дифференциальной системы (12.16).

Оказывается, нормальная фундаментальная система решений системы (12.16) всегда существует. Если x_1, \dots, x_n является такой фундаментальной системой решений, то характеристические показатели решений x_1, \dots, x_n покрывают весь спектр системы (12.16). Это означает, что для любого элемента λ из спектра системы (12.16) обязательно найдется какое-то ее решение из набора x_1, \dots, x_n , имеющее это число в качестве своего характеристического показателя. При этом различные решения x_j и x_k из фундаментальной системы x_1, \dots, x_n могут иметь в качестве своего характеристического показателя одно и то же число.

Пусть

$$\sigma = \sum_{s=1}^l n_s \lambda_s$$

— сумма всех чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ из спектра дифференциальной системы (12.16), взятых с учетом их кратностей n_s , $s = 1, \dots, l$.

Линейная система дифференциальных уравнений (12.16) называется *регулярной*, если

$$\sigma = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{tr} A(s) ds,$$

где $\operatorname{tr} A(s)$ — след матрицы $A(s)$ (т.е. сумма всех ее элементов, лежащих на главной диагонали).

Пусть X — некоторая фундаментальная матрица линейной системы дифференциальных уравнений (12.16), т.е. столбцы матрицы X образуют ее фундаментальную систему решений. Тогда *матрицей Коши* системы (12.16) называется $(n \times n)$ -матричная функция $(s, t) \mapsto K(s, t)$, $s \geq 0, t \geq 0$, определяемая равенством

$$K(s, t) = X(s)[X(t)]^{-1} \quad \text{для любых } s \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Матрица Коши K системы (12.16) определяется однозначно; она не зависит от того, какая фундаментальная матрица X выбрана для ее определения.

Если дифференциальная система (12.16) регулярная, то для любого $\varepsilon > 0$ ее матрица Коши K удовлетворяет следующему неравенству:

$$\|K(s, t)\| \leq \kappa_1 e^{\bar{\lambda}(s-t)+\varepsilon s} \quad \text{для любого } t \geq 0 \quad \text{и любого } s \geq t, \quad (12.17)$$

где $\bar{\lambda}$ — максимальный элемент спектра системы (12.16) и постоянная $\kappa_1 \geq 0$ зависит только от ε . Доказательство этого и других приведенных выше результатов см. в [14, 47].

Извлечем теперь два следствия из доказанной выше теоремы 12.1.

Следствие 12.1. Пусть выполняются условия теоремы 12.1 и линейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} y(t) \quad (12.18)$$

регулярна. Пусть, кроме того,

$$\lambda \geq \bar{\lambda},$$

где $\bar{\lambda}$ — максимальный элемент спектра системы (12.18). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ сопряженная переменная ψ , фигурирующая в утверждении теоремы 12.1, удовлетворяет следующему неравенству:

$$\|\psi(t)\| \leq \kappa_2 (e^{-\rho t + \varepsilon t} + e^{-(\rho - r\lambda)t + \varepsilon t}) \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (12.19)$$

Здесь постоянная $\kappa_2 \geq 0$ зависит только от ε .

Доказательство. В силу условий (12.9) и (12.2) для любого $t \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_t^\infty e^{-\rho s} [[Y_*(t)]^*]^{-1} [Y_*(s)]^* \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds = \\ &= \int_t^\infty e^{-\rho s} [Y_*(s)[Y_*(t)]^{-1}]^* \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds = \int_t^\infty e^{-\rho s} [K(s, t)]^* \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} ds, \end{aligned}$$

где $Y_* = Y_{(x_*, u_*)}$ — нормализованная фундаментальная матрица линейной системы (12.18) и $K(s, t) = Y_*(s)[Y_*(t)]^{-1}$ — матрица Коши системы (12.18).

Следовательно, в силу условий (A5), (A6) и оценки (12.17) для любого $0 < \varepsilon < \min\{\rho - \lambda, \rho - (r + 1)\lambda\}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|\psi(t)\| &\leq \int_t^\infty e^{-\rho s} \| [K(s, t)]^* \| \left\| \frac{\partial g(x_*(s), u_*(s))}{\partial x} \right\| ds \leq C_{12} \int_t^\infty e^{-\rho s} e^{\bar{\lambda}(s-t)} e^{\varepsilon s} (1 + e^{r\lambda s}) ds \leq \\ &\leq \kappa_2 (e^{-\rho t + \varepsilon t} + e^{-(\rho - r\lambda)t + \varepsilon t}). \end{aligned}$$

Здесь $C_{12} \geq 0$ и $\kappa_2 \geq 0$ — некоторые зависящие только от ε постоянные. Следовательно, оценка (12.19) выполняется для любого $\varepsilon > 0$. Следствие доказано.

Нетрудно видеть, что в случае, когда $\rho > 0$, следствие 12.1 влечет одновременное выполнение обоих условий трансверсальности (см. (3.17) и (3.18))

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \langle x_*(t), \psi(t) \rangle = 0$$

вместе с соотношениями принципа максимума Понтрягина в нормальной форме (см. (3.4) и (3.5)).

В завершение данного раздела рассмотрим ситуацию, когда управляемая система (1.1) линейная и стационарная. В этом случае рассматриваемая задача оптимального управления формулируется следующим образом.

Задача (P2):

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + u(t), \quad u(t) \in U, \quad (12.20)$$

$$x(0) = x_0,$$

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max.$$

Здесь F — постоянная действительная $(n \times n)$ -матрица. Остальные данные в задаче (P2) те же самые, что и в исходной задаче (P).

Пусть λ_F обозначает максимальную действительную часть собственных значений матрицы F . Тогда число λ_F является максимальным элементом спектра линейной однородной системы

$$\dot{x}(t) = Fx(t),$$

соответствующей управляемой системе (12.20). Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\|e^{Ft}\| \leq C_{13} e^{(\lambda_F + \varepsilon)t} \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Здесь e^{Ft} — экспоненциал матрицы F и $C_{13} \geq 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от ε (доказательство этого факта см., например, в [14]).

Далее из стандартного представления решения линейной системы (12.20) при помощи экспоненциала e^{Ft} (см., например, [59]) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любой допустимой траектории x управляемой системы (12.20) выполняется неравенство

$$\|x(t)\| \leq C_{14} + C_{15} e^{(\lambda_F + \varepsilon)t} \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Здесь постоянные $C_{14} \geq 0$ и $C_{15} \geq 0$ зависят только от ε . Таким образом, для любого $\lambda > \lambda_F$ условие (A6), очевидно, выполняется.

Последнее наблюдение и тот факт, что любая однородная линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами регулярная (см. [14]), влекут справедливость следующего варианта следствия 12.1 для задачи (P2).

Следствие 12.2. Пусть выполняются условия (A2), (A3), (A5) и, кроме того, $\rho > (r+1)\lambda_F$. Пусть (x_*, u_*) — оптимальная допустимая пара в задаче (P2). Тогда выполнены все условия теоремы 12.1 и пара (x_*, u_*) удовлетворяет условиям теоремы 12.1 с некоторой сопряженной переменной ψ . При этом для любого $\varepsilon > 0$ сопряженная переменная ψ удовлетворяет неравенству

$$\|\psi(t)\| \leq \kappa_3 (e^{-\rho t + \varepsilon t} + e^{-(\rho - r\lambda_F)t + \varepsilon t}) \quad \text{для любого } t \geq 0, \quad (12.21)$$

где постоянная $\kappa_3 \geq 0$ зависит только от ε .

Заметим, что в случае, когда $\rho > 0$, следствие 12.2 (так же как и следствие 12.1) влечет одновременное выполнение обоих условий трансверсальности (см. (3.17), (3.18))

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \langle x_*(t), \psi(t) \rangle = 0$$

вместе с соотношениями принципа максимума Понтрягина в нормальной форме (см. (3.4) и (3.5)).

13. ПРИНЦИП МАКСИМУМА И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В этом разделе приводится вариант теоремы Эрроу (см. [24, 49, 76]) о достаточных условиях оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального управления (P). Результаты такого вида (иногда они формулируются при несколько различающихся предположениях относительно траекторий системы и поведения сопряженной переменной на бесконечности) часто используются при обосновании оптимальности экстремалей принципа максимума Понтрягина для задач оптимального экономического роста. Идейно эти результаты восходят к первоначальной работе Мангасаряна [69].

Приведенное ниже доказательство варианта теоремы Эрроу для задачи (P) следует в основном работе [76].

Теорема 13.1. Предположим, что допустимая пара (x_*, u_*) удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме (3.4), (3.5) для задачи (P) вместе с сопряженной переменной ψ . Пусть, кроме того, множество G выпукло и для любого $t \geq 0$ гамильтониан в нормальной форме $H(x, t, \psi(t))$ задачи (P) (см. разд. 3) является вогнутой функцией переменной x на G . Пусть, наконец, для любой допустимой траектории x выполняется следующее краевое условие на бесконечности:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle \psi(t), x(t) - x_*(t) \rangle \geq 0. \quad (13.1)$$

Тогда допустимая пара (x_*, u_*) оптимальна в задаче (P).

Доказательство. Пусть в некоторый момент времени $t \geq 0$ выполняется условие максимума в нормальной форме (см. (3.5))

$$\mathcal{H}(x_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) = H(x_*(t), t, \psi(t)). \quad (13.2)$$

При данном значении t рассмотрим гамильтониан в нормальной форме $H(x, t, \psi(t))$ задачи (P) как функцию переменной x на выпуклом открытом множестве G .

Напомним, что согласно определению, данному в разд. 3, для любых $x \in G$, $u \in U$ и $\psi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x, t, u, \psi) &= \mathcal{H}(x, t, u, \psi, 1) = \langle f(x, u), \psi \rangle + e^{-\rho t} g(x, u), \\ H(x, t, \psi) &= H(x, t, \psi, 1) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(x, t, u, \psi).\end{aligned}$$

Точка

$$z_* = (x_*(t), H(x_*(t), t, \psi(t))) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

принадлежит границе множества

$$Z = \{(x, x^0) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in G, x^0 \leq H(x, t, \psi(t))\},$$

причем в силу вогнутости функции $H(x, t, \psi(t))$ как функции переменной x на множестве G данное множество Z выпуклое. Следовательно, в силу теоремы об отделимости (см., например, [17]) существует такой ненулевой вектор $(a(t), a^0(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$, что

$$\langle a(t), x \rangle + a^0(t)x^0 \leq \langle a(t), x_*(t) \rangle + a^0(t)H(x_*(t), t, \psi(t)) \quad \text{для любого } (x, x^0) \in Z. \quad (13.3)$$

Множество G открытое, а $x_*(t)$ — его внутренняя точка. Поэтому в силу непрерывности функции $H(x, t, \psi(t))$ на G найдется такое достаточно малое число $\delta > 0$, что для любого $\|\xi\| \leq \delta$ имеем

$$x_*(t) + \xi \in G \quad \text{и} \quad z_* + (\xi, -1) = (x_*(t) + \xi, H(x_*(t), t, \psi(t)) - 1) \in Z.$$

Следовательно, в силу условия (13.3) выполняется неравенство

$$\langle a(t), \xi \rangle - a^0(t) \leq 0 \quad \text{для любого } \|\xi\| \leq \delta.$$

Из последнего условия вытекает, что $a^0(t) > 0$. Следовательно, пронормировав, если это необходимо, вектор $(a(t), a^0(t))$, не ограничивая общности, можно считать, что $a^0(t) = 1$. Тогда в силу условия (13.3) получаем

$$\langle a(t), x - x_*(t) \rangle \leq H(x_*(t), t, \psi(t)) - H(x, t, \psi(t)) \quad \text{для любого } x \in G. \quad (13.4)$$

Поскольку в рассматриваемый момент времени t выполняется условие максимума (13.2), то в силу (13.4) для любого $x \in G$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned}\langle f(x, u_*(t)) - f(x_*(t), u_*(t)), \psi(t) \rangle + e^{-\rho t} g(x, u_*(t)) - e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) &\leq \\ &\leq H(x, t, \psi(t)) - H(x_*(t), t, \psi(t)) \leq -\langle a(t), x - x_*(t) \rangle.\end{aligned}$$

Таким образом, для непрерывно дифференцируемой на открытом множестве G функции

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \langle f(x, u_*(t)) - f(x_*(t), u_*(t)), \psi(t) \rangle + \\ &+ e^{-\rho t} g(x, u_*(t)) - e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) + \langle a(t), x - x_*(t) \rangle\end{aligned}$$

имеем

$$\phi(x) \leq 0 \quad \text{для любого } x \in G \quad \text{и} \quad \phi(x_*(t)) = 0.$$

Следовательно, функция ϕ достигает своего абсолютного максимума в точке $x_*(t)$. Значит, справедливо равенство

$$\left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right]^* \psi(t) + e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} + a(t) = 0,$$

откуда получаем

$$a(t) = - \left[\frac{\partial f(x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right]^* \psi(t) - e^{-\rho t} \frac{\partial g(x_*(t), u_*(t))}{\partial x}. \quad (13.5)$$

Равенство (13.5) установлено в предположении, что в момент времени t выполняется условие максимума (13.2). Поскольку данное условие максимума (13.2) выполняется при п.в. $t \geq 0$, то равенство (13.5) также справедливо при п.в. $t \geq 0$. Из условий теоремы вытекает, что допустимая пара (x_*, u_*) удовлетворяет вместе с сопряженной переменной ψ сопряженной системе в нормальной форме (3.4). Отсюда в силу выполнения при п.в. $t \geq 0$ равенства (13.5) вытекает, что $a(t) = \dot{\psi}(t)$ при п.в. $t \geq 0$. Следовательно, из условия (13.4) при п.в. $t \geq 0$ имеем

$$\langle \dot{\psi}(t), x - x_*(t) \rangle \leq H(x_*(t), t, \psi(t)) - H(x, t, \psi(t)) \quad \text{для любого } x \in G.$$

Пусть теперь (x, u) — произвольная допустимая пара. Тогда из последнего неравенства и условия максимума (13.2) при п.в. $t \geq 0$ получаем

$$\begin{aligned} \langle \dot{\psi}(t), x(t) - x_*(t) \rangle &\leq H(x_*(t), t, \psi(t)) - H(x(t), t, \psi(t)) \leq \\ &\leq \langle f(x_*(t), u_*(t)), \psi(t) \rangle + e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) - \langle f(x(t), u(t)), \psi(t) \rangle - e^{-\rho t} g(x(t), u(t)). \end{aligned}$$

Следовательно, при п.в. $t \geq 0$ имеем

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t), x(t) - x_*(t) \rangle + e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) \leq e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)).$$

Проинтегрировав последнее неравенство на произвольном интервале времени $[0, T]$, $T > 0$, в силу начального условия (1.2) получаем

$$\int_0^T e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt + \langle \psi(T), x(T) - x_*(T) \rangle \leq \int_0^T e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $T \rightarrow \infty$, в силу условия (13.1) заключаем, что

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x(t), u(t)) dt \leq \int_0^{\infty} e^{-\rho t} g(x_*(t), u_*(t)) dt.$$

Теорема доказана.

Заметим, что в некоторых случаях справедливость краевого условия (13.1) вытекает из выполнения условий трансверсальности на бесконечности (3.17) или (3.18). В частности, легко видеть, что краевое условие (13.1) заведомо выполняется, если справедливы условия трансверсальности (3.18) и начиная с некоторого момента времени $\tau \geq 0$ для любого $t \geq \tau$ все координаты сопряженной переменной $\psi(t)$ и любой допустимой траектории $x(t)$ неотрицательные. Если же все допустимые траектории $x(t)$ ограничены (т.е. если для любой допустимой траектории x выполняется неравенство $\sup_{t \geq 0} \|x(t)\| < \infty$), то выполнение условия (13.1) следует из условий трансверсальности (3.17).

Из доказанной теоремы 13.1 и следствия 10.4 из теоремы 10.1 вытекает следующий критерий оптимальности допустимой пары (x_*, u_*) в задаче (P).

Следствие 13.1. Пусть выполняются условия (A1)–(A4) и, кроме того, существует такой вектор $u_0 \in U$, что $f(x_0, u_0) > 0$. Пусть далее множество G выпукло и для любых фиксированных $t \geq 0$ и $\psi > 0$ функция $H(x, t, \psi): G \mapsto \mathbb{R}^1$ вогнута по переменной x . Пусть, кроме того, для любой допустимой пары (x, u) системы (1.1) существует такое число $\theta > 0$, что начиная с некоторого момента времени $\tau \geq 0$ выполняются условия

$$x(t) \geq 0 \quad \text{для любого } t \geq \tau$$

и

$$\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} - \theta I \geq 0 \quad \text{при почти всех } t \geq \tau$$

(см. (10.31) и (10.32)). Тогда условия теоремы 10.1 суть необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче (P).

14. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ В ОСНОВНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФОНДЫ ПРЕДПРИЯТИЯ

В качестве примера применения полученного в случае доминирования дисконтирующего множителя варианта принципа максимума Понтрягина (см. разд. 12, теорема 12.1) рассмотрим решение простейшей задачи оптимального управления инвестиционной политикой предприятия. Это решение основано на анализе поведения траекторий гамильтоновой системы принципа максимума (см. разд. 4). В данном случае выделение траекторий (x_*, p) гамильтоновой системы принципа максимума, соответствующих различным оптимальным режимам (в зависимости от параметров модели и начального состояния), осуществляется при помощи формулы (12.9).

Предположим, что рассматриваемое предприятие производит некоторый однородный продукт, который в дальнейшем реализуется на рынке. Будем считать, что основные производственные фонды предприятия (капитал) также однородны ($x \in \mathbb{R}^1$), а управляемая система, описывающая динамику капитала, имеет вид (см. разд. 5)

$$\dot{x}(t) = u(t) - \delta x(t), \quad u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^1: 0 \leq u \leq u_{\max}\}.$$

Здесь постоянная $\delta > 0$ — удельная скорость износа оборудования, а управление $u(t)$ — количество единиц оборудования, приобретаемого в единицу времени, следующую за моментом времени t (инвестиционная политика предприятия). Величина $u_{\max} > 0$ характеризует максимальную возможную скорость введения нового оборудования в эксплуатацию. В данном случае мы пренебрегаем временем, необходимым на установку оборудования, и считаем, что приобретаемое оборудование вступает в процесс производства немедленно.

Предположим, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ предприятие располагает капиталом $x(0) = x_0 > 0$.

Далее будем считать, что производительность единицы капитала составляет единицу продукта в единицу времени. Таким образом, если в момент времени $t \geq 0$ предприятие располагает капиталом $x(t)$, то в единицу времени, следующую за моментом времени t , производство составляет $y(t) = x(t)$ единиц продукта.

Предположим, что в каждый момент времени $t \geq 0$ количество $N(t)$ единиц произведенного продукта, которое предприятие может продать на рынке в единицу времени, следующую за моментом t , определяется установленной предприятием ценой $\pi(t)$ за единицу продукта по следующему правилу:

$$N(t) = \frac{\bar{\pi} - \pi(t)}{b},$$

т.е. является линейной функцией цены. Здесь $\bar{\pi} > 0$ — максимальная цена, по которой товар может быть продан на рынке, $b > 0$, а величина $\bar{\pi}/b$ есть максимальный доступный объем рынка. Далее будем считать, что весь продукт, произведенный в момент времени t , должен быть реализован в следующую единицу времени (мы исключаем из рассмотрения ситуацию, когда товар может накапливаться на складе), а предприятие устанавливает в каждый момент времени t максимальную цену $\pi(t)$ за единицу произведенного продукта, при которой весь произведенный товар будет реализован. В этом случае имеем

$$N(t) = y(t) \quad \text{и} \quad \pi(t) = \bar{\pi} - by(t) \quad \text{для любого} \quad t \geq 0.$$

Тогда доход от продажи $y(t) = x(t)$ единиц товара в единицу времени, следующую за моментом t , составляет величину

$$\pi(t)y(t) = \bar{\pi}x(t) - bx^2(t).$$

Пусть ζ — стоимость производства единицы продукта. Будем считать, что $a = \bar{\pi} - \zeta > 0$. Далее предположим, что стоимость $c > 0$ единицы капитала не зависит от времени. В этом случае текущая мгновенная прибыль $g(x(t), u(t))$ предприятия в каждый момент времени $t \geq 0$ определяется равенством

$$g(x(t), u(t)) = \pi(t)y(t) - \zeta x(t) - cu(t) = ax(t) - bx^2(t) - cu(t).$$

Предположим, наконец, что целью предприятия является максимизация агрегированной прибыли, взятой с учетом инфляции $\rho > 0$, на всем бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$ (см. пример 1.2). Тогда простейшая модель оптимального инвестирования в основные производственные фонды предприятия может быть сформулирована в виде следующей задачи оптимального управления:

$$\dot{x}(t) = u(t) - \delta x(t), \quad u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^1: 0 \leq u \leq u_{\max}\}, \quad (14.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (14.2)$$

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} [ax(t) - bx^2(t) - cu(t)] dt \rightarrow \max. \quad (14.3)$$

Здесь $a = \bar{\pi} - \zeta$, b , c , ρ , u_{\max} — положительные параметры, $x_0 > 0$ — заданное начальное состояние.

Определим открытое множество G равенством

$$G = \{x \in \mathbb{R}^1: x > 0\}.$$

В этом случае задача (14.1)–(14.3), очевидно, удовлетворяет условиям (A1)–(A3). Следовательно, в силу теоремы 2.1 в задаче (14.1)–(14.3) существует оптимальное допустимое управление u_* . Пусть x_* — соответствующая ему оптимальная траектория.

Далее легко видеть, что задача (14.1)–(14.3) удовлетворяет условиям теоремы 12.1 (см. следствие 12.2). В силу теоремы 12.1 оптимальная допустимая пара (x_*, u_*) вместе с сопряженной переменной

$$\psi(t) = e^{\delta t} \int_t^{\infty} e^{-(\rho+\delta)s} (a - 2bx_*(s)) ds = \frac{a}{\rho + \delta} e^{-\rho t} - 2be^{\delta t} \int_t^{\infty} e^{-(\rho+\delta)s} x_*(s) ds \quad \text{для любого} \quad t \geq 0$$

удовлетворяют на бесконечном полуинтервале $[0, \infty)$ условию максимума

$$u_*(t)(\psi(t) - ce^{-\rho t}) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \max_{u \in [0, u_{\max}]} \{u(\psi(t) - ce^{-\rho t})\}.$$

Переходя в этих соотношениях к текущей сопряженной переменной $p(t) = e^{\rho t} \psi(t)$, $t \geq 0$, получаем, что оптимальная пара (x_*, u_*) в задаче (14.1)–(14.3) и соответствующая ей текущая сопряженная переменная

$$p(t) = \frac{a}{\rho + \delta} - 2be^{(\rho + \delta)t} \int_t^{\infty} e^{-(\rho + \delta)s} x_*(s) ds \quad \text{для любого } t \geq 0 \quad (14.4)$$

удовлетворяют на бесконечном полуинтервале $[0, \infty)$ условию максимума

$$u_*(t)(p(t) - c) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \max_{u \in [0, u_{\max}]} \{u(p(t) - c)\}. \quad (14.5)$$

Заметим, что в силу равенства (14.4) выполняется неравенство

$$p(t) < \frac{a}{\rho + \delta} \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (14.6)$$

Построим гамильтонову систему принципа максимума для задачи (14.1)–(14.3) (см. разд. 4) в правой полуплоскости

$$\Gamma = \{(x, p) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\},$$

которой только могут принадлежать все удовлетворяющие принципу максимума пары (x_*, p) .

Прямая

$$V = \{(x, p) \in \Gamma : p = c\}$$

делит множество Γ на два подмножества

$$\Gamma_1 = \{(x, p) \in \Gamma : p < c\} \quad \text{и} \quad \Gamma_2 = \{(x, p) \in \Gamma : p \geq c\}.$$

В множестве Γ_1 в силу условия максимума (14.5) имеем $u(x, p) = 0$ и гамильтонова система принципа максимума (см. разд. 4) принимает вид

$$\dot{x}(t) = -\delta x(t), \quad (14.7)$$

$$\dot{p}(t) = (\rho + \delta)p(t) - (a - 2bx(t)). \quad (14.8)$$

В множестве $\text{int } \Gamma_2$ в силу условия максимума (14.5) имеем $u(x, p) = u_{\max}$ и гамильтонова система принципа максимума (см. разд. 4) принимает вид

$$\dot{x}(t) = u_{\max} - \delta x(t), \quad (14.9)$$

$$\dot{p}(t) = (\rho + \delta)p(t) - (a - 2bx(t)). \quad (14.10)$$

На прямой V условие максимума (14.5) никакой информации о возможном значении оптимального управления не дает. Характер пересечения траекториями гамильтоновой системы этой прямой рассматривается непосредственно.

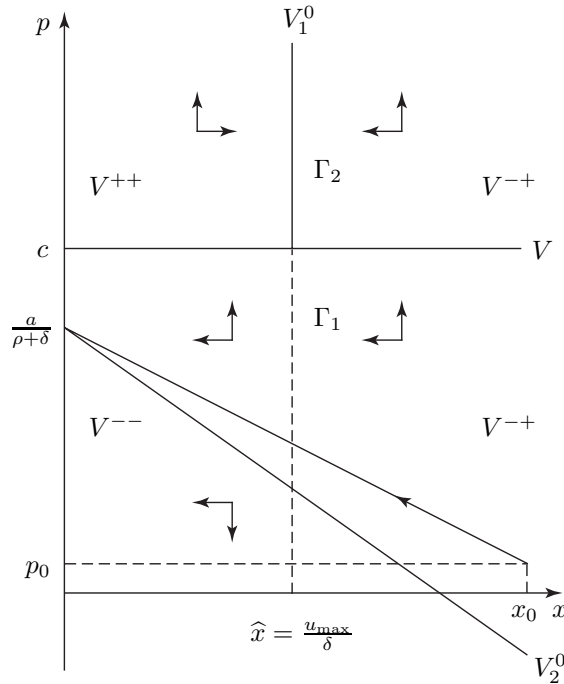


Рис. 1. Поведение решения (x_*, p) гамильтоновой системы принципа максимума, соответствующего оптимальной паре (x_*, u_*) , в случае $a/(\rho + \delta) \leq c$

Определим функцию $y: (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ и прямые V_1^0 и V_2^0 в Γ следующими равенствами:

$$y(x) = \frac{a}{\rho + \delta} - \frac{2bx}{\rho + \delta} \quad \text{для любого } x > 0,$$

$$V_1^0 = \left\{ (x, p) \in \Gamma_2: x = \frac{u_{\max}}{\delta}, p \geq c \right\}, \quad V_2^0 = \{ (x, p) \in \Gamma: p = y(x) \}.$$

Прямая V_1^0 является геометрическим местом точек в множестве Γ_2 , где производные координаты x траекторий (x, p) гамильтоновой системы принципа максимума обращаются в нуль (в множестве Γ_1 производные координаты x траекторий (x, p) гамильтоновой системы принципа максимума отрицательные). Прямая V_2^0 является геометрическим местом точек в множестве Γ , где производные координаты p траекторий (x, p) гамильтоновой системы принципа максимума обращаются в нуль.

В дальнейшем через V^{--}, V^{+-}, V^{-+} и V^{++} будем обозначать открытые подмножества множества Γ , в которых производные координат траекторий (x, p) гамильтоновой системы принципа максимума имеют постоянные знаки (первый знак указывает, какой знак в этом множестве у производной координаты x , второй — какой знак у производной координаты p).

Возможны два случая:

$$\frac{a}{\rho + \delta} \leq c \quad \text{и} \quad \frac{a}{\rho + \delta} > c.$$

Рассмотрим первый случай, когда выполняется неравенство $a/(\rho + \delta) \leq c$. Тогда $p(t) < c$ для любого $t \geq 0$ (см. условие (14.6)). Следовательно, в этом случае в силу условия максимума (14.5) оптимальное управление u_* определяется равенством $u_*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0$. Таким образом, условие $a/(\rho + \delta) \leq c$ характеризует ситуацию, когда какое-либо вложение средств в производство нецелесообразно.

В первом случае оптимальная пара (x_*, u_*) следующая:

$$x_*(t) = x_0 e^{-\delta t} \quad \text{для любого } t \geq 0, \quad u_*(t) = 0 \quad \text{при почти всех } t \geq 0,$$

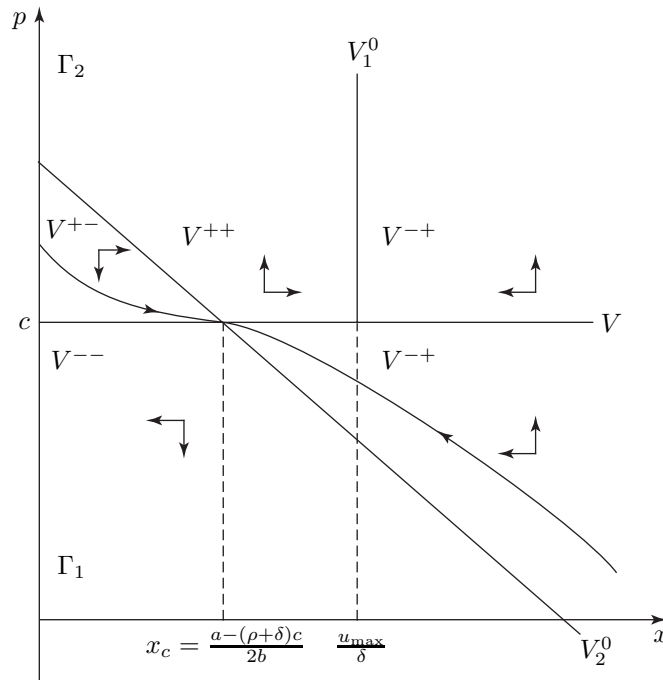


Рис. 2. Поведение решения (x_*, p) гамильтоновой системы принципа максимума, соответствующего оптимальной паре (x_*, u_*) , в случае $a/(\rho + \delta) > c$, подслучай (i)

а в силу равенства (14.4) соответствующая сопряженная переменная p имеет вид

$$p(t) = \frac{a}{\rho + \delta} - \frac{2bx_0}{\rho + 2\delta} e^{-\delta t} = \frac{a}{\rho + \delta} - \frac{2b}{\rho + 2\delta} x_*(t).$$

Характер поведения решения (x_*, p) гамильтоновой системы принципа максимума, соответствующего оптимальной паре (x_*, u_*) , приведен на рис. 1 (в данном случае это движение по прямой).

Рассмотрим второй случай, когда выполняется неравенство $a/(\rho + \delta) > c$.

Возможны два подслучая этого случая:

$$(i) \quad \frac{u_{\max}}{\delta} \geq \frac{a - (\rho + \delta)c}{2b} \quad \text{и} \quad (ii) \quad \frac{u_{\max}}{\delta} < \frac{a - (\rho + \delta)c}{2b}.$$

Рассмотрим подслучай (i). В этом подслучае множества V^{--} , V^{+-} , V^{-+} и V^{++} в Γ определяются следующими равенствами (см. рис. 2):

$$V^{--} = \{(x, p) \in \Gamma: x > 0, p < \min\{c, y(x)\}\},$$

$$V^{+-} = \left\{ (x, p) \in \Gamma: 0 < x < \frac{a - (\rho + \delta)c}{2b}, c < p < y(x) \right\},$$

$$V^{-+} = \left\{ (x, p) \in \Gamma: \frac{a - (\rho + \delta)c}{2b} < x \leq \frac{u_{\max}}{\delta}, y(x) < p < c \right\} \cup \left\{ (x, p) \in \Gamma: x > \frac{u_{\max}}{\delta}, p > y(x) \right\},$$

$$V^{++} = \left\{ (x, p) \in \Gamma: 0 < x < \frac{u_{\max}}{\delta}, p > \max\{c, y(x)\} \right\}.$$

Очевидно, что объединение множеств V , V_1^0 , V_2^0 , V^{--} , V^{+-} , V^{-+} и V^{++} дает всю правую полуплоскость Γ .

Предположим, что существует такой момент времени $\tau \geq 0$, что в этот момент выполняется включение $(x_*(\tau), p(\tau)) \in V^{--}$. Согласно определению множества V^{--} в этом множестве обе величины x_* и p убывают (их производные отрицательные). Следовательно, попав в множество V^{--} в момент времени τ , пара (x_*, p) уже не сможет покинуть это множество ни при каких значениях $t \geq \tau$ (см. рис. 2). Тогда $p(t) < c$ для любого $t \geq \tau$ и для оптимального управления u_* в силу условия максимума (14.5) выполняется равенство $u_*(t) \stackrel{\text{п.б.}}{=} 0$ для любого $t \geq \tau$. Следовательно, в этом случае

$$x_*(t) = x_*(\tau)e^{-\delta(t-\tau)} \quad \text{для любого } t \geq \tau$$

и согласно (14.4) имеем

$$p(t) = \frac{a}{\rho + \delta} - \frac{2bx_*(\tau)}{\rho + 2\delta}e^{-\delta(t-\tau)} < c \quad \text{для любого } t \geq \tau.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \frac{a}{\rho + \delta} \leq c.$$

Однако это противоречит предположению, что $a/(\rho + \delta) > c$. Таким образом, для оптимальной траектории x_* и соответствующей сопряженной переменной p имеем

$$(x_*(t), p(t)) \notin V^{--} \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Предположим, что в этом подслучае существует такой момент времени $\tau \geq 0$, что в этот момент выполняется включение $(x_*(\tau), p(\tau)) \in V^{++}$ (см. рис. 2).

Согласно определению множества V^{++} в этом множестве обе величины x_* и p возрастают. Следовательно, траектория (x_*, p) не может покинуть этого множества иначе, как после пересечения прямой V_1^0 , что невозможно. Таким образом, однажды попав в множество V^{++} , траектория (x_*, p) гамильтоновой системы принципа максимума уже не может покинуть его ни в какие последующие моменты времени. Аналогично если траектория (x_*, p) попадет в какой-то момент времени в множество V^{-+} выше прямой V , то она также никогда не сможет покинуть этого множества (см. рис. 2). Итак, в подслучае (i), попав в множество $V^{++} \cup (\Gamma_2 \cap V^{-+})$ в момент времени τ , пара (x_*, p) уже не сможет покинуть этого множества ни при каких значениях $t \geq \tau$.

Далее в множестве $V^{++} \cup (\Gamma_2 \cap V^{-+})$ имеем $p(t) > p(\tau) > c$ для любого $t \geq \tau$. Таким образом, для оптимального управления u_* в силу условия максимума (14.5) в этом случае выполняется равенство $u_*(t) \stackrel{\text{п.б.}}{=} u_{\max}$ для любого $t \geq \tau$. Следовательно, в этом случае

$$x_*(t) = \frac{u_{\max}}{\delta} + \left(x_*(\tau) - \frac{u_{\max}}{\delta}\right)e^{-\delta(t-\tau)} \quad \text{для любого } t \geq \tau$$

и согласно (14.4) имеем

$$p(t) = \frac{a}{\rho + \delta} - \frac{2bu_{\max}}{\delta(\rho + \delta)} - \left(x_*(\tau) - \frac{u_{\max}}{\delta}\right) \frac{2be^{-\delta(t-\tau)}}{\rho + 2\delta} \quad \text{для любого } t \geq \tau.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $t \rightarrow \infty$, в силу условия (i) получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \frac{a}{\rho + \delta} - \frac{2bu_{\max}}{\delta(\rho + \delta)} \leq c,$$

что противоречит неравенству $p(t) > p(\tau) > c$, выполняющемуся в $V^{++} \cup (\Gamma_2 \cap V^{-+})$ для любого $t \geq \tau$. Следовательно, в подслучае (i) выполнение условия $(x_*(t), p(t)) \in V^{++} \cup (\Gamma_2 \cap V^{-+})$ невозможно ни для какого момента времени $t \geq 0$. Далее легко видеть, что в момент времени t точка $(x_*(t), p(t))$ может принадлежать прямым V или V_2^0 только в случае, когда она является точкой пересечения прямых V и V_2^0 , т.е. $(x_*(t), p(t)) = (x_c, c)$, где

$$x_c = \frac{a - (\rho + \delta)c}{2b}.$$

Действительно, если в какой-то момент времени t траектория (x_*, p) попадет на прямую V или V_2^0 не в точке их пересечения, то в последующие моменты времени эта траектория окажется или в множестве V^{--} , или в множестве $V^{++} \cup (\Gamma_2 \cap V^{-+})$, что невозможно.

Итак, мы установили, что в подслучае (i) выполняется включение

$$(x_*(t), p(t)) \in V^{+-} \cup V^{-+} \quad \text{для любого } t \geq 0: (x_*(t), p(t)) \neq (x_c, c).$$

В силу определения множеств V^{+-} и V^{-+} (см. рис. 2) получаем следующую формулу для оптимального управления $u_*(x)$ как функции фазовой переменной x при $x \neq x_c$:

$$u_*(x) = \begin{cases} u_{\max}, & \text{если } x < x_c, \\ 0, & \text{если } x > x_c, \end{cases} \quad (14.11)$$

для всех значений $x > 0$, за исключением точки x_c .

Поскольку $\hat{x} = u_{\max}/\delta \geq x_c$, то в силу теоремы 13.1 точка (x_c, c) является оптимальным положением равновесия системы (в задаче (14.1)–(14.3) с начальным условием $x_0 = x_c$). Поэтому в подслучае (i) окончательно получаем следующую формулу для оптимального управления u_* , причем в виде оптимального синтеза (см. [19]):

$$u_*(x) = \begin{cases} u_{\max}, & \text{если } x < x_c, \\ \frac{\delta(a - (\rho + \delta)c)}{2b}, & \text{если } x = x_c, \\ 0, & \text{если } x > x_c. \end{cases}$$

Для произвольного начального состояния $x_0 > 0$ оптимальный синтез $u_*(x)$, $x \in (0, \infty)$, однозначно определяет оптимальную траекторию x_* в задаче (14.1)–(14.3) как решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = u_*(x(t)) - \delta x(t), \quad x(0) = x_0$$

и соответствующее оптимальное управление u_* как функцию

$$u_*(t) = u_*(x_*(t)), \quad t \in [0, \infty).$$

Характер поведения решения (x_*, p) гамильтоновой системы принципа максимума, соответствующего оптимальной паре (x_*, u_*) , в подслучае (i) показан на рис. 2.

Рассмотрим подслучай (ii). В этом подслучае гамильтонова система принципа максимума имеет единственное положение равновесия $(\hat{x}, \hat{p}) \in \text{int } \Gamma_2$ (см. рис. 3),

$$\hat{x} = \frac{u_{\max}}{\delta}, \quad \hat{p} = \frac{a}{\rho + \delta} - \frac{2b\hat{x}}{\rho + \delta}.$$

Согласно теореме 13.1 это положение равновесия является оптимальной стационарной траекторией в задаче (14.1)–(14.3) с начальным условием $x_0 = \hat{x}$.

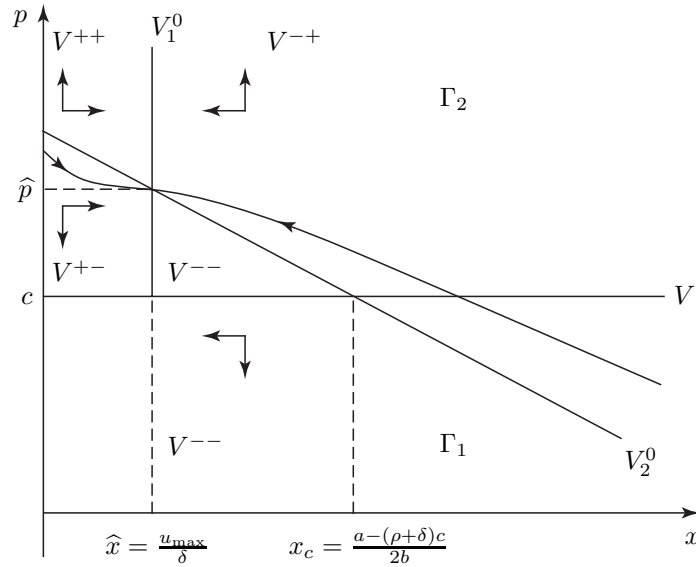


Рис. 3. Поведение решения (x_*, p) гамильтоновой системы принципа максимума, соответствующего оптимальной паре (x_*, u_*) , в случае $a/(\rho + \delta) > c$, подслучай (ii)

В подслучае (ii) множества V^{--} , V^{+-} , V^{-+} и V^{++} в \mathbb{R}^2 определяются равенствами (см. рис. 3)

$$V^{--} = \{(x, p) \in \Gamma: x > 0, p < \min\{c, y(x)\}\} \cup \{(x, p) \in \Gamma: \hat{x} < x < x_c, c \leq p < y(x)\},$$

$$V^{+-} = \{(x, p) \in \Gamma: 0 < x < \hat{x}, c < p < y(x)\},$$

$$V^{-+} = \{(x, p) \in \Gamma: x > \hat{x}, p > y(x)\},$$

$$V^{++} = \{(x, p) \in \Gamma: 0 < x < \hat{x}, p > y(x)\}.$$

Очевидно, что объединение множеств V , V_1^0 , V_2^0 , V^{--} , V^{+-} , V^{-+} и V^{++} дает всю правую полуплоскость Γ .

Как и в подслучае (i), легко показать, что траектория (x_*, p) гамильтоновой системы, соответствующая оптимальной паре (x_*, u_*) , не может находиться в множестве $V^{--} \cap \Gamma_1$ ни в какой момент времени t . Следовательно, для любого $x < x_c$ имеем $u_*(x) = u_{\max}$. Далее при достаточно больших значениях x_0 траектория (x_*, p) гамильтоновой системы, соответствующая оптимальной паре (x_*, u_*) , не может при всех значениях $t \geq 0$ целиком находиться в множестве $\text{int } \Gamma_2$. Действительно, если пара (x_*, p) лежит в $\text{int } \Gamma_2$ для любого $t \geq 0$, то согласно формуле (14.4) для всех достаточно больших $x_0 > 0$ имеем

$$p(0) = \frac{a}{\rho + \delta} - \frac{2bu_{\max}}{\delta(\rho + \delta)} - \left(x_0 - \frac{u_{\max}}{\delta}\right) \frac{2b}{\rho + 2\delta} < 0,$$

что противоречит предположению $(x_0, p(0)) \in \Gamma_2$. Таким образом, в этом случае найдется такое $\tau > 0$, что $x_*(\tau) > x_c$, $p(\tau) = c$ и для всех $t \geq \tau$ выполняется включение $(x_*(t), p(t)) \in \text{int } \Gamma_2$. Так как в области $\text{int } \Gamma_2$ выполняется равенство $u_*(t) = u_{\max}$, то

$$x_*(t) = \hat{x} + (x_*(\tau) - \hat{x})e^{-\delta(t-\tau)} \quad \text{для любого } t \geq \tau.$$

Следовательно, согласно (14.4) имеем

$$p(t) = \frac{a}{\rho + \delta} - \frac{2bu_{\max}}{\delta(\rho + \delta)} - \left(x_*(\tau) - \frac{u_{\max}}{\delta}\right) \frac{2be^{-\delta(t-\tau)}}{\rho + 2\delta} \quad \text{для любого } t \geq \tau.$$

Отсюда при $t = \tau$ получаем

$$c = \frac{a}{\rho + \delta} - \frac{2bu_{\max}}{\delta(\rho + \delta)} - \left(x_*(\tau) - \frac{u_{\max}}{\delta} \right) \frac{2b}{\rho + 2\delta}.$$

Следовательно, точка

$$x_*(\tau) = \frac{1}{\rho + \delta} \left[\frac{(\rho + 2\delta)(a - (\rho + \delta)c)}{2b} - u_{\max} \right] = x_c + \frac{\delta}{\rho + \delta} \left(x_c - \frac{u_{\max}}{\delta} \right)$$

пересечения траектории (x_*, p) гамильтоновой системы принципа максимума прямой V не зависит от начального состояния x_0 . Поэтому в подслучае (ii) окончательно получаем следующую формулу для оптимального управления в задаче (14.1)–(14.3), причем в виде оптимального синтеза $u_*(x)$, $x \in (0, \infty)$ (см. [19]):

$$u_*(x) = \begin{cases} u_{\max}, & \text{если } x < x_c + \frac{\delta}{\rho + \delta} \left(x_c - \frac{u_{\max}}{\delta} \right), \\ 0, & \text{если } x \geq x_c + \frac{\delta}{\rho + \delta} \left(x_c - \frac{u_{\max}}{\delta} \right). \end{cases}$$

Для произвольного начального состояния $x_0 > 0$ оптимальный синтез $u_*(x)$, $x \in (0, \infty)$, однозначно определяет оптимальную траекторию x_* в задаче (14.1)–(14.3) как решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = u_*(x(t)) - \delta x(t), \quad x(0) = x_0$$

и соответствующее оптимальное управление u_* как функцию

$$u_*(t) = u_*(x_*(t)), \quad t \in [0, \infty).$$

Характер поведения решения (x_*, p) гамильтоновой системы принципа максимума, соответствующего оптимальной паре (x_*, u_*) , в подслучае (ii) показан на рис. 3.

15. НЕОКЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Неоклассическая модель оптимального экономического роста с логарифмической функцией мгновенной полезности формулируется как следующая задача оптимального управления (P_ε) , $0 < \varepsilon < 1$ (см. пример 1.4):

$$\dot{K}(t) = u(t)F(K(t), L(t)), \quad u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon], \quad (15.1)$$

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \quad (15.2)$$

$$K(0) = K_0, \quad L(0) = L_0, \quad (15.3)$$

$$J(K, L, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\ln(1 - u(t)) + \ln F(K(t), L(t))] dt \rightarrow \max. \quad (15.4)$$

Здесь $K \in \mathbb{R}^1$ и $L \in \mathbb{R}^1$ — фазовые переменные (капитал и рабочая сила); $\mu > 0$; $\rho > 0$; $K_0 > 0$ и $L_0 > 0$ — заданные начальные состояния системы; u — управление, характеризующее долю $u(t)F(K(t), L(t))$ произведенного продукта, инвестируемую в основные производственные фонды (капитал) в единицу времени, следующую за моментом времени $t \geq 0$;

F — производственная функция, удовлетворяющая неоклассическим условиям (1.13)–(1.16) и условию (1.17). Максимум в задаче (P_ε) ищется в классе измеримых функций $u: [0, \infty) \mapsto U_\varepsilon$. В силу условий (1.13)–(1.17) и положительности производственной функции F траектория (K, L) управляемой системы (15.1), (15.2) с начальными условиями (15.3), соответствующая произвольному допустимому управлению u , определена на $[0, \infty)$ и лежит в множестве

$$G = \{(K, L) \in \mathbb{R}^2: K > 0, L > 0\}.$$

Нетрудно видеть, что задача (P_ε) удовлетворяет условиям (A1)–(A3). Действительно, в силу условий (1.13)–(1.17) для задачи (P_ε) , очевидно, выполняется условие ограниченности (A1). Управляемая система (15.1), (15.2) аффинная по управлению, множество U_ε выпуклое, а функция мгновенной полезности

$$g(K, L, u) = \ln(1 - u) + \ln F(K, L), \quad K > 0, \quad L > 0, \quad u \in U_\varepsilon,$$

вогнутая по переменной u . Следовательно, для задачи (P_ε) выполняется условие выпуклости (A2). Далее в силу неоклассических условий (1.13)–(1.17) производственная функция не убывает и растет не быстрее некоторой экспоненты равномерно вдоль любой допустимой траектории (K, L) . Поэтому рост функции g не более чем полиномиальный. Следовательно, существует такая положительная суммируемая функция $\tilde{\mu}$ на $[0, \infty)$, что $\tilde{\mu}(t) \rightarrow +0$ при $t \rightarrow \infty$ и для любого допустимого управления u выполняется условие

$$e^{-\rho t} \max_{u \in U_\varepsilon} |g(K(t), L(t), u(t))| \leq e^{-\rho t} [|\ln \varepsilon| + |\ln F(K(t), L(t))|] \leq \tilde{\mu}(t) \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Таким образом, условие (A3) также выполняется.

В силу теоремы 2.1 в задаче (P_ε) существует оптимальное допустимое управление u_* . Пусть (K_*, L_*) — соответствующая управлению u_* допустимая траектория.

В силу неоклассических условий (1.13)–(1.16) и положительности производственной функции F имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln F(K, L)}{\partial K} &= \frac{1}{F(K, L)} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} > 0 \quad \text{для любых } K > 0, \quad L > 0, \\ \frac{\partial \ln F(K, L)}{\partial L} &= \frac{1}{F(K, L)} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} > 0 \quad \text{для любых } K > 0, \quad L > 0. \end{aligned}$$

Для вектора $u_0 = 1 - \varepsilon \in U_\varepsilon$ правая часть управляемой системы (15.1), (15.2) в начальной точке (K_0, L_0) положительна. Таким образом, для задачи (P_ε) выполняются условия теоремы 10.1. Более того, если оптимальное управление u_* таково, что для некоторого положительного числа θ начиная с некоторого момента времени $\tau \geq 0$ выполняется неравенство $u_*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{\geq} \theta$, то для данного управления u_* выполняются условия следствия 10.4 из теоремы 10.1. Следовательно, в этом случае соответствующая оптимальной тройке (K_*, L_*, u_*) в силу принципа максимума в нормальной форме (теорема 10.1) сопряженная переменная $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ удовлетворяет условию трансверсальности (10.33).

Применяя теорему 10.1 и вытекающее из нее следствие 10.4, получаем следующий вариант принципа максимума Понтрягина для задачи (P_ε) .

Теорема 15.1. Пусть u_* — оптимальное управление в задаче (P_ε) и (K_*, L_*) — соответствующая оптимальная траектория. Тогда существует такая сопряженная переменная $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ (соответствующая тройке (K_*, L_*, u_*)), что выполняются следующие условия:

- (i) оптимальная тройка (K_*, L_*, u_*) вместе с сопряженной переменной $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ удовлетворяют на бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$ основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме (см. (10.12), (10.13)):

$$\dot{\psi}^1(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} -u_*(t) \frac{\partial F(K_*(t), L_*(t))}{\partial K} \psi^1(t) - \frac{e^{-\rho t}}{F(K_*(t), L_*(t))} \frac{\partial F(K_*(t), L_*(t))}{\partial K}, \quad (15.5)$$

$$\dot{\psi}^2(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} -u_*(t) \frac{\partial F(K_*(t), L_*(t))}{\partial L} \psi^1(t) - \mu \psi^2(t) - \frac{e^{-\rho t}}{F(K_*(t), L_*(t))} \frac{\partial F(K_*(t), L_*(t))}{\partial L}, \quad (15.6)$$

$$\mathcal{H}(K_*(t), L_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} H(K_*(t), L_*(t), t, \psi(t)); \quad (15.7)$$

- (ii) для любого $t \geq 0$ имеем (см. (10.14))

$$\psi^1(t) > 0, \quad \psi^2(t) > 0; \quad (15.8)$$

- (iii) если существует такое число $\theta > 0$, что начиная с некоторого момента времени $\tau \geq 0$ выполняется неравенство

$$u_*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{\geq} \theta, \quad (15.9)$$

то выполняется условие трансверсальности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi^1(t) K_*(t) = 0. \quad (15.10)$$

Здесь

$$\mathcal{H}(K, L, t, u, \psi) = uF(K, L)\psi^1 + \mu L\psi^2 + e^{-\rho t} [\ln(1 - u) + \ln F(K, L)],$$

$$H(K, L, t, \psi) = \max_{u \in U_\varepsilon} \mathcal{H}(K, L, t, u, \psi)$$

— функция Гамильтона–Понтрягина и гамильтониан в нормальной форме для задачи (P_ε) .

Заметим, что сформулированный результат содержит только часть дополнительных соотношений для сопряженной переменной и гамильтониана, вытекающих из теоремы 10.1. Однако этих соотношений уже оказывается достаточно для однозначной характеристики всех оптимальных режимов в задаче (P_ε) (при различных значениях параметров задачи и различных начальных состояниях). Мы рассмотрим задачу (P_ε) при произвольном малом параметре $\varepsilon > 0$. При этом будет показано, что для любого начального состояния $(K_0, L_0) \in G$ в случае, когда параметр ε достаточно мал, значение этого параметра ε никакого влияния на оптимальную тройку (K_*, L_*, u_*) не оказывает.

Перейдем в задаче (P_ε) к фазовой переменной $x(t) = K(t)/L(t)$, $t \geq 0$. В терминах фазовой переменной x задача оптимального управления (P_ε) переписывается в виде следующей эквивалентной ей задачи (\tilde{P}_ε) , $0 < \varepsilon < 1$ (см. пример 1.4):

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), \quad u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon], \quad (15.11)$$

$$x(0) = x_0, \quad (15.12)$$

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))] dt \rightarrow \max. \quad (15.13)$$

Здесь $x_0 \in \tilde{G} = \{x \in \mathbb{R}^1 : x > 0\}$ и $f(x) = F(x, 1)$ для любого $x \in \tilde{G}$. Остальные данные в задаче (\tilde{P}_ε) те же самые, что и в задаче (P_ε) .

Пусть u_* — оптимальное управление в задаче (P_ε) (или, что то же самое, в задаче (\tilde{P}_ε)), (K_*, L_*) — соответствующая оптимальная траектория и $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ — отвечающая данной оптимальной паре в силу теоремы 15.1 сопряженная переменная. Тогда $x_*(t) = K_*(t)/L_*(t)$, $t \geq 0$, есть соответствующая u_* оптимальная допустимая траектория в задаче (\tilde{P}_ε) .

Положим

$$p(t) = e^{\rho t} \psi^1(t) L_*(t) \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Тогда в силу условий (15.2), (15.5) на полуинтервале $[0, \infty)$ сопряженная переменная p принимает положительные значения и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{p}(t) = \left[\rho + \mu - u_*(t) \frac{d}{dx} f(x_*(t)) \right] p(t) - \frac{1}{f(x_*(t))} \frac{d}{dx} f(x_*(t)). \quad (15.14)$$

Здесь мы учли условие однородности (1.17) и тот факт, что

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, 1) \quad \text{для любого } x > 0.$$

Из теоремы 15.1 вытекает следующий вариант принципа максимума Понтрягина для задачи (\tilde{P}_ε) в терминах текущей сопряженной переменной p , текущей функции Гамильтона–Понтрягина \mathcal{M} и текущего гамильтониана M .

Теорема 15.2. Пусть u_* — оптимальное управление в задаче (\tilde{P}_ε) и x_* — соответствующая оптимальная траектория. Тогда существует такая текущая сопряженная переменная p (соответствующая паре (x_*, u_*)), что выполняются следующие условия:

- (i) оптимальная пара (x_*, u_*) вместе с текущей сопряженной переменной p удовлетворяют на бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$ основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме (см. (3.38), (3.39)):

$$\dot{p}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \left[\rho + \mu - u_*(t) \frac{d}{dx} f(x_*(t)) \right] p - \frac{1}{f(x_*(t))} \frac{d}{dx} f(x_*(t)), \quad (15.15)$$

$$\mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), p(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} M(x_*(t), p(t)); \quad (15.16)$$

- (ii) для любого $t \geq 0$ имеем (см. (15.8))

$$p(t) > 0; \quad (15.17)$$

- (iii) если существует такое число $\theta > 0$, что начиная с некоторого момента времени $\tau \geq 0$ выполняется неравенство

$$u_*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{\geq} \theta, \quad (15.18)$$

то выполняется условие трансверсальности (см. (15.10))

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} p(t) x_*(t) = 0. \quad (15.19)$$

Здесь текущие функция Гамильтона–Понтрягина \mathcal{M} и гамильтониан M для задачи (\tilde{P}_ε) в нормальной форме определяются стандартным образом (см. (3.40), (3.41)):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x, u, p) &= (uf(x) - \mu x)p + \ln(1 - u) + \ln f(x), \\ M(x, p) &= \max_{u \in U_\varepsilon} \mathcal{M}(x, u, p). \end{aligned} \quad (15.20)$$

Заметим, что в задаче (\tilde{P}_ε) условия теоремы 10.1, вообще говоря, выполняются не для всех значений параметров μ , ε и начальных состояний x_0 . Действительно, при всех достаточно больших значениях x_0 в силу неоклассических условий имеем $(1 - \varepsilon)f(x_0) < \mu x_0$, что противоречит условиям теоремы 10.1. Однако в исходной задаче (P_ε) все условия теоремы 10.1 выполнены. В силу этого обстоятельства мы сначала применяем теорему 10.1 к задаче (P_ε) , а затем, переходя к новой фазовой переменной x и текущей сопряженной переменной p , выводим из полученного таким образом результата (теоремы 15.1) необходимый нам вариант принципа максимума Понтрягина (теорема 15.2) для задачи (\tilde{P}_ε) .

Ниже нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Лемма 15.1. Пусть $\phi_1: \tilde{G} \mapsto \mathbb{R}^1$ и $\phi_2: \tilde{G} \mapsto \mathbb{R}^1$ — две такие вогнутые функции, что

$$\phi_1(x) \leq \phi_2(x) \quad \text{для любого } x \in \tilde{G}. \quad (15.21)$$

Пусть, кроме того, существует такая точка $\xi \in \tilde{G}$, что

$$\phi_1(\xi) = \phi_2(\xi). \quad (15.22)$$

Тогда функции $\eta_1, \eta_2: \tilde{G} \mapsto \mathbb{R}^1$, определенные равенствами

$$\eta_1(x) = \begin{cases} \phi_1(x), & \text{если } x \leq \xi, \\ \phi_2(x), & \text{если } x > \xi, \end{cases} \quad \eta_2(x) = \begin{cases} \phi_2(x), & \text{если } x \leq \xi, \\ \phi_1(x), & \text{если } x > \xi, \end{cases} \quad (15.23)$$

являются вогнутыми.

Доказательство. Докажем вогнутость функции η_1 (вогнутость функции η_2 доказывается аналогично).

Выберем произвольные точки $x_1, x_2 \in \tilde{G}$ и произвольное число $0 < \alpha < 1$. Не ограничивая общности, будем считать, что $x_1 < x_2$. Положим $x_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$. Для доказательства утверждения леммы достаточно доказать неравенство

$$\eta_1(x_\alpha) \geq \alpha \eta_1(x_1) + (1 - \alpha) \eta_1(x_2). \quad (15.24)$$

В силу вогнутости функций ϕ_1, ϕ_2 и условия (15.21) рассмотрение может быть ограничено случаем, когда

$$x_1 < x_\alpha < \xi < x_2.$$

Пусть выполняется этот случай. Тогда существуют такие $0 < \beta < 1$ и $0 < \gamma < 1$, что

$$x_\alpha = \beta x_1 + (1 - \beta)\xi \quad \text{и} \quad \xi = \gamma x_1 + (1 - \gamma)x_2.$$

Так как

$$0 < \beta + (1 - \beta)\gamma < 1 \quad \text{и} \quad (1 - \beta)(1 - \gamma) = 1 - (\beta + (1 - \beta)\gamma),$$

то

$$\alpha = \beta + (1 - \beta)\gamma \quad \text{и} \quad 1 - \alpha = (1 - \beta)(1 - \gamma). \quad (15.25)$$

В силу вогнутости функции ϕ_1 на интервале $[x_1, \xi]$ и определения функции η_1 (см. (15.23)) имеем

$$\eta_1(x_\alpha) \geq \beta \eta_1(x_1) + (1 - \beta) \eta_1(\xi).$$

Аналогично в силу вогнутости функции ϕ_2 на $[x_1, x_2]$ и определения функции η_1 (см. (15.23)) имеем

$$\eta_1(\xi) \geq \gamma \eta_1(x_1) + (1 - \gamma) \eta_1(x_2).$$

Из последних двух неравенств получаем

$$\eta_1(x_\alpha) \geq (\beta + (1 - \beta)\gamma)\eta_1(x_1) + (1 - \beta)(1 - \gamma)\eta_1(x_2),$$

откуда в силу равенств (15.25) вытекает неравенство

$$\eta_1(x_\alpha) \geq \alpha\eta_1(x_1) + (1 - \alpha)\eta_1(x_2).$$

Таким образом, неравенство (15.24) доказано. Лемма доказана.

Рассмотрим текущий гамильтониан M задачи (\tilde{P}_ε) .

Лемма 15.2. *Для любого $p > 0$ текущий гамильтониан M задачи (\tilde{P}_ε) является вогнутой функцией фазовой переменной x на множестве \tilde{G} .*

Доказательство. При произвольном фиксированном $p > 0$ определим функции $\phi_1: \tilde{G} \mapsto \mathbb{R}^1$ и $\phi_2: \tilde{G} \mapsto \mathbb{R}^1$ равенствами

$$\phi_1(x) = \mathcal{M}(x, 0, p) = -\mu xp + \ln f(x) \quad \text{при } x \in \tilde{G},$$

$$\phi_2(x) = \mathcal{M}(x, u(x, p), p) = (u(x, p)f(x) - \mu x)p + \ln(1 - u(x, p)) + \ln f(x) \quad \text{при } x \in \tilde{G},$$

где

$$u(x, p) = 1 - \frac{1}{f(x)p} \quad \text{при } x \in \tilde{G}.$$

Тогда

$$\phi_2(x) = f(x)p - \mu xp - 1 - \ln p \quad \text{при } x \in \tilde{G}.$$

Очевидно, обе функции ϕ_1 и ϕ_2 вогнутые на \tilde{G} и $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ для любого $x \in \tilde{G}$.

Определим число $\hat{\xi} \in \tilde{G}$ как корень уравнения

$$f(\hat{\xi})p = 1.$$

В силу неоклассических условий (1.23), (1.24) такое число $\hat{\xi}$ определяется однозначно.

Поскольку $\phi_1(\hat{\xi}) = \phi_2(\hat{\xi})$ и $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ для любого $x \in \tilde{G}$, то в силу леммы 15.1 функция

$$\eta_1(x) = \begin{cases} \phi_1(x), & \text{если } x \leq \hat{\xi}, \\ \phi_2(x), & \text{если } x > \hat{\xi}, \end{cases}$$

является вогнутой на множестве \tilde{G} .

Далее определим функцию $\phi_3: \tilde{G} \mapsto \mathbb{R}^1$ равенством

$$\phi_3(x) = \mathcal{M}(x, 1 - \varepsilon, p) = (1 - \varepsilon)f(x)p - \mu xp + \ln \varepsilon + \ln f(x) \quad \text{при } x \in \tilde{G}.$$

Ясно, что функция ϕ_3 вогнута на \tilde{G} и $\phi_3(x) \leq \phi_2(x)$ для любого $x \in \tilde{G}$.

Определим число $\bar{\xi} \in \tilde{G}$ как корень уравнения

$$f(\bar{\xi})p = \frac{1}{\varepsilon}.$$

В силу неоклассических условий (1.23), (1.24) такое число $\bar{\xi}$ определяется однозначно.

Поскольку $\phi_3(\bar{\xi}) = \phi_2(\bar{\xi})$ и $\phi_3(x) \leq \phi_2(x)$ для любого $x \in \tilde{G}$, то в силу леммы 15.1 функция

$$\eta_2(x) = \begin{cases} \phi_2(x), & \text{если } x \leq \bar{\xi}, \\ \phi_3(x), & \text{если } x > \bar{\xi}, \end{cases}$$

является вогнутой на множестве \tilde{G} .

Из вогнутости функций η_1 и η_2 и равенства

$$M(x, p) = \min\{\eta_1(x), \eta_2(x)\} \quad \text{для любого } x \in \tilde{G}$$

вытекает вогнутость текущего гамильтониана M как функции переменной x на множестве \tilde{G} . Лемма доказана.

Следующие два результата немедленно вытекают из теоремы 13.1, теоремы 15.2 и леммы 15.2.

Следствие 15.1. Пусть допустимая пара (x_*, u_*) вместе с текущей сопряженной переменной p удовлетворяют условиям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме для задачи (\tilde{P}_ε) (теорема 15.2) и существует такое число $\theta > 0$, что начиная с некоторого момента времени $\tau \geq 0$ выполняется неравенство $u_*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{\geq} \theta$. Тогда пара (x_*, u_*) оптимальная в задаче (\tilde{P}_ε) .

Следствие 15.2. Пусть для допустимой пары (x_*, u_*) существует такое число $\theta > 0$, что начиная с некоторого момента времени $\tau \geq 0$ выполняется неравенство $u_*(t) \stackrel{\text{п.в.}}{\geq} \theta$. Тогда для оптимальности пары (x_*, u_*) в задаче (\tilde{P}_ε) необходимо и достаточно, чтобы вместе с некоторой текущей сопряженной переменной p она удовлетворяла условиям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме (теорема 15.2).

Перейдем к построению гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина для задачи (\tilde{P}_ε) (см. разд. 4).

В силу теоремы 15.2 для любого $t \geq 0$ имеем $p(t) > 0$. Так как все допустимые траектории x управляемой системы (15.11) положительные, то любая пара (x_*, p) , где x_* — оптимальная траектория в задаче (\tilde{P}_ε) , а p — соответствующая ей текущая сопряженная переменная, при всех значениях $t \geq 0$ принимает значения в положительном квадранте

$$\Gamma = \{(x, p) \in \mathbb{R}^2: x > 0, p > 0\}.$$

Построим гамильтонову систему принципа максимума для задачи (\tilde{P}_ε) в открытом множестве Γ (см. разд. 4).

Разрешая условие максимума (15.20) относительно управления u в множестве Γ , получаем, что максимум в (15.20) достигается в точке

$$u(x, p) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < p < \frac{1}{f(x)}, \\ 1 - \frac{1}{f(x)p}, & \text{если } \frac{1}{f(x)} \leq p \leq \frac{1}{\varepsilon f(x)}, \\ 1 - \varepsilon, & \text{если } p > \frac{1}{\varepsilon f(x)}, \end{cases} \quad (15.26)$$

и всюду в множестве Γ имеем

$$M(x, p) = (u(x, p)f(x) - \mu x)p + \ln(1 - u(x, p)) + \ln f(x).$$

В соответствии с условием (15.26) определим множества Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 :

$$\Gamma_1 = \left\{ (x, p) \in \Gamma : 0 < p < \frac{1}{f(x)} \right\}, \quad \Gamma_2 = \left\{ (x, p) \in \Gamma : \frac{1}{f(x)} \leq p \leq \frac{1}{\varepsilon f(x)} \right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\{ (x, p) \in \Gamma : p > \frac{1}{\varepsilon f(x)} \right\}.$$

Очевидно, справедливо равенство

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3.$$

В множестве Γ_1 гамильтонова система принципа максимума имеет вид (см. (15.26))

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t),$$

$$\dot{p}(t) = (\rho + \mu)p(t) - \frac{1}{f(x(t))} \frac{d}{dx} f(x(t)).$$

Таким образом, в множестве Γ_1 положений равновесия у гамильтоновой системы принципа максимума нет. Все ее траектории имеют в этом множестве экспоненциально убывающую координату x .

Определим функцию $y_1: (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ равенством

$$y_1(x) = \frac{1}{(\rho + \mu)f(x)} \frac{d}{dx} f(x) \quad \text{для любого } x > 0.$$

В силу неоклассических условий (1.23), (1.24) функция y_1 монотонно убывает,

$$y_1(x) \rightarrow \infty \quad \text{при } x \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad y_1(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

а равенство $y_1(x) = 1/f(x)$ выполняется в единственной точке \hat{x} , являющейся корнем уравнения

$$\frac{d}{dx} f(x) = \rho + \mu. \quad (15.27)$$

Определим кривую V_{12}^0 в множестве Γ_1 равенством

$$V_{12}^0 = \{(x, p) \in \Gamma_1 : x \geq \hat{x}, p = y_1(x)\}.$$

Кривая V_{12}^0 есть геометрическое место точек множества Γ_1 , где производная координаты p траекторий гамильтоновой системы принципа максимума обращается в нуль.

Кривая V_{12}^0 разбивает множество Γ_1 на два подмножества

$$V_1^{--} = \{(x, p) \in \Gamma_1 : x > 0, 0 < p < y_1(x)\},$$

$$V_1^{-+} = \left\{ (x, p) \in \Gamma_1 : \hat{x} < x < \infty, y_1(x) < p < \frac{1}{f(x)} \right\}.$$

Здесь V_1^{--} есть множество точек в Γ_1 , в которых производные обеих координат x и p траекторий гамильтоновой системы принципа максимума отрицательные, а V_1^{-+} есть множество точек в Γ_1 , в которых производная координаты x траекторий гамильтоновой системы отрицательная, а производная координаты p положительная.

Расположение множеств V_1^{--} , V_1^{-+} и кривой V_{12}^0 приведено на рис. 4.

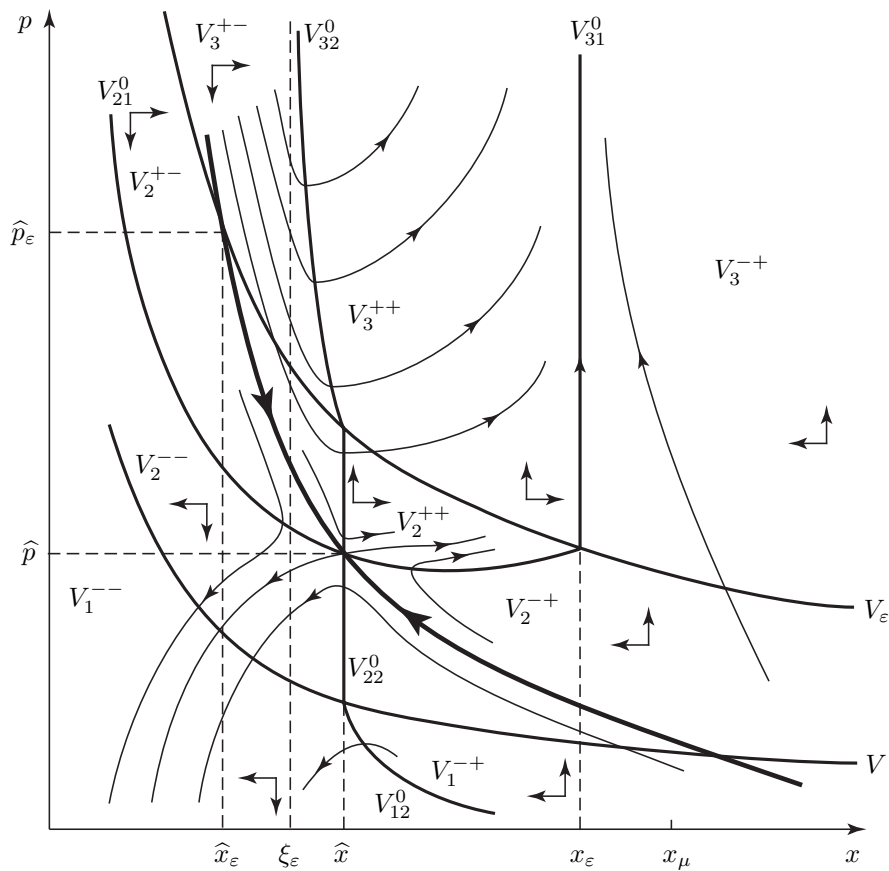


Рис. 4. Характер поведения траекторий гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина для задачи (\tilde{P}_ϵ)

Очевидно,

$$\Gamma_1 = V_{12}^0 \cup V_1^{--} \cup V_1^{-+}.$$

В множестве V_1^{--} обе координаты x и p решений гамильтоновой системы принципа максимума убывают. В множестве V_1^{-+} координата x убывает, а координата p возрастает. Смена знака производной координаты p у решений гамильтоновой системы происходит на кривой V_{12}^0 .

Если некоторая траектория гамильтоновой системы стартует в множестве V_1^{--} или имеет начальное состояние на кривой V_{12}^0 , то для всех последующих моментов времени эта траектория будет находиться в множестве V_1^{--} . При этом легко видеть, что на конечном интервале времени ее координата p обратится в нуль, что противоречит условию (15.17) принципа максимума (теорема 15.2). Таким образом, траектории гамильтоновой системы, попадающие в какой-то момент времени в множество V_1^{--} (или на кривую V_{12}^0), не могут соответствовать никаким оптимальным парам (x_*, u_*) в задаче (\tilde{P}_ϵ) .

Если траектория гамильтоновой системы стартует в множестве V_1^{-+} , то в силу экспоненциального убывания ее координаты x она либо попадет в какой-то момент времени на кривую V_{12}^0 и затем окажется в множестве V_1^{--} (такие траектории не могут соответствовать оптимальным парам в задаче (\tilde{P}_ϵ)), либо на конечном отрезке времени (правее точки \hat{x}) пересечет кривую

$$V = \left\{ (x, p) \in \Gamma : p = \frac{1}{f(x)} \right\},$$

покинет множество Γ_1 и попадет в множество Γ_2 .

Характер поведения траекторий гамильтоновой системы принципа максимума в множестве Γ_1 приведен на рис. 4. Заметим, что значение параметра ε не оказывает никакого влияния на траектории гамильтоновой системы в множестве Γ_1 .

В множестве $\text{int } \Gamma_2$ гамильтонова система принципа максимума имеет вид (см. (15.26))

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) - \mu x(t) - \frac{1}{p(t)}, \quad (15.28)$$

$$\dot{p}(t) = \left(\rho + \mu - \frac{d}{dx} f(x(t)) \right) p(t). \quad (15.29)$$

Определим функцию y_2 на интервале $(0, x_\mu)$, где x_μ — (единственный) корень уравнения

$$f(x) = \mu x,$$

равенством

$$y_2(x) = \frac{1}{f(x) - \mu x} \quad \text{для любого } 0 < x < x_\mu$$

и кривые V_{21}^0, V_{22}^0 в множестве Γ_2 следующим образом:

$$V_{21}^0 = \{(x, p) \in \Gamma_2: 0 < x < x_\mu, p = y_2(x)\}, \quad V_{22}^0 = \{(x, p) \in \Gamma_2: x = \hat{x}\}.$$

Напомним, что точка \hat{x} определена как корень уравнения (15.27).

Кривая V_{21}^0 есть геометрическое место точек в Γ_2 , в которых производная координаты x траекторий гамильтоновой системы принципа максимума обращается в нуль. Аналогичный смысл имеет кривая (отрезок) V_{22}^0 . На этом отрезке производная координаты p траекторий гамильтоновой системы принципа максимума обращается в нуль. Так как для любого $x \in (0, x_\mu)$ имеем

$$\frac{1}{f(x) - \mu x} > \frac{1}{f(x)},$$

то кривая V_{21}^0 лежит выше кривой V . В силу неоклассических условий (1.23), (1.24) кривая V_{21}^0 имеет единственное пересечение с кривой

$$V_\varepsilon = \left\{ (x, p) \in \Gamma: x > 0, p = \frac{1}{\varepsilon f(x)} \right\}.$$

Эта точка пересечения $(x_\varepsilon, p_\varepsilon)$ (она зависит от значения параметра ε) определяется равенствами

$$f(x_\varepsilon) = \frac{\mu x_\varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon f(x_\varepsilon)}.$$

Левее точки x_ε кривая V_{21}^0 лежит ниже кривой V_ε . Итак,

$$V_{21}^0 = \{(x, p) \in \Gamma: 0 < x \leq x_\varepsilon, p = y_2(x)\}.$$

Заметим, что в силу (1.23), (1.24) при всех достаточно малых значениях параметра ε имеем $\hat{x} < x_\varepsilon < x_\mu$ и $x_\varepsilon \rightarrow x_\mu$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В дальнейшем будем рассматривать ситуацию, когда параметр ε достаточно мал.

Кривая V_{21}^0 и отрезок V_{22}^0 имеют единственную точку пересечения $(\hat{x}, \hat{p}) \in \text{int } \Gamma_2$:

$$\hat{p} = \frac{1}{f(\hat{x}) - \mu \hat{x}}.$$

Эта точка (\hat{x}, \hat{p}) — единственное положение равновесия гамильтоновой системы принципа максимума в множестве Γ_2 .

Кривая V_{21}^0 и отрезок V_{22}^0 разбивают множество $\text{int } \Gamma_2$ на четыре подмножества:

$$V_2^{--} = \left\{ (x, p) \in \Gamma_2 : 0 < x < \hat{x}, \frac{1}{f(x)} < p < y_2(x) \right\},$$

$$V_2^{+-} = \left\{ (x, p) \in \Gamma_2 : 0 < x < \hat{x}, y_2(x) < p < \frac{1}{\varepsilon f(x)} \right\},$$

$$V_2^{++} = \left\{ (x, p) \in \Gamma_2 : \hat{x} < x < x_\varepsilon, y_2(x) < p < \frac{1}{\varepsilon f(x)} \right\},$$

$$V_2^{-+} = \left\{ (x, p) \in \Gamma_2 : \hat{x} < x < x_\varepsilon, \frac{1}{f(x)} < p < y_2(x) \right\} \cup \left\{ (x, p) \in \Gamma_2 : x \geq x_\varepsilon, \frac{1}{f(x)} < p < \frac{1}{\varepsilon f(x)} \right\}.$$

Здесь нижний индекс указывает на принадлежность множеству Γ_2 , а верхние индексы указывают, какие знаки имеют производные координат x и p решений гамильтоновой системы принципа максимума в соответствующих множествах. Расположение множеств V_2^{--} , V_2^{+-} , V_2^{-+} , V_2^{++} , кривой V_{21}^0 и отрезка V_{22}^0 приведено на рис. 4.

Очевидно, выполняется равенство

$$\Gamma_2 = V_{21}^0 \cup V_{22}^0 \cup V \cup V_\varepsilon \cup V_2^{--} \cup V_2^{+-} \cup V_2^{++} \cup V_2^{-+}.$$

В множестве V_2^{--} обе координаты x и p решений гамильтоновой системы убывают. На конечном интервале времени любое решение, стартующее из точки, принадлежащей множеству V_2^{--} , обязательно пересечет кривую V и попадет в множество V_1^{--} . Поэтому такие решения не могут соответствовать никаким оптимальным парам в задаче (\tilde{P}_ε) (см. приведенный выше анализ поведения траекторий гамильтоновой системы принципа максимума в множестве V_1^{--}).

В множестве V_2^{+-} координата x любого решения гамильтоновой системы возрастает (ее производная меняет знак на кривой V_{21}^0), а координата p убывает. Если траектория не пересекает на конечном интервале времени кривую V_{21}^0 , то она либо стремится к положению равновесия (\hat{x}, \hat{p}) при $t \rightarrow \infty$, либо на конечном интервале времени пересекает или отрезок V_{22}^0 и попадает в множество V_2^{++} , или кривую V_ε на промежутке $[\zeta_\varepsilon, \hat{x}]$, $\zeta_\varepsilon < \hat{x}$, где ζ_ε — корень уравнения

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{\rho + \mu}{\varepsilon},$$

и попадает в множество Γ_3 .

В множестве V_2^{++} обе координаты x и p любого решения гамильтоновой системы принципа максимума возрастают. В этом множестве любое решение гамильтоновой системы на конечном интервале времени пересекает кривую V_ε (на промежутке между точками \hat{x} и x_ε) и попадает в множество Γ_3 .

В множестве V_2^{-+} координата x любого решения гамильтоновой системы принципа максимума убывает (ее производная меняет знак на кривой V_{21}^0), а координата p возрастает. Таким образом, произвольная траектория гамильтоновой системы в этой области либо на бесконечном интервале времени стремится к положению равновесия (\hat{x}, \hat{p}) при $t \rightarrow \infty$, либо на конечном

интервале времени пересекает или кривую V_{21}^0 и попадает в множество V_2^{++} , или отрезок V_{22}^0 и попадает в множество V_2^{--} , или кривую V_ε и попадает в множество Γ_3 . Заметим, что если траектория пересекает отрезок V_{22}^0 и попадает в множество V_2^{--} , то она не может соответствовать никакому оптимальному режиму в задаче (\tilde{P}_ε) , поскольку в этом случае затем она попадет в множество V_1^{--} .

Рассмотрим положение равновесия (\hat{x}, \hat{p}) гамильтоновой системы принципа максимума в множестве Γ_2 . В силу следствия 15.2 это положение равновесия соответствует оптимальной стационарной траектории

$$x_*(t) \equiv \hat{x}, \quad u_*(t) \stackrel{\text{н.в.}}{=} 1 - \frac{1}{f(\hat{x})\hat{p}}$$

управляемой системы (15.11) в задаче (\tilde{P}_ε) с начальным условием $x_0 = \hat{x}$.

Линеаризовав гамильтонову систему (15.28), (15.29) в окрестности положения равновесия (\hat{x}, \hat{p}) , получаем следующую линейную систему с постоянными коэффициентами:

$$\dot{x}(t) = \left[\frac{d}{dx} f(\hat{x}) - \mu \right] (x - \hat{x}) + \frac{1}{\hat{p}^2} (p - \hat{p}), \quad (15.30)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{d^2}{dx^2} f(\hat{x}) \hat{p} (x - \hat{x}). \quad (15.31)$$

Здесь мы учли, что точка \hat{x} является корнем уравнения (15.27).

Матрица A линейной дифференциальной системы (15.30), (15.31) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(\hat{x}) - \mu & \frac{1}{\hat{p}^2} \\ -\frac{d^2}{dx^2} f(\hat{x}) \hat{p} & 0 \end{pmatrix},$$

а ее собственные значения $\lambda_{1,2}$ суть следующие:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dx} f(\hat{x}) - \mu \pm \sqrt{\left(\mu - \frac{d}{dx} f(\hat{x}) \right)^2 - \frac{4}{\hat{p}} \frac{d^2}{dx^2} f(\hat{x})} \right].$$

В силу неоклассических условий (1.23), (1.24) эти собственные значения — действительные числа разных знаков. Следовательно, в силу теоремы Гробмана–Хартмана (см. разд. 4, теорема 4.1) в некоторой окрестности Ω положение равновесия (\hat{x}, \hat{p}) гамильтоновой системы принципа максимума (15.28), (15.29) имеет седловой тип (см. [18, 59]). В этом случае имеются только две фазовые траектории гамильтоновой системы принципа максимума, асимптотически при $t \rightarrow \infty$ приближающиеся к положению равновесия (\hat{x}, \hat{p}) . Одна такая траектория (x_1, p_1) подходит к точке (\hat{x}, \hat{p}) слева из множества V_2^{+-} (будем называть эту траекторию (x_1, p_1) *левой равновесной* траекторией), а вторая такая траектория (x_2, p_2) подходит к точке (\hat{x}, \hat{p}) справа из множества V_2^{-+} (будем называть эту траекторию (x_2, p_2) *правой равновесной* траекторией).

Действительно, множество V_2^{--} лежит левее точки (\hat{x}, \hat{p}) (отрезка V_{22}^0) и x -координата в этом множестве убывает (см. рис. 4). Поэтому попасть в точку (\hat{x}, \hat{p}) из множества V_2^{--} нельзя. Аналогично множество V_2^{++} лежит правее точки (\hat{x}, \hat{p}) и координата x в этом множестве возрастает (см. рис. 4). Поэтому попасть в точку (\hat{x}, \hat{p}) из множества V_2^{++} нельзя. В окрестности Ω положение равновесия (\hat{x}, \hat{p}) имеет седловой тип, поэтому к нему асимптотически при $t \rightarrow \infty$ стремятся только две траектории (x_1, p_1) и (x_2, p_2) . В силу седлового характера положения

равновесия (\hat{x}, \hat{p}) эти траектории не могут подходить к точке (\hat{x}, \hat{p}) обе из одного множества V_2^{+-} или V_2^{-+} , так что одна из этих траекторий подходит к (\hat{x}, \hat{p}) слева из V_2^{+-} , а другая справа из V_2^{-+} (см. рис. 4).

Левее точки (\hat{x}, \hat{p}) в множестве V_2^{+-} функция x_1 монотонно возрастает. Поэтому на некотором интервале $(\hat{x}_\varepsilon, \hat{x})$ (пока траектория (x_1, p_1) лежит в множестве V_2^{+-}) время однозначно выражается через первую координату траектории (x_1, p_1) как некоторая гладкая функция $t = t_1(x)$, $x \in (\hat{x}_\varepsilon, \hat{x})$. Делая на интервале $(\hat{x}_\varepsilon, \hat{x})$ замену времени $t = t_1(x)$, получаем, что функция $p_1(x) = p_1(t_1(x))$ является на этом интервале решением дифференциального уравнения (см. (15.28), (15.29))

$$\frac{d}{dx}p(x) = \frac{(\rho + \mu - \frac{d}{dx}f(x))p(x)}{f(x) - \mu x - 1/p(x)} \quad (15.32)$$

с краевым условием

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}-0} p(x) = \hat{p}.$$

При этом, очевидно, выполняется неравенство

$$\frac{d}{dx}p_1(x) < 0 \quad \text{при } x \in (\hat{x}_\varepsilon, \hat{x}).$$

Несложный анализ дифференциального уравнения (15.32) показывает, что при продолжении решения p_1 влево до точки \hat{x}_ε при фиксированном значении параметра ε левая равновесная траектория (x_1, p_1) на конечном интервале времени пересекает кривую V_ε в некоторой точке $(\hat{x}_\varepsilon, \hat{p}_\varepsilon)$, покидает множество V_2^{+-} и попадает в множество Γ_3 . При этом для любого начального состояния $0 < x_0 < \hat{x}$ существует такое значение $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ левая равновесная траектория на полуинтервале $[x_0, \hat{x})$ целиком лежит в множестве V_2^{+-} . Итак, для любого начального условия $x_0 < \hat{x}$ в задаче (\tilde{P}_ε) при всех достаточно малых значениях параметра ε эти значения никакого влияния на левую равновесную траекторию на всем бесконечном полуинтервале $[0, \infty)$ не оказывают. В силу следствия 15.2 в этом случае левая равновесная траектория соответствует оптимальной паре (x_*, u_*) в задаче (\tilde{P}_ε) и оптимальное управление (в форме оптимального синтеза) $u_*(x)$ определяется равенством

$$u_*(x) = 1 - \frac{1}{f(x)p_1(x)} \quad \text{при } x \in [\hat{x}_\varepsilon, \hat{x}).$$

При этом для соответствующей оптимальной пары (x_*, u_*) имеем

$$x_*(t) \rightarrow \hat{x} - 0, \quad u_*(t) \rightarrow 1 - \frac{1}{f(\hat{x})\hat{p}} \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Можно показать, что левая равновесная траектория продолжается влево на весь интервал времени $(-\infty, \infty)$ и лежит в множестве Γ_3 при всех малых t . Ниже мы предполагаем, что левая равновесная траектория пересекает кривую V_ε в единственной точке $(\hat{x}_\varepsilon, \hat{p}_\varepsilon)$.

Правее точки (\hat{x}, \hat{p}) в множестве V_2^{-+} x -координата правого равновесного решения (x_2, p_2) монотонно убывает. Поэтому на некотором интервале (\hat{x}, \tilde{x}) (пока траектория (x_2, p_2) лежит в множестве V_2^{-+}) время однозначно выражается через координату x траектории (x_2, p_2) как некоторая гладкая функция $t = t_2(x)$, $x \in (\hat{x}, \tilde{x})$. Делая на интервале (\hat{x}, \tilde{x}) замену времени $t = t_2(x)$, получаем, что функция $p_2(x) = p_2(t_2(x))$ является на этом интервале решением дифференциального уравнения (15.32) с краевым условием

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}+0} p(x) = \hat{p}.$$

Нетрудно показать, что правая равновесная траектория при продолжении ее вправо на конечном интервале времени обязательно пересекает кривую V в некоторой точке (\tilde{x}, \tilde{p}) и в дальнейшем неограниченно может быть продолжена вправо (при $t \rightarrow -\infty$), при этом асимптотически она будет приближаться к координатной оси x . Значение параметра ε влияния на правую равновесную траекторию не оказывает. В силу следствия 15.2 для любого начального условия $x_0 > \hat{x}$ в задаче (\tilde{P}_ε) правая равновесная траектория соответствует оптимальной паре (x_*, u_*) и соответствующее оптимальное управление (в форме оптимального синтеза) $u_*(x)$ определяется равенством

$$u_*(x) = 1 - \frac{1}{f(x)p_2(x)} \quad \text{при } x \in (\hat{x}, \tilde{x}].$$

Правая равновесная траектория лежит в множестве Γ_1 при всех малых t . Ниже мы предполагаем, что правая равновесная траектория пересекает кривую V в единственной точке (\tilde{x}, \tilde{p}) . Таким образом, для всех достаточно больших начальных состояний x_0 оптимальное управление u_* сначала равно нулю на некотором начальном интервале времени вплоть до момента времени, когда правая равновесная траектория пересечет кривую V , затем на оставшемся бесконечном интервале времени оптимальное управление ненулевое. При этом для соответствующей оптимальной пары (x_*, u_*) имеем

$$x_*(t) \rightarrow \hat{x} + 0, \quad u_*(t) \rightarrow 1 - \frac{1}{f(\hat{x})\hat{p}} \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

В множестве Γ_3 гамильтонова система принципа максимума имеет вид (см. (15.26))

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (1 - \varepsilon)f(x(t)) - \mu x(t), \\ \dot{p}(t) &= \left(\rho + \mu - (1 - \varepsilon)\frac{d}{dx}f(x(t)) \right) p(t) - \frac{1}{f(x(t))} \frac{d}{dx}f(x(t)). \end{aligned}$$

Обозначим через $\xi_\varepsilon > 0$ (единственный) корень уравнения

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{\rho + \mu}{1 - \varepsilon}.$$

В силу неоклассических условий (1.23), (1.24) имеем (см. (15.27))

$$\xi_\varepsilon < \hat{x} \quad \text{и} \quad \xi_\varepsilon \rightarrow \hat{x} - 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$\rho + \mu < \frac{d}{dx}f(x) < \frac{\rho + \mu}{1 - \varepsilon} \quad \text{при } x \in (\xi_\varepsilon, \hat{x}). \quad (15.33)$$

Кроме того,

$$\frac{d}{dx}f(x) < \rho + \mu \quad \text{при } x \in (\hat{x}, \infty). \quad (15.34)$$

Определим функцию $y_3: (\xi_\varepsilon, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, прямую V_{31}^0 и кривую V_{32}^0 равенствами

$$y_3(x) = \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{f(x)[\rho + \mu - (1 - \varepsilon)\frac{d}{dx}f(x)]}, \quad x \in (\xi_\varepsilon, \infty),$$

$$V_{31}^0 = \{(x, p) \in \Gamma_3: x = x_\varepsilon\}, \quad V_{32}^0 = \{(x, p) \in \Gamma_3: x \in (\xi_\varepsilon, \infty), p = y_3(x)\}.$$

Вертикальная прямая V_{31}^0 есть геометрическое место точек в Γ_3 , в которых производная координаты x траекторий гамильтоновой системы принципа максимума обращается в нуль, а

кривая V_{32}^0 есть геометрическое место точек в множестве Γ_3 , в которых производная координаты p траекторий гамильтоновой системы принципа максимума обращается в нуль.

В точке \hat{x} справедливо равенство

$$y_3(\hat{x}) = \frac{1}{\varepsilon f(\hat{x})}. \quad (15.35)$$

Далее для любого $x \in (\xi_\varepsilon, \hat{x})$ в силу условия (15.33) имеем

$$y_3(x) > \frac{\rho + \mu}{f(x)[\rho + \mu - (1 - \varepsilon)(\rho + \mu)]} = \frac{1}{\varepsilon f(x)}.$$

Для любого $x \in (\hat{x}, \infty)$ в силу неравенства (15.34) получаем

$$y_3(x) < \frac{\rho + \mu}{f(x)[\rho + \mu - (1 - \varepsilon)(\rho + \mu)]} = \frac{1}{\varepsilon f(x)}.$$

Таким образом, прямая V_{31}^0 и кривая V_{32}^0 не пересекаются. Следовательно, гамильтонова система принципа максимума не имеет положений равновесия в множестве Γ_3 . Расположение прямой V_{31}^0 и кривой V_{32}^0 в множестве Γ_3 приведено на рис. 4.

Прямая V_{31}^0 и кривая V_{32}^0 разбивают множество Γ_3 на три подмножества (см. рис. 4):

$$\begin{aligned} V_3^{+-} &= \{(x, p) \in \Gamma_3: x \leq \xi_\varepsilon\} \cup \left\{ (x, p) \in \Gamma_3: \xi_\varepsilon < x < \hat{x}, \frac{1}{\varepsilon f(x)} < p < y_3(x) \right\}, \\ V_3^{++} &= \{(x, p) \in \Gamma_3: \xi_\varepsilon < x < \hat{x}, p > y_3(x)\} \cup \left\{ (x, p) \in \Gamma_3: \hat{x} \leq x < x_\varepsilon, p > \frac{1}{\varepsilon f(x)} \right\}, \\ V_3^{-+} &= \left\{ (x, p) \in \Gamma_3: x > x_\varepsilon, p > \frac{1}{\varepsilon f(x)} \right\}. \end{aligned}$$

В подмножестве V_3^{+-} координата x возрастает, а координата p убывает. В подмножестве V_3^{++} обе координаты x и p возрастают. В подмножестве V_3^{-+} координата x убывает, а координата p возрастает.

Пусть (x, p) — траектория гамильтоновой системы принципа максимума, определенная на некотором интервале времени (τ_1, τ_2) и лежащая в множестве V_3^{+-} . Так как в множестве V_3^{+-} координата x монотонно возрастает, то время однозначно выражается через координату x траектории (x, p) как некоторая гладкая функция $t = t_3(x)$, $x \in (x(\tau_1), x(\tau_2))$, откуда получаем, что в множестве V_3^{+-} функция $p(x) = p(t_3(x))$, $x \in (x(\tau_1), x(\tau_2))$, является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}p(x) = \frac{(\rho + \mu - (1 - \varepsilon)\frac{d}{dx}f(x))p(x) - \frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)}{(1 - \varepsilon)f(x) - \mu x}.$$

Несложно показать, что в случае малых начальных данных любое решение данного дифференциального уравнения может быть продолжено в множестве V_3^{+-} влево до сколь угодно малых значений x .

Как мы предположили выше, левая равновесная траектория (x_1, p_1) при продолжении ее влево в множестве V_2^{+-} пересекает кривую V_ε в некоторой точке $(\hat{x}_\varepsilon, \hat{p}_\varepsilon)$ и попадает в множество V_3^{+-} . На интервале $(-\infty, \tau_\varepsilon)$ она лежит в множестве V_3^{+-} ; при $x_1(\tau_\varepsilon) = \hat{x}_\varepsilon$ она пересекает кривую V_ε ; в дальнейшем при всех значениях t она принадлежит множеству V_2^{+-} .

Если траектория гамильтоновой системы принципа максимума стартует из множества V_3^{+-} ниже левого равновесного решения (x_1, p_1) , то она сначала попадает на конечном интервале времени в множество V_2^{+-} и затем в множество V_1^{--} . Такие траектории не могут соответствовать оптимальной паре (x_*, p_*) в задаче (\tilde{P}_ε) ни при каком начальном значении $0 < x_0 < \hat{x}_\varepsilon$.

Если траектория гамильтоновой системы принципа максимума стартует из множества V_3^{+-} выше левого равновесного решения (x_1, p_1) , то на конечном интервале времени она попадает либо в множество V_2^{+-} , либо в множество V_3^{++} . В любом случае такая траектория гамильтоновой системы не может соответствовать никакой оптимальной паре (x_*, u_*) в задаче (\tilde{P}_ε) , поскольку на некотором интервале времени она имеет направление движения (вправо от точки (\hat{x}, \hat{p})), противоположное направлению движения правой равновесной траектории (x_2, p_2) гамильтоновой системы принципа максимума, и система не имеет положений равновесия или вертикальных фазовых прямых на интервале $(\hat{x}, \hat{x}_\varepsilon)$, лежащем правее точки (\hat{x}, \hat{p}) (см. разд. 4, теорема 4.4).

Если траектория гамильтоновой системы принципа максимума стартует из множества V_3^{-+} или из множества V_3^{++} , то она остается в множестве V_3^{-+} или соответственно V_3^{++} при всех значениях $t \geq 0$, асимптотически приближаясь к прямой V_{31}^0 при $t \rightarrow \infty$ (см. рис. 4). Прямая V_{31}^0 сама является фазовой траекторией гамильтоновой системы принципа максимума. Движение по ней происходит вертикально вверх. Такие траектории не могут соответствовать никакой оптимальной паре в задаче (\tilde{P}_ε) ни для какого начального условия $x_0 > 0$, поскольку при асимптотическом приближении траектории x гамильтоновой системы принципа максимума к прямой V_{31}^0 при $t \rightarrow \infty$ (в множестве V_3^{-+} или V_3^{++}) и при движении по самой этой прямой нарушается условие трансверсальности на бесконечности (15.19). Действительно, так как в этом случае $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_\varepsilon$, то условие (15.19) эквивалентно условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} p(t) = 0. \quad (15.36)$$

Далее так как $f(x_\mu) = \mu x$ и $x_\varepsilon \rightarrow x_\mu$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то всюду в некоторой окрестности точки x_ε при малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$\frac{d}{dx} f(x) < \mu - \varepsilon.$$

Кроме того, всюду в множестве Γ_3 выполняется неравенство

$$\frac{1}{f(x)} < \varepsilon p.$$

Учитывая последние два неравенства, выполняющиеся при приближении траектории (x, p) к прямой V_{31}^0 или при движении по этой прямой, при всех достаточно больших значениях $t > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{-\rho t} p(t)) &= e^{-\rho t} \left(\mu - (1 - \varepsilon) \frac{d}{dx} f(x(t)) \right) p(t) - e^{-\rho t} \frac{1}{f(x(t))} \frac{d}{dx} f(x(t)) > \\ &> e^{-\rho t} \left(\mu - \frac{d}{dx} f(x(t)) \right) p(t) > \varepsilon e^{-\rho t} p(t). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} p(t) = \infty,$$

что противоречит условию (15.36). Таким образом, траектории гамильтоновой системы принципа максимума, попадающие в множества V_3^{-+} и V_3^{++} , а также траектория, идущая по прямой V_{31}^0 , не могут соответствовать никакой оптимальной паре в задаче (\tilde{P}_ε) ни при каком начальном условии $x_0 > 0$.

Подведем итоги анализа гамильтоновой системы принципа максимума для задачи (\tilde{P}_ε) при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon > 0$.

В силу проведенного анализа гамильтонова система принципа максимума имеет единственное положение равновесия (\hat{x}, \hat{p}) , не зависящее от параметра ε . Это положение равновесия соответствует в силу следствия 15.2 оптимальной паре в задаче (\tilde{P}_ε) с начальным условием $x_0 = \hat{x}$. У гамильтоновой системы принципа максимума имеются только две траектории, асимптотически стремящиеся к положению равновесия (\hat{x}, \hat{p}) при $t \rightarrow \infty$, — это левая равновесная траектория (x_1, p_1) и правая равновесная траектория (x_2, p_2) .

Левая равновесная траектория (x_1, p_1) определена на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$, ее x -координата монотонно возрастает, а p -координата монотонно убывает, и они удовлетворяют краевым условиям

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} p_1(t) = \infty; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \hat{x}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = \hat{p}.$$

При этом для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\hat{x}_\varepsilon > 0$, что $p_1(t) > 1/(\varepsilon f(x_1(t)))$ для любого такого t , что $x_1(t) < \hat{x}_\varepsilon$, и $p_1(t) < 1/(\varepsilon f(x_1(t)))$ для любого такого t , что $x_1(t) > \hat{x}_\varepsilon$.

Левая равновесная траектория (x_1, p_1) однозначно определяет функцию $p_1(x) = p_1(t_1(x))$ переменной $x \in (\hat{x}_\varepsilon, \hat{x})$, которая является решением дифференциального уравнения (15.32) (на интервале $(\hat{x}_\varepsilon, \hat{x})$) с краевым условием

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}-0} p(x) = \hat{p}.$$

Правая равновесная траектория (x_2, p_2) определена на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$, ее x -координата монотонно убывает, а p -координата монотонно возрастает. Правая равновесная траектория (x_2, p_2) удовлетворяет краевым условиям

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_2(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} p_2(t) = 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \hat{x}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_2(t) = \hat{p}.$$

При этом правая равновесная траектория пересекает кривую V в некоторой точке (\tilde{x}, \tilde{p}) при $t \rightarrow -\infty$.

Правая равновесная траектория (x_2, p_2) однозначно определяет функцию $p_2(x) = p_2(t_2(x))$ переменной $x \in (\hat{x}, \tilde{x})$, которая является решением дифференциального уравнения (15.32) (на интервале (\hat{x}, \tilde{x})) с краевым условием

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}+0} p(x) = \hat{p}.$$

В силу проведенного анализа необходимым условиям оптимальности (теорема 15.2) для любого начального состояния x_0 удовлетворяет единственная траектория гамильтоновой системы принципа максимума. В зависимости от начального условия x_0 это либо правая равновесная траектория, либо левая равновесная траектория, либо стационарная траектория (\hat{x}, \hat{p}) . Все остальные траектории гамильтоновой системы не удовлетворяют условиям теоремы 15.2, поскольку либо у них на конечном интервале времени координата p обращается в нуль и они покидают множество Γ , либо на некотором интервале времени они имеют направление движения, противоположное направлению движения левой равновесной или правой равновесной траектории (см. рис. 4), что противоречит теореме 4.4, либо они асимптотически приближаются при $t \rightarrow \infty$ к прямой V_{31}^0 (или движутся по ней) и при этом нарушается условие трансверсальности (15.19).

Таким образом, необходимые условия оптимальности (теорема 15.2) однозначно характеризуют оптимальное управление в задаче (\tilde{P}_ε) (в форме оптимального синтеза $u_*(x)$ [19]) в

терминах левой и правой равновесных траекторий $p_1(x)$ и $p_2(x)$. В случае, когда левая равновесная траектория пересекает кривую V_ε в единственной точке $(\hat{x}_\varepsilon, \hat{p}_\varepsilon)$, а правая равновесная траектория пересекает кривую V в единственной точке (\tilde{x}, \tilde{p}) , мы имеем

$$u_*(x) = \begin{cases} 1 - \varepsilon & \text{при } x \in (0, \hat{x}_\varepsilon), \\ 1 - \frac{1}{p_1(x)f(x)} & \text{при } x \in [\hat{x}_\varepsilon, \hat{x}), \\ 1 - \frac{1}{f(\hat{x})\hat{p}} & \text{при } x = \hat{x}, \\ 1 - \frac{1}{p_2(x)f(x)} & \text{при } x \in (\hat{x}, \tilde{x}), \\ 0 & \text{при } x \in [\tilde{x}, \infty). \end{cases}$$

Для произвольного начального состояния $x_0 > 0$ оптимальный синтез $u_*(x)$, $x \in (0, \infty)$, однозначно определяет оптимальную траекторию x_* в задаче (\tilde{P}_ε) как решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = u_*(x(t))f(x(t)) - \mu x(t), \quad x(0) = x_0$$

и соответствующее оптимальное управление u_* как функцию

$$u_*(t) = u_*(x_*(t)), \quad t \in [0, \infty).$$

Для любого заданного начального состояния x_0 при всех достаточно малых значениях параметра ε порожденная этим оптимальным синтезом оптимальная пара (x_*, u_*) в задаче (\tilde{P}_ε) от значения параметра ε не зависит.

16. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ КОММЕНТАРИИ

Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени (как для задачи на минимум) впервые был получен в монографии [19] в случае $\rho = 0$ при дополнительном краевом условии на бесконечности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_1$$

и в предположении, что интеграл в (1.3) сходится абсолютно. При этом доказательство принципа максимума, данное в [19], остается справедливым и при отсутствии каких-либо терминальных ограничений на поведение траекторий управляемой системы на бесконечности.

В монографии [19] отмечена основная трудность перенесения стандартного доказательства принципа максимума, основанного на применении игольчатых вариаций, на случай задачи на бесконечном полуинтервале времени. Эта трудность состоит в том, что «построения предельного конуса в этом случае не происходит, так как точки t_1 (правого конца отрезка времени) не существует». Для преодоления этой трудности в [19] предложен простой прием адаптации конструкции предельного конуса на случай бесконечного полуинтервала времени. Для этого предлагается производить перенос главной линейной части приращения проварьированной траектории (посредством решения системы уравнений в вариациях) не в конечный момент времени t_1 (которого не существует), а в начальный момент времени $t_0 = 0$. Таким образом строится начальный конус, который эквивалентен предельному и позволяет провести доказательство принципа максимума (подробнее см. [19]). Данная конструкция позволяет получить основные соотношения принципа максимума — условие максимума и сопряженную систему. Вопрос же о выполнении каких-либо дополнительных условий трансверсальности для

сопряженной переменной (в случае задачи со свободным правым концом) при таком способе доказательства принципа максимума остается открытым.

Для задач оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени в случае положительного параметра дисконтирования³ ($\rho > 0$) основные соотношения принципа максимума были доказаны в работе [58] посредством введения последовательности вспомогательных задач на конечных интервалах времени $[0, T_k]$, $k = 1, 2, \dots$ ($T_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$), в каждой из которых рассматриваемая оптимальная (в исходной задаче (P)) пара (x_*, u_*) также оптимальна. При доказательстве теоремы 3.1 (см. разд. 3) мы в основном следуем [58].

В работах [58] и [78], по-видимому, впервые было обращено внимание на возможность нарушения “естественных” условий трансверсальности (3.17) и (3.18) в задачах на бесконечном полуинтервале времени, а в случае $\rho = 0$ были приведены соответствующие примеры. В дальнейшем многими авторами неоднократно предпринимались попытки охарактеризовать возможное поведение сопряженной переменной на бесконечности.

В работе [35] для линейной задачи $(P2)$ (см. разд. 12) с положительным параметром дисконтирования ($\rho > 0$) и негладкой функцией мгновенной полезности g (предполагается, что функция g локально липшицева по совокупности переменных x, u) был рассмотрен случай доминирующего дисконтирующего множителя в форме

$$\rho > (r + 1)\lambda_F$$

(см. аналогичное условие (A7) в разд. 12). Здесь λ_F — максимальная действительная часть собственных значений матрицы F , а r — неотрицательное число, характеризующее рост функции g в терминах ее обобщенного градиента ∂g (в смысле Кларка [50]; подробнее см. [35]):

$$\|\zeta\| \leq \kappa(1 + \|(x, u)\|^r) \quad \text{для любых } \zeta \in \partial g(x, u), \quad x \in G, \quad u \in U.$$

Заметим, что обобщенный градиент ∂g здесь берется по совокупности переменных x, u , в то время как условие (A7) сформулировано в терминах частной производной $\partial g/\partial x$ функции g .

В случае $r > 0$ в [35] предложен вариант принципа максимума Понтрягина в нормальной форме, содержащий характеристизацию поведения сопряженной переменной ψ в терминах сходимости следующего несобственного интеграла:

$$\int_0^{\infty} e^{(q-1)\rho t} \|\psi(t)\|^q dt < \infty. \quad (16.1)$$

Здесь постоянная $q > 1$ определяется равенством $1/q + 1/(r + 1) = 1$. Как отмечено в [35], выполнение условия (16.1) влечет выполнение предельного условия в условиях трансверсальности (3.17).

Покажем, что неравенство (16.1) вытекает из поточечной оценки (12.21) (см. следствие 12.2). Действительно, в силу следствия 12.2 для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} e^{(q-1)\rho t} \|\psi(t)\|^q &\leq \kappa_3 e^{\frac{\rho t}{r}} \left(e^{-\frac{(\rho-\varepsilon)(r+1)t}{r}} + e^{-\frac{(\rho-r\lambda_F-\varepsilon)(r+1)t}{r}} \right) \leq \\ &\leq \kappa_3 \left(e^{-(\rho-\varepsilon\frac{r+1}{r})t} + e^{-(\rho-(r+1)\lambda_F-\varepsilon\frac{r+1}{r})t} \right), \end{aligned}$$

³В отличие от задачи на конечном интервале времени в задаче на бесконечном полуинтервале неавтономный случай положительного параметра дисконтирования $\rho > 0$ не сводится к автономному случаю при помощи стандартного приема введения дополнительной фазовой переменной $x^{n+1} \equiv t$, поскольку этот прием использует условия трансверсальности в правом конце, которые в случае бесконечного полуинтервала, вообще говоря, не выполняются (условия трансверсальности нужны здесь для получения нетривиального набора множителей Лагранжа; подробнее см. [19]).

где постоянная κ_3 зависит только от ε . Поэтому, выбирая

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{r\rho}{r+1}, \frac{r(\rho - (r+1)\lambda_F)}{r+1} \right\},$$

получаем условие (16.1) как следствие неравенства (12.21).

Отметим, что в [35] приведен пример, иллюстрирующий роль условия доминирования дисконтирующего множителя в выполнении условий трансверсальности (3.17).

Другой вариант необходимых условий оптимальности первого порядка, содержащий условие трансверсальности на бесконечности (3.18), был получен в работе [42] для задачи динамической оптимизации на бесконечном полуинтервале времени вида

$$(x(t), \dot{x}(t)) \in K, \quad (16.2)$$

$$x(0) = x_0, \quad (16.3)$$

$$J(x) = \int_0^{\infty} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \rightarrow \max. \quad (16.4)$$

Основные предположения состоят в том, что множество $K \subset \mathbb{R}^{2n}$ выпуклое, замкнутое и имеет непустую внутренность, функция $g: K \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ вогнутая по совокупности переменных x, \dot{x} при всех $t \geq 0$, а оптимальная траектория x_* лежит во внутренней части множества $\text{dom } V(\cdot, t)$ для любого $t \geq 0$. Здесь

$$\text{dom } V(\cdot, t) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : V(x_0, t) < \infty\}$$

— эффективное множество текущей функции оптимального значения V :

$$V(x_0, t) = \sup \left\{ \int_t^{\infty} g(x(s), \dot{x}(s), s) ds : (x(s), \dot{x}(s)) \in K \text{ при } s \geq t; x(t) = x_0 \right\}.$$

При сделанных предположениях задача (16.2)–(16.4) обладает свойством “полной выпуклости”. В частности, текущая функция оптимального значения V в ней вогнутая по переменной x_0 для любого $t \geq 0$, а множество всех допустимых траекторий выпуклое в пространстве $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ для любого $T > 0$.

Основной результат [42] утверждает, что существует такая соответствующая оптимальной траектории x_* (текущая) сопряженная переменная p , что

$$p(t) \in \partial V(x_*(t), t) \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (16.5)$$

Здесь $\partial V(x_*(t), t)$ — субдифференциал в смысле выпуклого анализа вогнутой функции $V(\cdot, t)$ в точке $x_*(t)$ при фиксированном t , т.е.

$$\partial V(x_*(t), t) = \{q \in \mathbb{R}^n : \langle q, x - x_*(t) \rangle \geq V(x, t) - V(x_*(t), t), x \in \text{dom } V(\cdot, t)\}.$$

Далее в [42] показано, что при выполнении ряда дополнительных предположений (в частности, о неотрицательности фазового вектора x и монотонности функции g по переменной \dot{x}) включение (16.5) влечет выполнение некоторого обобщенного уравнения Эйлера и условия трансверсальности на бесконечности вида (3.18) (подробнее см. [42]).

Без предположений выпуклости в ситуации, когда оптимальная траектория x_* регулярная и внутренняя, а управляемая система удовлетворяет некоторому условию однородности, вопрос о выполнении условий трансверсальности вида (3.18) рассматривался также в работе [64].

Краевое условие для гамильтониана вида (см. (3.26))

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(x_*(t), t, \psi(t), \psi^0) = 0 \quad (16.6)$$

для задачи оптимального управления (P) (без каких-либо дополнительных предположений) было впервые получено в работе [70]. В рамках задачи (P) данное условие эквивалентно условию стационарности

$$H(x_*(t), t, \psi(t), \psi^0) = \rho \psi^0 \int_t^{\infty} e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s)) ds \quad \text{для любого } t \geq 0 \quad (16.7)$$

(см. условие (3.27)). Данное условие стационарности аналогично условию трансверсальности по времени в задачах со свободным конечным временем [19]. Однако в более общих, чем (P), задачах оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени (например, в случае, когда ослаблены предположения о гладкости) условие стационарности (16.7) может оказаться сильнее условия (16.6).

Заметим, что в [70] приведен пример задачи (P) с положительным параметром дисконтирования ($\rho > 0$), в которой с необходимостью выполняется равенство $\psi^0 = 0$ (см. пример 6.1).

В работе [83] условие стационарности (16.7) получено в случае негладкой задачи оптимального управления (P) (при условии липшицевости функций f и g по фазовой переменной x и ограниченности функции g). При следующем дополнительном условии типа доминирования дисконтирующего множителя (см. разд. 12, условие (A7)):

$$\rho > \max \left\{ 0, \sup_{x, y \in G, u \in U} \frac{\langle x - y, f(x, u) - f(y, u) \rangle}{\|x - y\|^2} \right\} \quad (16.8)$$

в [83] доказан вариант принципа максимума, содержащий условия трансверсальности (3.17). Условие (16.8), очевидно, выполняется, если $\rho > L$, где L — постоянная Липшица векторной функции f по фазовой переменной x .

В случае задачи ($P2$) оптимального управления для линейной системы условие (16.8) принимает вид $\rho > \|F\|$, что обременительнее использованного в разд. 12 условия $\rho > (r + 1)\lambda_F$ (см. следствие 12.2). Действительно, предположение о липшицевости функции g влечет ограниченность градиента $\partial g / \partial x$, т.е. в данном случае $r = 0$. Кроме того, для максимальной действительной части λ_F собственных значений матрицы F выполняется неравенство $\lambda_F \leq \|F\|$, причем последнее неравенство может быть строгим. Следовательно, в случае задачи ($P2$) (с липшицевой функцией g) условие (16.8) влечет выполнение неравенства $\rho > (r + 1)\lambda_F$.

В работе [79] асимптотическое поведение сопряженной переменной характеризуется в терминах показателей Ляпунова (соответствующие определения теории устойчивости см. в [14] и разд. 12). Основное предположение [79] состоит в том, что система уравнений в вариациях, рассматриваемая вдоль заданной оптимальной пары (x_*, u_*) , регулярная. В этом случае при некоторых дополнительных предположениях⁴ в работе [79] доказана неположительность характеристического показателя Ляпунова сопряженной переменной ψ , отвечающей в силу принципа максимума Понтрягина оптимальной паре (см. [79, Theorem 3.1]). Заметим, что данный результат, вообще говоря, не гарантирует ни нормальности рассматриваемой задачи оптимального управления, ни выполнения предельных условий на бесконечности в условиях трансверсальности (3.17) или (3.18). Как отмечено в [79], условие регулярности системы уравнений в вариациях играет здесь существенную роль (см. соответствующий пример в [79]).

⁴Заметим, что в формулировке основного результата в [79] пропущено используемое в доказательстве условие ограниченности градиента подынтегральной функции: $\|b(t)\| \leq K$ при п.в. $t \geq 0$ (см. [79, Theorem 3.1]). Пример 10.4 из [75] иллюстрирует существенность данного условия.

В работе [75] рассматривается (более общая, чем (P)) задача оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени (как задача на минимум). Ее постановка включает неавтономную негладкую управляемую систему общего вида

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)), \quad u(t) \in U,$$

заданное начальное условие $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ и терминальные краевые ограничения типа равенств и неравенств на бесконечности, наложенные на часть фазовых координат $y^i(\infty)$, $i = 1, \dots, m$ (предполагается, что $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $m < n$, а соответствующие пределы $y^i(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y^i(t)$, $i = 1, \dots, m$, существуют). Рассмотренная в [75] задача состоит в минимизации терминального функционала вида

$$J(\pi y(\infty)) = \sum_{i=1}^m \nu_i y^i(\infty).$$

Здесь π — $(m \times n)$ -матрица оператора проектирования в \mathbb{R}^n на подпространство первых m координат; ν_i , $i = 1, \dots, m$, — действительные числа.

Рассмотренная в главе 1 задача (P) легко сводится к задаче, рассмотренной в [75], посредством расширения фазового пространства \mathbb{R}^n . Для этого нужно ввести новый фазовый вектор $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ и положить $y^{i+1}(t) \equiv x^i(t)$, $i = 1, \dots, n$, а координату $y^1(t)$ определить равенством

$$\dot{y}^1(t) = -e^{-\rho t} g(x(t), u(t)), \quad y^1(0) = 0.$$

В этом случае оператор $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^1$ есть оператор проектирования на координатную ось y^1 .

При выполнении условия роста

$$\max_{0 \leq s \leq t} |\pi A(t)K(t, s)| \leq \Phi(t) \quad \text{для любого } t \geq 0 \quad (16.9)$$

и некоторых других предположениях в [75] получен вариант принципа максимума Понтрягина, содержащий дополнительные краевые условия на поведение сопряженной переменной на бесконечности, причем в случае задачи (P) со свободным правым концом эти условия принимают вид (3.17). Здесь A есть $(n \times n)$ -матричная функция, все компоненты которой — локально суммируемые на интервале $[0, \infty)$ функции, причем все компоненты A , лежащие вне главной диагонали, неотрицательные; K — матрица Коши линейной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t);$$

Φ — неотрицательная суммируемая функция. Предполагается, что для заданной оптимальной пары (y_*, u_*) и для любого $v \in \partial_x f(t, x, u_*(t))$ из некоторой окрестности $x_*(t)$ при п.в. $t \geq 0$ выполняются неравенства

$$v_i^i \leq a_i^i(t), \quad i = 1, \dots, n; \quad |v_i^j| \leq a_i^j, \quad i, j = 1, \dots, n: \quad i \neq j.$$

Заметим, что используемое в [75] условие роста (16.9) родственно условию доминирования дисконтирующего множителя (см. разд. 12, условие $(A7)$), однако оно формулируется в терминах мажорирующей матричной функции A с неотрицательными внедиагональными элементами. В случае задачи $(P2)$ для линейной управляемой системы (см. разд. 12) последнее обстоятельство делает условие роста (16.9) более жестким, чем условие доминирования дисконтирующего множителя $(A7)$.

Пример 16.1. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x}^1(t) = e^{-\rho t} x^2(t), \quad (16.10)$$

$$\dot{x}^2(t) = -x^3(t), \quad (16.11)$$

$$\dot{x}^3(t) = x^2(t) + u(t), \quad u(t) \in U = [-1, 1], \quad (16.12)$$

$$x^1(0) = 0, \quad x^2(0) = 1, \quad x^3(0) = 0, \quad (16.13)$$

$$J(\pi(x(\infty))) = x^1(\infty) \rightarrow \min. \quad (16.14)$$

Очевидно, задача (16.10)–(16.14) может быть рассмотрена как задача (P2) с линейной управляемой системой (16.11), (16.12), начальными условиями (16.13) и интегральным функционалом полезности

$$J(x) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (-x^2) dt \rightarrow \max.$$

Поскольку все собственные значения матрицы системы (16.11), (16.12) имеют нулевые действительные части, то условие доминирования дисконтирующего множителя (A7) в этом случае выполняется для любого $\rho > 0$. Следовательно, для любого $\rho > 0$ задача (16.10)–(16.14) удовлетворяет условиям следствия 12.2, которое дает в этом случае однозначное описание сопряженной переменной ψ , фигурирующей в соотношениях принципа максимума для задачи (16.10)–(16.14). Однако условие (16.9) в случае задачи (16.10)–(16.14) выполняется, только если $\rho > 1$. Действительно, мажорирующая матрица A для задачи (16.10)–(16.14) следующая:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\rho t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Отсюда получаем, что для любых $t, s \geq 0$ справедливо равенство

$$\pi A(t)K(t, s) = \frac{1}{2} \left(0, e^{-(\rho-t+s)} + e^{-(\rho+t+s)}, e^{-(\rho-t+s)} - e^{-(\rho+t+s)} \right).$$

Следовательно, условие (16.9) в данном случае эквивалентно неравенству $\rho > 1$.

Для доказательства принципа максимума для задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени в работе [75] используется аппроксимационный подход, основанный на методах негладкого анализа [50]. Сначала в случае задачи со свободным правым концом показано, что оптимальная пара (x_*, u_*) является “почти” оптимальной в некоторых задачах оптимального управления на конечных интервалах времени $[0, T_k]$, где $T_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. При помощи вариационного принципа Экланда (см. [50]) для рассматриваемой оптимальной пары получается набор множителей Лагранжа, соответствующих ей в силу варианта принципа максимума Понтрягина для негладких управляемых систем на конечных интервалах времени $[0, T_k]$, $k = 1, 2, \dots$ (см. [50]). Отсюда при помощи предельного перехода при $k \rightarrow \infty$ получаются необходимые условия оптимальности для рассматриваемой оптимальной пары (x_*, u_*) в задаче на бесконечном полуинтервале со свободным правым концом. Рассмотрение общего случая сводится к случаю задачи со свободным правым концом.

Использованный в главе 1 аппроксимационный подход к получению необходимых условий оптимальности первого порядка для задачи (P) оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени отличается от подхода, используемого в [75]. Основное отличие состоит

в том, что при его реализации никакого вариационного анализа оптимального в задаче (P) управления не производится. Исходная неклассическая задача (P) приближается специально построенной последовательностью $\{(P_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, качественно более простых классических задач, для которых известен *полный* набор необходимых условий оптимальности — соотношения принципа максимума Понтрягина [19]. При этом на любом конечном интервале $[0, T]$, $T > 0$, последовательность оптимальных управлений в аппроксимирующих задачах $\{(P_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$, сходится к заданному оптимальному управлению в задаче (P) , необходимые условия оптимальности для которого получаются в результате предельного перехода при $k \rightarrow \infty$ (по параметрам возмущения) в соотношениях принципа максимума для аппроксимирующих задач (P_k) . В этом смысле применяемый в главе 1 метод аппроксимаций является реализацией (в случае задачи (P)) широко используемого для разрешения особенностей *метода возмущений*. Обсуждение метода возмущений применительно к вариационным задачам см. в [4, 11, 26]. Для получения необходимых условий оптимальности первого порядка в некоторых неклассических задачах оптимального управления (задачах с негладкими данными, задачах с фазовыми ограничениями и др.) метод возмущений использовался в [4–7, 10, 17, 25].

Глава 2

ОПТИМАЛЬНЫЙ РОСТ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЯ

В этой главе в качестве содержательной и весьма обширной иллюстрации теории, развитой в главе 1, мы изучим задачу об оптимальном регулировании трудовыми ресурсами, направляемыми в научно-исследовательский сектор экономики. Данная задача возникает в теории эндогенного экономического роста при обращении к процессам обмена знаниями (технологиями) между макроэкономическими системами (странами). Интерес к такого рода процессам вызван тем широко распространенным среди экономистов представлением, что абсорбция и утилизация знаний — важные движущие силы современного технологического прогресса. Простейшая ситуация, сопряженная с необходимостью оптимизировать технологическую динамику с учетом потока “внешних” знаний, моделируется как задача об оптимизации экономического роста технологического последователя — страны, научно-исследовательский сектор которой во многом ориентирован на абсорбирование части знаний, производимых страной — технологическим лидером. Именно эта задача в центре нашего внимания.

17. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Теория эндогенного экономического роста — сравнительно новое направление в экономике. Первые работы в этой области датированы серединой 80-х годов прошлого века (см. [22, 39, 57, 73]). В отличие от классической теории экономического роста [80] теория эндогенного экономического роста трактует феномен экономического прогресса (в том числе наблюдаемый в разных странах рост потребления на душу населения) не как результат какого-либо внешнего воздействия, а как проявление внутренних свойств экономики. Иначе говоря, в теории эндогенного роста феномен технологического прогресса понимается не как привнесенный извне (*экзогенный*), а как имеющий сугубо внутреннюю природу (*эндогенный*) фактор — как продукт изучаемой экономической системы.

В данном разделе мы опишем базовую для настоящей главы агрегированную динамическую модель, описывающую развитие двух стран. Одна из стран — автаркический технологический лидер (в качестве такого лидера может фигурировать, например, вся мировая экономика), другая — технологический последователь. Каждая страна динамически перераспределяет некоторый имеющийся у нее трудовой ресурс между производственным и научно-исследовательским секторами экономики. Производственный сектор осуществляет производство конечных (потребляемых) продуктов, а научно-исследовательский сектор генерирует образцы новых товаров — новые технологии для производственного сектора. Глав-

ная особенность рассматриваемой далее модели в том, что научно-исследовательский сектор страны-последователя имеет возможность абсорбировать (заимствовать) часть технологий, производимых научно-исследовательским сектором страны-лидера. Отметим, что в системе “лидер–последователь” абсорбция знаний последователем — процесс сугубо внутренний; в этом смысле модель не выходит за рамки эндогенной теории экономического роста: она лишь расширительно толкует понятие макроэкономической системы, переходя от рассмотрения одной изолированной экономики к рассмотрению двух связанных экономик. Мы здесь, разумеется, не ставим целью провести какой-либо анализ такой расширенной макроэкономической системы в целом — это предмет для отдельного исследования. Наша задача скромнее — изучить оптимальное поведение технологического последователя как одной из подсистем данной системы.

По-видимому, впервые динамическая модель эндогенного экономического роста, в которой технологический последователь абсорбирует часть знаний, производимых технологическим лидером, была рассмотрена в работе [61]. Данная модель (будем называть ее моделью “лидер–последователь”) построена в соответствии с базовой моделью Гроссмана–Хелпмана (см. [57, Ch. 3]). Как и модель Гроссмана–Хелпмана, модель “лидер–последователь” трактует технологический прогресс как процесс увеличения разнообразия производимых продуктов. В более поздней работе [44] изучалась симметризованная модель “лидер–последователь”, допускающая взаимный обмен знаниями между участниками экономического процесса.

В работе [61] было показано, что модель “лидер–последователь” как динамическая система имеет особый класс траекторий (так называемые *предельно равновесные* траектории), асимптотическое поведение которых на бесконечности (при стремлении временного аргумента к бесконечности) аналогично асимптотическому поведению на бесконечности траекторий исходной модели Гроссмана–Хелпмана. В той же работе было описано асимптотическое поведение на бесконечности вдоль предельно равновесных траекторий ряда экономических показателей страны-последователя: скорости ее технологического роста, скорости экономической продуктивности, доли трудовых ресурсов, занятых в научно-исследовательском секторе, а также отношения технологического запаса (объема накопленных технологий) страны-последователя к технологическому запасу страны-лидера.

В обсуждаемой сейчас работе [61] экономическая динамика и страны-лидера, и страны-последователя представляется как результат децентрализованных усилий действующих в этих странах экономических агентов, каждый из которых максимизирует свой собственный функционал полезности. Соответственно этому предельно равновесная траектория, генерируемая моделью “лидер–последователь”, доставляет “децентрализованное”, или “рыночное”, решение в рамках системы двух экономик. Децентрализованное решение, однако, не обязательно является оптимальным для стран-участниц, например, с точки зрения роста потребления на душу населения.

Неоптимальность децентрализованного решения свойственна многим моделям эндогенного экономического роста. Отмечалось, что децентрализованное решение может вести как к недоинвестированию, так и к переинвестированию трудовых ресурсов в научно-исследовательский сектор экономики (см. [41, 57]). Факт отклонения рыночного решения от оптимума делает целесообразным постановку вопроса о выявлении собственно оптимальных режимов технологического роста в системе связанных экономик при условии их (гипотетического) централизованного регулирования. В работе [61] такого рода анализ произведен не был. В частных ситуациях в предположении о выполнении специальных соотношений между параметрами модели этот вопрос был рассмотрен в [27–30].

В данном разделе, используя в качестве образца модель Гроссмана–Хелпмана (см. [57]) и следуя [27–29], мы построим “регулируемую” модель “лидер–последователь”, предполагающую, что каждая из двух стран-участниц имеет свой функционал полезности, максимизация которого является целью гипотетического планирующего органа этой страны. Модель естественно

формулируется в виде задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени. В последующих разделах мы дадим исчерпывающий анализ этой модели.

Начнем с описания функционала полезности для экономики одной отдельно взятой страны в предположении, что рассматриваемая экономика с экономиками других стран не взаимодействует, т.е. является автаркией.

Будем считать, что количество L трудовых ресурсов, которые могут быть использованы как в научно-исследовательском секторе, так и в производственном секторе рассматриваемой экономики, есть положительная величина, не зависящая от времени. Предполагаем, что в каждый момент времени $t \geq 0$ часть $L_N(t) < L$ этих ресурсов инвестируется (распределяется) в научно-исследовательский сектор экономики, а оставшаяся часть $L - L_N(t)$ инвестируется в ее производственный сектор. Результатом деятельности научно-исследовательского сектора выступают новые технологии (образцы новых продуктов). Следуя подходу Гроссмана–Хелпмана, считаем, что в каждый момент времени $t \geq 0$ (нуль принимаем за начальный момент рассматриваемого процесса) уровень технологического развития страны характеризуется размером ее технологического запаса — количеством $N(t)$ технологий, доступных для реализации в производстве. Предполагаем, что технологии не исчезают и не устаревают, так что если образец некоторого нового продукта разработан научно-исследовательским сектором к какому-то моменту времени t , то данная технология остается доступной и во все последующие моменты времени. Так же как и исходная модель Гроссмана–Хелпмана, наша модель пренебрегает дискретным характером переменной $N(t)$; таким образом, $N(t)$ — положительное действительное число для любого $t \geq 0$. Заметим, что в рамках данной модели деятельность научно-исследовательского сектора ограничивается прикладными исследованиями (разработкой образцов новых товаров); роль фундаментальной науки не учитывается.

Считаем, что в каждый момент времени $t \geq 0$ производственный сектор страны производит все продукты, разработанные к этому моменту, а трудовые ресурсы, направляемые в размере $L - L_N(t)$ в производственный сектор, распределяются между производствами различных продуктов равномерно; таким образом, в каждый момент времени t каждая из отраслей производства выпускает продукты с каким-либо “номером” $j \in (0, N(t))$, а плотность $l(t)$ распределения трудовых ресурсов по отраслям равна

$$l(t) = \frac{L - L_N(t)}{N(t)}.$$

Пусть количество продуктов, выпускаемых каждой отдельно взятой отраслью производства в единицу времени, следующую за моментом времени $t \geq 0$, пропорционально размеру трудовых ресурсов, используемых в этой отрасли в момент t ; считая, что коэффициент пропорциональности постоянен и один и тот же для всех отраслей, положим его равным единице. Тогда плотность $Y(t)$ распределения размера выпуска в отраслях производства в единицу времени, следующую за моментом $t \geq 0$, есть

$$Y(t) = l(t) = \frac{L - L_N(t)}{N(t)}. \quad (17.1)$$

Считая, что все произведенные продукты потребляются, и следуя [57], за критерий успешности экономики в единицу времени, следующую за моментом $t \geq 0$, возьмем *индекс потребления* Диксита–Штиглица (см. [52, 55]), представляющий собой агрегированную характеристику общего количества потребляемых продуктов и их разнообразия (в единицу времени, следующую за моментом $t \geq 0$):

$$D(t) = \left(\int_0^{N(t)} [Y(t)]^\alpha dj \right)^{1/\alpha}; \quad (17.2)$$

здесь $\alpha \in (0, 1)$ — преобразованный параметр ε эластичности замещения между различными продуктами:

$$\varepsilon = \frac{1}{1 - \alpha} > 1. \quad (17.3)$$

Подставляя $Y(t)$ (см. (17.1)) в (17.2), получаем

$$D(t) = \left(\int_0^{N(t)} \left[\frac{L - L_N(t)}{N(t)} \right]^\alpha dj \right)^{1/\alpha} = (L - L_N(t)) [N(t)]^{1/\alpha - 1}. \quad (17.4)$$

Пусть теперь ρ — субъективно выбранный положительный параметр дисконтирования. Полезность для страны пары (N, L_N) , где $N: t \mapsto N(t)$ — траектория технологического запаса страны и $L_N: t \mapsto L_N(t)$ — ее программа инвестирования трудовых ресурсов в научно-исследовательский сектор, будем оценивать интегралом $J(N, L_N)$ от дисконтированной (умноженной на весовой множитель $e^{-\rho t}$) удельной скорости роста $\dot{D}(t)/D(t)$ индекса потребления по переменной времени t , пробегающей бесконечный полуинтервал $[0, \infty)$. Применяя методологию, обсужденную выше в примере 1.3, получаем (с точностью до константы)

$$J(N, L_N) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \ln D(t) dt = \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \ln N(t) + \ln(L - L_N(t)) \right] dt. \quad (17.5)$$

Здесь предполагается, что данный несобственный интеграл сходится абсолютно.

Обратимся к динамике технологического запаса $N(t)$ (напомним, что по предположению разработанные технологии не исчезают и не устаревают).

Будем считать, что приращение количества накопленных технологий в единицу времени, следующую за произвольным моментом времени $t \geq 0$, пропорционально, во-первых, размеру $N(t)$ имеющегося к моменту t запаса технологий и, во-вторых, текущей величине $L_N(t)$ трудового ресурса, направляемого в научно-исследовательский сектор экономики:

$$\dot{N}(t) = \frac{L_N(t)}{a} N(t); \quad (17.6)$$

здесь $a > 0$ — параметр, характеризующий продуктивность научно-исследовательского сектора.

Пусть задан начальный размер

$$N(0) = N_0 > 0 \quad (17.7)$$

технологического запаса. Объединяя дифференциальное уравнение (17.6), начальное условие (17.7) и выражение (17.5) для функционала полезности J , получаем следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{N}(t) = \frac{L_N(t)}{a} N(t), \quad L_N(t) \in [0, L], \quad (17.8)$$

$$N(0) = N_0, \quad (17.9)$$

$$J(N, L_N) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \ln N(t) + \ln(L - L_N(t)) \right] dt \rightarrow \max. \quad (17.10)$$

Здесь $L_N(t)$ — значение управления в момент времени $t \geq 0$, $N(t)$ — значение фазовой переменной в этот момент, $N_0 > 0$ — начальное состояние, $L > 0$, $a > 0$, $\rho > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$ — постоянные

параметры. Для задачи (17.8)–(17.10) в качестве допустимых управлений будем рассматривать все измеримые функции $L_N: [0, \infty) \mapsto [0, L)$ такие, что интеграл в (17.10), где N — решение на $[0, \infty)$ задачи Коши (17.8), (17.9), сходится абсолютно; при этом N есть допустимая траектория, соответствующая управлению L_N . Ясно, что любая допустимая траектория N удовлетворяет включению $N(t) \in (0, \infty)$ при всех $t \geq 0$.

Решение задачи (17.8)–(17.10) легко получается непосредственно. Действительно, в силу уравнения (17.8) для любой допустимой пары (N, L_N) имеем

$$\frac{d}{dt}(\ln N(t)) = \frac{L_N(t)}{a} \quad \text{при почти всех } t \geq 0.$$

Поэтому, интегрируя по частям интеграл в (17.10), получаем

$$J(N, L_N) = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{\ln N_0}{\rho} + \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \frac{L_N(t)}{a\rho} + \ln(L - L_N(t)) \right] dt. \quad (17.11)$$

Поскольку в последнем равенстве подинтегральное выражение не зависит от траектории N , то функционал полезности (17.11) принимает свое максимальное значение при постоянном управлении L_N^* , доставляющем максимум подинтегральному выражению в (17.11). Следовательно, оптимальное управление L_N^* в задаче (17.8)–(17.10) постоянно и определяется следующим образом:

$$L_N^*(t) \equiv \begin{cases} L - \frac{a\alpha\rho}{1-\alpha}, & \text{если } \frac{a\alpha\rho}{1-\alpha} < L, \\ 0, & \text{если } \frac{a\alpha\rho}{1-\alpha} \geq L. \end{cases} \quad (17.12)$$

Заметим, что в [57, Ch. 3] это решение получено в результате формального применения принципа максимума.

Таким образом, при фиксированном размере L трудовых ресурсов в стране значение оптимального управления L_N^* полностью определяется соотношением между параметрами a и α , характеризующими качество работы научно-исследовательского сектора экономики, с одной стороны, и параметром дисконтирования ρ — с другой. Из формулы (17.12) вытекает, что в автаркическом случае (в рамках рассматриваемой экономической модели) при недостаточной эффективности научно-исследовательского сектора экономики и большом параметре дисконтирования, точнее при

$$\frac{a\alpha\rho}{1-\alpha} \geq L,$$

какое-либо распределение трудовых ресурсов в научно-исследовательский сектор нецелесообразно. Если же научно-исследовательский сектор обладает достаточной эффективностью, а параметр дисконтирования мал, а именно если

$$\frac{a\alpha\rho}{1-\alpha} < L,$$

то оптимальная доля трудовых ресурсов, занятых в научно-исследовательском секторе, отлична от нуля и возрастает с увеличением эффективности научно-исследовательского сектора (с уменьшением отношения $a\alpha/(1-\alpha)$) и с уменьшением параметра дисконтирования ρ .

Перейдем теперь непосредственно к описанию рассматриваемой в данной главе экономической модели.

В дальнейшем будем рассматривать процесс экономического развития двух стран А и В. Будем предполагать, что страна А — автаркический технологический лидер, а страна В — технологический последователь.

Пусть L^A и L^B — постоянные размеры трудовых ресурсов стран А и В соответственно. Каждая из стран может использовать трудовые ресурсы как в производственном, так и в научно-исследовательском секторе экономики. Через a^A и a^B обозначим показатели продуктивности научно-исследовательских секторов стран А и В соответственно, через ρ^A и ρ^B — параметры дисконтирования в странах А и В соответственно. Пусть далее $N^A(t)$ и $N^B(t)$ — количества технологий, накопленных до момента времени t в странах А и В соответственно (мы пренебрегаем дискретным характером величин $N^A(t)$ и $N^B(t)$ и считаем их положительными числами).

В соответствии с (17.6), (17.12) принимаем, что текущее количество $N^A(t)$ технологий, накопленных страной-лидером А, описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{N}^A(t) = g^A N^A(t), \quad (17.13)$$

где

$$g^A = \frac{1}{1-\alpha} \left[(1-\alpha) \frac{L^A}{a^A} - \alpha \rho^A \right]; \quad (17.14)$$

при этом предполагаем, что научно-исследовательский сектор страны А обладает необходимой эффективностью, т.е. правая часть (17.14) положительна.

Относительно текущего количества $N^B(t)$ технологий, накопленных страной-последователем В, будем предполагать, что данная величина удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\dot{N}^B(t) = \frac{L_N^B(t)}{a^B} (N^B(t) + \gamma N^A(t)), \quad L_N^B(t) \in [0, L^B]; \quad (17.15)$$

здесь $\gamma \in (0, 1)$ — постоянный параметр, характеризующий *емкость абсорбции* страны В, а $L_N^B(t)$ — доля трудовых ресурсов, направляемых в момент времени t в научно-исследовательский сектор экономики страны В; эта величина играет роль управления. Записанная динамика (17.15) для страны-последователя В предполагает, что в каждый момент времени t технологический последователь абсорбирует часть $\gamma N^A(t)$ полного объема $N^A(t)$ технологий, произведенных страной-лидером А. Отметим, что в силу (17.15) такая абсорбция происходит лишь при $L_N^B(t) > 0$, т.е. при осуществлении страной-последователем В собственных научно-исследовательских разработок.

Будем считать, что заданы начальные условия

$$N^A(0) = N_0^A > 0, \quad N^B(0) = N_0^B > 0. \quad (17.16)$$

Определим функционал полезности для страны В в соответствии с (17.10) равенством

$$J(N^B, L_N^B) = \int_0^{\infty} e^{-\rho^B t} \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \ln N^B(t) + \ln(L^B - L_N^B(t)) \right] dt. \quad (17.17)$$

В качестве допустимых управлений L_N^B системы (17.15) будем рассматривать такие измеримые функции $L_N^B: [0, \infty) \mapsto [0, L^B]$, что на этих управлениях и соответствующих им траекториях N^B системы (17.13), (17.15) с начальными условиями (17.16) интеграл в равенстве (17.17) сходится абсолютно.

Объединяя условия (17.13) и (17.15)–(17.17), получаем следующую задачу оптимального управления (см. [27–30]):

$$\dot{N}^B(t) = \frac{L_N^B}{a^B} (N^B(t) + \gamma N^A(t)), \quad L_N^B(t) \in [0, L^B], \quad (17.18)$$

$$\dot{N}^A(t) = g^A N^A(t), \quad (17.19)$$

$$N^A(0) = N_0^A, \quad N^B(0) = N_0^B, \quad (17.20)$$

$$J(N^B, L_N^B) = \int_0^\infty e^{-\rho^B t} \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \ln N^B(t) + \ln(L^B - L_N^B(t)) \right] dt \rightarrow \max. \quad (17.21)$$

Здесь g^A , L^B , a^B , γ — положительные параметры, $N_0^A > 0$, $N_0^B > 0$ — заданные начальные состояния.

Заметим, что в данном случае постоянная удельная скорость роста g^A количества технологий, разработанных в стране — технологическом лидере, соответствует оптимальному распределению трудовых ресурсов (см. (17.14)). Однако задача (17.18)–(17.21) может рассматриваться при произвольном положительном значении этой постоянной. В частности, в работах [27–30] предполагается, что величина удельного роста количества продуктов, разработанных технологическим лидером, есть величина

$$\bar{g}^A = (1 - \alpha)g^A < g^A,$$

что соответствует децентрализованному (рыночному) решению (см. [57, 61]).

В дальнейшем для упрощения встречающихся аналитических выражений будем использовать следующие обозначения:

$$x(t) = N^B(t), \quad y(t) = N^A(t), \quad u(t) = \frac{L_N^B(t)}{a^B}, \quad (17.22)$$

$$b = \frac{L^B}{a^B}, \quad \nu = g^A, \quad \rho = \rho^B, \quad \kappa = \frac{1}{\alpha} - 1. \quad (17.23)$$

Используя введенные обозначения, перепишем задачу (17.18)–(17.21) как следующую задачу оптимального управления (\tilde{P}):

$$\dot{x}(t) = u(t)(x(t) + \gamma y(t)), \quad (17.24)$$

$$\dot{y}(t) = \nu y(t), \quad (17.25)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad (17.26)$$

$$u(t) \in [0, b], \quad (17.27)$$

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln x(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max. \quad (17.28)$$

Здесь b , γ , ρ , ν и κ — положительные параметры, при этом $\gamma < 1$; x_0 и y_0 — положительные начальные состояния фазовых переменных.

Эта задача — предмет всех наших дальнейших рассмотрений. С формальной точки зрения задача (\tilde{P}) понимается так же, как и общая задача оптимального управления (P) из главы 1. Именно, под *допустимым управлением* мы понимаем всякую такую измеримую функцию

$u: [0, \infty) \mapsto [0, b)$, что на паре (x, u) , где x — соответствующая управлению u допустимая траектория, интеграл, записанный в (17.28), сходится абсолютно. Здесь допустимая траектория x , соответствующая допустимому управлению u , есть определенное на $[0, \infty)$ решение (в смысле Каратеодори) дифференциального уравнения (17.24), где $y(t) = y_0 e^{\nu t}$, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$. Произвольная пара (x, u) , где u — допустимое управление, а x — соответствующая ему допустимая траектория, называется *допустимой парой*. Допустимая пара (x_*, u_*) , доставляющая функционалу (17.28) максимальное значение на классе всех допустимых пар (x, u) , называется *оптимальной допустимой парой*; при этом x_* — *оптимальная допустимая траектория*, а u_* — *оптимальное допустимое управление* (для задачи (\tilde{P})). Очевидно, что все допустимые траектории x удовлетворяют включению $x(t) \in G = (0, \infty)$ для любого $t \geq 0$. Содержание задачи (\tilde{P}) — нахождение всех оптимальных допустимых пар.

Заметим, что задача (\tilde{P}) “нестандартна” в том смысле, что не полностью вкладывается в постановку общей задачи оптимального управления (P) , рассмотренную в главе 1. Именно, в задаче (\tilde{P}) в отличие от рассмотренной в главе 1 задачи (P) геометрическое ограничение на управление, т.е. множество $U = [0, b)$, ограничивающее значения всех допустимых управлений, не является замкнутым. Этот “нестандартный” элемент делает невозможным прямое использование применительно к задаче (\tilde{P}) ни одной из версий принципа максимума Понтрягина, полученных в главе 1.

Для преодоления этой трудности аналогично тому, как это было сделано при анализе неоклассической модели оптимального экономического роста (см. гл. 1, разд. 15), можно было бы рассмотреть аппроксимирующее семейство $\{(\tilde{P}_\varepsilon)\}$ “стандартных” аналогов задачи (\tilde{P}) , зависящих от положительного параметра $0 < \varepsilon < b$, в которых геометрическое ограничение на управление дается замкнутым множеством $U_\varepsilon = [0, b - \varepsilon]$. Затем можно было бы исследовать поведение решений этих аппроксимирующих “стандартных” задач при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако такой способ изучения задачи (\tilde{P}) предполагал бы априорное сужение класса допустимых управлений. Не желая искусственно сужать класс допустимых управлений, мы поступим другим образом: последовательно реализуем продемонстрированный в главе 1 аппроксимационный подход применительно к “нестандартной” задаче (\tilde{P}) , имея в виду получить строго специализированную версию принципа максимума Понтрягина. Этому посвящен следующий раздел.

18. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

В данном разделе, используя развитый в главе 1 аппроксимационный подход, мы докажем существование оптимального управления в задаче (\tilde{P}) и получим соответствующую ей версию принципа максимума Понтрягина.

Рассмотрим сначала несколько более общую чем (\tilde{P}) задачу оптимального управления (\tilde{Q}) :

$$\dot{x}(t) = u(t)(x(t) + \gamma y(t)), \quad (18.1)$$

$$\dot{y}(t) = \nu y(t), \quad (18.2)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad (18.3)$$

$$u(t) \in [0, b), \quad (18.4)$$

$$\tilde{J}(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln x(t) + \ln(b - u(t)) + \phi(u(t), t)] dt \rightarrow \max. \quad (18.5)$$

Здесь функция ϕ предполагается непрерывной на множестве $[0, b] \times [0, \infty)$, непрерывно дифференцируемой по переменной t и вогнутой по переменной u . Мы предполагаем также, что функция ϕ ограничена, т.е. существует такая постоянная $K_0 > 0$, что $|\phi(u, t)| \leq K_0$ для любых

$u \in [0, b]$ и $t \geq 0$. Все остальные данные в задаче (\tilde{Q}) те же самые, что и в исходной задаче (\tilde{P}) . Как и в задаче (\tilde{P}) , множество допустимых управлений в задаче (\tilde{Q}) состоит из всех таких измеримых функций $u: [0, \infty) \mapsto [0, b]$, что для них и соответствующих им траекторий x управляемой системы (18.1), (18.2) с начальными условиями (18.3) интеграл в (18.5) сходится абсолютно.

Для произвольного $T > 0$ рассмотрим следующую вспомогательную задачу оптимального управления (\tilde{Q}_T) на конечном интервале времени $[0, T]$:

$$\dot{x}(t) = u(t)(x(t) + \gamma y(t)), \quad (18.6)$$

$$\dot{y}(t) = \nu y(t), \quad (18.7)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad (18.8)$$

$$u(t) \in [0, b], \quad (18.9)$$

$$\tilde{J}_T(x(t), u(t)) = \int_0^T e^{-\rho t} [\kappa \ln x(t) + \ln(b - u(t)) + \phi(u(t), t)] dt \rightarrow \max. \quad (18.10)$$

Здесь все данные в задаче (\tilde{Q}_T) те же самые, что и в задаче (\tilde{Q}) . Множество допустимых управлений в задаче (\tilde{Q}_T) состоит из всех таких измеримых функций $u: [0, T] \mapsto [0, b]$, что для этих функций и соответствующих им траекторий x системы (18.6), (18.7) с начальными условиями (18.8) интеграл в (18.10) сходится абсолютно.

Лемма 18.1. *Для любого $T > 0$ существует такая постоянная $l(T)$, $0 < l(T) < b$, что для всех $0 < l \leq l(T)$ условие (18.9) в постановке задачи (\tilde{Q}_T) может быть заменено условием*

$$u(t) \in [0, b - l] \quad (18.11)$$

без изменения максимального значения функционала и множества допустимых управлений, на которых это максимальное значение может достигаться.

Доказательство. Для произвольного $0 < l < b$ и произвольного допустимого управления $u: [0, T] \mapsto [0, b]$ определим множество

$$M_l = \{t \in [0, T]: u(t) > b - l\}.$$

Пусть x — траектория управляемой системы (18.6), (18.7), соответствующая управлению u и удовлетворяющая начальному условию (18.8). Рассмотрим допустимое управление $\tilde{u}: [0, T] \mapsto [0, b - l]$, которое равно нулю при $t \in M_l$ и совпадает с управлением u при $t \notin M_l$. Пусть \tilde{x} — соответствующая управлению \tilde{u} траектория системы (18.6), (18.7) с начальным условием (18.8). В силу определения управления \tilde{u} и ограниченности функции ϕ выполняются следующие неравенства:

$$\int_0^T e^{-\rho t} [\ln(b - u(t)) - \ln(b - \tilde{u}(t))] dt \leq (\ln l - \ln b) e^{-\rho T} \text{meas}(M_l), \quad (18.12)$$

$$\int_0^T e^{-\rho t} [\phi(u(t), t) - \phi(\tilde{u}(t), t)] dt \leq 2K_0 \text{meas}(M_l). \quad (18.13)$$

Далее для произвольного $t \in [0, T]$ имеем

$$\begin{aligned} x(t) - \tilde{x}(t) &= \int_0^t u(s)(x(s) + \gamma y(s)) ds - \int_0^t \tilde{u}(s)(\tilde{x}(s) + \gamma y(s)) ds = \\ &= \int_{M_l \cap [0, t]} u(s)(x(s) + \gamma y(s)) ds + \int_{[0, t] \setminus M_l} u(s)(x(s) - \tilde{x}(s)) ds \leq \\ &\leq bK_1(T) \text{meas}(M_l) + b \int_0^t (x(s) - \tilde{x}(s)) ds, \end{aligned}$$

где $K_1(T)$ — такая положительная постоянная, что для произвольной допустимой траектории x рассматриваемой управляемой системы и любого $t \in [0, T]$ выполняется неравенство $x(t) + \gamma y(t) \leq K_1(T)$.

В силу леммы Гронуолла–Беллмана для любого $t \in [0, T]$ имеем

$$x(t) - \tilde{x}(t) \leq bK_1(T) \text{meas}(M_l) e^{bt}.$$

Следовательно, выполняются следующие неравенства:

$$\int_0^T e^{-\rho t} [\kappa \ln x(t) - \kappa \ln \tilde{x}(t)] dt \leq \kappa \int_0^T e^{-\rho t} \frac{x(t) - \tilde{x}(t)}{x_0} dt \leq K_2(T) \text{meas}(M_l), \quad (18.14)$$

где $K_2(T)$ — некоторая постоянная, не зависящая от рассматриваемой допустимой траектории x .

Объединяя неравенства (18.12)–(18.14), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{J}_T(x, u) - \tilde{J}_T(\tilde{x}, \tilde{u}) &= \int_0^T e^{-\rho t} [\kappa \ln x(t) + \ln(b - u(t)) + \phi(u(t), t)] dt - \\ &\quad - \int_0^T e^{-\rho t} [\kappa \ln \tilde{x}(t) + \ln(b - \tilde{u}(t)) + \phi(\tilde{u}(t), t)] dt \leq \\ &\leq ((\ln l - \ln b)e^{-\rho T} + 2K_0 + K_2(T)) \text{meas}(M_l). \end{aligned}$$

Следовательно, существует такая постоянная $l(T)$, $0 < l(T) < b$, что для любого $0 < l \leq l(T)$ величина $\ln l - \ln b$ настолько мала, что из условия $\text{meas}(M_l) > 0$ вытекает неравенство

$$\tilde{J}_T(x, u) - \tilde{J}_T(\tilde{x}, \tilde{u}) < 0.$$

Таким образом, для любой допустимой пары (x, u) , для которой управление u принимает на некотором множестве положительной меры значения, большие чем $b - l$, соответствующее значение функционала $\tilde{J}_T(x, u)$ меньше точной верхней грани функционала \tilde{J}_T на множестве всех допустимых управлений. Кроме того, для каждого такого управления u найдется допустимое управление \tilde{u} , принимающее значения в множестве $[0, b - l]$, на котором значения функционала полезности \tilde{J}_T строго больше. Поэтому управления, принимающие значения, большие чем $b - l$, на множестве положительной меры, можно исключить из рассмотрения в задаче (\tilde{Q}_T) без изменения точной верхней грани функционала \tilde{J}_T и множества допустимых управлений, на которых эта верхняя грань может достигаться. Лемма доказана.

Следствие 18.1. Для любого $T > 0$ в задаче (\tilde{Q}_T) существует оптимальное управление u_T .

Действительно, в силу леммы 18.1 условие $u \in [0, b]$ (см. условие (18.9)) в задаче (\tilde{Q}_T) можно заменить эквивалентным в рамках этой задачи условием $u \in [0, b-l]$ (см. (18.11)), где l — некоторое достаточно малое положительное число. Существование оптимального управления $u_T(t)$ в задаче (\tilde{Q}_T) получается теперь как следствие теоремы Филиппова (см. [20, 48]).

Следствие 18.2. Оптимальная пара (x_T, u_T) в задаче (\tilde{Q}_T) удовлетворяет принципу максимума Понтрягина [19], т.е. существует такая абсолютно непрерывная векторная функция $\psi: [0, T] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\psi = (\psi^1, \psi^2)$, что выполняются следующие условия:

(i) векторная функция ψ является решением сопряженной системы

$$\dot{\psi}^1(t) = -u_T(t)\psi^1(t) - \kappa \frac{e^{-\rho t}}{x_T(t)}, \quad (18.15)$$

$$\dot{\psi}^2(t) = -\gamma u_T(t)\psi^1(t) - \nu \psi^2(t); \quad (18.16)$$

(ii) при н.в. $t \in [0, T]$ справедливо условие максимума

$$\begin{aligned} u_T(t)(x_T(t) + \gamma y(t))\psi^1(t) + e^{-\rho t}(\ln(b - u_T(t)) + \phi(u_T(t), t)) = \\ = \max_{u \in [0, b]} [u(x_T(t) + \gamma y(t))\psi^1(t) + e^{-\rho t}(\ln(b - u) + \phi(u, t))]; \end{aligned} \quad (18.17)$$

(iii) выполняются условия трансверсальности

$$\psi^1(T) = 0, \quad \psi^2(T) = 0. \quad (18.18)$$

В самом деле, задача (\tilde{Q}_T) является стандартной задачей оптимального управления со свободным правым концом на фиксированном конечном интервале времени. Следовательно, в этой задаче любая оптимальная пара (x_T, u_T) (а в силу следствия 18.1 множество оптимальных пар в задаче (\tilde{Q}_T) непустое) вместе с некоторой сопряженной функцией ψ удовлетворяют соотношениям принципа максимума (18.15)–(18.18) (см. [19]).

Следующие два простых результата дают оценку на “хвост” интегрального функционала полезности в исходной задаче (\tilde{Q}) и вспомогательной задаче (\tilde{Q}_T) , $T > 0$.

Лемма 18.2. Существует такая невозрастающая положительная функция $\omega_0: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, $\omega_0(t) \rightarrow +0$ при $t \rightarrow \infty$, что для любой допустимой пары (x, u) в задаче (\tilde{Q}) и любых $0 < \tau < \xi$ выполняются следующие неравенства:

$$\int_{\tau}^{\xi} e^{-\rho s} [\kappa \ln x(s) + \ln(b - u(s)) + \phi(u(s), s)] ds \leq \omega_0(\tau), \quad (18.19)$$

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-\rho s} [\kappa \ln x(s) + \ln(b - u(s)) + \phi(u(s), s)] ds \leq \omega_0(\tau). \quad (18.20)$$

Доказательство непосредственно вытекает из ограниченности функции ϕ , равномерной экспоненциальной ограниченности допустимых траекторий управляемой системы (18.1), (18.2) с начальным условием (18.3) и логарифмической формы первого слагаемого в подынтегральном выражении в функционале полезности (18.5).

Лемма 18.3. *Существует такая неубывающая отрицательная функция $\omega_1: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, $\omega_1(t) \rightarrow -0$ при $t \rightarrow \infty$, что для любого $T > 0$, произвольной оптимальной допустимой пары (x_T, u_T) в задаче (\tilde{Q}_T) и всех $0 < \tau < \xi \leq T$ выполняется следующее неравенство:*

$$\int_{\tau}^{\xi} e^{-\rho s} [\kappa \ln x_T(s) + \ln(b - u_T(s)) + \phi(u_T(s), s)] ds \geq \omega_1(\tau). \quad (18.21)$$

Доказательство. В силу оптимальности пары (x_T, u_T) в задаче (\tilde{Q}_T) и аддитивности интегрального функционала сужение пары (x_T, u_T) на интервал времени $[\tau, T]$ является оптимальной парой в соответствующей задаче оптимального управления на интервале времени $[\tau, T]$ с начальным условием $x(\tau) = x_T(\tau)$. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^T e^{-\rho s} [\kappa \ln x_T(s) + \ln(b - u_T(s)) + \phi(u_T(s), s)] ds &= \\ &= \int_{\tau}^{\xi} e^{-\rho s} [\kappa \ln x_T(s) + \ln(b - u_T(s)) + \phi(u_T(s), s)] ds + \\ &\quad + \int_{\xi}^T e^{-\rho s} [\kappa \ln x_T(s) + \ln(b - u_T(s)) + \phi(u_T(s), s)] ds \geq \\ &\geq \int_{\tau}^T e^{-\rho s} [\kappa \ln x_T(\tau) + \ln b + \phi(0, s)] ds. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу условия (18.19) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\xi} e^{-\rho s} [\kappa \ln x_T(s) + \ln(b - u_T(s)) + \phi(u_T(s), s)] ds &\geq \\ &\geq \int_{\tau}^T e^{-\rho s} [\kappa \ln x_T(t) + \ln b + \phi(0, s)] ds - \int_{\xi}^T e^{-\rho s} [\kappa \ln x_T(\tau) + \ln(b - u_T(s)) + \phi(u_T(s), s)] ds \geq \\ &\geq \omega_1(\tau), \end{aligned}$$

где

$$\omega_1(\tau) = - \int_{\tau}^{\infty} e^{-\rho s} [\kappa |\ln x_0| + |\ln b| + K_0] ds - \omega_0(\tau).$$

Лемма доказана.

Теорема 18.1. *Существует оптимальное допустимое управление u_* в задаче (\tilde{Q}) .*

Доказательство. Пусть $\{T_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, — такая последовательность положительных чисел, что $T_k < T_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, и $T_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Рассмотрим соответствующую последовательность задач оптимального управления $\{(\tilde{Q}_{T_k})\}$, $k = 1, 2, \dots$, каждая из которых определена на своем фиксированном интервале времени $[0, T_k]$ (см. (18.6)–(18.10)). Для краткости будем обозначать задачи (\tilde{Q}_{T_k}) через (\tilde{Q}_k) , $k = 1, 2, \dots$

В силу следствия 18.1 для каждого $k = 1, 2, \dots$ существует оптимальная допустимая пара (x_k, u_k) в задаче (\tilde{Q}_k) . В дальнейшем будем считать, что для любого $k = 1, 2, \dots$ пара (x_k, u_k) продолжена произвольным допустимым для задачи (\tilde{Q}) образом на весь полуинтервал $[0, \infty)$.

Рассмотрим теперь последовательность оптимальных управлений $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, на интервале времени $[0, T_1]$. В силу выпуклости и компактности интервала $[0, b]$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{u_{1,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, последовательности $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, что $u_{1,k} \rightarrow u_*$ слабо в $L^1([0, T_1], \mathbb{R}^1)$ при $k \rightarrow \infty$, где u_* — некоторая измеримая функция на интервале времени $[0, T_1]$, принимающая значения в интервале $[0, b]$. Заметим, что по построению каждое управление $u_{1,k}$, $k = 1, 2, \dots$, является оптимальным в своей задаче $(\tilde{Q}_{1,k})$ на соответствующем интервале времени $[0, T_{1,k}]$, $T_{1,k} \geq T_1$. Пусть $x_{1,k}$ — соответствующая управлению $u_{1,k}$ оптимальная траектория на интервале времени $[0, T_{1,k}]$, $k = 1, 2, \dots$, и пусть x_* — траектория управляемой системы (18.1), (18.2) с начальным условием (18.3), соответствующая управлению u_* на интервале времени $[0, T_1]$.

В силу аффинности по управлению системы (18.6), (18.7) имеем $x_{1,k} \rightarrow x_*$ в пространстве $C([0, T_1], \mathbb{R}^1)$ при $k \rightarrow \infty$. Очевидно, $\dot{x}_{1,k} \rightarrow \dot{x}_*$ слабо в $L^1([0, T_1], \mathbb{R}^1)$ при $k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{u_{1,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, на интервале времени $[0, T_2]$.

Аналогично предыдущему случаю существует такая подпоследовательность $\{u_{2,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, последовательности $\{u_{1,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, что последовательность $\{u_{2,k}\}$ сходится слабо в $L^1([0, T_2], \mathbb{R}^1)$ к некоторой определенной на интервале $[0, T_2]$ измеримой функции со значениями в $[0, b]$, которая совпадает с определенной выше функцией u_* на интервале $[0, T_1]$. Будем обозначать построенную таким образом измеримую функцию на интервале $[0, T_2]$ снова через u_* .

По построению каждое управление $u_{2,k}$, $k = 2, 3, \dots$, является оптимальным в некоторой задаче оптимального управления $(\tilde{Q}_{2,k})$ на соответствующем интервале времени $[0, T_{2,k}]$, $T_{2,k} \geq T_2$. Пусть $x_{2,k}$ — соответствующая управлению $u_{2,k}$ оптимальная траектория на интервале времени $[0, T_{2,k}]$, $k = 1, 2, \dots$, и пусть x_* — соответствующая управлению u_* допустимая траектория системы (18.1), (18.2) с начальным условием (18.3) на интервале времени $[0, T_2]$.

Аналогично предыдущему шагу имеем $x_{2,k} \rightarrow x_*$ в пространстве $C([0, T_2], \mathbb{R}^1)$ при $k \rightarrow \infty$ и $\dot{x}_{2,k} \rightarrow \dot{x}_*$ слабо в $L^1([0, T_2], \mathbb{R}^1)$ при $k \rightarrow \infty$.

Повторяя данную процедуру бесконечно много раз, мы последовательно построим измеримую функцию $u_*: [0, \infty) \mapsto [0, b]$ и соответствующую допустимую траекторию x_* управляемой системы (18.1), (18.2) с начальным условием (18.3) на бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$. Одновременно мы получим счетное семейство управлений $\{u_{i,k}\}$, $i = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$, и соответствующее им семейство допустимых траекторий $\{x_{i,k}\}$, $i = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$. Кроме того, для любых $i = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$ управление $u_{i,k}$, определенное при помощи описанной выше процедуры, является оптимальным в соответствующей ей задаче оптимального управления $(\tilde{Q}_{i,k})$ на некотором интервале времени $[0, T_{i,k}]$, где $T_{i,k} \geq T_i$, $i = 1, 2, \dots$. Более того, для любого $i = 1, 2, \dots$ имеем

$$\begin{aligned} u_{i,k} &\rightarrow u_* && \text{слабо в } L^1([0, T_i], \mathbb{R}^1) && \text{при } k \rightarrow \infty, \\ x_{i,k} &\rightarrow x_*(t) && \text{в } C([0, T_i], \mathbb{R}^1) && \text{при } k \rightarrow \infty, \\ \dot{x}_{i,k} &\rightarrow \dot{x}_* && \text{слабо в } L^1([0, T_i], \mathbb{R}^1) && \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Выберем теперь подпоследовательность $\{u_{k,k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, из построенного таким образом семейства управлений $\{u_{i,k}\}$, $i = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$, и обозначим $\bar{u}_k = u_{k,k}$, $\bar{x}_k = x_{k,k}$, $k = 1, 2, \dots$

Построенные описанным способом пара (x_*, u_*) и последовательности управлений $\{\bar{u}_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, и соответствующих им допустимых траекторий $\{\bar{x}_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяют следующим условиям:

- а) для любого $k = 1, 2, \dots$ управление \bar{u}_k является оптимальным управлением в задаче $(\tilde{Q}_{m(k)})$ на интервале времени $[0, T_{m(k)}]$, $m(k) \geq k$;

б) для любого $T > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{u}_k &\rightarrow u_* && \text{слабо в } L^1([0, T], \mathbb{R}^1) && \text{при } k \rightarrow \infty, \\ \bar{x}_k &\rightarrow x_* && \text{в } C([0, T], \mathbb{R}^1) && \text{при } k \rightarrow \infty, \\ \dot{\bar{x}}_k &\rightarrow \dot{x}_* && \text{слабо в } L^1([0, T], \mathbb{R}^1) && \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Докажем, что построенное таким образом управление u_* является допустимым в задаче (\tilde{Q}) , т.е. что условие (18.4) выполняется при п.в. $t \in [0, \infty)$, а соответствующий интеграл в (18.5) сходится абсолютно.

В силу леммы 18.3 существует такая отрицательная функция ω_1 , что $\omega_1(t) \rightarrow -0$ при $t \rightarrow \infty$ и, кроме того, для любых $T > 0$, $0 < \tau < T$ и оптимальной пары (\bar{x}_k, \bar{u}_k) в задаче $(\tilde{Q}_{m(k)})$, $T_{m(k)} > T$, выполняется следующее неравенство (см. (18.21)):

$$\int_{\tau}^T e^{-\rho s} [\kappa \ln \bar{x}_k(s) + \ln(b - \bar{u}_k(s)) + \phi(\bar{u}_k(s), s)] ds \geq \omega_1(\tau).$$

Следовательно, для любого $c > 0$ и произвольного $\varepsilon > 0$ в силу полунепрерывности сверху интегрального функционала

$$\tilde{J}_{\tau, T}(x, u) = \int_{\tau}^T e^{-\rho s} [\kappa \ln x(s) + \ln(b - u(s) + c) + \phi(u(s), s)] ds$$

(см. [48, Theorem 10.8.ii]) существует такое $N > 0$, что для любого $k \geq N$ выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \omega_1(\tau) &\leq \int_{\tau}^T e^{-\rho s} [\kappa \ln \bar{x}_k(s) + \ln(b - \bar{u}_k(s) + c) + \phi(\bar{u}_k(s), s)] ds \leq \\ &\leq \int_{\tau}^T e^{-\rho s} [\kappa \ln x_*(s) + \ln(b - u_*(s) + c) + \phi(u_*(s), s)] ds + \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, для любых $T > 0$ и $0 < \tau < T$ имеем

$$\int_{\tau}^T e^{-\rho s} [\kappa \ln x_*(s) + \ln(b - u_*(s) + c) + \phi(u_*(s), s)] ds \geq \omega_1(\tau). \quad (18.22)$$

Поскольку функция ϕ ограничена и множество всех допустимых траекторий управляемой системы (18.1), (18.2) с начальным условием (18.3) также ограничено на $[0, T]$, то существует такая постоянная $K_3(T) > 0$, что

$$\int_0^T e^{-\rho s} \ln(b - u_*(s) + c) ds \geq \omega_1(0) - K_3(T).$$

Из последнего неравенства и произвольности постоянной $c > 0$ следует, что для любого $t \in [0, T]$ построенное управление u_* удовлетворяет неравенству $u_*(t) < b$. Следовательно, $u_* < b$ при п.в. $t \in [0, \infty)$. В силу условия (18.22) интеграл в (18.5) сходится абсолютно. Итак, u_* — допустимое управление в задаче (\tilde{Q}) .

Докажем, что построенное допустимое управление u_* оптимально в задаче (\tilde{Q}) . Прежде всего заметим, что для произвольного $\tau > 0$ выполняется неравенство

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-\rho s} [\kappa \ln x_*(s) + \ln(b - u_*(s)) + \phi(u_*(s), s)] ds \geq \omega_1(\tau),$$

которое следует из выполнения неравенства (18.22) для произвольного $c > 0$. Данное неравенство и лемма 18.2 (см. неравенство (18.20)) влекут существование такой невозрастающей положительной функции $\omega: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, $\omega(t) \geq \omega_0(t)$ для любого $t \geq 0$ и $\omega(t) \rightarrow +0$ при $t \rightarrow \infty$, что

$$\left| \int_{\tau}^{\infty} e^{-\rho s} [\kappa \ln x_*(s) + \ln(b - u_*(s)) + \phi(u_*(s), s)] ds \right| \leq \omega(\tau) \quad \forall \tau > 0. \quad (18.23)$$

Заметим, что в силу лемм 18.2 и 18.3 без ограничения общности можно считать, что для любого $T > 0$, любого $0 < \tau < T$ и любого $k: T_k \geq T$ аналогичное неравенство выполняется для всех пар (\bar{x}_k, \bar{u}_k) , которые являются оптимальными в соответствующих задачах оптимального управления $(\tilde{Q}_{m(k)})$:

$$\left| \int_{\tau}^T e^{-\rho s} [\kappa \ln \bar{x}_k(s) + \ln(b - \bar{u}_k(s)) + \phi(\bar{u}_k(s), s)] ds \right| \leq \omega(\tau).$$

Предположим, что управление u_* не является оптимальным в задаче (\tilde{Q}) . Тогда существуют такие число $\varepsilon > 0$ и допустимая пара (\tilde{x}, \tilde{u}) , что

$$\tilde{J}(x_*, u_*) < \tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u}) - \varepsilon. \quad (18.24)$$

В силу свойств функции ω существует такое число k_1 , что для любого $T \geq T_{k_1}$ справедливо неравенство

$$\omega(T) < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (18.25)$$

Рассмотрим теперь построенные выше последовательности $\{\bar{u}_k\}$, $\{\bar{x}_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, на интервалах времени $[0, T_{m(k_1)}]$ при $k \geq k_1$.

На интервале времени $[0, T_{m(k_1)}]$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{u}_k &\rightarrow u_* && \text{слабо в } L^1([0, T_{m(k_1)}], \mathbb{R}^1) && \text{при } k \rightarrow \infty, \\ \bar{x}_k &\rightarrow x_* && \text{в } C([0, T_{m(k_1)}], \mathbb{R}^1) && \text{при } k \rightarrow \infty, \\ \dot{\bar{x}}_k &\rightarrow \dot{x}_* && \text{слабо в } L^1([0, T_{m(k_1)}], \mathbb{R}^1) && \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В силу полунепрерывности сверху интегрального функционала $\tilde{J}_{T_{m(k_1)}}$ (см. [48, Theorem 10.8.ii]) существует такое натуральное число $k_2 \geq k_1$, что для любого $k \geq k_2$ выполняется следующее неравенство:

$$\tilde{J}_{T_{m(k_1)}}(\bar{x}_k, \bar{u}_k) \leq \tilde{J}_{T_{m(k_1)}}(x_*, u_*) + \frac{\varepsilon}{4}. \quad (18.26)$$

Рассмотрим допустимую пару $(\bar{x}_{k_2}, \bar{u}_{k_2})$ на соответствующем интервале времени $[0, T_{m(k_2)}]$. По построению управление \bar{u}_{k_2} оптимально в задаче оптимального управления $(\tilde{Q}_{m(k_2)})$ на интервале времени $[0, T_{m(k_2)}]$. Следовательно, в силу неравенства (18.25) и неравенства (18.20)

имеем

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{T_{m(k_2)}}(\bar{x}_{k_2}, \bar{u}_{k_2}) &\geq \int_0^{T_{m(k_2)}} e^{-\rho t} [\kappa \ln \tilde{x}(t) + \ln(b - \tilde{u}(t)) + \phi(\tilde{u}(t), t)] dt \geq \\ &\geq \int_0^{\infty} e^{-\rho t} [\kappa \ln \tilde{x}(t) + \ln(b - \tilde{u}(t)) + \phi(\tilde{u}(t), t)] dt - \frac{1}{4}\varepsilon = \\ &= \tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u}) - \frac{1}{4}\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу условия (18.25) и неравенств (18.19), (18.26) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u}) &\leq \tilde{J}_{T_{m(k_2)}}(\bar{x}_{k_2}, \bar{u}_{k_2}) + \frac{1}{4}\varepsilon = \\ &= \int_0^{T_{m(k_1)}} e^{-\rho t} [\kappa \ln \bar{x}_{k_2}(t) + \ln(b - \bar{u}_{k_2}(t)) + \phi(\bar{u}_{k_2}(t), t)] dt + \\ &\quad + \int_{T_{m(k_1)}}^{T_{m(k_2)}} e^{-\rho t} [\kappa \ln \bar{x}_{k_2}(t) + \ln(b - \bar{u}_{k_2}(t)) + \phi(\bar{u}_{k_2}(t), t)] dt + \frac{1}{4}\varepsilon \leq \\ &\leq \tilde{J}_{T_{m(k_1)}}(x_*, u_*) + \frac{3}{4}\varepsilon \leq \tilde{J}(x_*(t), u_*(t)) + \varepsilon, \end{aligned}$$

что противоречит условию (18.24). Следовательно, u_* — оптимальное допустимое управление в задаче (\tilde{Q}) . Теорема доказана.

Следствие 18.3. В задаче (\tilde{P}) существует оптимальная допустимая пара.

В самом деле, задача (\tilde{P}) является частным случаем задачи (\tilde{Q}) при $\phi(u, t) \equiv 0$.

Теперь мы конкретизируем вид функции ϕ в рассмотренных выше при доказательстве теоремы 18.1 вспомогательных задачах (\tilde{Q}_k) , $k = 1, 2, \dots$, таким образом, чтобы соответствующая последовательность их оптимальных управлений $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, обеспечивала для любого фиксированного $T > 0$ сильную в $L^2([0, T], \mathbb{R}^1)$ аппроксимацию заданного оптимального управления u_* в задаче (\tilde{P}) . Такая аппроксимация нам потребуется для получения необходимых условий оптимальности в задаче (\tilde{P}) . При этом мы будем следовать аппроксимационной схеме, разработанной в главе 1 (см. разд. 7).

Пусть u_* — заданное оптимальное управление в задаче (\tilde{P}) и x_* — соответствующая ему оптимальная траектория. Аналогично тому как это было сделано в доказательстве теоремы 18.1 (в случае более общей чем (\tilde{P}) задачи (\tilde{Q})), предположим, что пара (x_*, u_*) и положительная невозрастающая функция ω , $\omega(t) \rightarrow +0$ при $t \rightarrow \infty$, удовлетворяют условию (18.23) с функцией $\phi(u, t) \equiv 0$.

Для $k = 1, 2, \dots$ выберем такую непрерывно дифференцируемую функцию $v_k: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, что

$$\sup_{t \in [0, \infty)} |v_k(t)| \leq b + 1, \quad (18.27)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} (v_k(t) - u_*(t))^2 dt \leq \frac{1}{k}, \quad (18.28)$$

$$\sup_{t \in [0, \infty)} |\dot{v}_k(t)| \leq \sigma_k < \infty. \quad (18.29)$$

Нетрудно видеть, что такая последовательность $\{v_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, непрерывно дифференцируемых функций v_k существует. Без ограничения общности можно считать, что $\sigma_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Выберем теперь такую последовательность положительных чисел $\{T_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, что $T_k < T_{k+1}$ для любого k , $T_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ и для любой допустимой траектории $x(t)$ управляемой системы (18.1), (18.2) с начальным условием (18.3) и для любого $k = 1, 2, \dots$ выполняются следующие неравенства:

$$\int_{T_k}^{\infty} e^{-\rho t} [\kappa \ln x(t) + \ln b] dt \leq \frac{1}{k(1 + \sigma_k)}, \quad (18.30)$$

$$\omega(T_k) \leq \frac{1}{k(1 + \sigma_k)}. \quad (18.31)$$

Рассмотрим теперь следующую последовательность вспомогательных задач оптимального управления $\{\tilde{P}_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, каждая из которых определена на своем собственном фиксированном интервале времени $[0, T_k]$:

$$\dot{x}(t) = u(t)(x(t) + \gamma y(t)), \quad u(t) \in [0, b),$$

$$\dot{y}(t) = \nu y(t),$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0,$$

$$J_k(x, u) = \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \left[\kappa \ln x(t) + \ln(b - u(t)) - \frac{(u - v_k(t))^2}{1 + \sigma_k} \right] dt \rightarrow \max.$$

Здесь все данные в задаче (\tilde{P}_k) те же самые, что и в исходной задаче (\tilde{P}) . Как обычно, максимум в задаче (\tilde{P}_k) ищется в классе измеримых функций $u: [0, T_k] \mapsto [0, b)$, для которых интеграл в функционале J_k сходится абсолютно.

Заметим, что для любого $k = 1, 2, \dots$ задача оптимального управления (\tilde{P}_k) является частным случаем задачи (\tilde{Q}_k) при $\phi(u, t) = -(u - v_k(t))^2 / (1 + \sigma_k)$ и, следовательно, в силу следствия 18.1 для любого $k = 1, 2, \dots$ в задаче (\tilde{P}_k) существует оптимальное управление u_k .

В дальнейшем мы будем предполагать, что для любого $k = 1, 2, \dots$ управление u_k продолжено нулем на полуинтервал $[T_k, \infty)$. Обозначим через x_k допустимую траекторию, соответствующую управлению u_k на полуинтервале $[0, \infty)$.

Лемма 18.4. *Для любого $T > 0$ имеем*

$$u_k \rightarrow u_* \quad \text{в } L^2([0, T], \mathbb{R}^1) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Пусть $T > 0$, и выберем такое число k_1 , что $T_{k_1} \geq T$. Очевидно, для любого $k = 1, 2, \dots$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} J_k(x_k, u_k) &= \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \left[\kappa \ln x_k(t) + \ln(b - u_k(t)) - \frac{(u_k(t) - v_k(t))^2}{1 + \sigma_k} \right] dt \leq \\ &\leq \int_0^{T_k} e^{-\rho t} [\kappa \ln x_k(t) + \ln(b - u_k(t))] dt - \frac{e^{-\rho T}}{1 + \sigma_k} \int_0^T (u_k(t) - v_k(t))^2 dt. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу оптимальности управления u_k в задаче (\tilde{P}_k) , $k \geq k_1$, оптимальности управления u_* в задаче (\tilde{P}) и в силу условий (18.23), (18.28), (18.30) и (18.31) получаем

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\rho T}}{1 + \sigma_k} \int_0^T (u_k(t) - v_k(t))^2 dt &\leq \int_0^{T_k} e^{-\rho t} [\kappa \ln x_k(t) + \ln(b - u_k(t))] dt - J_k(x_*, u_*) \leq \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln x_k(t) + \ln(b - u_k(t))] dt - \int_{T_k}^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln x_k(t) + \ln b] dt - J_k(x_*, u_*) \leq \\ &\leq J(x_k, u_k) - J(x_*, u_*) + \omega(T_k) + \frac{1}{k(1 + \sigma_k)} + \int_0^\infty \frac{e^{-\rho t}}{1 + \sigma_k} (v_k(t) - u_*(t))^2 dt \leq \frac{3}{k(1 + \sigma_k)}, \end{aligned}$$

откуда вытекает неравенство

$$\int_0^T (u_k(t) - v_k(t))^2 dt \leq \frac{3e^{\rho T}}{k}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T (u_k(t) - u_*(t))^2 dt \right)^{1/2} &\leq \left(\int_0^T (u_*(t) - v_k(t))^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_0^T (u_k(t) - v_k(t))^2 dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{e^{\rho T}}{k}} + \sqrt{\frac{3e^{\rho T}}{k}} = (\sqrt{3} + 1) \sqrt{\frac{e^{\rho T}}{k}}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $k_2 \geq k_1$, что для всех $k \geq k_2$ выполняется условие

$$\|u_k - u_*\|_{L^2([0, T], \mathbb{R}^1)} < \varepsilon.$$

Следовательно, утверждение леммы справедливо. Лемма доказана.

Заметим, что в силу леммы 18.4 без ограничения общности можно считать, что для произвольного $T > 0$ выполняются условия

$$\begin{aligned} u_k(t) \rightarrow u_*(t) &\quad \text{при почти всех } t \in [0, T] && \text{при } k \rightarrow \infty, \\ x_k \rightarrow x_* &\quad \text{в } C([0, T], \mathbb{R}^1) && \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Теперь аналогично тому, как это было сделано в главе 1 (см. разд. 7 и 10), мы докажем специализированную версию принципа максимума Понтрягина для задачи (\tilde{P}) , переходя к пределу в соотношениях принципа максимума Понтрягина для задач (\tilde{P}_k) при $k \rightarrow \infty$.

Напомним, что в силу незамкнутости множества геометрических ограничений на управление в задаче (\tilde{P}) данная задача, вообще говоря, не удовлетворяет предположениям относительно задачи (P) , рассмотренной в главе 1.

Как обычно (см. гл. 1, разд. 3), обозначим через

$$\mathcal{H}(x, y, t, u, \psi^1, \psi^2) = u(x + \gamma y)\psi^1 + \nu y\psi^2 + e^{-\rho t}(\kappa \ln x + \ln(b - u))$$

и

$$H(x, y, t, \psi^1, \psi^2) = \sup_{u \in [0, b]} \mathcal{H}(x, y, t, u, \psi^1, \psi^2)$$

функцию Гамильтона–Понтрягина и гамильтониан (функцию максимума) в нормальной форме для задачи (\tilde{P}) (т.е. при $\psi^0 = 1$).

Теорема 18.2. Пусть u_* — оптимальное управление в задаче (\tilde{P}) , а x_* — соответствующая оптимальная траектория. Тогда существует такая абсолютно непрерывная векторная функция $\psi: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^2$, $\psi = (\psi^1, \psi^2)$, что выполняются следующие условия:

(i) векторная функция ψ является решением сопряженной системы

$$\dot{\psi}^1(t) = -u_*(t)\psi^1(t) - \kappa \frac{e^{-\rho t}}{x_*(t)}, \quad (18.32)$$

$$\dot{\psi}^2(t) = -\gamma u_*(t)\psi^1(t) - \nu \psi^2(t); \quad (18.33)$$

(ii) при п.в. $t \in [0, \infty)$ справедливо условие максимума

$$\mathcal{H}(x_*(t), y(t), t, u_*(t), \psi^1(t), \psi^2(t)) = H(x_*(t), y(t), t, \psi^1(t), \psi^2(t)); \quad (18.34)$$

(iii) выполняется условие стационарности гамильтониана

$$H(x_*(t), y(t), t, \psi^1(t), \psi^2(t)) = \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} [\kappa \ln x_*(s) + \ln(b - u_*(s))] ds \quad (18.35)$$

для любого $t \geq 0$;

(iv) для любого $t \geq 0$ координаты векторной функции ψ удовлетворяют следующим условиям положительности:

$$\psi^1(t) > 0, \quad \psi^2(t) \geq 0. \quad (18.36)$$

Заметим, что в целом формулировка теоремы 18.2 аналогична формулировке варианта принципа максимума Понтрягина, доказанного в главе 1 в случае выполнения условия монотонности (см. формулировку теоремы 10.1). В частности, теорема 18.2 является вариантом принципа максимума Понтрягина для задачи (P) в нормальной форме. Она утверждает, что множитель Лагранжа ψ^0 , соответствующий максимизируемому функционалу (17.28), может быть взят равным единице. Так же как и теорема 10.1, данный результат содержит дополнительные условия стационарности (18.35) и положительности (18.36).

Доказательство теоремы 18.2. Рассмотрим построенную выше последовательность вспомогательных задач оптимального управления $\{(\tilde{P}_k)\}$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть u_k — оптимальное управление в задаче (\tilde{P}_k) и x_k , $k = 1, 2, \dots$, — соответствующая оптимальная траектория. Как показано выше (см. лемму 18.4), не ограничивая общности, можно считать, что для любого $T > 0$ выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} u_k(t) \rightarrow u_*(t) & \quad \text{при почти всех } t \in [0, T] & \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \\ x_k \rightarrow x_* & \quad \text{в } C([0, T], \mathbb{R}^1) & \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В силу принципа максимума Понтрягина [19] и леммы 18.1 (см. следствие 18.1) для задачи (\tilde{P}_k) , $k = 1, 2, \dots$, существует такая абсолютно непрерывная векторная функция $\psi_k: [0, T_k] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\psi_k = (\psi_k^1, \psi_k^2)$, что при п.в. $t \in [0, T_k]$ выполняются следующие условия:

$$\dot{\psi}_k^1(t) = -u_k(t)\psi_k^1(t) - \kappa \frac{e^{-\rho t}}{x_k(t)}, \quad (18.37)$$

$$\dot{\psi}_k^2(t) = -\gamma u_k(t)\psi_k^1(t) - \nu \psi_k^2(t), \quad (18.38)$$

$$\mathcal{H}_k(x_k(t), y(t), t, u_k(t), \psi_k^1(t), \psi_k^2(t)) = H_k(x_k(t), y(t), t, \psi_k^1(t), \psi_k^2(t)), \quad (18.39)$$

$$\psi_k^1(T_k) = 0, \quad \psi_k^2(T_k) = 0. \quad (18.40)$$

Здесь

$$\mathcal{H}_k(x, y, t, u, \psi^1, \psi^2) = u(x + \gamma y)\psi^1 + \nu y\psi^2 + e^{-\rho t} \left[\kappa \ln x + \ln(b - u) - \frac{(u - v_k(t))^2}{1 + \sigma_k} \right]$$

и

$$H_k(x, y, t, \psi^1, \psi^2) = \sup_{u \in [0, b]} \mathcal{H}_k(x, y, t, u, \psi^1, \psi^2)$$

— функция Гамильтона–Понтрягина и гамильтониан в нормальной форме для задачи (\tilde{P}_k) , $k = 1, 2, \dots$. Будем считать, что $\psi_k(t) = 0$ при $t \geq T_k$, $k = 1, 2, \dots$.

Поскольку задача (\tilde{P}_k) является задачей оптимального управления со свободным правым концом на фиксированном интервале времени $[0, T_k]$, $k = 1, 2, \dots$, то в соотношениях принципа максимума Понтрягина для этой задачи множитель Лагранжа ψ^0 может быть выбран равным единице [19]. Кроме того, в силу соотношений (18.37)–(18.39) принципа максимума Понтрягина для задачи (\tilde{P}_k) , $k = 1, 2, \dots$, имеет место условие стационарности

$$\frac{d}{dt} H_k(x_k(t), y(t), t, \psi_k^1(t), \psi_k^2(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_k(x_k(t), y(t), t, u_k(t), \psi_k^1(t), \psi_k^2(t)). \quad (18.41)$$

Далее в силу условий (18.37) и (18.40) получаем, что $\psi_k^1(t) > 0$ для любого $t \in [0, T_k]$, $k = 1, 2, \dots$, откуда в силу условий (18.38) и (18.40) вытекает выполнение неравенства $\psi_k^2(t) \geq 0$ для любого $t \in [0, T_k]$, $k = 1, 2, \dots$.

Покажем, что последовательность $\{\psi_k(0)\}$, $k = 1, 2, \dots$, ограничена. Для этого проинтегрируем равенство (18.41) на интервале времени $[0, T_k]$, $k = 1, 2, \dots$.

Используя условие (18.40), получаем

$$\begin{aligned} H_k(x_0, y_0, 0, \psi_k^1(0), \psi_k^2(0)) &= e^{-\rho T_k} \left[\kappa \ln x_k(T_k) + \sup_{u \in [0, b]} \left(\ln(b - u) - \frac{(u - v_k(T_k))^2}{1 + \sigma_k} \right) \right] + \\ &+ \rho \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \left[\kappa \ln x_k(t) + \ln(b - u_k(t)) - \frac{(u_k(t) - v_k(t))^2}{1 + \sigma_k} \right] dt - \\ &- 2 \int_0^{T_k} e^{-\rho t} \frac{(u_k(t) - v_k(t))\dot{v}_k(t)}{1 + \sigma_k} dt. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в силу условий (18.27)–(18.29) существует такая постоянная $K_4 \geq 0$, что для всех $k = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$H_k(x_0, y_0, 0, \psi_k^1(0), \psi_k^2(0)) \leq K_4.$$

Следовательно,

$$\sup_{u \in [0, b]} \left[u(x_0 + \gamma y_0)\psi_k^1(0) + \ln(b - u) - \frac{(u - v_k(0))^2}{1 + \sigma_k} \right] + \nu y_0\psi_k^2(0) + e^{-\rho t} \kappa \ln x_0 \leq K_4. \quad (18.42)$$

Из последнего неравенства получаем

$$\frac{b}{2}(x_0 + \gamma y_0)\psi_k^1(0) + \nu y_0\psi_k^2(0) \leq K_4 - \kappa \ln x_0 - \ln \frac{b}{2} + \frac{1}{1 + \sigma_k} \left(\frac{b}{2} - v_k(0) \right)^2. \quad (18.43)$$

Поскольку по условию $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $b > 0$ и $\nu > 0$, то из последнего неравенства вытекает ограниченность последовательности $\{\psi_k(0)\}$, $k = 1, 2, \dots$

Рассмотрим теперь последовательно интервалы времени $[0, T_i]$, $i = 1, 2, \dots$, и последовательности управлений $\{u_k\}$, соответствующих им траекторий $\{x_k\}$ и сопряженных функций $\{\psi_k\}$ на $[0, T_i]$ при $k \rightarrow \infty$.

Рассматривая последовательность расширяющихся интервалов времени $[0, T_i]$ при $i \rightarrow \infty$, переходя к подпоследовательности в последовательности $\{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, на каждом из этих интервалов времени и выбирая затем диагональную подпоследовательность, в силу леммы Гронуолла–Беллмана, ограниченности последовательности $\{\psi_k(0)\}$, $k = 1, 2, \dots$, и условий (18.37), (18.38) получаем, что существует такая (локально) абсолютно непрерывная векторная функция $\psi: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^2$, что для любого $T > 0$ выполняется условие

$$\psi_k \rightarrow \psi \quad \text{в } C([0, T], \mathbb{R}^2) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

В силу равномерной сходимости последовательности траекторий $\{x_k\}$ к траектории x_* при $k \rightarrow \infty$ и сходимости последовательности $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, к u_* при п.в. $t \in [0, T]$ при $k \rightarrow \infty$, переходя к пределу в равенствах (18.37), (18.38) при п.в. $t \in [0, T]$ при $k \rightarrow \infty$, получаем, что (локально) абсолютно непрерывная функция ψ является решением сопряженной системы (18.32), (18.33) на интервале времени $[0, T]$.

Следовательно, условия (18.32), (18.33) доказаны.

В силу неотрицательности значений функций ψ_k^i , $k = 1, 2, \dots$, $i = 1, 2$, получаем $\psi^i(t) \geq 0$, $i = 1, 2$, для любого $t > 0$. Далее дифференциальное уравнение (18.32) и условие $\psi(t) \geq 0$ влекут выполнение неравенства $\psi^1(t) > 0$ для любого $t \geq 0$, т.е. строгое неравенство в (18.36) доказано.

Переходя к пределу в условии (18.39) при п.в. $t \geq 0$ при $k \rightarrow \infty$, получаем условие максимума (18.34).

Докажем выполнение условия стационарности гамильтониана (18.35). Выберем произвольное $t > 0$ и проинтегрируем равенство (18.41) на интервале времени $[t, T_k]$ для достаточно больших номеров k таких, что $T_k > t$. В силу равенства (18.40) получаем

$$\begin{aligned} H_k(x_k(t), y(t), t, \psi_k^1(t), \psi_k^2(t)) &= e^{-\rho T_k} \left[\kappa \ln x_k(T_k) + \sup_{u \in [0, b)} \left(\ln(b - u) - \frac{(u - v_k(T_k))^2}{1 + \sigma_k} \right) \right] + \\ &+ \rho \int_t^{T_k} e^{-\rho s} \left[\kappa \ln x_k(s) + \ln(b - u_k(s)) - \frac{(u_k(s) - v_k(s))^2}{1 + \sigma_k} \right] ds - \\ &- 2 \int_t^{T_k} e^{-\rho s} \frac{(u_k(s) - v_k(s)) \dot{v}_k(s)}{1 + \sigma_k} ds. \end{aligned} \quad (18.44)$$

Далее для любого фиксированного $t \geq 0$, переходя в равенстве (18.44) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$H(x_*(t), y(t), t, \psi^1(t), \psi^2(t)) = \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} [\kappa \ln x_*(s) + \ln(b - u_*(s))] ds. \quad (18.45)$$

Таким образом, условие (18.35) доказано. Теорема доказана.

Следствие 18.4. В условиях теоремы 18.2 выполняются следующие условия трансверсальности на бесконечности:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi^1(t)x_*(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi^1(t)y(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi^2(t)y(t) = 0; \quad (18.46)$$

более того, для любого $t \geq 0$ имеет место следующее неравенство:

$$e^{\rho t} \psi^1(t)x_*(t) \leq \frac{\kappa}{\rho}. \quad (18.47)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что условия (18.46) являются прямым следствием условия стационарности (18.35), условия (18.36), положительности параметров b, γ, ν и траекторий $x_*(t), y(t)$.

Докажем выполнение неравенства (18.47). Дифференцируя произведение $\psi^1(t)x_*(t)$ при п.в. t , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi^1(t)x_*(t)) &= \dot{\psi}^1(t)x_*(t) + \psi^1(t)\dot{x}_*(t) = \\ &= -u_*(t)\psi^1(t)x_*(t) - \kappa e^{-\rho t} + u_*(t)(x_*(t) + \gamma y(t))\psi^1(t) \geq -\kappa e^{-\rho t}. \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя последнее неравенство на произвольном интервале времени $[t, T]$, $t < T$, имеем

$$\psi^1(T)x_*(T) - \psi^1(t)x_*(t) \geq -\kappa \int_t^T e^{-\rho s} ds = \frac{\kappa}{\rho}(e^{-\rho T} - e^{-\rho t}).$$

Следовательно, для любых $0 \leq t < T$

$$\psi^1(t)x_*(t) \leq \psi^1(T)x_*(T) + \frac{\kappa}{\rho}(e^{-\rho t} - e^{-\rho T}).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $T \rightarrow \infty$, при произвольном фиксированном $t \geq 0$ в силу первого из условий трансверсальности (18.46) получаем неравенство (18.47).

19. РЕДУЦИРОВАННАЯ ЗАДАЧА

Упростим формулировку задачи (\tilde{P}) , понизив размерность фазового вектора до единицы. Положим

$$z(t) = \frac{x(t)}{y(t)} \quad \text{для любого } t \geq 0 \quad \text{и} \quad z_0 = \frac{x_0}{y_0}. \quad (19.1)$$

Тогда для любой допустимой пары (x, u) имеем (см. (17.24), (17.25))

$$\dot{z}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{1}{y(t)} \dot{x}(t) - \frac{x(t)}{y^2(t)} \dot{y}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \frac{u(t)(x(t) + \gamma y(t))}{y(t)} - \frac{x(t)}{y^2(t)} \nu y(t) = u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t)$$

и (см. (17.28))

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln(z(t)y(t)) + \ln(b - u(t))] dt = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \kappa \ln y(t) + \ln(b - u(t))] dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \kappa \ln(y_0 e^{\nu t}) + \ln(b - u(t))] dt = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))] dt + K_5, \end{aligned}$$

где

$$K_5 = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} [\kappa \ln y_0 + \kappa \nu t] dt.$$

Из данного наблюдения вытекает заключение об эквивалентности двух задач оптимального управления, которое мы сформулируем ниже в лемме 19.1.

Введем в рассмотрение следующую задачу оптимального управления (\mathcal{P}) :

$$\dot{z}(t) = u(t)(z(t) + \gamma) - \nu z(t), \quad u(t) \in [0, b], \quad (19.2)$$

$$z(0) = z_0, \quad (19.3)$$

$$J(z, u) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} [\kappa \ln z(t) + \ln(b - u(t))] dt \rightarrow \max. \quad (19.4)$$

Здесь все данные в задаче (\mathcal{P}) те же самые, что и в задаче $(\tilde{\mathcal{P}})$. Допустимыми управлениями в задаче (\mathcal{P}) являются такие измеримые функции $u: [0, \infty) \mapsto [0, b]$, что на паре (z, u) , где z — допустимая траектория, соответствующая u , интеграл в (19.4) сходится абсолютно. Аналогично в задаче (\mathcal{P}) допустимая траектория z , соответствующая допустимому управлению u , есть определенное на $[0, \infty)$ решение (в смысле Каратеодори) дифференциального уравнения (19.2) с начальным условием (19.3). Очевидно, что любая допустимая траектория z удовлетворяет включению $z(t) \in G = (0, \infty)$ для любого $t \geq 0$. Наконец, допустимая пара (для системы (19.2)) — это любая пара (z, u) , где u — допустимое управление, а z — соответствующая управлению u траектория.

Лемма 19.1. *Задачи оптимального управления $(\tilde{\mathcal{P}})$ и (\mathcal{P}) эквивалентны. Именно справедливы следующие утверждения:*

- (i) *допустимое управление u_* оптимально в задаче $(\tilde{\mathcal{P}})$ тогда и только тогда, когда оно оптимально в задаче (\mathcal{P}) ;*
- (ii) *оптимальные значения функционалов J_* и J_{**} в задачах $(\tilde{\mathcal{P}})$ и (\mathcal{P}) связаны равенством $J_* = J_{**} + K_5$.*

В силу леммы 19.1 и теоремы 18.1 (см. следствие 18.3) существует оптимальное допустимое управление u_* в задаче (\mathcal{P}) . В дальнейшем мы будем использовать *редуцированную задачу (\mathcal{P})* для качественного анализа оптимальных пар в задаче $(\tilde{\mathcal{P}})$.

Согласно стандартному определению функция Гамильтона–Понтрягина \mathcal{H} и гамильтониан H в нормальной форме для задачи (\mathcal{P}) имеют следующий вид (см. разд. 3):

$$\mathcal{H}(z, t, u, \psi) = u(z + \gamma)\psi - \nu z\psi + e^{-\rho t} [\kappa \ln z + \ln(b - u)], \quad z > 0, \quad t \geq 0, \quad u \in [0, b], \quad \psi > 0,$$

$$H(z, t, \psi) = \sup_{u \in [0, b]} \mathcal{H}(z, t, u, \psi), \quad z > 0, \quad t \geq 0, \quad \psi > 0.$$

Положим

$$z_*(t) = \frac{x_*(t)}{y(t)} \quad \text{для любого } t \geq 0$$

и определим функцию $\tilde{\psi}: [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ посредством равенства

$$\tilde{\psi}(t) = \psi^1(t)y(t) \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Здесь ψ^1 — первая координата сопряженной переменной ψ , соответствующей оптимальной траектории x_* в задаче (\tilde{P}) в силу принципа максимума Понтрягина (см. теорему 18.2).

Очевидно, функция z_* есть допустимая траектория управляемой системы (19.2), соответствующая допустимому управлению u_* , так что (z_*, u_*) — оптимальная допустимая пара в задаче (P) . Функция $\tilde{\psi}$ строго положительна и в силу условия (18.32) при п.в. $t \geq 0$ справедливо равенство

$$\dot{\tilde{\psi}}(t) = -u_*(t)\psi^1(t)y(t) - \kappa e^{-\rho t} \frac{y(t)}{x_*(t)} + \nu\psi^1(t)y(t) = -(u_*(t) - \nu)\tilde{\psi}(t) - e^{-\rho t} \frac{\kappa}{z_*(t)}. \quad (19.5)$$

Последнее означает, что функция $\tilde{\psi}$ является решением сопряженной системы в нормальной форме для задачи (P) , соответствующим паре (z_*, u_*) .

Условие максимума (18.34) в терминах переменных z_* и $\tilde{\psi}$ переписывается следующим образом:

$$u_*(t)\tilde{\psi}(t)(z_*(t) + \gamma) + e^{-\rho t} \ln(b - u_*(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \sup_{u \in [0, b]} (u\tilde{\psi}(t)(z_*(t) + \gamma) + e^{-\rho t} \ln(b - u)), \quad (19.6)$$

что совпадает с условием максимума для задачи (P) .

Таким образом, в силу (19.5), (19.6) функция $\tilde{\psi}$ есть сопряженная переменная, соответствующая допустимой в задаче (P) паре (z_*, u_*) (см. разд. 3).

Из условий (18.46) согласно определению функции $\tilde{\psi}$ вытекают условия трансверсальности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_*(t)\tilde{\psi}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\psi}(t) = 0, \quad (19.7)$$

а условие (18.47) в терминах переменных z_* , $\tilde{\psi}$ записывается в виде

$$\tilde{\psi}(t)z_*(t) \leq e^{-\rho t} \frac{\kappa}{\rho} \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Наконец, из условий (19.7) получаем условие асимптотической стационарности гамильтониана

$$H(z_*(t), t, \tilde{\psi}(t)) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (19.8)$$

Следовательно, в силу условий (19.5), (19.6) и (19.8) имеем (см. разд. 3, лемма 3.1)

$$H(z_*(t), t, \tilde{\psi}(t)) = \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} [\kappa \ln z_*(s) + \ln(b - u_*(s))] ds \quad \text{для любого } t \geq 0.$$

Таким образом, из леммы 19.1 и теоремы 18.2 вытекает следующий вариант принципа максимума Понтрягина в нормальной форме для задачи (P) в терминах переменных z_* , $\tilde{\psi}$.

Теорема 19.1. Пусть u_* — оптимальное управление в задаче (P) и z_* — соответствующая оптимальная траектория. Тогда существует такая (локально) абсолютно непрерывная положительная функция $\tilde{\psi}$, определенная на $[0, \infty)$, что выполняются следующие условия:

(i) функция $\tilde{\psi}$ является решением сопряженной системы

$$\dot{\tilde{\psi}}(t) = -(u_*(t) - \nu)\tilde{\psi}(t) - e^{-\rho t} \frac{\kappa}{z_*(t)}; \quad (19.9)$$

(ii) при п.в. $t \in [0, \infty)$ выполняется условие максимума

$$u_*(t)\tilde{\psi}(t)(z_*(t) + \gamma) + e^{-\rho t} \ln(b - u_*(t)) = \sup_{u \in [0, b]} (u\tilde{\psi}(t)(z_*(t) + \gamma) + e^{-\rho t} \ln(b - u)); \quad (19.10)$$

(iii) выполняются условия трансверсальности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_*(t) \tilde{\psi}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\psi}(t) = 0;$$

более того,

$$\tilde{\psi}(t) z_*(t) \leq e^{-\rho t} \frac{\kappa}{\rho} \quad \text{для любого } t \geq 0; \quad (19.11)$$

(iv) выполняется условие стационарности

$$H(z_*(t), t, \tilde{\psi}(t)) = \rho \int_t^\infty e^{-\rho s} [\kappa \ln z_*(s) + \ln(b - u_*(s))] ds \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (19.12)$$

Определим значения текущей сопряженной переменной p и текущего гамильтониана M задачи (\mathcal{P}) равенствами (см. разд. 3)

$$p(t) = e^{\rho t} \tilde{\psi}(t) \quad \text{для любого } t \geq 0,$$

$$M(z, p) = e^{\rho t} H(z, t, \psi) = \sup_{u \in [0, b]} (up(z + \gamma) + \ln(b - u)) - \nu zp + \kappa \ln z, \quad z > 0, \quad t \geq 0, \quad p > 0.$$

В силу теоремы 19.1 получаем следующий вариант принципа максимума Понтрягина для задачи (\mathcal{P}) в терминах переменных z_* и p .

Теорема 19.2. Пусть u_* — оптимальное управление в задаче (\mathcal{P}) и z_* — соответствующая оптимальная траектория. Тогда существует такая (локально) абсолютно непрерывная положительная функция p , определенная на $[0, \infty)$, что выполняются следующие условия:

(i) функция p является решением сопряженной системы

$$\dot{p}(t) = -(u_*(t) - \nu - \rho)p(t) - \frac{\kappa}{z_*(t)}; \quad (19.13)$$

(ii) при п.в. $t \in [0, \infty)$ выполняется условие максимума

$$u_*(t)p(t)(z_*(t) + \gamma) + \ln(b - u_*(t)) = \sup_{u \in [0, b]} (up(t)(z_*(t) + \gamma) + \ln(b - u)); \quad (19.14)$$

(iii) выполняются условия трансверсальности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} z_*(t)p(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} p(t) = 0; \quad (19.15)$$

более того,

$$p(t) z_*(t) \leq \frac{\kappa}{\rho} \quad \text{для любого } t \geq 0; \quad (19.16)$$

(iv) выполняется условие стационарности

$$M(z_*(t), p(t)) = \rho e^{\rho t} \int_t^\infty e^{-\rho s} [\kappa \ln z_*(s) + \ln(b - u_*(s))] ds \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (19.17)$$

Теорема 19.2 является необходимым условием оптимальности допустимой пары (z_*, u_*) для задачи (\mathcal{P}) . Она получена как формальное следствие теоремы 18.2 при помощи введения специальной сопряженной переменной p . Однако, как отмечено выше, так специально определенная сопряженная переменная p есть текущая сопряженная переменная принципа максимума Понтрягина для задачи (\mathcal{P}) . Таким образом, теорема 19.2 есть вариант принципа максимума в нормальной форме для задачи (\mathcal{P}) в терминах текущей сопряженной переменной p .

Уточним формулировку теоремы 19.2 и одновременно построим гамильтонову систему принципа максимума для задачи оптимального управления (\mathcal{P}).

Введем в рассмотрение функцию $\bar{h}: (0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ вида

$$\bar{h}(z) = \frac{1}{b(z + \gamma)} \quad \text{для любого } z > 0 \quad (19.18)$$

и множества

$$\Gamma_1 = \{(z, p) \in \mathbb{R}^2: z > 0, p \geq \bar{h}(z)\}, \quad (19.19)$$

$$\Gamma_2 = \{(z, p) \in \mathbb{R}^2: z > 0, 0 < p < \bar{h}(z)\}. \quad (19.20)$$

Очевидно, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, где Γ — положительный квадрант в \mathbb{R}^2 :

$$\Gamma = (0, \infty) \times (0, \infty). \quad (19.21)$$

Определим функции $\varphi_1: \Gamma \mapsto \mathbb{R}^1$ и $\varphi_2: \Gamma \mapsto \mathbb{R}^1$ следующими равенствами:

$$\varphi_1(z, p) = \begin{cases} (b - \nu)z + b\gamma - \frac{1}{p}, & \text{если } (z, p) \in \Gamma_1, \\ -\nu z, & \text{если } (z, p) \in \Gamma_2, \end{cases} \quad (19.22)$$

$$\varphi_2(z, p) = \begin{cases} -(b - \nu - \rho)p - \frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z}{(z + \gamma)z}, & \text{если } (z, p) \in \Gamma_1, \\ (\nu + \rho)p - \frac{\kappa}{z}, & \text{если } (z, p) \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (19.23)$$

Нетрудно видеть, что функции φ_1 и φ_2 непрерывны на Γ .

Следствие 19.1. Пусть (z_*, u_*) — оптимальная пара в задаче (\mathcal{P}). Тогда

- (i) существует такая положительная (локально) абсолютно непрерывная функция p на $[0, \infty)$, что пара (z_*, p) есть решение на $[0, \infty)$ системы дифференциальных уравнений (в Γ)

$$\dot{z}(t) = \varphi_1(z(t), p(t)), \quad (19.24)$$

$$\dot{p}(t) = \varphi_2(z(t), p(t)); \quad (19.25)$$

- (ii) при н.в. $t \geq 0$ имеем

$$u_*(t) = \begin{cases} b - \frac{1}{p(t)(z_*(t) + \gamma)}, & \text{если } (z_*(t), p(t)) \in \Gamma_1, \\ 0, & \text{если } (z_*(t), p(t)) \in \Gamma_2; \end{cases} \quad (19.26)$$

- (iii) выполняются условия трансверсальности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} z_*(t) p(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} p(t) = 0;$$

более того,

$$p(t) z_*(t) \leq \frac{\kappa}{\rho} \quad \text{для любого } t \geq 0; \quad (19.27)$$

- (iv) выполняется условие стационарности

$$M(z_*(t), p(t)) = \rho e^{\rho t} \int_t^\infty e^{-\rho s} [\kappa \ln z_*(s) + \ln(b - u_*(s))] ds \quad \text{для любого } t \geq 0. \quad (19.28)$$

Нетрудно проверить, что уравнения (19.24), (19.25) представляют собой *гамильтонову систему принципа максимума* для задачи (P).

Доказательство следствия 19.1. Пусть (z_*, u_*) — оптимальная допустимая пара в задаче (P). Тогда в силу теоремы 19.2 существует такая положительная сопряженная переменная p (решение сопряженной системы (19.13)), для которой выполняются условие максимума (19.14), условия трансверсальности (19.15), неравенство (19.16) и условие стационарности (19.28).

Рассмотрим условие максимума (19.14). Для фиксированного $t \geq 0$ дифференцирование функции

$$h(u) = up(t)(z_*(t) + \gamma) + \ln(b - u)$$

по переменной $u \in [0, b)$ дает

$$\frac{\partial}{\partial u} h(u) = p(t)(z_*(t) + \gamma) - \frac{1}{b - u}.$$

Отсюда вытекает, что функция $\frac{\partial}{\partial u} h(u)$ убывает и стремится к $-\infty$ при $u \rightarrow b - 0$. Следовательно, если $\frac{\partial}{\partial u} h(0) \geq 0$, то функция h достигает своего максимального значения в некоторой точке $u \in (0, b)$ такой, что $\frac{\partial}{\partial u} h(u) = 0$. В противном случае максимум функции h достигается в нуле. Таким образом при п.в. $t \geq 0$ условие максимума (19.14) имеет вид

$$u_*(t) = \begin{cases} b - \frac{1}{p(t)(z_*(t) + \gamma)}, & \text{если } \frac{1}{p(t)(z_*(t) + \gamma)} \leq b, \\ 0, & \text{если } \frac{1}{p(t)(z_*(t) + \gamma)} > b. \end{cases} \quad (19.29)$$

Подставляя выражение (19.29) в уравнение (19.2) и сопряженное уравнение (19.13), получаем

$$\begin{aligned} \dot{z}_*(t) &= \left[b - \frac{1}{p(t)(z_*(t) + \gamma)} \right] (z_*(t) + \gamma) - \nu z_*(t) = (b - \nu)z_*(t) + b\gamma - \frac{1}{p(t)}, \\ \dot{p}(t) &= - \left[b - \frac{1}{p(t)(z_*(t) + \gamma)} - \nu - \rho \right] p(t) - \frac{\kappa}{z_*(t)} = -(b - \nu - \rho)p(t) + \frac{1}{z_*(t) + \gamma} - \frac{\kappa}{z_*(t)} = \\ &= -(b - \nu - \rho)p(t) - \frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z_*(t)}{(z_*(t) + \gamma)z_*(t)} \end{aligned}$$

для п.в. $t \geq 0$ таких, что

$$\frac{1}{p(t)(z_*(t) + \gamma)} \leq b,$$

и

$$\dot{z}_*(t) = -\nu z_*(t), \quad \dot{p}(t) = (\nu + \rho)p(t) - \frac{\kappa}{z_*(t)}$$

при п.в. $t \geq 0$ таких, что

$$\frac{1}{p(t)(z_*(t) + \gamma)} > b.$$

Следствие доказано.

В дальнейшем анализе будет удобно разделить систему уравнений (19.24), (19.25) на две части:

$$\dot{z}(t) = (b - \nu)z(t) + b\gamma - \frac{1}{p(t)}, \quad (19.30)$$

$$\dot{p}(t) = -(b - \nu - \rho)p(t) - \frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z(t)}{(z(t) + \gamma)z(t)}, \quad (19.31)$$

$$(z(t), p(t)) \in \text{int } \Gamma_1,$$

и

$$\dot{z}(t) = -\nu z(t), \quad (19.32)$$

$$\dot{p}(t) = (\nu + \rho)p(t) - \frac{\kappa}{z(t)}, \quad (19.33)$$

$$(z(t), p(t)) \in \Gamma_2.$$

Уравнения (19.30), (19.31) будем называть *невырожденными*, а уравнения (19.32), (19.33) *вырожденными*.

Напомним, что принцип максимума Понтрягина для редуцированной задачи (\mathcal{P}) (теорема 19.2) получен элементарной трансформацией принципа максимума Понтрягина для исходной задачи ($\tilde{\mathcal{P}}$) (теорема 18.2). В этой связи естественно задать вопрос: раз редуцированная задача (\mathcal{P}) эквивалентна исходной задаче ($\tilde{\mathcal{P}}$) и имеет меньшую размерность, то не рациональнее ли было бы сначала отметить факт эквивалентности задач (лемма 19.1), а затем, сконцентрировавшись на упрощенной задаче (\mathcal{P}), доказать непосредственно для нее принцип максимума Понтрягина? Ситуация здесь аналогична той, которую мы имеем в случае неоклассической модели оптимального экономического роста (см. разд. 15). В неоклассической модели мы также сначала получили вариант принципа максимума Понтрягина для исходной (двумерной) задачи, а затем при помощи несложного преобразования переменных перешли к эквивалентной редуцированной (одномерной) задаче и соответствующему ей варианту принципа максимума. Поэтому остановимся на данном вопросе подробнее.

Прежде всего заметим, что в обоих случаях доказательство соотношений принципа максимума Понтрягина основано на использовании условий монотонности (A4) и дополнительных условий положительности (см. разд. 10). При переходе же к редуцированной задаче некоторые из этих свойств исходной задачи могут теряться, что делает невозможным их прямую эксплуатацию во всяком случае при произвольных значениях параметров рассматриваемой задачи (см. доказательство теоремы 10.1 и другие результаты разд. 10). В частности, в приведенном выше доказательстве теоремы 18.2 (для задачи ($\tilde{\mathcal{P}}$)) при обосновании равномерной ограниченности значений сопряженных переменных в начальный момент времени $t_0 = 0$ для аппроксимирующих задач (P_k), $k = 1, 2, \dots$, точнее при заключении об этой равномерной ограниченности на основании формул (18.42) и (18.43), мы использовали тот факт, что в начальном состоянии (x_0, y_0) значения $u(x_0 + \gamma y_0)$ и νy_0 правых частей управляемой системы (18.6), (18.7) задачи ($\tilde{\mathcal{P}}$) положительны при подходящем подборе $u_0 \in [0, b)$ (мы положили $u_0 = b/2$). Для одномерной управляемой системы (19.2) редуцированной задачи (\mathcal{P}) подобное свойство уже, вообще говоря, не имеет места: значение $u(z_0 + \gamma) - \nu z_0$ правой части системы в начальном состоянии z_0 может быть отрицательным при всех $u \in [0, b)$ (это так, если, например, $\nu > b$ и $(\nu - b)z_0 > b\gamma$). Благодаря этому существенно ограничивается общность рассуждений. Таким образом, хотя редуцированная задача и является одномерной (что существенно для анализа гамильтоновой системы принципа максимума, имеющей в этом случае размерность 2), ее структура с точки зрения получения соотношений принципа максимума может оказаться

сложнее. Этими обстоятельствами вызван используемый способ получения соотношений принципа максимума как в случае неоклассической модели оптимального экономического роста в разд. 10, так и в случае рассматриваемой здесь задачи об оптимальном росте экономического последователя.

Заметим также, что текущий гамильтониан M задачи (\mathcal{P}) является вогнутой функцией переменной z на множестве $G = (0, \infty)$ при $\kappa \geq 1$ и не является вогнутой функцией этой переменной на G при $\kappa < 1$.

Действительно, обращаясь к формулировке задачи (\mathcal{P}) , теореме 19.2 и определению множеств Γ_1 (см. (19.19)) и Γ_2 (см. (19.20)), получаем следующее выражение для значений $M(z, p)$ текущего гамильтониана при $z, p > 0$ (см. разд. 3):

$$M(z, p) = \begin{cases} M_1(z, p) & \text{при } p \geq \frac{1}{b(z + \gamma)}, \\ M_2(z, p) & \text{при } p < \frac{1}{b(z + \gamma)}, \end{cases} \quad (19.34)$$

где

$$M_1(z, p) = (b - \nu)pz + b\gamma p - 1 + \kappa \ln z + \ln \frac{1}{(z + \gamma)p}, \quad z, p > 0, \quad (19.35)$$

$$M_2(z, p) = -\nu pz + \kappa \ln z + \ln b, \quad z, p > 0. \quad (19.36)$$

Ясно, что M_2 — вогнутая функция переменной z на G при любом фиксированном $p > 0$, а функция M_1 — вогнутая по переменной z на G при любом фиксированном $p > 0$ в случае, когда $\kappa \geq 1$. Действительно, при $\kappa \geq 1$ имеем

$$\frac{\partial^2 M_1(z, p)}{\partial z^2} = -\frac{\kappa}{z^2} + \frac{1}{(z + \gamma)^2} < 0 \quad \text{для любых } z, p > 0.$$

Поскольку

$$M_1(z, p) \geq M_2(z, p) \quad \text{для любых } z, p > 0,$$

то из определения функции M и леммы 15.1 вытекает вогнутость функции M по переменной z на G при произвольном фиксированном $p > 0$ в случае, когда $\kappa \geq 1$.

В случае же $\kappa < 1$ при всех достаточно больших $z \in G$ при произвольном $p > 0$ имеем

$$\frac{\partial^2 M_1(z, p)}{\partial z^2} = -\frac{\kappa}{z^2} + \frac{1}{(z + \gamma)^2} > 0.$$

Поэтому M_1 , а следовательно, и M не являются вогнутыми функциями переменной z на G при фиксированных значениях $p > 0$.

Таким образом, использование достаточных условий оптимальности, основанных на свойстве вогнутости гамильтониана (см. разд. 13, теорема 13.1), в исследовании задачи (\mathcal{P}) возможно только в случае $\kappa \geq 1$. В этом случае вариант принципа максимума Понтрягина, сформулированный в виде следствия 19.1, является необходимым и достаточным условием оптимальности для задачи (\mathcal{P}) (см. разд. 13, следствие 13.1). В случае же, когда $\kappa < 1$, следствие 19.1 является для этой задачи, вообще говоря, только необходимым условием оптимальности.

В оставшейся части данной главы рассматривается решение редуцированной задачи (\mathcal{P}) , основанное на анализе гамильтоновой системы принципа максимума (см. следствие 19.1). При этом мы будем опираться исключительно на принцип максимума Понтрягина, сформулированный в следствии 19.1, как на необходимое условие оптимальности для задачи (\mathcal{P}) .

20. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Итак, наша цель — извлечь из полученных в следствии 19.1 соотношений принципа максимума Понтрягина явную характеристику решений задачи (\mathcal{P}) . Данная характеристика будет результатом анализа траекторий гамильтоновой системы (19.24), (19.25) в положительном квадранте Γ (19.21); в предпринимаемом анализе существенную роль будут играть условия трансверсальности (19.27).

При различных соотношениях между параметрами ν , b , ρ , κ и γ векторное поле гамильтоновой системы (19.24), (19.25) в квадранте Γ устроено по-разному. Ниже мы по отдельности рассмотрим все возможные случаи его устройства.

В настоящем разделе мы введем основные геометрические элементы, с помощью которых будем далее характеризовать изучаемое векторное поле. Такими элементами служат некоторые характеристические кривые, а также части квадранта Γ , располагающиеся по разные стороны от этих кривых.

Большая часть кривых задается уравнениями вида $p = h(z)$, где h — скалярная функция, определенная либо на всей положительной оси, либо на ее подмножестве. Кривая, задаваемая таким уравнением, есть график функции h ; этот график (эту кривую) будем обозначать символом $\text{gr } h$. Таким образом, если h — скалярная функция, определенная на множестве $E \subset (0, \infty)$, то

$$\text{gr } h = \{(z, p) : p = h(z), z \in E\}.$$

В целях наглядности примем, что плоскость, на которой определено векторное поле гамильтоновой системы (19.24), (19.25), оснащена горизонтальной осью z и вертикальной осью p . Расположение на этой плоскости (точнее, в квадранте Γ) одного объекта относительно другого будем характеризовать естественными терминами “выше”, “ниже”, “правее”, “левее” и т.д. Например, выражение “точка (z, p) выше кривой $V = \text{gr } h$ ” будет означать, что z лежит в области определения функции h и $p > h(z)$, а выражение “точка (z, p) лежит на кривой $V = \text{gr } h$ ” будет означать, что $p = h(z)$.

Надграфик $\text{gr}^+ h$ (в Γ) и *подграфик* $\text{gr}^- h$ (в Γ) скалярной функции h , определенной на множестве $E \subset (0, \infty)$, определим как множества точек квадранта Γ , расположенных строго выше и соответственно строго ниже ее графика:

$$\text{gr}^+ h = \{(z, p) \in \Gamma : p > h(z), z \in E\}, \quad \text{gr}^- h = \{(z, p) \in \Gamma : p < h(z), z \in E\};$$

множества

$$\text{gr}_0^+ h = \{(z, p) \in \Gamma : p \geq h(z), z \in E\}, \quad \text{gr}_0^- h = \{(z, p) \in \Gamma : p \leq h(z), z \in E\}$$

будем называть соответственно *нестрогим надграфиком* и *нестрогим подграфиком* (в Γ) этой функции.

Обратим внимание, что по определению областей Γ_1 и Γ_2 квадранта Γ (см. (19.19), (19.20)) эти области разделяются графиком функции \bar{h} (см. (19.18)): область Γ_1 расположена выше этого графика и на нем, а область Γ_2 строго ниже него и, таким образом,

$$\Gamma_1 = \text{gr}_0^+ \bar{h}, \quad \Gamma_2 = \text{gr}^- \bar{h}. \quad (20.1)$$

Для часто встречающихся комбинаций параметров будем использовать следующие сокращенные обозначения:

$$\beta_0 = \rho + \nu - b, \quad \beta_1 = \rho + \nu - \kappa b, \quad \beta_2 = \rho + \kappa \nu - \kappa b. \quad (20.2)$$

Приступим к построению интересующих нас элементов векторного поля гамильтоновой системы (19.24), (19.25).

Начнем с выделения содержащихся в двумерной области Γ_1 (см. (19.19)) кривой V_{11}^0 переключения знака z -координаты и кривой V_{12}^0 переключения знака p -координаты. На кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 обращаются в нуль соответственно скорости $\dot{z}(t)$ и $\dot{p}(t)$ переменных $z(t)$ и $p(t)$, изменяющихся в силу невырожденных уравнений (19.30), (19.31).

Формально

$$V_{11}^0 = \{(z, p) \in \Gamma_1: \varphi_1(z, p) = 0\}, \quad V_{12}^0 = \{(z, p) \in \Gamma_1: \varphi_2(z, p) = 0\}; \quad (20.3)$$

напомним, что $\varphi_1(z, p)$ (см. (19.22)) и $\varphi_2(z, p)$ (см. (19.23)) определяют значения правых частей дифференциальных уравнений для z -координаты и p -координаты гамильтоновой системы (19.24), (19.25).

Точки пересечения кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 исчерпывают все точки покоя гамильтоновой системы (19.24), (19.25) в области Γ_1 .

Уравнения кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 получаются приравниванием нулю правых частей соответственно уравнений (19.30), (19.31), в которых $z(t)$ и $p(t)$ заменяются на не зависящие от времени переменные z и p . Для кривой V_{11}^0 получаем уравнение

$$p = \frac{1}{b\gamma - (\nu - b)z},$$

для кривой V_{12}^0 с учетом обозначения β_0 (см. (20.2)) — уравнения

$$p = \frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z}{\beta_0(z + \gamma)z} \quad \text{при } \beta_0 \neq 0$$

либо

$$\gamma\kappa + (\kappa - 1)z = 0 \quad \text{при } \beta_0 = 0.$$

Таким образом, вводя функцию h_{11} вида

$$h_{11}(z) = \frac{1}{b\gamma - (\nu - b)z}, \quad (20.4)$$

определенную на

$$E_{11} = \begin{cases} (0, z_{11}) & \text{при } \nu > b, \\ (0, \infty) & \text{при } \nu \leq b, \end{cases} \quad (20.5)$$

где

$$z_{11} = \frac{b\gamma}{\nu - b}, \quad (20.6)$$

и функцию h_{12} вида

$$h_{12}(z) = \frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z}{\beta_0(z + \gamma)z}, \quad (20.7)$$

определенную при $\beta_0 \neq 0$ на $(0, \infty)$, получаем

$$V_{11}^0 = \Gamma_1 \cap \text{gr } h_{11}; \quad (20.8)$$

$$V_{12}^0 = \Gamma_1 \cap \text{gr } h_{12} \quad \text{при } \beta_0 \neq 0; \quad (20.9)$$

$$V_{12}^0 = \{(z, p) \in \Gamma_1: (1 - \kappa)z = \gamma\kappa\} \quad \text{при } \beta_0 = 0. \quad (20.10)$$

Из вида функций \bar{h} (см. (19.18)) и h_{11} (см. (20.4), (20.5)) имеем

$$h_{11}(z) > \bar{h}(z) \quad \text{для любого } z \in E_{11}. \quad (20.11)$$

Иначе говоря, график функции h_{11} находится строго выше графика функции \bar{h} , что можно записать как $\text{gr } h_{11} \subset \text{gr}^+ \bar{h}$. Отсюда и из того, что $\text{gr}^+ \bar{h} \subset \Gamma_1$ (см. (20.1)), заключаем, что $\text{gr}^+ h_{11} \subset \Gamma_1$. Поэтому для кривой V_{11}^0 (см. (20.8)) переключения знака z -координаты в области Γ_1 верно более точное представление

$$V_{11}^0 = \text{gr } h_{11}. \quad (20.12)$$

Отметим, что, как следует из определения (20.4) функции h_{11} ,

$$h_{11} \text{ возрастает, } \lim_{z \rightarrow z_{11}^-} h_{11}(z) = \infty \quad \text{при } \nu > b; \quad (20.13)$$

$$h_{11} \text{ ограничена и не возрастает} \quad \text{при } \nu \leq b. \quad (20.14)$$

Уточним вид кривой V_{12}^0 для случая $\beta_0 \neq 0$. Рассмотрим участвующую в представлении этой кривой (см. (20.9)) функцию h_{12} (см. (20.7)). Заметим, что

$$\lim_{z \rightarrow +0} h_{12}(z) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} h_{12}(z) = 0 \quad \text{при } \beta_0 > 0; \quad (20.15)$$

$$\lim_{z \rightarrow +0} h_{12}(z) = -\infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} h_{12}(z) = 0 \quad \text{при } \beta_0 < 0. \quad (20.16)$$

Эти соотношения и тот факт, что область Γ_1 есть нестрогий надграфик положительной ограниченной функции \bar{h} (см. (20.1)), показывают, что точки графика функции h_{12} , z -координаты которых достаточно близки к нулю, располагаются в области Γ_1 , если $\beta_0 > 0$, и вне этой области, если $\beta_0 < 0$.

Определим точки пересечения графика функции h_{12} и границы области Γ_1 — графика функции \bar{h} . Для всякой такой точки ее z -координата есть положительное решение уравнения $h_{12}(z) = \bar{h}(z)$, или с учетом (20.7) и (19.18) уравнения

$$\frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z}{\beta_0(z + \gamma)z} = \frac{1}{b(z + \gamma)}.$$

Элементарные преобразования с привлечением равенства $\beta_0 = \nu + \rho - b$ (см. (20.2)) дают следующую эквивалентную форму этого уравнения:

$$\gamma\kappa b = [b(1 - \kappa) + \nu + \rho - b]z,$$

или (см. обозначение β_1 (20.2))

$$\gamma\kappa b = \beta_1 z.$$

Последнее уравнение имеет единственное положительное решение

$$\bar{z}_{12} = \frac{\gamma\kappa b}{\beta_1}, \quad (20.17)$$

если $\beta_1 > 0$; в противном случае оно не имеет положительных решений. Следовательно, графики функций h_{12} и \bar{h} имеют единственную точку пересечения

$$(\bar{z}_{12}, \bar{p}) = (\bar{z}_{12}, \bar{h}(\bar{z}_{12})) = \left(\frac{\gamma\kappa b}{\beta_1}, \frac{\beta_1}{\gamma b(\nu + \rho)} \right), \quad (20.18)$$

если $\beta_1 > 0$, и эти графики не пересекаются, если $\beta_1 \leq 0$:

$$\text{gr } h_{12} \cap \text{gr } \bar{h} = \{(\bar{z}_{12}, \bar{p})\} \quad \text{при } \beta_0 \neq 0, \quad \beta_1 > 0; \quad (20.19)$$

$$\text{gr } h_{12} \cap \text{gr } \bar{h} = \emptyset \quad \text{при } \beta_0 \neq 0, \quad \beta_1 \leq 0. \quad (20.20)$$

Выше в связи с (20.15), (20.16) было замечено, что точки графика функции h_{12} , z -координаты которых достаточно близки к нулю, располагаются в области Γ_1 , если $\beta_0 > 0$, и вне ее в противном случае. Объединяя это с (20.19), (20.20), приходим к следующему:

$$\text{gr } h_{12}|(0, \bar{z}_{12}] \subset \Gamma_1, \quad \text{gr } h_{12}|(\bar{z}_{12}, \infty) \cap \Gamma_1 = \emptyset \quad \text{при } \beta_0 > 0, \quad \beta_1 > 0; \quad (20.21)$$

$$\text{gr } h_{12} \subset \Gamma_1 \quad \text{при } \beta_0 > 0, \quad \beta_1 \leq 0; \quad (20.22)$$

$$\text{gr } h_{12}|(0, \bar{z}_{12}) \cap \Gamma_1 = \emptyset, \quad \text{gr } h_{12}|[\bar{z}_{12}, \infty) \subset \Gamma_1 \quad \text{при } \beta_0 < 0, \quad \beta_1 > 0; \quad (20.23)$$

$$\text{gr } h_{12} \cap \Gamma_1 = \emptyset \quad \text{при } \beta_0 < 0, \quad \beta_1 \leq 0. \quad (20.24)$$

Здесь и далее $h|E$ обозначает сужение функции h на подмножество E ее области определения. Отсюда и из вида (20.9) кривой V_{12}^0 переключения знака p -координаты в области Γ_1 получаем следующую классификацию:

$$V_{12}^0 = \text{gr } h_{12}|(0, \bar{z}_{12}] \quad \text{при } \beta_0 > 0, \quad \beta_1 > 0; \quad (20.25)$$

$$V_{12}^0 = \text{gr } h_{12} \quad \text{при } \beta_0 > 0, \quad \beta_1 \leq 0; \quad (20.26)$$

$$V_{12}^0 = \text{gr } h_{12}|[\bar{z}_{12}, \infty) \quad \text{при } \beta_0 < 0, \quad \beta_1 > 0; \quad (20.27)$$

$$V_{12}^0 = \emptyset \quad \text{при } \beta_0 < 0, \quad \beta_1 \leq 0. \quad (20.28)$$

Далее из (20.19) следует, что в случаях (20.25) и (20.27) (\bar{z}_{12}, \bar{p}) — единственная точка пересечения кривой V_{12}^0 с границей области Γ_1 — графиком функции \bar{h} :

$$V_{12}^0 \cap \text{gr } \bar{h} = \{(\bar{z}_{12}, \bar{p})\} \quad \text{при } \beta_0 \neq 0, \quad \beta_1 > 0. \quad (20.29)$$

Завершая классификацию случаем $\beta_0 = 0$, заметим, что (см. (20.17), (20.2))

$$\bar{z}_{12} = \frac{\gamma\kappa b}{\beta_1} = \frac{\gamma\kappa b}{\rho + \nu - b + (1 - \kappa)b} = \frac{\gamma\kappa b}{\beta_0 + (1 - \kappa)b} = \frac{\gamma\kappa}{1 - \kappa} \quad \text{при } \beta_0 = 0, \quad \kappa < 1. \quad (20.30)$$

Поэтому (20.10) можно записать в виде

$$V_{12}^0 = \text{gr}_0^+ \bar{h}| \{ \bar{z}_{12} \} \quad \text{при } \beta_0 = 0, \quad \kappa < 1; \quad (20.31)$$

$$V_{12}^0 = \emptyset \quad \text{при } \beta_0 = 0, \quad \kappa \geq 1. \quad (20.32)$$

При $\beta_0 = 0$ неравенство $\kappa < 1$ равносильно неравенству $\beta_1 > 0$. Поэтому имеем соотношение, аналогичное (20.29):

$$V_{12}^0 \cap \text{gr } \bar{h} = \{(\bar{z}_{12}, \bar{p})\} \quad \text{при } \beta_0 = 0, \quad \kappa < 1 \quad (\beta_1 > 0). \quad (20.33)$$

В дальнейшем (см. доказательство леммы 22.1) нам понадобятся сведения об участках монотонности функции h_{12} (при $\beta_0 \neq 0$). Выделим эти участки.

Как следует из вида (20.7) функции h_{12} ,

$$h_{12} \text{ убывает при } \kappa \geq 1 \quad (\beta_0 > 0). \quad (20.34)$$

Пусть $\kappa < 1$. Для произвольного действительного z имеем

$$h'_{12}(z) = \frac{\zeta(z)}{\beta_0(z + \gamma)^2 z^2}, \quad (20.35)$$

где

$$\zeta(z) = (\kappa - 1)(z + \gamma)z - [\gamma\kappa + (\kappa - 1)z](2z + \gamma) = (1 - \kappa)z^2 - 2\gamma\kappa z - \kappa\gamma^2.$$

Корни квадратного уравнения $\zeta(z) = 0$ суть

$$\eta^- = \frac{\gamma\kappa^{1/2}(\kappa^{1/2} - 1)}{1 - \kappa} < 0, \quad \eta^+ = \frac{\gamma\kappa^{1/2}(\kappa^{1/2} + 1)}{1 - \kappa} > 0. \quad (20.36)$$

Поэтому для $z > 0$ имеем $\zeta(z) < 0$ при $z < \eta^+$ и $\zeta(z) > 0$ при $z > \eta^+$. Отсюда в соответствии с (20.35) получаем

$$h_{12} \text{ убывает на } (0, \eta^+] \text{ и возрастает на } [\eta^+, \infty) \text{ при } \kappa < 1, \beta_0 > 0; \quad (20.37)$$

$$h_{12} \text{ возрастает на } (0, \eta^+] \text{ и убывает на } [\eta^+, \infty) \text{ при } \kappa < 1, \beta_0 < 0. \quad (20.38)$$

Заметим, что при $\beta_0, \beta_1 > 0$ (см. (20.17) и (20.2))

$$\begin{aligned} \bar{z}_{12} - \eta^+ &= \frac{\gamma\kappa b}{\beta_1} - \frac{\gamma\kappa^{1/2}(\kappa^{1/2} + 1)}{1 - \kappa} = \frac{\gamma\kappa b}{\rho + \nu - \kappa b} - \frac{\gamma\kappa + \gamma\kappa^{1/2}}{1 - \kappa} = \\ &= \frac{\gamma\kappa}{(\rho + \nu - b)/b + 1 - \kappa} - \frac{\gamma\kappa + \gamma\kappa^{1/2}}{1 - \kappa} = \frac{\gamma\kappa}{\beta_0/b + 1 - \kappa} - \frac{\gamma\kappa + \gamma\kappa^{1/2}}{1 - \kappa} < \\ &< \frac{\gamma\kappa}{1 - \kappa} - \frac{\gamma\kappa + \gamma\kappa^{1/2}}{1 - \kappa} = -\frac{\gamma\kappa^{1/2}}{1 - \kappa} < 0. \end{aligned}$$

Поэтому из (20.37) имеем, в частности:

$$h_{12} \text{ убывает на } (0, \bar{z}_{12}] \text{ при } \kappa < 1, \beta_0 > 0, \beta_1 > 0. \quad (20.39)$$

Введем в рассмотрение подобласти V_{11}^+ и V_{11}^- области Γ_1 , в которых скорость $\dot{z}(t)$ переменной $z(t)$, изменяющейся (в паре с переменной $p(t)$) в силу уравнений (19.30), (19.31), принимает соответственно положительные и отрицательные значения; назовем V_{11}^+ зоной роста, а V_{11}^- зоной убывания z -координаты в области Γ_1 . Формально (см. (19.24), (19.25))

$$V_{11}^+ = \{(z, p) \in \Gamma_1: \varphi_1(z, p) > 0\}, \quad V_{11}^- = \{(z, p) \in \Gamma_1: \varphi_1(z, p) < 0\}. \quad (20.40)$$

Из уравнения (19.30) и определения h_{11} (20.4), (20.5) с учетом вида (20.12) кривой V_{11}^0 переключения знака z -координаты в Γ_1 легко получаем

$$V_{11}^+ = \text{gr}^+ h_{11}; \quad (20.41)$$

$$V_{11}^- = (\text{gr}^- h_{11} \cap \Gamma_1) \cup \{(z, p) \in \Gamma_1: z \geq z_{11}\} \quad \text{при } \nu > b;$$

$$V_{11}^- = \text{gr}^- h_{11} \cap \Gamma_1 \quad \text{при } \nu \leq b.$$

Последние два выражения уточним, принимая во внимание, что $\Gamma_1 = \text{gr}_0^+ \bar{h}$ (см. (20.1)):

$$V_{11}^- = [\text{gr}^- h_{11} \cap \text{gr}_0^+ \bar{h}|(0, z_{11})] \cup \text{gr}_0^+ \bar{h}|[z_{11}, \infty) \quad \text{при } \nu > b; \quad (20.42)$$

$$V_{11}^- = \text{gr}^- h_{11} \cap \text{gr}_0^+ \bar{h} \quad \text{при } \nu \leq b. \quad (20.43)$$

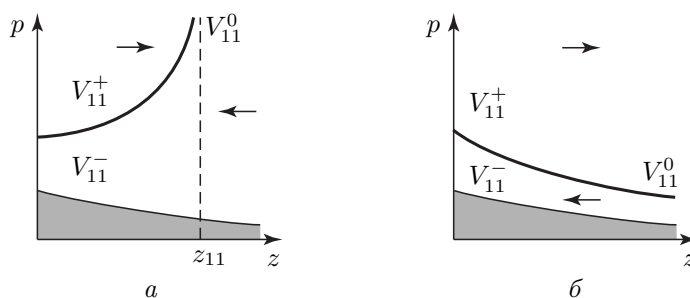


Рис. 5. Зона V_{11}^+ роста и зона V_{11}^- убывания z -координаты в области Γ_1 : a — случай $\nu > b$; b — случай $\nu \leq b$. Зоны V_{11}^+ и V_{11}^- разделяются кривой V_{11}^0 переключения знака z -координаты в области Γ_1 . Затененная область — множество Γ_2 , незатененная — множество Γ_1 . Стрелками показаны направления движения z -координаты гамильтоновой системы

Перефразируем (20.41)–(20.43) в геометрических терминах (см. рис. 5). Зона V_{11}^+ роста z -координаты в области Γ_1 есть часть положительного квадранта, расположенная выше графика функции h_{11} . Зона V_{11}^- убывания z -координаты в области Γ_1 в случае $\nu > b$ состоит из двух частей. Первая часть — это неограниченная (в вертикальном направлении) область положительного квадранта, расположенная ниже графика функции h_{11} (см. (20.13)) и выше (нижней) границы Γ_1 — графика функции \bar{h} ; горизонтальная проекция этой области есть ограниченный интервал $(0, z_{11})$ определения функции h_{11} . Вторая часть — это часть области Γ_1 , горизонтальная проекция которой есть полуинтервал $[z_{11}, \infty)$, дополнительный к интервалу $(0, z_{11})$ определения функции h_{11} . В случае $\nu \leq b$ зона V_{11}^- есть полоса, расположенная ниже графика функции h_{11} и выше (нижней) границы Γ_1 — графика функции \bar{h} ; горизонтальная проекция этой полосы есть вся положительная полуось (см. (20.14)).

Рассмотрим подобласти V_{12}^+ и V_{12}^- области Γ_1 , в которых скорость $\dot{p}(t)$ переменной $p(t)$, изменяющейся (в паре с переменной $z(t)$) в силу уравнений (19.30), (19.31), принимает соответственно положительные и отрицательные значения; назовем V_{12}^+ зоной роста, а V_{12}^- зоной убывания p -координаты в области Γ_1 . Формально (см. (19.24), (19.25))

$$V_{12}^+ = \{(z, p) \in \Gamma_1: \varphi_2(z, p) > 0\}, \quad V_{12}^- = \{(z, p) \in \Gamma_1: \varphi_2(z, p) < 0\}. \quad (20.44)$$

Обращаясь к уравнению (19.31) и определению h_{12} (см. (20.7)), получаем

$$V_{12}^+ = \{(z, p) \in \Gamma_1: p > h_{12}(z)\}, \quad V_{12}^- = \{(z, p) \in \Gamma_1: p < h_{12}(z)\} \quad \text{при } \beta_0 > 0; \quad (20.45)$$

$$V_{12}^+ = \{(z, p) \in \Gamma_1: p < h_{12}(z)\}, \quad V_{12}^- = \{(z, p) \in \Gamma_1: p > h_{12}(z)\} \quad \text{при } \beta_0 < 0; \quad (20.46)$$

$$V_{12}^+ = \left\{ (z, p) \in \Gamma_1: z > \frac{\gamma\kappa}{1-\kappa} \right\}, \quad V_{12}^- = \left\{ (z, p) \in \Gamma_1: z < \frac{\gamma\kappa}{1-\kappa} \right\} \quad \text{при } \beta_0 = 0, \kappa < 1; \quad (20.47)$$

$$V_{12}^+ = \emptyset, \quad V_{12}^- = \Gamma_1 \quad \text{при } \beta_0 = 0, \kappa \geq 1. \quad (20.48)$$

Уточним (20.45), (20.46). С учетом (20.21), (20.22) видим, что случай (20.45) распадается на два подслучая:

$$V_{12}^+ = \text{gr}^+ h_{12}|(0, \bar{z}_{12}] \cup \text{gr}_0^+ \bar{h}|(\bar{z}_{12}, \infty), \quad (20.49)$$

$$V_{12}^- = \text{gr}^- h_{12}|(0, \bar{z}_{12}] \cap \text{gr}_0^+ \bar{h}|(0, \bar{z}_{12}] \quad \text{при } \beta_0 > 0, \beta_1 > 0;$$

$$V_{12}^+ = \text{gr}^+ h_{12}, \quad V_{12}^- = \text{gr}^- h_{12} \cap \text{gr}_0^+ \bar{h} \quad \text{при } \beta_0 > 0, \beta_1 \leq 0. \quad (20.50)$$

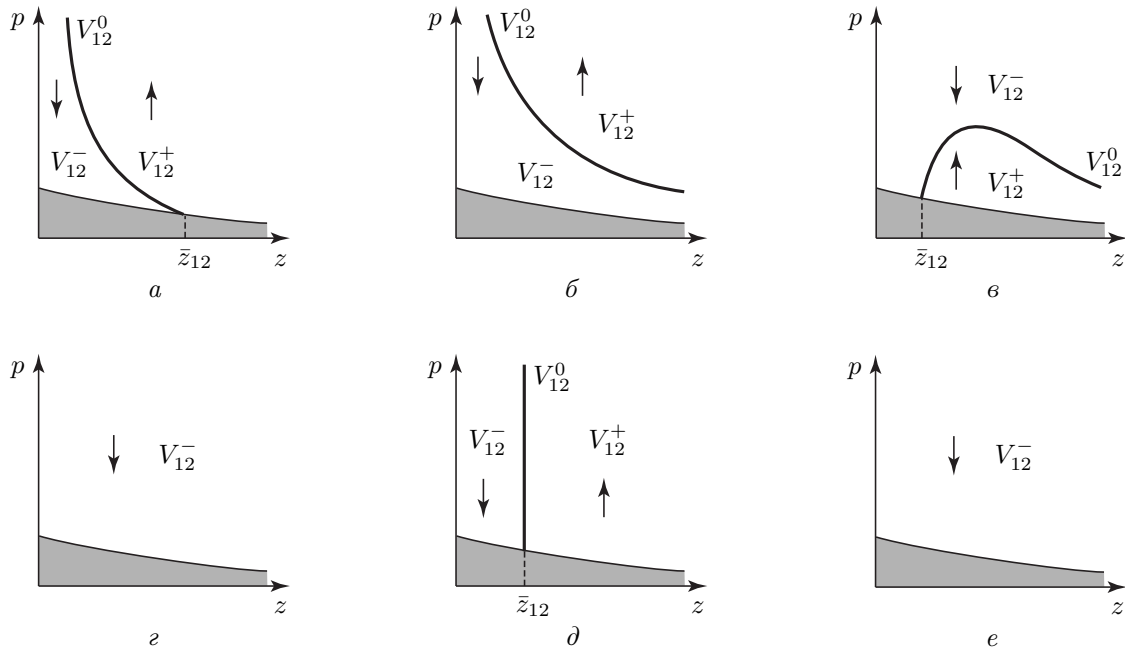


Рис. 6. Зона V_{12}^+ роста и зона V_{12}^- убывания p -координаты в области Γ_1 : a — случай $\beta_0 > 0, \beta_1 > 0$; b — случай $\beta_0 > 0, \beta_1 \leq 0$; c — случай $\beta_0 < 0, \beta_1 > 0$; d — случай $\beta_0 < 0, \beta_1 \leq 0$; e — случай $\beta_0 = 0, \kappa < 1$; e — случай $\beta_0 = 0, \kappa \geq 1$. Зоны V_{12}^+ и V_{12}^- разделяются кривой V_{12}^0 переключения знака p -координаты в области Γ_1 . Затененная область — множество Γ_2 , незатененная — множество Γ_1 . Стрелками показаны направления движения p -координаты гамильтоновой системы

Случай (20.46) ввиду (20.23), (20.24) также распадается на два подслучая:

$$V_{12}^+ = \text{gr}^- h_{12}|(\bar{z}_{12}, \infty) \cap \text{gr}_0^+ \bar{h}|(\bar{z}_{12}, \infty), \quad (20.51)$$

$$V_{12}^- = \text{gr}_0^+ \bar{h}|(0, \bar{z}_{12}] \cup \text{gr}^+ h_{12}|(\bar{z}_{12}, \infty) \quad \text{при } \beta_0 < 0, \beta_1 > 0;$$

$$V_{12}^+ = \emptyset, \quad V_{12}^- = \text{gr}_0^+ \bar{h} \quad \text{при } \beta_0 < 0, \beta_1 \leq 0. \quad (20.52)$$

Случаи (20.47), (20.48) с учетом (20.30) представим в виде

$$V_{12}^+ = \text{gr}_0^+ \bar{h}|(\bar{z}_{12}, \infty), \quad V_{12}^- = \text{gr}_0^+ \bar{h}|(0, \bar{z}_{12}) \quad \text{при } \beta_0 = 0, \kappa < 1; \quad (20.53)$$

$$V_{12}^+ = \emptyset, \quad V_{12}^- = \text{gr}_0^+ \bar{h} \quad \text{при } \beta_0 = 0, \kappa \geq 1. \quad (20.54)$$

Опишем случаи (20.49)–(20.54) в геометрических терминах (см. рис. 6).

В случае $\beta_0 > 0, \beta_1 > 0$ (см. (20.49)) лишь та часть графика функции h_{12} , которая расположена над полуинтервалом $(0, \bar{z}_{12}]$ горизонтальной оси, лежит в области Γ_1 (в нестрогом надграфике функции \bar{h}); при этом зона V_{12}^+ роста p -координаты в области Γ_1 состоит из части положительного квадранта, расположенной строго над указанной частью графика функции h_{12} , и из части области Γ_1 , имеющей горизонтальную проекцию (\bar{z}_{12}, ∞) ; зона V_{12}^- убывания p -координаты в области Γ_1 есть дополнение замыкания V_{12}^+ до Γ_1 .

В случае $\beta_0 < 0, \beta_1 > 0$ (см. (20.51)) в области Γ_1 лежит лишь та часть графика функции h_{12} , которая расположена над интервалом (\bar{z}_{12}, ∞) горизонтальной оси; при этом зона V_{12}^+ есть полоса, расположенная под указанной частью графика функции h_{12} и над соответствующей частью графика функции \bar{h} , а зона V_{12}^- есть дополнение замыкания V_{12}^+ до Γ_1 .

В случае $\beta_0 > 0, \beta_1 \leq 0$ (см. (20.50)) весь график функции h_{12} расположен в области Γ_1 ; при этом V_{12}^+ есть область, расположенная над этим графиком, а V_{12}^- есть полоса, расположенная строго под этим графиком и (не строго) над графиком функции \bar{h} .

В случае $\beta_0 < 0, \beta_1 \leq 0$ (см. (20.52)) весь график функции h_{12} расположен вне области Γ_1 ; при этом зона V_{12}^+ пуста, а зона V_{12}^- покрывает всю область Γ_1 . В случае $\beta_0 = 0, \kappa < 1$ (см. (20.53)) V_{12}^+ есть полоса, расположенная (не строго) над графиком функции \bar{h} и строго правее вертикальной линии, проходящей через точку \bar{z}_{12} (см. (20.30)) на горизонтальной оси.

Наконец, в случае $\beta_0 = 0, \kappa \geq 1$ (см. (20.54)) зона V_{12}^+ пуста и $V_{12}^- = \Gamma_1$.

Теперь найдем точки покоя системы (19.30), (19.31) в области Γ_1 . Эти точки суть точки пересечения кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 , на которых, напомним, в области Γ_1 обращаются в нуль скорости переменных $z(t)$ и $p(t)$ соответственно. Имея в виду представление (20.12) кривой V_{11}^0 и представление (20.9) кривой V_{12}^0 , получаем, что при $\beta_0 \neq 0$ точки пересечения данных кривых суть решения в Γ_1 системы алгебраических уравнений

$$p = h_{11}(z), \quad p = h_{12}(z)$$

или эквивалентной ей системы

$$p = h_{11}(z), \quad h_{11}(z) = h_{12}(z) \quad (20.55)$$

при том ограничении, что z лежит в области E_{11} (см. (20.5)) определения функции h_{11} .

Проанализируем решения системы (20.55). С учетом вида функций h_{11} (см. (20.4)) и h_{12} (см. (20.7)) перепишем второе уравнение (20.55) как

$$\frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z}{\beta_0(z + \gamma)z} = \frac{1}{b\gamma - (\nu - b)z}. \quad (20.56)$$

С учетом обозначений (20.2) проведем элементарные преобразования последнего уравнения:

$$\begin{aligned} (\gamma\kappa + (\kappa - 1)z)(b\gamma - (\nu - b)z) &= \beta_0(z + \gamma)z, \\ \gamma^2 b\kappa - \gamma\kappa(\nu - b)z + b\gamma(\kappa - 1)z &= (\beta_0 + \kappa\nu - \kappa b - \nu + b)z^2 + \beta_0\gamma z, \\ (\rho + \kappa\nu - \kappa b)z^2 + \gamma(\kappa\nu - 2\kappa b + \nu + \rho)z - \gamma^2 \kappa b &= 0 \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\beta_2 z^2 - \gamma\sigma z - \gamma^2 \kappa b = 0; \quad (20.57)$$

здесь

$$\sigma = 2\kappa b - (\kappa + 1)\nu - \rho = \kappa b - \nu - \beta_2. \quad (20.58)$$

Предположим, что $\beta_2 \neq 0$. Квадратное уравнение (20.57) рассмотрим в области всех действительных чисел. Положим

$$d = \sigma^2 + 4\kappa b\beta_2. \quad (20.59)$$

Возможны три случая:

1) $d > 0$ и уравнение (20.57) имеет два решения

$$z_1 = \frac{\gamma(\sigma + d^{1/2})}{2\beta_2}, \quad z_2 = \frac{\gamma(\sigma - d^{1/2})}{2\beta_2}; \quad (20.60)$$

2) $d < 0$ и уравнение (20.57) не имеет решений;

3) $d = 0$ и уравнение (20.57) имеет одно решение

$$z_1 = \frac{\gamma\sigma}{2\beta_2}. \quad (20.61)$$

В случае 1) z_k , $k = 1, 2$, доставляет z -компоненту решения системы (20.55), определяющего точку пересечения кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 , тогда и только тогда, когда $z_k \in E_{11}$; это, в частности (см. (20.5)), подразумевает, что $z_k > 0$. Аналогично в случае 3) z_1 доставляет z -компоненту решения системы (20.55) тогда и только тогда, когда $z_1 \in E_{11}$.

Допустим, что $\beta_2 > 0$. Тогда $d > \sigma^2$ (см. (20.59)) и, значит, имеет место случай 1). При этом в соответствии с видом (20.60) решений z_1 и z_2 верны неравенства $z_1 > 0$ и $z_2 < 0$. Таким образом, z_2 не является z -компонентой точки пересечения кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 . Проверим, что z_1 такой компонентой является, т.е. что $z_1 \in E_{11}$. Последнее условие (см. определение E_{11} (20.5)) в случае $\nu \leq b$ превращается в $z_1 > 0$ и выполняется заведомо. Рассмотрим случай $\nu > b$. Достаточно установить существование точки $z \in E_{11}$ такой, что $h_{11}(z) = h_{12}(z)$ (см. (20.55)): эта точка с необходимостью совпадет с z_1 . При $z \rightarrow +0$ согласно (20.4) $h_{11}(z)$ имеет конечный предел, а в соответствии с (20.15) $h_{12}(z) \rightarrow \infty$. С другой стороны, при $z \rightarrow z_{11} - 0$ по (20.13) $h_{11}(z) \rightarrow \infty$, тогда как (см. (20.7)) $h_{12}(z)$ стремится к конечному пределу. Из этих соотношений и непрерывности функций h_{11} и h_{12} следует существование точки $z \in (0, z_{11}) = E_{11}$, для которой $h_{11}(z) = h_{12}(z)$.

Итак, если $\beta_2 > 0$, то система (20.55) алгебраических уравнений имеет единственное решение

$$(z_1, p_1) = (z_1, h_{11}(z_1)), \quad (20.62)$$

доставляющее единственную точку пересечения кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 , т.е. единственную точку покоя системы дифференциальных уравнений (19.30), (19.31) в области Γ_1 .

Разберем случай $\beta_2 < 0$. Из вида β_2 (см. (20.2)) следует, что $\nu < b$; поэтому область E_{11} (20.5) определения функции h_{11} есть $(0, \infty)$. В силу (20.59)

$$d < \sigma^2.$$

Допустим, что $\sigma \geq 0$. Если $d < 0$, то (см. случай 2)) уравнение (20.57) не имеет решения. Если $d \geq 0$ (имеет место случай 1) или 3)), то из-за того, что $\sigma \geq 0$, $d^{1/2} < |\sigma|$ и $\beta_2 < 0$, в случае 1) оба решения z_1 и z_2 отрицательны, а в случае 3) единственное решение z_1 отрицательно. Таким образом, при $d \geq 0$ уравнение (20.57) не имеет положительных решений. Итак, если $\beta_2 < 0$ и $\sigma \geq 0$, то система (20.55) алгебраических уравнений неразрешима, кривые V_{11}^0 и V_{12}^0 не пересекаются и система дифференциальных уравнений (19.30), (19.31) не имеет точек покоя в области Γ_1 .

Допустим, что $\sigma < 0$. Если $d < 0$, то имеет место случай 2) и уравнение (20.57) неразрешимо. Предположим, что $d = 0$, т.е. имеет место случай 3). Тогда решение z_1 (см. (20.61)) положительно и служит единственным решением системы (20.55). Наконец, если $d > 0$ (имеет место случай 1)), то ввиду того, что $\sigma > 0$, $d^{1/2} < |\sigma|$ и $\beta_2 < 0$, оба решения z_1 и z_2 (20.61) положительны.

Итак, при $\beta_2 < 0$, $\sigma \geq 0$ система (20.55) алгебраических уравнений неразрешима, кривые V_{11}^0 и V_{12}^0 не пересекаются и система дифференциальных уравнений (19.30), (19.31) не имеет точек покоя в области Γ_1 .

При $\beta_2 < 0$, $\sigma < 0$, $d < 0$ система (20.55) алгебраических уравнений также неразрешима, кривые V_{11}^0 и V_{12}^0 не пересекаются и система дифференциальных уравнений (19.30), (19.31) не имеет точек покоя в области Γ_1 .

При $\beta_2 < 0$, $\sigma < 0$, $d = 0$ система (20.55) имеет единственное решение (20.62), доставляющее единственную точку пересечения кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 и единственную точку покоя системы дифференциальных уравнений (19.30), (19.31) в области Γ_1 .

При $\beta_2 < 0$, $\sigma < 0$, $d > 0$ система (20.55) имеет два решения

$$(z_1, p_1) = (z_1, h_{11}(z_1)) \quad \text{и} \quad (z_2, p_2) = (z_2, h_{11}(z_2)), \quad (20.63)$$

доставляющие две точки пересечения кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 и соответственно две точки покоя системы дифференциальных уравнений (19.30), (19.31) в области Γ_1 .

Рассмотрим вариант $\beta_2 = 0$. В этом случае квадратное уравнение (20.57) превращается в линейное, имеющее единственное решение

$$\bar{z}_0 = -\frac{\gamma\kappa b}{\sigma} \quad (20.64)$$

при $\sigma \neq 0$ и не имеющее решений при $\sigma = 0$. Таким образом, в случае $\beta_2 = 0$, $\sigma < 0$ система (20.55) имеет единственное решение

$$(\bar{z}_0, \bar{p}_0) = (\bar{z}_0, h_{11}(\bar{z}_0)),$$

доставляющее единственную точку пересечения кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 и единственную точку покоя системы дифференциальных уравнений (19.30), (19.31) в области Γ_1 . В случае же $\beta_2 = 0$, $\sigma \geq 0$ система (20.55) неразрешима, кривые V_{11}^0 и V_{12}^0 не пересекаются и система дифференциальных уравнений (19.30), (19.31) не имеет точек покоя в области Γ_1 .

Приведенная выше классификация отвечает случаю $\beta_0 \neq 0$. Рассмотрим случай $\beta_0 = 0$. В этом случае $\nu < b$ и, таким образом, область E_{11} (см. (20.5)) определения функции h_{11} , график которой задает кривую V_{11}^0 (см. (20.12)), есть $(0, \infty)$. Согласно (20.31), (20.32) кривая V_{12}^0 пуста при $\kappa \geq 1$ и представляет собой вертикальный луч с нижней точкой $(\bar{z}_{12}, \bar{p}) = (\bar{z}_{12}, \bar{h}(\bar{z}_{12}))$ при $\kappa < 1$. В последнем случае кривые V_{11}^0 и V_{12}^0 пересекаются в единственной точке

$$(\bar{z}_{12}, \bar{p}_{12}) = (\bar{z}_{12}, h_{11}(\bar{z}_{12})). \quad (20.65)$$

Резюмируем. В случае $\beta_0 = 0$, $\kappa \geq 1$ кривые V_{11}^0 и V_{12}^0 не пересекаются и система дифференциальных уравнений (19.30), (19.31) не имеет точек покоя в области Γ_1 , а в случае $\beta_0 = 0$, $\kappa < 1$ эти кривые имеют единственную точку пересечения (20.65), доставляющую единственную точку покоя системы дифференциальных уравнений (19.30), (19.31) в области Γ_1 .

Для удобства дальнейших ссылок сведем полученные выше результаты в один список, в котором для множества всех точек покоя системы дифференциальных уравнений (19.30), (19.31) в области Γ_1 используем обозначение $V_{11}^0 \cap V_{12}^0$. Итак, имеем

$$V_{11}^0 \cap V_{12}^0 = \{(z_1, p_1)\} = \{(z_1, h_{11}(z_1))\} \quad \text{при } \beta_0 \neq 0, \beta_2 > 0; \quad (20.66)$$

$$V_{11}^0 \cap V_{12}^0 = \emptyset \quad \text{при } \beta_0 \neq 0, \beta_2 < 0, \sigma \geq 0; \quad (20.67)$$

$$V_{11}^0 \cap V_{12}^0 = \emptyset \quad \text{при } \beta_0 \neq 0, \beta_2 < 0, \sigma < 0, d < 0; \quad (20.68)$$

$$V_{11}^0 \cap V_{12}^0 = \{(z_1, p_1)\} = \{(z_1, h_{11}(z_1))\} \quad \text{при } \beta_0 \neq 0, \beta_2 < 0, \sigma < 0, d = 0; \quad (20.69)$$

$$\begin{aligned} V_{11}^0 \cap V_{12}^0 &= \{(z_1, p_1), (z_2, p_2)\} = \\ &= \{(z_1, h_{11}(z_1)), (z_2, h_{11}(z_2))\} \quad \text{при } \beta_0 \neq 0, \beta_2 < 0, \sigma < 0, d > 0; \end{aligned} \quad (20.70)$$

$$V_{11}^0 \cap V_{12}^0 = \{(\bar{z}_0, \bar{p}_0)\} = \{(\bar{z}_0, h_{11}(\bar{z}_0))\} \quad \text{при } \beta_0 \neq 0, \beta_2 = 0, \sigma < 0; \quad (20.71)$$

$$V_{11}^0 \cap V_{12}^0 = \emptyset \quad \text{при } \beta_0 \neq 0, \beta_2 = 0, \sigma \geq 0; \quad (20.72)$$

$$V_{11}^0 \cap V_{12}^0 = \emptyset \quad \text{при } \beta_0 = 0, \kappa \geq 1; \quad (20.73)$$

$$V_{11}^0 \cap V_{12}^0 = \{(\bar{z}_{12}, \bar{p}_{12})\} = \{(\bar{z}_{12}, h_{11}(\bar{z}_{12}))\} \quad \text{при } \beta_0 = 0, \kappa < 1. \quad (20.74)$$

Рассмотрим взаимное расположение кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 на участках, не содержащих точек покоя. Эта информация потребуется ниже при описании вариантов изучаемого векторного поля.

Итак, из списка (20.66)–(20.74) отберем случаи, в которых множество $V_{11}^0 \cap V_{12}^0$ всех точек покоя непусто, т.е. случаи (20.66), (20.69)–(20.71), (20.74). Как будет видно из дальнейшего, среди всех комбинаций условий на параметры, характеризующих эти случаи (кроме тривиального случая (20.74)), достаточно рассмотреть следующие:

$$\beta_0 > 0, \quad \beta_2 > 0; \quad (20.75)$$

$$\beta_0 < 0, \quad \beta_2 > 0; \quad (20.76)$$

$$\beta_0 < 0, \quad \beta_2 < 0, \quad \sigma < 0, \quad d = 0; \quad (20.77)$$

$$\beta_0 < 0, \quad \beta_2 < 0, \quad \sigma < 0, \quad d > 0; \quad (20.78)$$

$$\beta_0 < 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \sigma < 0. \quad (20.79)$$

Пусть выполняется одна из комбинаций (20.75)–(20.78). Пусть z — какая-либо точка из пересечения проекций кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 на горизонтальную ось. Приведем условия, при которых выполняется каждое из противоположных неравенств $h_{12}(z) > h_{11}(z)$ и $h_{12}(z) < h_{11}(z)$. Принимая во внимание вид функций h_{11} и h_{12} и повторяя выкладки (20.56)–(20.57), в которых знак равенства заменим на знаки соответствующих неравенств, получаем

$$h_{12}(z) > h_{11}(z) \quad \text{равносильно} \quad \beta_2 z^2 - \gamma \sigma z - \gamma^2 \kappa b < 0 \quad \text{при} \quad \beta_0 > 0; \quad (20.80)$$

$$h_{12}(z) < h_{11}(z) \quad \text{равносильно} \quad \beta_2 z^2 - \gamma \sigma z - \gamma^2 \kappa b > 0 \quad \text{при} \quad \beta_0 > 0; \quad (20.81)$$

$$h_{12}(z) > h_{11}(z) \quad \text{равносильно} \quad \beta_2 z^2 - \gamma \sigma z - \gamma^2 \kappa b > 0 \quad \text{при} \quad \beta_0 < 0; \quad (20.82)$$

$$h_{12}(z) < h_{11}(z) \quad \text{равносильно} \quad \beta_2 z^2 - \gamma \sigma z - \gamma^2 \kappa b < 0 \quad \text{при} \quad \beta_0 < 0. \quad (20.83)$$

Из (20.80) и (20.81) следует, что при выполнении (20.75) $h_{12}(z) > h_{11}(z)$ лишь в том случае, когда z принадлежит открытому интервалу между корнями z_1 и z_2 квадратного уравнения (20.57), а $h_{12}(z) < h_{11}(z)$ лишь тогда, когда z располагается вне интервала между z_1 и z_2 . Как было отмечено выше, при (20.75) $z_2 < 0$ и $z_1 > 0$. Поскольку $z > 0$, при выполнении (20.75) условия (20.80) и (20.81) могут быть переписаны следующим образом:

$$h_{12}(z) > h_{11}(z) \quad \text{равносильно} \quad z < z_1 \quad \text{при} \quad \beta_0 > 0, \quad \beta_2 > 0; \quad (20.84)$$

$$h_{12}(z) < h_{11}(z) \quad \text{равносильно} \quad z > z_1 \quad \text{при} \quad \beta_0 > 0, \quad \beta_2 > 0. \quad (20.85)$$

Аналогично при выполнении (20.76) условия (20.82) и (20.83) конкретизируются следующим образом:

$$h_{12}(z) > h_{11}(z) \quad \text{равносильно} \quad z > z_1 \quad \text{при} \quad \beta_0 < 0, \quad \beta_2 > 0; \quad (20.86)$$

$$h_{12}(z) < h_{11}(z) \quad \text{равносильно} \quad z < z_1 \quad \text{при} \quad \beta_0 < 0, \quad \beta_2 > 0. \quad (20.87)$$

При выполнении (20.77) квадратное уравнение (20.57), как отмечено ранее, имеет единственное решение z_1 , которое положительно, а при выполнении (20.78) это квадратное уравнение имеет два положительных решения z_1 и z_2 , причем, как видно из (20.60), $z_1 < z_2$. Поэтому в случаях (20.77), (20.78) условия (20.82) и (20.83) принимают следующий вид:

$$h_{12}(z) < h_{11}(z) \quad \text{равносильно} \quad z \neq z_1 \quad \text{при} \quad \beta_0 < 0, \quad \beta_2 < 0, \quad \sigma < 0, \quad d = 0; \quad (20.88)$$

$$h_{12}(z) > h_{11}(z) \quad \text{равносильно} \quad z \in (z_1, z_2) \quad \text{при} \quad \beta_0 < 0, \quad \beta_2 < 0, \quad \sigma < 0, \quad d > 0; \quad (20.89)$$

$$h_{12}(z) < h_{11}(z) \quad \text{равносильно} \quad z \notin (z_1, z_2) \quad \text{при} \quad \beta_0 < 0, \quad \beta_2 < 0, \quad \sigma < 0, \quad d > 0. \quad (20.90)$$

В случае (20.79) условия (20.82) и (20.83) с учетом определения \bar{z}_0 (20.64), очевидно, упрощаются до следующего:

$$h_{12}(z) > h_{11}(z) \quad \text{равносильно} \quad z > \bar{z}_0 \quad \text{при} \quad \beta_0 < 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \sigma < 0; \quad (20.91)$$

$$h_{12}(z) < h_{11}(z) \quad \text{равносильно} \quad z < \bar{z}_0 \quad \text{при} \quad \beta_0 < 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \sigma < 0. \quad (20.92)$$

Поскольку V_{11}^0 есть график функции h_{11} , а V_{12}^0 есть часть графика функции h_{12} (см. (20.12) и (20.25)–(20.27)), то (20.84)–(20.92) указывают для случаев (20.66), (20.69)–(20.71) варианты взаимного расположения тех участков кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 , которые не содержат точек покоя.

Рассмотрим элементы векторного поля вырожденной части (19.32), (19.33) гамильтоновой системы (19.24), (19.25) в области Γ_2 .

Введем *зону* V_{21}^+ *роста* и *зону* V_{21}^- *убывания* z -координаты в области Γ_2 — подобласти области Γ_2 , в которых скорость $\dot{z}(t)$ переменной $z(t)$, изменяющейся (в паре с переменной $p(t)$) в силу уравнений (19.32), (19.33), принимает соответственно положительные и отрицательные значения. Формально (см. (19.24), (19.25))

$$V_{21}^+ = \{(z, p) \in \Gamma_2: \varphi_1(z, p) > 0\}, \quad V_{21}^- = \{(z, p) \in \Gamma_2: \varphi_1(z, p) < 0\}. \quad (20.93)$$

Из уравнения (19.32) видно, что

$$V_{21}^+ = \emptyset, \quad V_{21}^- = \Gamma_2. \quad (20.94)$$

Последнее, в частности, означает, что в области Γ_2 система (19.32), (19.33) не имеет точек покоя.

Введем *зону* V_{22}^+ *роста* и *зону* V_{22}^- *убывания* p -координаты в области Γ_2 — подобласти области Γ_2 , в которых скорость $\dot{p}(t)$ переменной $p(t)$, изменяющейся (в паре с переменной $z(t)$) в силу уравнений (19.32), (19.33), принимает соответственно положительные и отрицательные значения. Формально

$$V_{22}^+ = \{(z, p) \in \Gamma_2: \varphi_2(z, p) > 0\}, \quad V_{22}^- = \{(z, p) \in \Gamma_2: \varphi_2(z, p) < 0\}. \quad (20.95)$$

Из уравнения (19.33) видно, что

$$V_{22}^+ = \text{gr}^+ h_{22} \cap \Gamma_2, \quad V_{22}^- = \text{gr}^- h_{22} \cap \Gamma_2, \quad (20.96)$$

где h_{22} — определенная на $(0, \infty)$ функция вида

$$h_{22}(z) = \frac{\kappa}{(\nu + \rho)z}. \quad (20.97)$$

При этом

$$V_{22}^0 = \text{gr} h_{22} \cap \Gamma_2 \quad (20.98)$$

есть кривая *переключения знака* p -координаты в Γ_2 : на этой кривой обращается в нуль скорость $\dot{p}(t)$ переменной $p(t)$, изменяющейся в паре с переменной $z(t)$ в силу системы (19.32), (19.33):

$$V_{22}^0 = \{(z, p) \in \Gamma_2: \varphi_2(z, p) = 0\}. \quad (20.99)$$

Уточним (20.96), введя в рассмотрение точки пересечения графиков функций h_{22} и \bar{h} . Из вида этих функций (см. (20.97) и (19.18)) получаем, что $h_{22}(z) < \bar{h}(z)$ эквивалентно неравенству

$$\frac{\kappa}{(\nu + \rho)z} < \frac{1}{b(z + \gamma)},$$

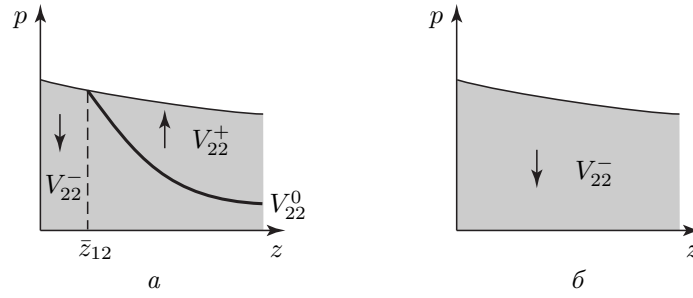


Рис. 7. Зона V_{22}^+ роста и зона V_{22}^- убывания p -координаты в области Γ_2 : a — случай $\beta_1 > 0$; b — случай $\beta_1 \leq 0$. В случае a зоны V_{22}^+ и V_{22}^- разделяются кривой V_{22}^0 переключения знака p -координаты в области Γ_2 . Затененная область — множество Γ_2 , незатененная — множество Γ_1 . Стрелками показаны направления движения p -координаты состояния гамильтоновой системы

или с учетом обозначения $\beta_1 = \rho + \nu - \kappa b$ (см. (20.2)) неравенству

$$\gamma \kappa b < \beta_1 z.$$

Последнее неравенство равносильно $z > \bar{z}_{12}$ (\bar{z}_{12} определено по (20.17)), если $\beta_1 > 0$, и не выполняется ни при каком положительном z в противном случае. Мы получили, что при $\beta_1 > 0$ точка $(\bar{z}_{12}, \bar{p}) = (\bar{z}_{12}, \bar{h}(\bar{z}_{12}))$ (20.18) есть также единственная точка пересечения графиков функций h_{22} и \bar{h} , а при $\beta_1 \leq 0$ графики этих функций не пересекаются; более того, в последнем случае $h_{22}(z) > \bar{h}(z)$ при всех $z > 0$ и, таким образом, $\text{gr } h_{22}(z) \cap \Gamma_2 = \emptyset$. На этом основании, учитывая также, что $\Gamma_2 = \text{gr}^- \bar{h}$ (см. (20.1)), мы можем записать (20.98) в виде

$$V_{22}^0 = \text{gr } h_{22}|(\bar{z}_{12}, \infty) \quad \text{при } \beta_1 > 0; \quad (20.100)$$

$$V_{22}^0 = \emptyset \quad \text{при } \beta_1 \leq 0 \quad (20.101)$$

и (20.96) в виде

$$V_{22}^+ = \text{gr}^+ h_{22}|(\bar{z}_{12}, \infty) \cap \text{gr}^- \bar{h}|(\bar{z}_{12}, \infty), \quad (20.102)$$

$$V_{22}^- = \text{gr}^- h_{22}|(\bar{z}_{12}, \infty) \cup \text{gr}^- \bar{h}|(0, \bar{z}_{12}] \quad \text{при } \beta_1 > 0;$$

$$V_{22}^+ = \emptyset, \quad V_{22}^- = \text{gr}^- \bar{h} \quad \text{при } \beta_1 \leq 0. \quad (20.103)$$

Тот отмеченный выше факт, что при $\beta_1 > 0$ точка (\bar{z}_{12}, \bar{p}) (20.18) есть единственная точка пересечения графиков функций h_{22} и \bar{h} , зафиксируем в терминах замыкания $\text{cl } V_{22}^0$ кривой V_{22}^0 :

$$\text{cl } V_{22}^0 \cap \text{gr } \bar{h} = \{(\bar{z}_{12}, \bar{p})\} \quad \text{при } \beta_1 > 0. \quad (20.104)$$

Прокомментируем (20.102), (20.103) в геометрических терминах (см. рис. 7). В случае $\beta_1 > 0$ лишь та часть графика кривой h_{22} , которая расположена над интервалом (\bar{z}_{12}, ∞) горизонтальной оси, лежит в области Γ_2 ; при этом зона V_{22}^+ роста p -координаты в области Γ_2 находится над указанной частью графика кривой h_{22} и под соответствующей частью графика кривой \bar{h} ; зона V_{22}^- убывания p -координаты в области Γ_2 есть дополнение замыкания V_{12}^+ до Γ_2 . В случае $\beta_1 \leq 0$ зона V_{22}^+ пуста и $V_{22}^- = \Gamma_2$.

Обратим внимание на связь кривых V_{12}^0 и V_{22}^0 переключения знака p -координаты в областях Γ_1 и Γ_2 соответственно. Как показывают (20.25)–(20.33), (20.100), (20.101), (20.104), при $\beta_1 \leq 0$ и $\beta_0 < 0$ обе эти кривые пусты, а при $\beta_1 > 0$ они обе непусты и сопрягаются в точке $(\bar{z}_{12}, \bar{p}) = (\bar{z}_{12}, \bar{h}(\bar{z}_{12}))$ на границе $\text{gr } \bar{h}$ областей Γ_1 и Γ_2 .

Согласно следствию 19.1 необходимым условием оптимальности траектории z_* является существование определенной на $(0, \infty)$ функции p такой, что (z_*, p) есть решение в Γ гамильтоновой системы (19.24), (19.25) и при этом удовлетворяется условие трансверсальности: при всех $t \geq 0$ верно $p(t)z_*(t) \leq \kappa/\rho$, или, что то же, $(z_*(t), p(t)) \in \text{gr}_0^- \hat{h}$; здесь и далее \hat{h} — определенная на $(0, \infty)$ функция вида

$$\hat{h}(z) = \frac{\kappa}{\rho z}. \quad (20.105)$$

На этом основании множество

$$\hat{V} = \text{gr}_0^- \hat{h} \quad (20.106)$$

будем называть *зоной трансверсальности*.

В следующем разделе нам предстоит проверить, находятся ли в зоне трансверсальности точки покоя гамильтоновой системы (19.24), (19.25). Как показывает предыдущий анализ, эти точки (если они существуют) исчерпываются точками пересечения кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 переключения знаков z -координаты и соответственно p -координаты в области Γ_1 . Проверку того, лежит ли та или иная точка покоя в зоне \hat{V} трансверсальности, мы будем проводить по следующему плану. Сначала определим z -проекции тех частей кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 , которые находятся в зоне \hat{V} , а затем установим, принадлежит ли пересечению этих z -проекций z -проекция рассматриваемой точки покоя. Факт такой принадлежности есть, очевидно, критерий того, что данная точка покоя лежит в \hat{V} . Для z -проекции какого-либо множества $E \subset \Gamma$ будем далее использовать обозначение $\text{pr}_1 E$:

$$\text{pr}_1 E = \{z \mid \exists p: (z, p) \in E\}.$$

Данный раздел завершим нахождением z -проекций пересечений $V_{11}^0 \cap \hat{V}$ и $V_{12}^0 \cap \hat{V}$.

Найдем $\text{pr}_1(V_{11}^0 \cap \hat{V})$. Так как кривая V_{11}^0 есть график функции h_{11} (см. (20.12)), то для всякого $z > 0$ включение $z \in \text{pr}_1(V_{11}^0 \cap \hat{V})$ равносильно условиям

$$h_{11}(z) \leq \hat{h}(z), \quad z \in E_{11},$$

где, напомним, E_{11} (см. (20.5)) — область определения h_{11} . С учетом вида h_{11} (см. (20.4)) и \hat{h} (см. (20.105)) записанные соотношения трансформируем следующим образом:

$$\frac{1}{\gamma b - (\nu - b)z} \leq \frac{\kappa}{\rho z}, \quad z \in E_{11},$$

$$\rho z \leq \kappa[\gamma b - (\nu - b)z], \quad z \in E_{11},$$

$$(\rho + \kappa\nu - \kappa b)z \leq \gamma\kappa b, \quad z \in E_{11},$$

и, наконец, с привлечением обозначения β_2 (см. (20.2))

$$\beta_2 z \leq \gamma\kappa b, \quad z \in E_{11}.$$

Последнее запишем как

$$\begin{aligned} z \leq \hat{z}_{11}, \quad z \in E_{11} & \quad \text{при } \beta_2 > 0; \\ z \in E_{11} & \quad \text{при } \beta_2 \leq 0; \end{aligned}$$

здесь и далее (для $\beta_2 \neq 0$)

$$\hat{z}_{11} = \frac{\gamma\kappa b}{\beta_2}. \quad (20.107)$$

Вспомним, что E_{11} (см. (20.5)) есть $(0, z_{11})$, где $z_{11} = b\gamma/(\nu - b)$, при $\nu > b$ и $(0, \infty)$ при $\nu \leq b$, и заметим, что в первом случае, очевидно, $\hat{z}_{11} < z_{11}$. Отсюда получаем

$$\text{pr}_1(V_{11}^0 \cap \hat{V}) = (0, \hat{z}_{11}], \quad V_{11}^0 \cap \text{gr } \hat{h} = \{(\hat{z}_{11}, h_{11}(\hat{z}_{11}))\} = \{(\hat{z}_{11}, \hat{h}(\hat{z}_{11}))\} \quad \text{при } \beta_2 > 0; \quad (20.108)$$

$$\text{pr}_1(V_{11}^0 \cap \hat{V}) = E_{11} = (0, \infty), \quad V_{11}^0 \cap \text{gr } \hat{h} = \emptyset \quad \text{при } \beta_2 \leq 0 \quad (20.109)$$

(в последнем случае, очевидно, $\nu \leq b$ и, стало быть, $E_{11} = (0, \infty)$).

Найдем z -проекцию $\text{pr}_1(V_{12}^0 \cap \hat{V})$. Сначала рассмотрим случай $\beta_0 \neq 0$. В соответствии с (20.25)–(20.28) кривая V_{12}^0 либо пуста, либо представляется частью графика (всем графиком) функции h_{12} . Поэтому сначала определим часть графика функции h_{12} , лежащую ниже графика функции \hat{h} . Привлекая вид функций h_{12} (см. (20.7)) и \hat{h} (см. (20.105)), неравенство

$$h_{12}(z) \leq \hat{h}(z)$$

(при каком-либо $z > 0$) запишем как

$$\frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z}{\beta_0(z + \gamma)z} \leq \frac{\kappa}{\rho z}. \quad (20.110)$$

Допустим, что $\beta_0 > 0$. Проведем следующие эквивалентные преобразования (20.110):

$$\begin{aligned} \rho z \gamma \kappa + \rho z (\kappa - 1) z &\leq \kappa (\nu + \rho - b) (z + \gamma) z, \\ [\kappa (\nu + \rho - b) - \rho (\kappa - 1)] z &\geq \rho \gamma \kappa - \kappa (\nu + \rho - b) \gamma, \\ (\rho + \kappa \nu - \kappa b) z &\geq \gamma \kappa (b - \nu). \end{aligned}$$

С использованием принятого выше обозначения β_2 (см. (20.2)) последнее неравенство запишем как

$$\beta_2 z \geq \gamma \kappa (b - \nu). \quad (20.111)$$

При $\beta_2 > 0$ и $b > \nu$ (20.111) равносильно

$$z \geq \hat{z}_{12};$$

здесь и далее (если $\beta_2 \neq 0$)

$$\hat{z}_{12} = \frac{\gamma \kappa (b - \nu)}{\beta_2}. \quad (20.112)$$

При $\beta_2 > 0$ и $b \leq \nu$ (20.111) выполняется для всякого $z > 0$. При $\beta_2 \leq 0$ имеем $b > \nu$ и, значит, (20.111) не выполняется ни при каком $z > 0$. Теперь, принимая во внимание формулы (20.25), (20.26), выделяющие часть графика функции h_{12} , которая задает кривую V_{12}^0 в случае $\beta_0 > 0$, получаем

$$\text{pr}_1(V_{12}^0 \cap \hat{V}) = [\hat{z}_{12}, \bar{z}_{12}], \quad (20.113)$$

$$V_{12}^0 \cap \text{gr } \hat{h} = \{(\hat{z}_{12}, h_{12}(\hat{z}_{12}))\} = \{(\hat{z}_{12}, \hat{h}(\hat{z}_{12}))\} \quad \text{при } \beta_0 > 0, \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad \nu < b;$$

$$\text{pr}_1(V_{12}^0 \cap \hat{V}) = [\hat{z}_{12}, \infty), \quad (20.114)$$

$$V_{12}^0 \cap \text{gr } \hat{h} = \{(\hat{z}_{12}, h_{12}(\hat{z}_{12}))\} = \{(\hat{z}_{12}, \hat{h}(\hat{z}_{12}))\} \quad \text{при } \beta_0 > 0, \quad \beta_1 \leq 0, \quad \beta_2 > 0, \quad \nu < b;$$

$$\text{pr}_1(V_{12}^0 \cap \hat{V}) = (0, \bar{z}_{12}], \quad V_{12}^0 \cap \text{gr } \hat{h} = \emptyset \quad \text{при } \beta_0 > 0, \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad \nu \geq b; \quad (20.115)$$

$$\text{pr}_1(V_{12}^0 \cap \hat{V}) = (0, \infty), \quad V_{12}^0 \cap \text{gr } \hat{h} = \emptyset \quad \text{при } \beta_0 > 0, \quad \beta_1 \leq 0, \quad \beta_2 > 0, \quad \nu \geq b; \quad (20.116)$$

$$\text{pr}_1(V_{12}^0 \cap \hat{V}) = \emptyset \quad \text{при } \beta_0 > 0, \quad \beta_2 \leq 0. \quad (20.117)$$

Заметим, что в (20.113) отрезок $[\widehat{z}_{12}, \bar{z}_{12}]$ непуст: из вида \widehat{z}_{12} (см. (20.112)) и \bar{z}_{12} (см. (20.17)) следует, что $\widehat{z}_{12} < \bar{z}_{12}$.

Допустим, что $\beta_0 < 0$. Тогда (см. (20.2)) $\nu < b$. Эквивалентные преобразования (20.110), аналогичные приведенным выше, дают

$$\beta_2 z \leq \gamma \kappa (b - \nu).$$

Если $\beta_2 \leq 0$, то, поскольку $\nu < b$, записанное выше неравенство выполняется для любого $z > 0$; если $\beta_2 > 0$, то оно равносильно (см. обозначение (20.112)) неравенству

$$z \leq \widehat{z}_{12}.$$

Поэтому, обращаясь к формулам (20.27), (20.28), выделяющим часть графика функции h_{12} , которая задает кривую V_{12}^0 в случае $\beta_0 < 0$, получаем следующие представления искомой z -проекции в этом случае:

$$\text{pr}_1(V_{12}^0 \cap \widehat{V}) = [\bar{z}_{12}, \infty), \quad V_{12}^0 \cap \text{gr } \widehat{h} = \emptyset \quad \text{при } \beta_0 < 0, \beta_1 > 0, \beta_2 \leq 0; \quad (20.118)$$

$$\text{pr}_1(V_{12}^0 \cap \widehat{V}) = [\bar{z}_{12}, \widehat{z}_{12}], \quad (20.119)$$

$$V_{12}^0 \cap \text{gr } \widehat{h} = \{(\widehat{z}_{12}, h_{12}(\widehat{z}_{12}))\} = \{(\widehat{z}_{12}, \widehat{h}(\widehat{z}_{12}))\} \quad \text{при } \beta_0 < 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0;$$

$$\text{pr}_1(V_{12}^0 \cap \widehat{V}) = \emptyset \quad \text{при } \beta_0 < 0, \beta_1 \leq 0. \quad (20.120)$$

Рассмотрим, наконец, случай $\beta_0 = 0$. Согласно (20.31), (20.32) при $\kappa \geq 1$ кривая V_{12}^0 пуста, а при $\kappa < 1$ представляет собой бесконечный вертикальный луч с нижней точкой $(\bar{z}_{12}, \bar{p}) = (\bar{z}_{12}, \bar{h}(\bar{z}_{12}))$ (см. (20.18)). Заметим, что при $\kappa < 1$ выполняется $(\bar{z}_{12}, \bar{p}) \in \widehat{V}$. В самом деле, конкретизируя вид \bar{p} (см. (20.18)) и учитывая, что $\beta_0 = \nu + \rho - b = 0$ (см. обозначение (20.2)), имеем

$$\bar{p} = \frac{\beta_1}{b\gamma(\nu + \rho)} = \frac{1 - \kappa}{\gamma(\nu + \rho)}.$$

Поэтому в соответствии с видом \bar{z}_{12} (20.30)

$$\bar{z}_{12}\bar{p} = \frac{\gamma\kappa}{1 - \kappa} \frac{1 - \kappa}{\gamma(\nu + \rho)} = \frac{\kappa}{\nu + \rho} < \frac{\kappa}{\rho}.$$

Таким образом, $(\bar{z}_{12}, \bar{p}) \in \widehat{V}$. Суммируем:

$$\text{pr}_1(V_{12}^0 \cap \widehat{V}) = \emptyset \quad \text{при } \beta_0 = 0, \kappa \geq 1; \quad (20.121)$$

$$\text{pr}_1(V_{12}^0 \cap \widehat{V}) = \{\bar{z}_{12}\} \quad \text{при } \beta_0 = 0, \kappa < 1. \quad (20.122)$$

21. ВАРИАНТЫ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

В последующем анализе важной характеристикой гамильтоновой системы (19.24), (19.25) станет структура множества ее точек покоя. Под структурой множества точек покоя мы понимаем прежде всего факт непустоты либо пустоты этого множества и в случае непустоты этого множества, во-первых, его вид, во-вторых, расположение точек покоя относительно зоны трансверсальности.

В предыдущем разделе мы описали все варианты вида множества $V_{11}^0 \cap V_{12}^0$ точек покоя, возникающие при разных соотношениях параметров (см. формулы (20.66)–(20.74)). Там же

Таблица 1. Классификация видов множества $V_{11}^0 \cap V_{12}^0$ точек покоя (см. (20.66)–(20.74))

$V_{11}^0 \cap V_{12}^0$	Параметрическая область	Случай
$\{(z_1, p_1)\}$	$\beta_0 \neq 0, \beta_2 > 0$	A1
\emptyset	$\beta_0 \neq 0, \beta_2 < 0, \sigma \geq 0$	A2
\emptyset	$\beta_0 \neq 0, \beta_2 < 0, \sigma < 0, d < 0$	A3
$\{(z_1, p_1)\}$	$\beta_0 \neq 0, \beta_2 < 0, \sigma < 0, d = 0$	A4
$\{(z_1, p_1), (z_2, p_2)\}$	$\beta_0 \neq 0, \beta_2 < 0, \sigma < 0, d > 0$	A5
$\{(\bar{z}_0, \bar{p}_0)\}$	$\beta_0 \neq 0, \beta_2 = 0, \sigma < 0$	A6
\emptyset	$\beta_0 \neq 0, \beta_2 = 0, \sigma \geq 0$	A7
\emptyset	$\beta_0 = 0, \kappa \geq 1$	A8
$\{(\bar{z}_{12}, \bar{p}_{12})\}$	$\beta_0 = 0, \kappa < 1$	A9

Таблица 2. Классификация видов z -проекции пересечения $\text{pr}_1(V_{11}^0 \cap \widehat{V})$ (см. (20.108), (20.109))

$\text{pr}_1(V_{11}^0 \cap \widehat{V})$	Параметрическая область	Случай
$(0, \widehat{z}_{11}]$	$\beta_2 > 0$	B1
$(0, \infty)$	$\beta_2 \leq 0$	B2

Таблица 3. Классификация видов z -проекции пересечения $\text{pr}_1(V_{12}^0 \cap \widehat{V})$ (см. (20.113)–(20.122))

$\text{pr}_1(V_{12}^0 \cap \widehat{V})$	Параметрическая область	Случай
$[\widehat{z}_{12}, \bar{z}_{12}]$	$\beta_0 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \nu < b$	C1
$[\widehat{z}_{12}, \infty)$	$\beta_0 > 0, \beta_1 \leq 0, \beta_2 > 0, \nu < b$	C2
$(0, \bar{z}_{12}]$	$\beta_0 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \nu \geq b$	C3
$(0, \infty)$	$\beta_0 > 0, \beta_1 \leq 0, \beta_2 > 0, \nu \geq b$	C4
\emptyset	$\beta_0 > 0, \beta_2 \leq 0$	C5
$[\bar{z}_{12}, \infty)$	$\beta_0 < 0, \beta_1 > 0, \beta_2 \leq 0$	C6
$[\bar{z}_{12}, \widehat{z}_{12}]$	$\beta_0 < 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$	C7
\emptyset	$\beta_0 < 0, \beta_1 \leq 0$	C8
\emptyset	$\beta_0 = 0, \kappa \geq 1$	C9
$\{\bar{z}_{12}\}$	$\beta_0 = 0, \kappa < 1, \nu < b$	C10

формулами (20.108), (20.109), (20.113)–(20.122) мы классифицировали информацию о пересечениях кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 (переключения знака z -координаты и соответственно p -координаты в области Γ_1) с зоной \widehat{V} трансверсальности. Главная задача данного раздела — соединение этих классификаций с тем, чтобы прояснить расположение точек покоя относительно зоны трансверсальности (мы установим, что точки покоя, коль скоро они существуют, лежат в \widehat{V}). Результатом станет полная классификация вариантов векторного поля гамильтоновой системы, включающая случаи как наличия, так и отсутствия точек покоя.

Итак, основным исходным материалом в этом разделе будут классификация (20.66)–(20.74) видов множества $V_{11}^0 \cap V_{12}^0$ точек покоя и классификации (20.108), (20.109), (20.113)–(20.122)

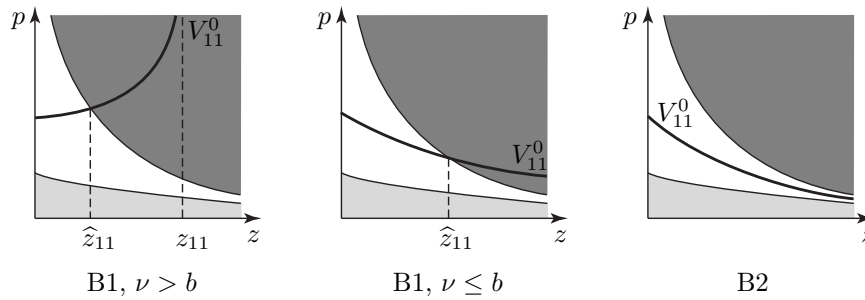


Рис. 8. Типы пересечения кривой V_{11}^0 переключения знака z -координаты в области Γ_1 с зоной \widehat{V} трансверсальности (см. табл. 2). Сильно затененная область — внешность зоны трансверсальности, слабо затененная область — множество Γ_2

видов z -проекции пересечений $V_{11}^0 \cap \widehat{V}$ и $V_{12}^0 \cap \widehat{V}$. Для удобства дальнейших ссылок соберем эти классификации в одном месте, представив их в виде таблиц с условными идентификаторами случаев (см. табл. 1, 2 и 3).

На рис. 8 и 9 схематично показаны типы пересечений $V_{11}^0 \cap \widehat{V}$ и $V_{12}^0 \cap \widehat{V}$, представленные соответственно в табл. 2 и 3 (формы кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 согласованы с рис. 5 и 6).

Рассмотрим представленную в табл. 1 классификацию точек покоя более подробно. Случаи А1–А9 этой классификации формально покрывают всю область допустимых значений параметров. Пока, однако, неясно, все ли эти случаи реализуемы. Мы будем говорить, что тот или иной случай из набора А1–А9 *реализуем*, если существуют положительные значения параметров ν, b, ρ, κ и γ , при которых выполняются все описывающие данный случай условия для их комбинаций β_0, β_2, σ и d , указанные в табл. 1. Для краткости будем говорить “такой-то случай реализуем при” (далее следует перечисление соотношений на параметры) вместо более точного: “данный случай реализуем и имеет место тогда и только тогда, когда выполняются следующие соотношения”. Здесь мы проверим, что все случаи А1–А9 реализуемы, и дадим их более подробное описание. В дальнейшем это уточненное описание будет использовано для выделения реализуемых комбинаций случаев, представленных в табл. 1–3. Совокупность всех таких реализуемых комбинаций даст нам картину всех возможных вариантов векторного поля гамильтоновой системы (19.24), (19.25).

Рассмотрим случай А1: $\beta_0 \neq 0, \beta_2 > 0$, или (см. (20.2))

$$\rho + \nu - b \neq 0, \quad \rho + \kappa\nu - \kappa b > 0.$$

Реализуемость этого случая очевидна:

$$\text{случай А1 реализуем при } b \leq \nu \text{ либо } b > \nu, \quad b \neq \nu + \rho, \quad \kappa < \frac{\rho}{b - \nu}. \quad (21.1)$$

Случаи А2–А5 включают условия $\beta_0 \neq 0, \beta_2 < 0$, или в обозначениях (20.2)

$$b > \nu, \quad b \neq \nu + \rho, \quad \kappa > \frac{\rho}{b - \nu}. \quad (21.2)$$

Случай А2 наряду с (21.2) предполагает $\sigma \geq 0$, или (см. (20.58))

$$2\kappa b - (\kappa + 1)\nu - \rho \geq 0.$$

Последнее при $b > \nu$ эквивалентно

$$\kappa \geq \frac{\rho + \nu}{2b - \nu}.$$

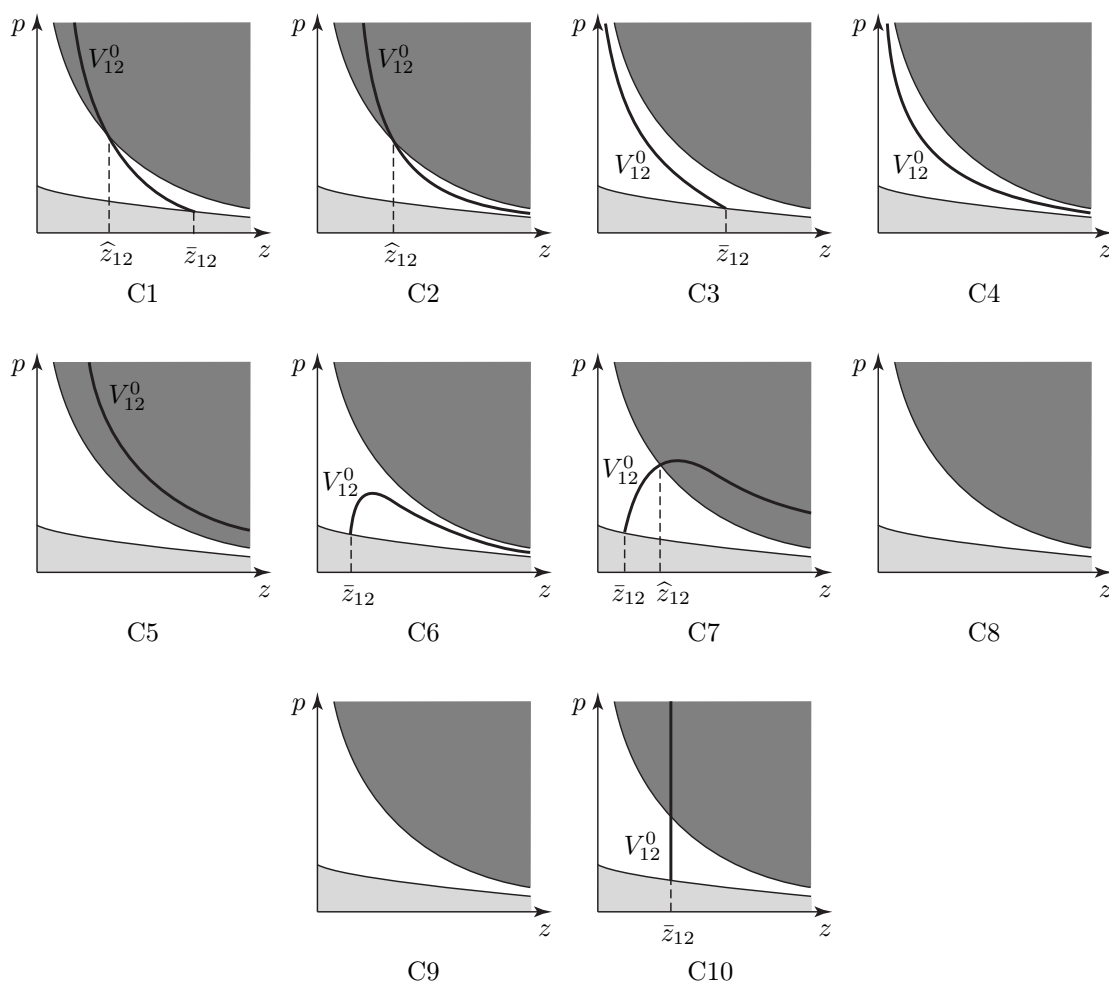


Рис. 9. Типы пересечения кривой V_{12}^0 переключения знака z -координаты в области Γ_1 с зоной \hat{V} трансверсальности (см. табл. 3). Сильно затененная область — внешность зоны трансверсальности, слабо затененная область — множество Γ_2

Таким образом,

$$\text{случай A2 реализуем при } b > \nu, \quad b \neq \nu + \rho, \quad \kappa > \frac{\rho}{b - \nu}, \quad \kappa \geq \frac{\rho + \nu}{2b - \nu}. \quad (21.3)$$

Случаи A3–A5 наряду с (21.2) предполагают $\sigma < 0$, или

$$\kappa < \frac{\rho + \nu}{2b - \nu};$$

условие его совместности с последним неравенством (21.2) есть

$$\frac{\rho}{b - \nu} < \frac{\rho + \nu}{2b - \nu},$$

или

$$2b\rho - \nu\rho < b\nu + b\rho - \nu^2 - \nu\rho,$$

или

$$b - \nu > \frac{b}{\nu}\rho;$$

последнее, как видим, при $b > \nu$ сильнее второго условия (21.2). Таким образом, (21.2) и $\sigma < 0$ вместе равносильны следующей совместной системе неравенств:

$$b > \nu, \quad b - \nu > \frac{b}{\nu}\rho, \quad \frac{\rho}{b - \nu} < \kappa < \frac{\rho + \nu}{2b - \nu}. \quad (21.4)$$

Обратим внимание, что (21.4) влечет $\kappa < 1$. Действительно,

$$\kappa < \frac{\rho + \nu}{2b - \nu} < \frac{\frac{b}{\nu}\rho + \nu}{b + (b - \nu)} < \frac{b}{b} = 1. \quad (21.5)$$

Поэтому будем представлять (21.4) в следующем информационно более содержательном виде:

$$b > \nu, \quad b - \nu > \frac{b}{\nu}\rho, \quad \frac{\rho}{b - \nu} < \kappa < \frac{\rho + \nu}{2b - \nu}, \quad \kappa < 1. \quad (21.6)$$

Случаи А3–А5 состоят в том, что вместе с (21.6) выполняются соответственно условия $d < 0$, $d = 0$ и $d > 0$. Покажем, что каждое из этих условий совместно с (21.6) и, стало быть, каждый из случаев А3–А5 реализуем. Привлекая обозначения (20.59), (20.58) и (20.2), конкретизируем выражение для d :

$$\begin{aligned} d &= [2\kappa b - (\kappa + 1)\nu - \rho]^2 + 4\kappa b(\rho + \kappa\nu - \kappa b) = \\ &= 4\kappa^2 b^2 - 4\kappa b(\kappa\nu + \nu + \rho) + (\kappa\nu + \nu + \rho)^2 + 4\kappa b(\rho + \kappa\nu - \kappa b) = \\ &= (\kappa\nu + \nu + \rho)^2 - 4\kappa b\nu. \end{aligned} \quad (21.7)$$

Покажем, что при достаточно малых положительных значениях ρ возможно совместное выполнение неравенств (21.6) и равенства $d = 0$. Положим сначала $\rho = 0$. В этом случае $d = 0$ равносильно равенству $b = (\kappa + 1)^2\nu/4\kappa$. Возьмем какие-либо положительные ν и $\kappa < 1$ и $b = (\kappa + 1)^2\nu/4\kappa$. Это обеспечивает выполнение условий (21.6).

Итак, при $\rho = 0$ совместное выполнение неравенств (21.6) и равенства $d = 0$ возможно. Разрешим ρ малые положительные значения. Полученное выше представление (21.7) для d и равенство $d = 0$ задают b в виде непрерывной функции от ρ . Поскольку при $\rho = 0$ значение этой функции удовлетворяет неравенствам (21.6), то данные неравенства выполняются и для значений этой функции при малых положительных ρ . Тем самым мы установили, что при достаточно малых положительных значениях ρ совместное выполнение неравенств (21.6) и равенства $d = 0$ возможно.

Возьмем какие-либо положительные значения параметров, при которых выполняются неравенства (21.6) и равенство $d = 0$. Так как согласно (21.7) d линейно по b , то малым изменением значения b , обеспечивающего $d = 0$, в сторону возрастания и убывания мы получим значения d разных знаков при одновременном выполнении неравенств (21.6).

Наконец, для дальнейшего полезно заметить, что из (21.6) следует неравенство $\kappa < (\rho + \nu)/b$.

Итак, мы показали, что при выполнении ограничений (21.6), общих для случаев А3–А5, возможно выполнение каждого из разделяющих эти случаи условий $d < 0$, $d = 0$ и $d > 0$. Таким образом, каждый из случаев А3–А5 реализуем:

$$\text{случай А3 реализуем при } b > \nu, \quad b - \nu > \frac{b}{\nu}\rho, \quad \frac{\rho}{b - \nu} < \kappa < \frac{\rho + \nu}{2b - \nu}, \quad \kappa < 1, \quad d < 0; \quad (21.8)$$

$$\text{случай А4 реализуем при } b > \nu, \quad b - \nu > \frac{b}{\nu}\rho, \quad \frac{\rho}{b - \nu} < \kappa < \frac{\rho + \nu}{2b - \nu}, \quad \kappa < 1, \quad d = 0; \quad (21.9)$$

$$\text{случай А5 реализуем при } b > \nu, \quad b - \nu > \frac{b}{\nu}\rho, \quad \frac{\rho}{b - \nu} < \kappa < \frac{\rho + \nu}{2b - \nu}, \quad \kappa < 1, \quad d > 0. \quad (21.10)$$

Кроме того, мы заметили, что

$$\text{каждый из случаев А3–А5 совместим с } \kappa < \frac{\rho + \nu}{b}. \quad (21.11)$$

Рассмотрим случаи А6 и А7. Эти случаи предполагают, что $\beta_0 \neq 0$ и $\beta_2 = 0$, или в обозначениях (20.2)

$$\rho + \nu - b \neq 0, \quad \beta_2 = \rho + \kappa\nu - \kappa b = 0,$$

или, наконец,

$$b > \nu, \quad b \neq \nu + \rho, \quad \kappa = \frac{\rho}{b - \nu}. \quad (21.12)$$

Случай А6 наряду с этим условием требует выполнения неравенства $\sigma < 0$, которое в соответствии с определением σ (см. (20.58)) и ввиду того, что $b > \nu$, может быть записано как

$$\kappa < \frac{\rho + \nu}{2b - \nu},$$

или после подстановки выражения для κ как

$$\frac{\rho}{b - \nu} < \frac{\rho + \nu}{2b - \nu}.$$

Последнее неравенство равносильно $\rho b < b\nu - \nu^2$, или

$$b - \nu > \frac{b}{\nu}\rho;$$

заметим, что при этом $b > \nu + \rho$, т.е. второе неравенство (21.12) выполняется автоматически. Следовательно,

$$\text{случай А6 реализуем при } b > \nu, \quad b - \nu > \frac{b}{\nu}\rho, \quad \kappa = \frac{\rho}{b - \nu}. \quad (21.13)$$

Случай А7 отличается от случая А6 тем, что вместо $\sigma < 0$ требует $\sigma \geq 0$. Рассуждая, как выше, получаем, что $\sigma \geq 0$ равносильно

$$b - \nu \leq \frac{b}{\nu}\rho.$$

Таким образом,

$$\text{случай А7 реализуем при } b > \nu, \quad b \neq \nu + \rho, \quad b - \nu \leq \frac{b}{\nu}\rho, \quad \kappa = \frac{\rho}{b - \nu}. \quad (21.14)$$

Наконец, реализуемость случаев А8 и А9 очевидна:

$$\text{случай А8 реализуем при } b = \nu + \rho, \quad \kappa \geq 1; \quad (21.15)$$

$$\text{случай А9 реализуем при } b = \nu + \rho, \quad \kappa < 1. \quad (21.16)$$

Покажем, как рассмотренные выше случаи А1–А9, характеризующие точки покоя гамильтоновой системы (19.24), (19.25) (табл. 1), совмещаются со случаями В1, В2, С1–С10 (табл. 2, 3), характеризующими расположение кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 переключения знака в Γ_1 относительно зоны трансверсальности \widehat{V} . Заметим предварительно, что реализуемость каждого из случаев В1, В2, С1–С10 (понимаемая так же, как реализуемость случаев А1–А9) проверяется элементарно.

Совмещенным случаем будем называть такое расположение параметров, при котором одновременно имеют место три каких-либо выбранных случая — по одному из наборов А1–А9, В1, В2 и С1–С10. Обозначать совмещенный случай будем, записывая подряд идентификаторы входящих в него случаев. Например, А1В1С1 будет обозначать совмещенный случай, предполагающий, что одновременно имеют место случаи А1, В1 и С1. Будем говорить, что тот или иной совмещенный случай *реализуем*, если существуют положительные значения параметров ν , b , ρ , κ и γ , при которых выполняются все условия, описывающие каждый из случаев, входящих в данный совмещенный случай.

Описание всех реализуемых совмещенных случаев даст нам все варианты векторного поля гамильтоновой системы (19.24), (19.25) и, в частности, прояснит расположение ее точек покоя относительно зоны трансверсальности.

Определим все реализуемые совмещенные случаи, включающие случай В1: $\beta_2 > 0$. Из табл. 1 и 2 видно, что случай В1 совместим из набора случаев А1–А9 лишь со случаями А1 и А9. Рассмотрим все совмещенные случаи, включающие какую-либо из пар случаев А1 и В1 либо А9 и В1. Сопоставляя табл. 1 и 3, видим, что среди таких совмещенных случаев реализуемыми могут быть лишь следующие: А1В1С1, А1В1С2, А1В1С3, А1В1С4, А1В1С7, А1В1С8 и А9В1С10. Рассмотрим все эти совмещенные случаи. Первые пять из них А1В1С1, А1В1С2, А1В1С3, А1В1С4 и А1В1С7, а также последний А9В1С10 реализуемы с очевидностью. Покажем, что совмещенный случай А1В1С8 нереализуем. Расшифровка этого совмещенного случая с помощью обозначений (20.2) дает

$$\beta_2 = \rho + \kappa\nu - \kappa b > 0, \quad \beta_0 = \rho + \nu - b < 0, \quad \beta_1 = \rho + \nu - \kappa b \leq 0.$$

Из второго неравенства имеем $b > \nu$, а из первого и последнего

$$\frac{\rho + \nu}{b} \leq \kappa < \frac{\rho}{b - \nu},$$

или

$$\rho b + \nu b - \rho\nu - \nu^2 < \rho b,$$

откуда

$$0 < \nu(\rho + \nu - b) = \nu\beta_0$$

и, следовательно, $\beta_0 > 0$. Последнее невозможно в случае С8. Значит, совмещенный случай А1В1С8 нереализуем. Итак, среди всех совмещенных случаев, включающих случай В1, реализуемы следующие: А1В1С1, А1В1С2, А1В1С3, А1В1С4, А1В1С7 и А9В1С10.

Найдем все реализуемые совмещенные случаи, включающие случай В2: $\beta_2 \leq 0$. Из табл. 1–3 видно, что случай А1 несовместим со случаем В2. Рассмотрим совмещенные случаи, включающие случаи А2 и В2. Как показывают табл. 1–3, из всех таких совмещенных случаев реализуемыми могут быть только совмещенные случаи А2В2С5, А2В2С6 и А2В2С8. Привлекая описание (21.3) случая А2, легко видим, что совмещенный случай А2В2С5 реализуем. Рассмотрим совмещенный случай А2В2С6. Объединяя его описание, следующее из табл. 1–3 (см. также обозначения (20.2)), и описание случая А2, данное в (21.3), получаем, что совмещенный случай А2В2С6 характеризуется условиями

$$\begin{aligned} \beta_2 = \rho + \kappa\nu - \kappa b < 0, \quad \beta_0 = \rho + \nu - b < 0, \quad \beta_1 = \rho + \nu - \kappa b > 0; \\ b > \nu, \quad \kappa > \frac{\rho}{b - \nu}, \quad \kappa \geq \frac{\rho + \nu}{2b - \nu}. \end{aligned} \quad (21.17)$$

Данная система неравенств совместна, если при выполнении первых двух из них два последних неравенства совместны с неравенством $\kappa < (\rho + \nu)/b$, равносильным $\beta_1 > 0$. Запишем условие такой совместности:

$$\frac{\rho}{b - \nu} < \frac{\rho + \nu}{b}, \quad \frac{\rho + \nu}{2b - \nu} < \frac{\rho + \nu}{b}.$$

Первое и второе неравенства равносильны соответственно неравенствам

$$0 < \nu(b - \nu - \rho) = -\nu\beta_0, \quad 0 < \rho b + \nu(b - \nu - \rho) = \rho b - \nu\beta_0,$$

которые выполняются в силу ограничения $\beta_0 < 0$. Таким образом, совмещенный случай А2В2С6 реализуем. Рассмотрим совмещенный случай А2В2С8. Из табл. 1–3 и описания (21.3) случая А2 получаем, что этот совмещенный случай имеет место при выполнении

$$\beta_2 = \rho + \kappa\nu - \kappa b < 0, \quad \beta_0 = \rho + \nu - b < 0, \quad \beta_1 = \rho + \nu - \kappa b \leq 0$$

вместе с (21.17). Данная система неравенств совместна, если при выполнении первых двух из них два последних неравенства из (21.17) совместны с неравенством $\kappa \geq (\rho + \nu)/b$, равносильным $\beta_1 \leq 0$. Такая совместность очевидна. Совмещенный случай А2В2С8 реализуем. Итак, среди всех совмещенных случаев, включающих случаи А2 и В2, реализуемыми являются лишь совмещенные случаи А2В2С5, А2В2С6 и А2В2С8.

Рассмотрим совмещенные случаи, включающие какую-либо из следующих пар случаев: А3 и В2, А4 и В2, А5 и В2. Заметим, что каждый из случаев А3–А5 включается в случай В2. Согласно описанию (21.8)–(21.10) случаев А3–А5 в каждом из них $b > \nu$ и $b - \nu > (b/\nu)\rho$, откуда $b - \nu > \rho$, или $\beta_0 = \rho + \nu - b < 0$. Теперь из табл. 3 видно, что реализуемыми совмещенными случаями, включающими любую из указанных выше пар случаев, могут быть лишь те совмещенные случаи, которые включают либо случай С6, либо случай С8. Два из трех условий, характеризующих случай С6, а именно условия $\beta_0 < 0$ и $\beta_2 < 0$, содержатся в условиях, характеризующих каждую из пар случаев А3 и В2, А4 и В2, А5 и В2. Третье условие, характеризующее случай С6, $\beta_1 > 0$ может быть представлено как $\kappa < (\rho + \nu)/b$ (см. обозначения (20.2)). Обращаясь к сделанному ранее замечанию (21.11), заключаем, что последнее неравенство совместимо с каждым из случаев А3–А5, или, что то же (выше мы обратили внимание на то, что каждый из случаев А3–А5 включается в случай В2), с каждой из пар случаев А3 и В2, А4 и В2, А5 и В2. Стало быть, каждый из совмещенных случаев А3В2С6, А4В2С6, А5В2С6 реализуем.

Обратимся к вопросу о реализуемости указанных трех пар случаев совместно со случаем С8. Случай С8 предполагает неравенство $\beta_1 \leq 0$, или (см. обозначения (20.2))

$$\kappa \geq \frac{\rho + \nu}{b}.$$

Каждый из случаев А3–А5 согласно их описанию (21.8)–(21.10) требует выполнения неравенства

$$\kappa < \frac{\rho + \nu}{2b - \nu}.$$

Если два записанных выше неравенства совместны, то необходимо

$$\frac{\rho + \nu}{2b - \nu} > \frac{\rho + \nu}{b},$$

или $2b - \nu < b$, или, наконец, $b < \nu$. Последнее противоречит описанию (21.8)–(21.10) случаев А3–А5. Таким образом, ни один из случаев А3–А5 не может быть реализован совместно со

случаем С8. Мы исключили возможность реализации совмещенных случаев А3В2С8, А4В2С8, А5В2С8. Итак, среди всех совмещенных случаев, включающих пары случаев А3 и В2, А4 и В2, А5 и В2, реализуемы только совмещенные случаи А3В2С6, А4В2С6, А5В2С6.

Рассмотрим совмещенные случаи, включающие какую-либо из следующих пар случаев: А6 и В2 либо А7 и В2. Таблицы 1–3 показывают, что реализуемыми совмещенными случаями, включающими любую из этих пар, могут быть только совмещенные случаи, которые включают либо случай С5, либо случай С6, либо случай С8.

Рассмотрим вопрос о совместимости каждого из случаев А6 и А7 со случаем С5. Согласно (21.13) в случае А6 имеем $b > \nu$, $b - \nu > b\rho/\nu$, откуда $b - \nu > \rho$, или $\rho + \nu - b = \beta_0 < 0$, что несовместимо со случаем С5 (см. табл. 3). В случае А7 (см. (21.14)) при b , достаточно близком к ν , выполняется $\beta_0 = \rho + \nu - b > 0$; поскольку при этом $\beta_2 = 0$ (см. табл. 1), то случай С5 имеет место. Итак, совмещенный случай А6В2С5 нереализуем, а совмещенный случай А7В2С5 реализуем.

Рассмотрим вопрос о совместимости каждого из случаев А6 и А7 со случаем С6. Каждый из случаев А6 и А7, как следует из их описаний (21.13) и (21.14), включается в случай В2. Два из трех условий, характеризующих случай С6, именно $\beta_0 < 0$ и $\beta_2 \leq 0$, совместны с описаниями (21.13) и (21.14) случаев А6 и А7. При выполнении этих двух условий третье условие, характеризующее случай С6, $\beta_1 > 0$, или, что то же,

$$\kappa < \frac{\rho + \nu}{b}$$

(см. (20.2)), также совместно с описаниями (21.13) и (21.14) случаев А6 и А7, точнее с ограничением

$$\kappa = \frac{\rho}{b - \nu} \tag{21.18}$$

из (21.13), (21.14). В самом деле, совместность записанных ограничений на κ равносильна неравенству

$$\frac{\rho}{b - \nu} < \frac{\rho + \nu}{b},$$

или

$$0 < \nu(b - \nu - \rho) = -\nu\beta_0.$$

Последнее неравенство выполняется, поскольку, как замечено выше, $\beta_0 < 0$. Таким образом, совмещенные случаи А6В2С6 и А7В2С6 реализуемы.

Рассмотрим вопрос реализуемости указанных двух пар случаев совместно со случаем С8. Случай С8 предполагает $\beta_1 \leq 0$, или

$$\kappa \geq \frac{\rho + \nu}{b}.$$

Каждый из случаев А6 и А7, как отмечено выше, требует выполнения равенства (21.18). Если данное равенство совместно с записанным выше неравенством, то необходимо

$$\frac{\rho}{b - \nu} \geq \frac{\rho + \nu}{b},$$

или

$$0 \geq \nu(b - \nu - \rho) = -\nu\beta_0.$$

Последнее несовместимо с ограничением $\beta_0 < 0$, присутствующим в описании случая С8 (см. табл. 3). Следовательно, совмещенные случаи А6В2С8 и А7В2С8 нереализуемы. Итак, среди

Таблица 4. Все реализуемые совмещенные случаи. Указаны вид множества $V_{11}^0 \cap V_{12}^0$ точек покоя (см. табл. 1), вид z -проекции $\text{pr}_1(V_{11}^0 \cap \widehat{V})$ пересечения кривой переключения знака z -координаты в Γ_1 с зоной трансверсальности (см. табл. 2) и вид z -проекции $\text{pr}_1(V_{12}^0 \cap \widehat{V})$ пересечения кривой переключения знака p -координаты в Γ_1 с зоной трансверсальности (см. табл. 3)

$V_{11}^0 \cap V_{12}^0$	$\text{pr}_1(V_{11}^0 \cap \widehat{V})$	$\text{pr}_1(V_{12}^0 \cap \widehat{V})$	Параметрическая область	Совмещенный случай
$\{(z_1, p_1)\}$	$(0, \widehat{z}_{11}]$	$[\widehat{z}_{12}, \bar{z}_{12}]$	$\beta_0 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \nu < b$	A1B1C1
$\{(z_1, p_1)\}$	$(0, \widehat{z}_{11}]$	$[\widehat{z}_{12}, \infty)$	$\beta_0 > 0, \beta_1 \leq 0, \beta_2 > 0, \nu < b$	A1B1C2
$\{(z_1, p_1)\}$	$(0, \widehat{z}_{11}]$	$(0, \bar{z}_{12}]$	$\beta_0 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \nu \geq b$	A1B1C3
$\{(z_1, p_1)\}$	$(0, \widehat{z}_{11}]$	$(0, \infty)$	$\beta_0 > 0, \beta_1 \leq 0, \beta_2 > 0, \nu \geq b$	A1B1C4
$\{(z_1, p_1)\}$	$(0, \widehat{z}_{11}]$	$[\bar{z}_{12}, \widehat{z}_{12}]$	$\beta_0 < 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$	A1B1C7
$\{(\bar{z}_{12}, \bar{p}_{12})\}$	$(0, \widehat{z}_{11}]$	$\{\bar{z}_{12}\}$	$\beta_0 = 0, \kappa < 1$	A9B1C10
\emptyset	$(0, \infty)$	\emptyset	$\beta_0 > 0, \beta_2 < 0, \sigma \geq 0$	A2B2C5
\emptyset	$(0, \infty)$	$[\bar{z}_{12}, \infty)$	$\beta_0 < 0, \beta_1 > 0, \beta_2 < 0, \sigma \geq 0$	A2B2C6
\emptyset	$(0, \infty)$	\emptyset	$\beta_0 < 0, \beta_1 \leq 0, \beta_2 < 0, \sigma \geq 0$	A2B2C8
\emptyset	$(0, \infty)$	$[\bar{z}_{12}, \infty)$	$\beta_0 < 0, \beta_1 > 0, \beta_2 < 0, \sigma < 0, d < 0$	A3B2C6
$\{(z_1, p_1)\}$	$(0, \infty)$	$[\bar{z}_{12}, \infty)$	$\beta_0 < 0, \beta_1 > 0, \beta_2 < 0, \sigma < 0, d = 0$	A4B2C6
$\{(z_1, p_1), (z_2, p_2)\}$	$(0, \infty)$	$[\bar{z}_{12}, \infty)$	$\beta_0 < 0, \beta_1 > 0, \beta_2 < 0, \sigma < 0, d > 0$	A5B2C6
\emptyset	$(0, \infty)$	\emptyset	$\beta_0 > 0, \beta_2 = 0, \sigma \geq 0$	A7B2C5
$\{(\bar{z}_0, \bar{p}_0)\}$	$(0, \infty)$	$[\bar{z}_{12}, \infty)$	$\beta_0 < 0, \beta_1 > 0, \beta_2 = 0, \sigma < 0$	A6B2C6
\emptyset	$(0, \infty)$	$[\bar{z}_{12}, \infty)$	$\beta_0 < 0, \beta_1 > 0, \beta_2 = 0, \sigma \geq 0$	A7B2C6
\emptyset	$(0, \infty)$	\emptyset	$\beta_0 = 0, \kappa \geq 1$	A8B2C9

всех совмещенных случаев, включающих либо случаи A6 и B2, либо случаи A7 и B2, реализуемы только совмещенные случаи A7B2C5, A6B2C6, A7B2C6.

Наконец, из табл. 1–3 видно, что среди всех совмещенных случаев, включающих случаи A8 и B2, реализуем лишь совмещенный случай A8B2C9, а случай A9 со случаем B2 несовместим.

Суммируя результаты проведенного элементарного анализа, приведем список всех реализуемых совмещенных случаев (перечисляем реализуемые совмещенные случаи в том порядке, в котором они выявлялись по ходу анализа): A1B1C1, A1B1C2, A1B1C3, A1B1C4, A1B1C7, A9B1C10, A2B2C5, A2B2C6, A2B2C8, A3B2C6, A4B2C6, A5B2C6, A7B2C5, A6B2C6, A7B2C6, A8B2C9.

Таблица 4, комбинирующая фрагменты табл. 1–3, описывает все перечисленные реализуемые совмещенные случаи.

Проанализируем те реализуемые совмещенные случаи (табл. 4), которые предполагают непустоту множества $V_{11}^0 \cap V_{12}^0$ точек покоя гамильтоновой системы. Эти реализуемые совмещенные случаи будем называть *невырожденными*. Остальные реализуемые совмещенные случаи будем называть *вырожденными*. Наша цель — показать, что в каждом из невырожденных реализуемых совмещенных случаев точки покоя находятся во внутренности зоны \widehat{V} трансверсальности. Рассмотрение невырожденных реализуемых совмещенных случаев произведем в порядке их перечисления в табл. 4.

Рассмотрим невырожденный совмещенный случай A1B1C1, предполагающий существование единственной точки покоя (z_1, p_1) . Как следует из описания этого совмещенного случая, данного в табл. 4 (см. также рис. 8), часть кривой V_{11}^0 , расположенная над полуинтервалом

$[0, \widehat{z}_{11})$, находится внутри зоны \widehat{V} трансверсальности, т.е. ниже ее верхней границы $\text{gr } \widehat{h}$ (см. вид \widehat{V} (20.106)), при этом согласно (20.108) точка кривой V_{11}^0 с z -координатой \widehat{z}_{11} находится на этой границе. Так как V_{11}^0 есть график функции h_{11} (см. (20.12)), то аналитически эти наблюдения выражаются в виде соотношений

$$h_{11}(z) < \widehat{h}(z) \quad \text{при } z \in [0, \widehat{z}_{11}), \quad h_{11}(\widehat{z}_{11}) = \widehat{h}(\widehat{z}_{11}). \quad (21.19)$$

Аналогично из описания совмещенного случая А1В1С1 (см. табл. 4 и рис. 9) следует, что часть кривой V_{12}^0 , расположенная над полуинтервалом $(\widehat{z}_{12}, \bar{z}_{12}]$, находится внутри зоны \widehat{V} трансверсальности, т.е. ниже ее верхней границы $\text{gr } \widehat{h}$, при этом в соответствии с (20.113) точка кривой V_{12}^0 с z -координатой \widehat{z}_{12} лежит на этой границе. Принимая во внимание, что в случае С1 кривая V_{12}^0 есть график сужения на $[\widehat{z}_{12}, \bar{z}_{12}]$ функции h_{12} (см. (20.25)), получаем следующую аналитическую запись отмеченных выше свойств:

$$h_{12}(z) < \widehat{h}(z) \quad \text{при } z \in (\widehat{z}_{12}, \bar{z}_{12}], \quad h_{12}(\widehat{z}_{12}) = \widehat{h}(\widehat{z}_{12}). \quad (21.20)$$

Напомним также, что в случае С1 единственная точка пересечения кривой V_{12}^0 и графика функции \bar{h} имеет z -координату \bar{z}_{12} (см. (20.29) и рис. 9) и, таким образом,

$$h_{12}(\bar{z}_{12}) = \bar{h}(\bar{z}_{12}). \quad (21.21)$$

Заметим, что для z -координат \widehat{z}_{11} (см. (20.107)) и \widehat{z}_{12} (см. (20.112)) точек пересечения соответственно кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 с верхней границей $\text{gr } \widehat{h}$ зоны трансверсальности имеем

$$\widehat{z}_{11} = \frac{\gamma\kappa b}{\beta_2}, \quad \widehat{z}_{12} = \frac{\gamma\kappa(b - \nu)}{\beta_2}, \quad (21.22)$$

откуда $\widehat{z}_{12} < \widehat{z}_{11}$. Поэтому в силу (21.20) и (21.19)

$$h_{12}(\widehat{z}_{12}) = \widehat{h}(\widehat{z}_{12}) > h_{11}(\widehat{z}_{12}). \quad (21.23)$$

Допустим, что $\widehat{z}_{11} > \bar{z}_{12}$. Согласно (20.11) $h_{11}(\bar{z}_{12}) > \bar{h}(\bar{z}_{12})$. Сопоставляя с (21.21), получаем

$$h_{12}(\bar{z}_{12}) < h_{11}(\bar{z}_{12}). \quad (21.24)$$

Допустим, что $\widehat{z}_{11} \leq \bar{z}_{12}$. По (21.19) $h_{11}(\widehat{z}_{11}) = \bar{h}(\widehat{z}_{11})$, а по (21.20) $h_{12}(\widehat{z}_{11}) < \bar{h}(\widehat{z}_{11})$, поэтому

$$h_{12}(\widehat{z}_{11}) < h_{11}(\widehat{z}_{11}). \quad (21.25)$$

Отсюда, принимая во внимание (21.23), заключаем, что при любом соотношении между \widehat{z}_{11} и \bar{z}_{12} существует

$$z_* \in (\widehat{z}_{12}, \min\{\bar{z}_{12}, \widehat{z}_{11}\}) \subset (0, \widehat{z}_{11})$$

такая, что $h_{11}(z_*) = h_{12}(z_*)$. Обращаясь к (21.19) и (21.20), видим, что $h_{11}(z_*) = h_{12}(z_*) < \widehat{h}(z_*)$. Таким образом, точка $(z_*, p_*) = (z_*, h_{11}(z_*)) = (z_*, h_{12}(z_*))$ принадлежит внутренности зоны \widehat{V} трансверсальности и одновременно каждой из кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 . Поскольку в рассматриваемом совмещенном случае А1В1С1 пересечение этих кривых содержит единственную точку (z_1, p_1) (см. табл. 4), то $(z_*, p_*) = (z_1, p_1)$. Мы показали, что в совмещенном случае А1В1С1 единственная точка покоя (z_1, p_1) принадлежит внутренности зоны трансверсальности.

Рассмотрим невырожденный совмещенный случай А1В1С2, также предполагающий существование единственной точки покоя (z_1, p_1) . Соотношения (21.19), отражающие случай В1,

при этом сохраняются. Отличие от предыдущего совмещенного случая, обусловленное различием между случаями С1 и С2, отражается в изменении соотношений (21.20). В случае С2 в отличие от случая С1 кривая V_{12}^0 есть весь график функции h_{12} (см. (20.26)), при этом, как в случае С1, $(\widehat{z}_{12}, h_{12}(\widehat{z}_{12}))$ есть единственная точка пересечения кривой V_{12}^0 с верхней границей $\text{gr } \widehat{h}$ зоны трансверсальности (см. (20.114)). Соответственно вместо (21.20) мы имеем

$$h_{12}(z) < \widehat{h}(z) \quad \text{при } z \in (\widehat{z}_{12}, \infty), \quad h_{12}(\widehat{z}_{12}) = \widehat{h}(\widehat{z}_{12}).$$

Соотношения (21.23), очевидно, сохраняются, а вместо двух случаев взаимного расположения точек \widehat{z}_{11} и \bar{z}_{12} следует рассмотреть лишь точку \widehat{z}_{11} , для которой, как выше, имеем (21.25). Из (21.25) и (21.23) следует существование такой точки $z_* \in (\widehat{z}_{12}, \widehat{z}_{11})$, что $h_{11}(z_*) = h_{12}(z_*)$. Так же как в предыдущем абзаце, заключаем, что точка $(z_*, p_*) = (z_*, h_{11}(z_*)) = (z_*, h_{12}(z_*))$ принадлежит внутренности зоны \widehat{V} трансверсальности и совпадает с единственной точкой (z_1, p_1) пересечения кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 (см. табл. 4). Таким образом, в совмещенном случае А1В1С2 единственная точка покоя (z_1, p_1) принадлежит внутренности зоны трансверсальности.

Рассмотрим невырожденный совмещенный случай А1В1С3 (единственная точка покоя (z_1, p_1)). Случай С3 согласно (20.115) подразумевает, что кривая V_{12}^0 целиком расположена во внутренности зоны трансверсальности. Поэтому единственная точка (z_1, p_1) пересечения кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 лежит во внутренности зоны трансверсальности.

Рассмотрение невырожденного совмещенного случая А1В1С4 (единственная точка покоя (z_1, p_1)) аналогично. В случае С4 в соответствии с (20.116) кривая V_{12}^0 целиком расположена во внутренности зоны трансверсальности. Поэтому единственная точка (z_1, p_1) пересечения кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 лежит во внутренности зоны трансверсальности.

Рассмотрим невырожденный совмещенный случай А1В1С7 (единственная точка покоя (z_1, p_1)). Заметим, что соотношения (21.19), отражающие случай В1, сохраняются. Согласно табл. 4 и описанию (20.119) пересечения кривой V_{12}^0 с зоной \widehat{V} трансверсальности в случае С7 (см. также рис. 9) та часть кривой V_{12}^0 , которая расположена над отрезком $[\bar{z}_{12}, \widehat{z}_{12}]$ горизонтальной оси, лежит во внутренности зоны \widehat{V} , а ее точка с z -координатой \widehat{z}_{12} принадлежит верхней границе $\text{gr } \widehat{h}$ этой зоны. Поскольку в случае С7 кривая V_{12}^0 есть график сужения на $[\bar{z}_{12}, \widehat{z}_{12}]$ функции h_{12} , имеем

$$h_{12}(z) < \widehat{h}(z) \quad \text{при } z \in [\bar{z}_{12}, \widehat{z}_{12}), \quad h_{12}(\widehat{z}_{12}) = \widehat{h}(\widehat{z}_{12}). \quad (21.26)$$

Кроме того, в случае С7 кривая V_{12}^0 имеет единственную точку пересечения с графиком функции \bar{h} , z -координата которой есть \bar{z}_{12} (см. (20.29) и рис. 9); таким образом, выполняется равенство (21.21). Выше мы заметили, что для z -координат \widehat{z}_{11} и \widehat{z}_{12} точек пересечения соответственно кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 с верхней границей $\text{gr } \widehat{h}$ зоны трансверсальности выполняется $\widehat{z}_{12} < \widehat{z}_{11}$ (см. (21.22)). Из (21.26) и (21.19) следует (21.23). С другой стороны, равенство (21.21) и неравенство $h_{11}(\bar{z}_{12}) > \bar{h}(\bar{z}_{12})$ (см. (20.11)) влекут неравенство (21.24). Из (21.23) и (21.24) вытекает существование точки $z_* \in (\bar{z}_{12}, \widehat{z}_{12}) \subset (0, \widehat{z}_{11})$ такой, что $h_{11}(z_*) = h_{12}(z_*)$. Согласно (21.19) $h_{11}(z_*) = h_{12}(z_*) < \widehat{h}(z_*)$. Значит, точка $(z_*, p_*) = (z_*, h_{11}(z_*)) = (z_*, h_{12}(z_*))$ принадлежит внутренности зоны \widehat{V} трансверсальности и одновременно каждой из кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 . Поскольку в рассматриваемом совмещенном случае А1В1С7 пересечение этих кривых содержит единственную точку (z_1, p_1) , то $(z_*, p_*) = (z_1, p_1)$. Таким образом, в совмещенном случае А1В1С7 единственная точка покоя (z_1, p_1) принадлежит внутренности зоны трансверсальности.

Рассмотрим невырожденный совмещенный случай А9В1С10 (единственная точка покоя $(\bar{z}_{12}, \bar{p}_{12})$). Соотношения (21.19), отражающие случай В1, сохраняются. Согласно (20.31) в случае С10 кривая V_{12}^0 есть пересекающий всю область Γ_1 вертикальный луч с z -координатой \bar{z}_{12}

(см. также рис. 9). По (20.17), (20.107)

$$\bar{z}_{12} = \frac{\gamma\kappa b}{\beta_1}, \quad \widehat{z}_{11} = \frac{\gamma\kappa b}{\beta_2}.$$

В совмещенном случае А9В1С10 $\beta_0 = \rho + \nu - b = 0$ и $\kappa < 1$, поэтому (см. обозначения (20.2)) $\beta_1 = \rho + \nu - \kappa b > \rho + \kappa\nu - \kappa b = \beta_2 > 0$. Значит, $\bar{z}_{12} < \widehat{z}_{11}$. Отсюда и из (21.19) заключаем, что в совмещенном случае А9В1С10 единственная точка $(\bar{z}_{12}, h_{11}(\bar{z}_{12})) = (z_1, p_1)$ пересечения кривой V_{11}^0 и вертикального луча V_{12}^0 принадлежит внутренности зоны трансверсальности.

В трех оставшихся невырожденных совмещенных случаях А4В2С6, А5В2С6 и А6В2С6 (см. табл. 4) имеет место случай В2, в котором согласно (20.109) (см. также рис. 8) кривая V_{11}^0 целиком расположена во внутренности зоны трансверсальности. Поэтому во всех указанных невырожденных совмещенных случаях точки пересечения кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 лежат во внутренности зоны трансверсальности.

Итак, мы установили следующее.

Лемма 21.1. *В каждом невырожденном совмещенном случае множество $V_{11}^0 \cap V_{12}^0$ всех точек покоя гамильтоновой системы (19.24), (19.25) лежит во внутренности зоны \widehat{V} трансверсальности.*

Суммируя результаты предыдущего анализа, мы получаем все возможные варианты векторного поля гамильтоновой системы (19.24), (19.25).

Прежде всего объединим описанные ранее объекты, относящиеся отдельно к областям Γ_1 и Γ_2 , и получим элементы векторного поля на всем квадранте Γ . Введем кривую V_1^0 переключения знака z -координаты и кривую V_2^0 переключения знака p -координаты в Γ :

$$V_1^0 = \{(z, p) \in \Gamma: \varphi_1(z, p) = 0\}, \quad V_2^0 = \{(z, p) \in \Gamma: \varphi_2(z, p) = 0\}.$$

Поскольку в области Γ_2 скорость z -координаты гамильтоновой системы (19.24), (19.25) отрицательна (см. (20.94)), то в согласии с (20.12)

$$V_1^0 = V_{11}^0 = \text{gr } h_{11}. \quad (21.27)$$

В соответствии с определением кривых V_{12}^0 (20.3) и V_{22}^0 (20.98) переключения знака p -координаты в областях Γ_1 и Γ_2 имеем

$$V_2^0 = V_{12}^0 \cup V_{22}^0. \quad (21.28)$$

Введем зону V_1^+ роста и зону V_1^- убывания z -координаты в Γ , а также зону V_2^+ роста и зону V_2^- убывания p -координаты в Γ :

$$V_1^+ = \{(z, p) \in \Gamma: \varphi_1(z, p) > 0\}, \quad V_1^- = \{(z, p) \in \Gamma: \varphi_1(z, p) < 0\},$$

$$V_2^+ = \{(z, p) \in \Gamma: \varphi_2(z, p) > 0\}, \quad V_2^- = \{(z, p) \in \Gamma: \varphi_2(z, p) < 0\}.$$

В соответствии с определениями аналогичных зон V_{11}^+ , V_{11}^- (20.40), V_{12}^+ , V_{12}^- (20.44) в области Γ_1 и таких же зон V_{21}^+ , V_{21}^- (20.93), V_{22}^+ , V_{22}^- (20.95) в области Γ_2 имеем

$$V_1^+ = V_{11}^+ \cup V_{21}^+ = V_{11}^+, \quad V_1^- = V_{11}^- \cup V_{21}^- = V_{11}^- \cup \Gamma_2, \quad (21.29)$$

$$V_2^+ = V_{12}^+ \cup V_{22}^+, \quad V_2^- = V_{12}^- \cup V_{22}^- \quad (21.30)$$

(завершающие равенства в (21.29) воспроизводят (20.94)).

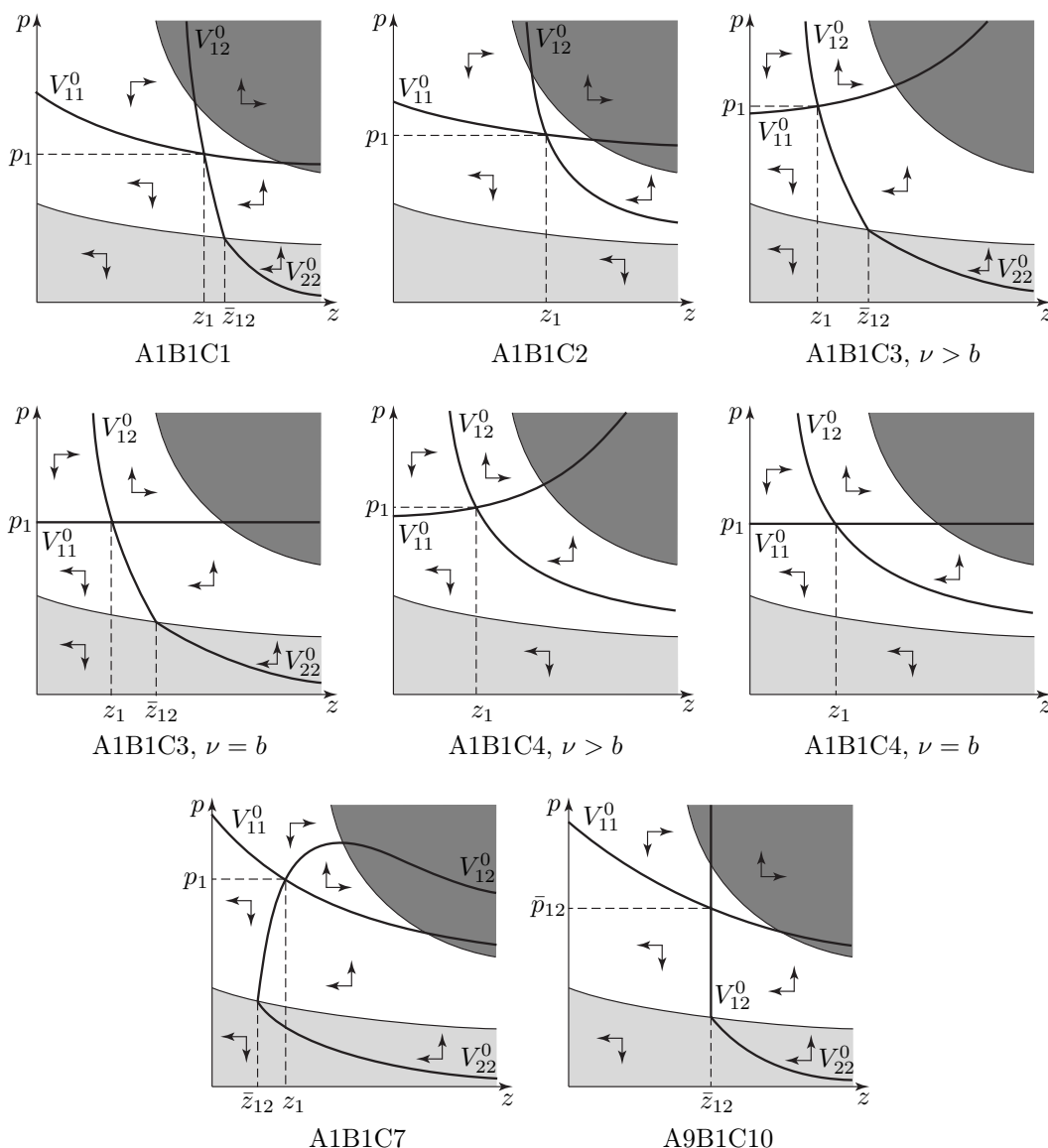


Рис. 10. Векторное поле гамильтоновой системы в неособых невырожденных совмещенных случаях A1B1C1, A1B1C2, A1B1C3, A1B1C4, A1B1C7 и A9B1C10. Сильно затененная область — внешность зоны трансверсальности, слабо затененная область — множество Γ_2

Через посредство зон V_1^+ , V_1^- , V_2^+ и V_2^- определим *зоны роста (убывания) обеих координат* гамильтоновой системы:

$$V^{++} = V_1^+ \cap V_2^+, \quad V^{+-} = V_1^+ \cap V_2^-, \quad V^{-+} = V_1^- \cap V_2^+, \quad V^{--} = V_1^- \cap V_2^-; \quad (21.31)$$

верхний индекс $^{++}$ обозначает зону роста обеих координат, верхний индекс $^{+-}$ зону роста z -координаты и убывания p -координаты, верхний индекс $^{-+}$ зону убывания z -координаты и роста p -координаты и верхний индекс $^{--}$ зону убывания обеих координат.

Кривые V_1^0 и V_2^0 и зоны V^{++} , V^{-+} , V^{+-} , V^{--} покрывают весь квадрант Γ и дают исчерпывающую информацию о структуре векторного поля гамильтоновой системы (19.24), (19.25). На рис. 10 и 11 схематично показан вид этого векторного поля для всех невырожденных реализуемых совмещенных случаев, на рис. 12 — для всех вырожденных реализуемых совмещенных случаев. На рис. 10–12 вместо обозначений V^{++} , V^{-+} , V^{+-} , V^{--} для наглядности даны

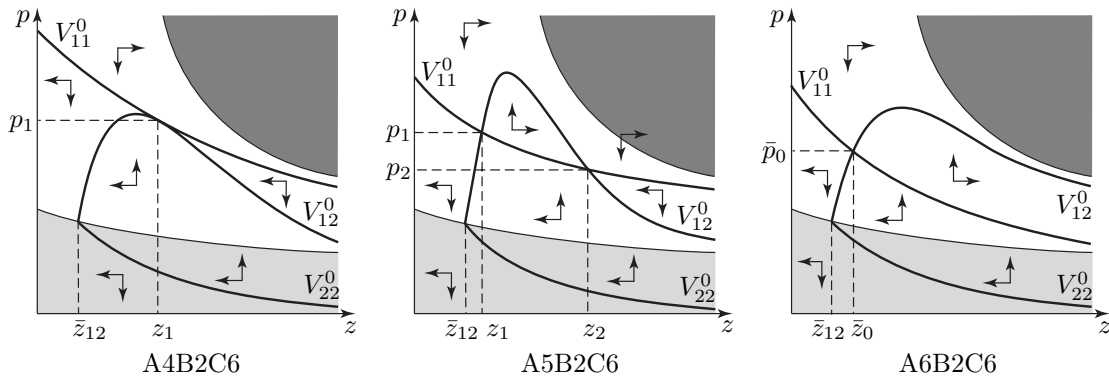


Рис. 11. Векторное поле гамильтоновой системы в особых невырожденных совмещенных случаях A4B2C6, A5B2C6 и A6B2C6. Сильно затененная область — внешность зоны трансверсальности, слабо затененная область — множество Γ_2

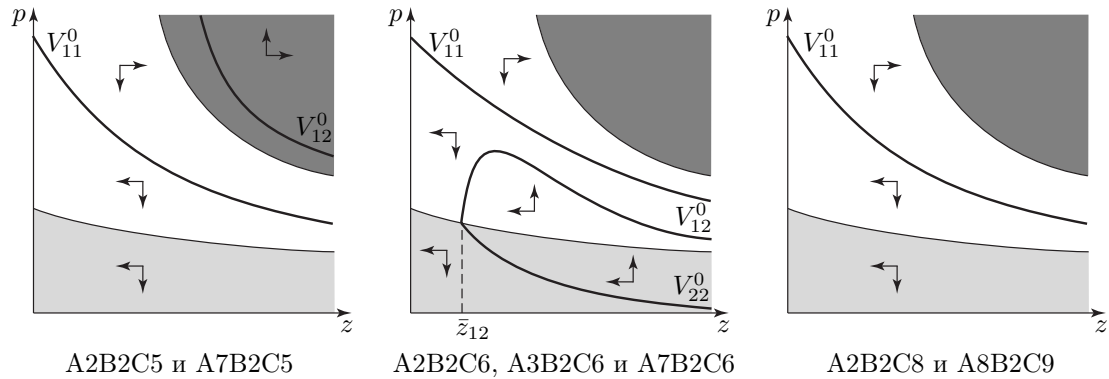


Рис. 12. Векторное поле гамильтоновой системы в вырожденных совмещенных случаях A2B2C5, A7B2C5, A2B2C6, A3B2C6, A7B2C6, A2B2C8 и A8B2C9. Сильно затененная область — внешность зоны трансверсальности, слабо затененная область — множество Γ_2

стрелки, показывающие направления движения z - и p -координат гамильтоновой системы в этих зонах.

Поясним принцип распределения невырожденных совмещенных случаев между двумя рисунками — рис. 10 и 11. Все невырожденные совмещенные случаи мы неформально разделяем на две группы. Рисунки 10 и 11 демонстрируют все невырожденные случаи, принадлежащие соответственно первой и второй из этих групп. Глядя на рис. 10, легко заметить, что во всех невырожденных совмещенных случаях, принадлежащих первой группе, векторное поле имеет, условно говоря, “стандартный” характер: кривые переключения знака z - и p -координат пересекаются трансверсально в единственной точке покоя и при обходе этой точки по часовой стрелке зоны роста (убывания) координат гамильтоновой системы следуют друг за другом в одном и том же порядке. Невырожденные совмещенные случаи, представленные на рис. 10, — случаи A1B1C1, A1B1C2, A1B1C3, A1B1C4, A1B1C7 и A9B1C10 будем называть *неособыми*.

В невырожденных совмещенных случаях, изображенных на рис. 11, векторное поле в ситуациях, показанных на первых двух фрагментах этого рисунка, отклоняется от “стандартного”: в одной из этих ситуаций кривые переключения знака, не пересекаясь, касаются друг друга в единственной точке покоя, в другой — пересекаются в двух точках покоя. Ситуация совмещенного случая A6B2C6, изображенная на третьем фрагменте рис. 11, хотя и “похожа” на ситуации, собранные на рис. 10, отличается от них (“нестандартна”) в одном существенном элементе. Именно, в совмещенном случае A6B2C6 (неограниченная) зона роста обеих координат целиком содержится во внутренности зоны трансверсальности (во внешности сильно

Таблица 5. Классификация совмещенных случаев

Неособые невырожденные совмещенные случаи	Особые невырожденные совмещенные случаи	Вырожденные совмещенные случаи
A1B1C1	A4B2C6	A2B2C5
A1B1C2	A5B2C6	A7B2C5
A1B1C3	A6B2C6	A2B2C6
A1B1C4		A3B2C6
A1B1C7		A7B2C6
A9B1C10		A2B2C8
		A8B2C9

затененной области), тогда как во всех ситуациях, показанных на рис. 10, пересечение зоны роста обеих координат с затененной областью непусто. Таким образом, на рис. 11 собраны “нестандартные” варианты векторного поля, предполагающие наличие точек покоя. Невырожденные совмещенные случаи, представленные на этом рисунке, A4B2C6, A5B2C6 и A6B2C6 будем называть *особыми*.

Для удобства представим классификацию совмещенных случаев в виде табл. 5.

В следующих ниже леммах 21.2–21.11 мы даем подробное описание иллюстративно представленных на рис. 10–12 вариантов векторного поля гамильтоновой системы (19.24), (19.25). Для удобства этого описания введем следующие определения. *Сужением* кривой V в Γ на множество $E \subset (0, \infty)$ назовем кривую

$$V|E = \{(z, p) \in V : z \in E\}.$$

Верхней внешностью и *нижней внешностью* кривой V в Γ назовем соответственно множества

$$\text{ext}^+ V = \left\{ (z, p) \in \Gamma : z \in \text{pr}_1 V, p > \sup_{(z, p_0) \in V} p_0 \right\},$$

$$\text{ext}^- V = \left\{ (z, p) \in \Gamma : z \in \text{pr}_1 V, p < \inf_{(z, p_0) \in V} p_0 \right\},$$

а ее *внутренностью* назовем множество

$$\text{int } V = \left\{ (z, p) \in \Gamma : z \in \text{pr}_1 V, \inf_{(z, p_0) \in V} p_0 < p < \sup_{(z, p_0) \in V} p_0 \right\}.$$

Заметим, что если $V = \text{gr } h$, то, очевидно, $\text{ext}^+ V = \text{gr}^+ h$, $\text{ext}^- V = \text{gr}^- h$, $\text{int } V = \emptyset$.

В следующих ниже леммах пересечение $V_1^0 \cap V_2^0$ обозначает множество всех точек покоя рассматриваемой системы. Приводимая в леммах 21.2–21.11 информация о точках покоя включает установленный ранее факт об их расположении во внутренности зоны трансверсальности (лемма 21.1).

В части лемм мы характеризуем важное для дальнейшего соотношение между зоной V^{++} роста обеих координат и зоной \widehat{V} трансверсальности. Графически это соотношение представлено во всех ситуациях, изображенных на рис. 10. Оно состоит в том, что пересечение $V^{++} \cap \widehat{V}$ либо ограничено, либо обладает свойством, которое можно назвать асимптотической ограниченностью. Мы будем говорить, что множество $M \subset \Gamma$ *асимптотически ограничено*, если для любого $\varepsilon > 0$ ограничено пересечение $M \cap \Gamma(\varepsilon)$, где $\Gamma(\varepsilon)$ есть квадрант Γ , за вычетом ε -окрестности своей границы:

$$\Gamma(\varepsilon) = \{(z, p) \in \Gamma : z \geq \varepsilon, p \geq \varepsilon\}. \quad (21.32)$$

Ясно, что если множество $M \subset \Gamma$ ограничено, то оно асимптотически ограничено.

Доказательства приводимых ниже лемм 21.2–21.11, характеризующих варианты рассматриваемого векторного поля, однотипны и состоят в тщательном, но весьма элементарном сопоставлении для каждого из зафиксированных в табл. 4 реализуемых совмещенных случаев следующих полученных ранее описаний: описания (21.27), (21.28) кривых V_1^0 и V_2^0 переключения знака z -координаты и p -координаты в области Γ ; описания (21.29) зон V_1^+ и V_1^- возрастания и убывания z -координаты в области Γ ; описания (21.30) зон V_2^+ и V_2^- возрастания и убывания p -координаты в области Γ ; описания (20.12), (20.25)–(20.29), (20.31)–(20.33) кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 переключения знака z -координаты и p -координаты в области Γ_1 ; описания (20.98), (20.100), (20.101), (20.104) кривой V_{22}^0 переключения знака p -координаты в области Γ_2 ; описания (20.41)–(20.43) зон V_{11}^+ и V_{11}^- возрастания и убывания z -координаты в области Γ_1 ; описания (20.49)–(20.54) зон V_{12}^+ и V_{12}^- возрастания и убывания p -координаты в области Γ_1 ; описания (20.94) зон V_{21}^+ и V_{21}^- возрастания и убывания z -координаты в области Γ_2 ; описания (20.96) зон V_{22}^+ и V_{22}^- возрастания и убывания p -координаты в области Γ_2 ; наконец, описания (20.84)–(20.92) взаимного расположения тех участков кривых V_{11}^0 и V_{12}^0 , которые не содержат точек покоя (для совмещенных случаев, предполагающих наличие этих точек). В доказательствах лемм используются также описания совмещенных случаев, данные в табл. 4, и некоторые элементарные свойства функций h_{11} , h_{12} , h_{22} , \bar{h} и \hat{h} , которые либо были установлены ранее, либо следуют из определений этих функций.

Ввиду однотипности и элементарности доказательств лемм из приводимой ниже серии мы ограничимся доказательством лишь первой из них, причем во всех деталях только для одного из перечисленных в этой лемме совмещенных случаев.

Лемма 21.2. Пусть имеет место один из неособых невырожденных совмещенных случаев A1B1C1 и A1B1C3 (первая, третья и четвертая ситуации на рис. 10). Справедливы следующие утверждения.

1. Кривая переключения знака z -координаты имеет вид $V_1^0 = V_{11}^0 = \text{gr } h_{11}$.
2. Кривая переключения знака p -координаты имеет вид

$$V_2^0 = V_{12}^0 \cup V_{22}^0 = \text{gr } h_{12}|(0, \bar{z}_{12}] \cup \text{gr } h_{22}|(\bar{z}_{12}, \infty) = \text{gr } h_2,$$

где h_2 — непрерывная функция на $(0, \infty)$, заданная по

$$h_2(z) = \begin{cases} h_{12}(z) & \text{при } z \in (0, \bar{z}_{12}], \\ h_{22}(z) & \text{при } z > \bar{z}_{12}. \end{cases} \quad (21.33)$$

3. Множество всех точек покоя имеет вид

$$V_1^0 \cap V_2^0 = V_{11}^0 \cap V_{12}^0 = \{(z_1, p_1)\}$$

и содержится во внутренности зоны \hat{V} трансверсальности.

4. В вертикальной полосе, опирающейся на интервал $(0, z_1)$ горизонтальной оси, кривая V_2^0 расположена строго выше кривой V_1^0 :

$$V_2^0|(0, z_1) \subset \text{ext}^+ V_1^0|(0, z_1).$$

5. В вертикальной полосе, опирающейся на интервал (z_1, ∞) горизонтальной оси, кривая V_2^0 расположена строго ниже кривой V_1^0 :

$$V_2^0|(z_1, \infty) \subset \text{ext}^- V_1^0|(z_1, \infty).$$

6. Зона V^{++} роста обеих координат есть внутренность “северо-восточного” криволинейного угла в Γ с вершиной в точке покоя (z_1, p_1) , образованного кривыми $V_2^0|(0, z_1]$ (“левая граница” V^{++}) и $V_1^0|[z_1, \infty)$ (“нижняя граница” V^{++}):

$$V^{++} = \text{ext}^+ V_2^0|(0, z_1] \cup \text{ext}^+ V_1^0|[z_1, \infty).$$

7. Зона V^{--} убывания обеих координат есть внутренность “юго-западного” криволинейного угла в Γ с вершиной в точке покоя (z_1, p_1) , образованного кривыми $V_1^0|(0, z_1]$ (“верхняя граница” V^{--}) и $V_2^0|[z_1, \infty)$ (“правая граница” V^{--}):

$$V^{--} = \text{ext}^- V_1^0|(0, z_1] \cup \text{ext}^- V_2^0|[z_1, \infty).$$

8. Зона V^{+-} роста z -координаты и убывания p -координаты есть внутренность “северо-западного” криволинейного угла в Γ с вершиной в точке покоя (z_1, p_1) , образованного кривыми $V_1^0|(0, z_1]$ (“нижняя граница” V^{+-}) и $V_2^0|(0, z_1]$ (“правая граница” V^{+-}):

$$V^{+-} = \text{ext}^+ V_1^0|(0, z_1] \cap \text{ext}^- V_2^0|(0, z_1].$$

9. Зона V^{-+} убывания z -координаты и роста p -координаты есть внутренность “юго-восточного” криволинейного угла в Γ с вершиной в точке покоя (z_1, p_1) , образованного кривыми $V_1^0|[z_1, \infty)$ (“верхняя граница” V^{-+}) и $V_2^0|[z_1, \infty)$ (“левая граница” V^{-+}):

$$V^{-+} = \text{ext}^- V_1^0|[z_1, \infty) \cap \text{ext}^+ V_2^0|[z_1, \infty).$$

10. Пересечение $V^{++} \cap \widehat{V}$ асимптотически ограничено.

Доказательство. Пусть имеет место первый из перечисленных в формулировке леммы невырожденных совмещенных случаев A1B1C1. Согласно табл. 4 в этом случае

$$\beta_0 > 0, \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad \nu < b.$$

1. Утверждение 1 повторяет (21.27).

2. Так как $\beta_0, \beta_1 > 0$, то по (20.25), (20.100), (20.29), (20.104)

$$V_{12}^0 = \text{gr } h_{12}|(0, \bar{z}_{12}], \quad V_{22}^0 = \text{gr } h_{22}|(\bar{z}_{12}, \infty), \quad V_{12}^0 \cap \text{gr } \bar{h} = \text{cl } V_{22}^0 \cap \text{gr } \bar{h} = \{(\bar{z}_{12}, \bar{p})\}. \quad (21.34)$$

Отсюда и из равенства $V_2^0 = V_{12}^0 \cup V_{22}^0$ (см. (21.28)) следует утверждение 2.

3. Утверждение 3 объединяет фрагмент описания совмещенного случая A1B1C1, данного в табл. 4 (см. первый столбец), и заключение леммы 21.1.

4. Исходя из представлений кривых V_1^0 и V_2^0 , указанных в утверждениях 1 и 2, видим, что доказательство утверждения 4 сводится к обоснованию того, что при всяком $z \in (0, z_1)$ выполняется

$$h_2(z) > h_{11}(z). \quad (21.35)$$

Покажем это. Возьмем произвольное $z \in (0, z_1)$. Как отмечено в утверждении 3, единственный элемент (z_1, p_1) множества $V_{11}^0 \cap V_{12}^0$ принадлежит зоне \widehat{V} трансверсальности. Отсюда

$$z_1 \in \text{pr}_1(V_{12}^0 \cap \widehat{V}) = [\widehat{z}_{12}, \bar{z}_{12}];$$

последнее равенство взято из описания случая A1B1C1, данного в табл. 4 (см. третий столбец). Таким образом, $z < z_1 < \bar{z}_{12}$. Следовательно, согласно утверждению 2 $h_2(z) = h_{12}(z)$. Наконец,

так как $\beta_0, \beta_1 > 0$, то в соответствии с (20.84) $h_{12}(z) > h_{11}(z)$. Два последних соотношения влекут (21.35). Утверждение 4 доказано.

5. Согласно представлениям кривых V_1^0 и V_2^0 , указанным в утверждениях 1 и 2, для доказательства утверждения 5 достаточно проверить, что при всяком $z > z_1$ выполняется

$$h_2(z) < h_{11}(z). \quad (21.36)$$

Покажем это. Возьмем произвольное $z \in (z_1, \infty)$. Допустим, что $z \leq \bar{z}_{12}$. Тогда в силу утверждения 2 $h_2(z) = h_{12}(z)$. Так как $\beta_0, \beta_1 > 0$, то по (20.85) $h_{12}(z) < h_{11}(z)$ и (21.36) доказано. Допустим, что $z > \bar{z}_{12}$. Тогда согласно утверждению 2 $h_2(z) = h_{22}(z)$. Так как $\beta_1 > 0$, то вследствие (20.100) $(z, h_{22}(z)) \in V_{22}^0 \subset \Gamma_2$. Отсюда, привлекая тот факт, что Γ_2 есть подграфик функции \bar{h} (см. (20.1)), заключаем, что $h_{22}(z) < \bar{h}(z)$. С другой стороны, согласно (20.11) $h_{11}(z) > \bar{h}(z)$. Таким образом, $h_2(z) = h_{22}(z) < h_{11}(z)$. Неравенство (21.36) установлено. Утверждение 5 доказано.

6. По первому равенству в (21.29) и по (20.41) $V_1^+ = V_{11}^+ = \text{gr}^+ h_{11}$. Согласно утверждению 1 $\text{gr} h_{11} = V_1^0$. Поэтому указанное выше представление для V_1^+ можно также записать как

$$V_1^+ = \text{ext}^+ V_1^0. \quad (21.37)$$

Из первого равенства в (21.30) имеем $V_2^+ = V_{12}^+ \cup V_{22}^+$. Уточним вид каждого из множеств в правой части. Так как $\beta_0, \beta_1 > 0$, то по (20.49) и (20.102)

$$V_{12}^+ = \text{gr}^+ h_{12}|(0, \bar{z}_{12}] \cup \text{gr}_0^+ \bar{h}|(\bar{z}_{12}, \infty), \quad V_{22}^+ = \text{gr}^+ h_{22}|(\bar{z}_{12}, \infty) \cap \text{gr}^- \bar{h}|(\bar{z}_{12}, \infty).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} V_2^+ &= V_{12}^+ \cup V_{22}^+ = [\text{gr}^+ h_{12}|(0, \bar{z}_{12}] \cup \text{gr}_0^+ \bar{h}|(\bar{z}_{12}, \infty)] \cup [\text{gr}^+ h_{22}|(\bar{z}_{12}, \infty) \cap \text{gr}^- \bar{h}|(\bar{z}_{12}, \infty)] = \\ &= \text{gr}^+ h_{12}|(0, \bar{z}_{12}] \cup \text{gr}^+ h_{22}|(\bar{z}_{12}, \infty) = \text{gr}^+ h_2; \end{aligned}$$

последнее равенство следует из утверждения 2. Так как по утверждению 2 $\text{gr} h_2 = V_2^0$, то полученное равенство равносильно равенству

$$V_2^+ = \text{ext}^+ V_2^0. \quad (21.38)$$

Из (21.37), (21.38) и (21.31) имеем

$$\begin{aligned} V^{++} &= V_1^+ \cap V_2^+ = \text{ext}^+ V_1^0 \cap \text{ext}^+ V_2^0 = \\ &= [\text{ext}^+ V_1^0|(0, z_1) \cap \text{ext}^+ V_2^0|(0, z_1)] \cup [\text{ext}^+ V_1^0|(z_1, \infty) \cap \text{ext}^+ V_2^0|(z_1, \infty)] \cup \\ &\cup [\text{ext}^+ V_1^0|\{z_1\} \cap \text{ext}^+ V_2^0|\{z_1\}]. \end{aligned} \quad (21.39)$$

По утверждению 4 $V_2^0|(0, z_1) \subset \text{ext}^+ V_1^0|(0, z_1)$, и по утверждению 5 $V_2^0|(z_1, \infty) \subset \text{ext}^- V_1^0|(z_1, \infty)$; последнее можно также записать как $V_1^0|(z_1, \infty) \subset \text{ext}^+ V_2^0|(z_1, \infty)$. Из первого и третьего из этих вложений с очевидностью вытекают вложения

$$\text{ext}^+ V_2^0|(0, z_1) \subset \text{ext}^+ V_1^0|(0, z_1), \quad \text{ext}^+ V_1^0|(z_1, \infty) \subset \text{ext}^+ V_2^0|(z_1, \infty).$$

Теперь, обращаясь к правой части (21.39), видим, что пересечение, записанное в первой квадратной скобке, равно $\text{ext}^+ V_2^0|(0, z_1)$, а пересечение, записанное во второй квадратной скобке, равно $\text{ext}^+ V_1^0|(z_1, \infty)$. Наконец, пересечение, записанное в третьей квадратной скобке, равно

объединению $\text{ext}^+ V_1^0|z_1 \cup \text{ext}^+ V_2^0|z_1$, поскольку по утверждению 3 $V_1^0|z_1 = V_2^0|z_1 = \{(z_1, p_1)\}$. Суммируя, получаем, что (21.39) равносильно равенству

$$V^{++} = \text{ext}^+ V_2^0|(0, z_1] \cup \text{ext}^+ V_1^0|[z_1, \infty).$$

Утверждение 6 доказано.

7. По второму равенству в (21.29) и по (20.43) (где учтем, что $\nu < b$) имеем

$$V_1^- = V_{11}^- \cup \Gamma_2 = [\text{gr}^- h_{11} \cap \text{gr}_0^+ \bar{h}] \cup \Gamma_2 = [\text{gr}^- h_{11} \cap \Gamma_1] \cup \Gamma_2 = \text{gr}^- h_{11},$$

или, поскольку $\text{gr} h_{11} = V_1^0$ (см. утверждение 1),

$$V_1^- = \text{ext}^- V_1^0. \quad (21.40)$$

По второму равенству в (21.30) $V_2^- = V_{12}^- \cup V_{22}^-$. Так как $\beta_0, \beta_1 > 0$, то по (20.49) и (20.102)

$$V_{12}^- = \text{gr}^- h_{12}|(0, \bar{z}_{12}] \cap \text{gr}_0^+ \bar{h}|(0, \bar{z}_{12}], \quad V_{22}^- = \text{gr}^- h_{22}|(\bar{z}_{12}, \infty) \cup \text{gr}^- \bar{h}|(0, \bar{z}_{12}].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} V_2^- &= V_{12}^- \cup V_{22}^- = [\text{gr}^- h_{12}|(0, \bar{z}_{12}] \cap \text{gr}_0^+ \bar{h}|(0, \bar{z}_{12}]] \cup [\text{gr}^- h_{22}|(\bar{z}_{12}, \infty) \cup \text{gr}^- \bar{h}|(0, \bar{z}_{12}]] = \\ &= \text{gr}^- h_{12}|(0, \bar{z}_{12}] \cup \text{gr}^- h_{22}|(\bar{z}_{12}, \infty) = \text{gr}^- h_2; \end{aligned}$$

последнее равенство следует из утверждения 2. Так как по утверждению 2 $\text{gr} h_2 = V_2^0$, то имеем

$$V_2^- = \text{ext}^- V_2^0. \quad (21.41)$$

Из (21.40), (21.41) и (21.31)

$$\begin{aligned} V^{--} &= V_1^- \cap V_2^- = \text{ext}^- V_1^0 \cap \text{ext}^- V_2^0 = \\ &= [\text{ext}^- V_1^0|(0, z_1) \cap \text{ext}^- V_2^0|(0, z_1)] \cup [\text{ext}^- V_1^0|(z_1, \infty) \cap \text{ext}^- V_2^0|(z_1, \infty)] \cup \\ &\cup [\text{ext}^- V_1^0|z_1 \cap \text{ext}^- V_2^0|z_1]. \end{aligned} \quad (21.42)$$

По утверждению 4 $V_2^0|(0, z_1) \subset \text{ext}^+ V_1^0|(0, z_1)$, или, что равносильно, $V_1^0|(0, z_1) \subset \text{ext}^- V_2^0|(0, z_1)$, а по утверждению 5 $V_2^0|(z_1, \infty) \subset \text{ext}^- V_1^0|(z_1, \infty)$. Из последних двух вложений с очевидностью следуют вложения

$$\text{ext}^- V_1^0|(0, z_1) \subset \text{ext}^- V_2^0|(0, z_1), \quad \text{ext}^- V_2^0|(z_1, \infty) \subset \text{ext}^- V_1^0|(z_1, \infty).$$

Таким образом, в правой части (21.42) пересечение, записанное в первой квадратной скобке, равно $\text{ext}^- V_1^0|(0, z_1)$, а пересечение, записанное во второй квадратной скобке, равно $\text{ext}^- V_2^0|(z_1, \infty)$. Пересечение, записанное в третьей квадратной скобке, равно объединению $\text{ext}^- V_1^0|z_1 \cup \text{ext}^- V_2^0|z_1$, поскольку по утверждению 3 $V_1^0|z_1 = V_2^0|z_1 = \{(z_1, p_1)\}$. Суммируя, получаем, что (21.42) равносильно равенству

$$V^{--} = \text{ext}^- V_2^0|(0, z_1] \cup \text{ext}^- V_1^0|[z_1, \infty).$$

Утверждение 7 доказано.

8. Из (21.31), принимая во внимание (21.37) и (21.41), получаем

$$\begin{aligned} V^{+-} &= V_1^+ \cap V_2^- = \text{ext}^+ V_1^0 \cap \text{ext}^- V_2^0 = \\ &= [\text{ext}^+ V_1^0|(0, z_1) \cap \text{ext}^- V_2^0|(0, z_1)] \cup [\text{ext}^+ V_1^0|(z_1, \infty) \cap \text{ext}^- V_2^0|(z_1, \infty)] \cup \\ &\cup [\text{ext}^+ V_1^0|\{z_1\} \cap \text{ext}^- V_2^0|\{z_1\}]. \end{aligned} \quad (21.43)$$

По утверждению 5 $V_2^0|(z_1, \infty) \subset \text{ext}^- V_1^0|(z_1, \infty)$, или равносильно $V_1^0|(z_1, \infty) \subset \text{ext}^+ V_2^0|(z_1, \infty)$. Отсюда видно, что в правой части (21.43) пересечение, записанное во второй квадратной скобке, пусто. Пересечение, записанное в третьей квадратной скобке, также пусто, поскольку по утверждению 3 $V_1^0|\{z_1\} = V_2^0|\{z_1\} = \{(z_1, p_1)\}$. В итоге имеем

$$V^{+-} = \text{ext}^+ V_1^0|(0, z_1) \cap \text{ext}^- V_2^0|(0, z_1) = \text{ext}^+ V_1^0|(0, z_1] \cap \text{ext}^- V_2^0|(0, z_1].$$

Утверждение 8 доказано.

9. Из (21.31), (21.40) и (21.38) имеем

$$\begin{aligned} V^{-+} &= V_1^- \cap V_2^+ = \text{ext}^- V_1^0 \cap \text{ext}^+ V_2^0 = \\ &= [\text{ext}^- V_1^0|(0, z_1) \cap \text{ext}^+ V_2^0|(0, z_1)] \cup [\text{ext}^- V_1^0|(z_1, \infty) \cap \text{ext}^+ V_2^0|(z_1, \infty)] \cup \\ &\cup [\text{ext}^- V_1^0|\{z_1\} \cap \text{ext}^+ V_2^0|\{z_1\}]. \end{aligned} \quad (21.44)$$

По утверждению 4 $V_2^0|(0, z_1) \subset \text{ext}^+ V_1^0|(0, z_1)$. Поэтому в (21.44) пересечение, записанное в первой квадратной скобке, пусто. Пересечение, записанное в третьей квадратной скобке, также пусто, поскольку по утверждению 3 $V_1^0|\{z_1\} = V_2^0|\{z_1\} = \{(z_1, p_1)\}$. Таким образом,

$$V^{-+} = \text{ext}^- V_1^0|(z_1, \infty) \cap \text{ext}^+ V_2^0|(z_1, \infty) = \text{ext}^- V_1^0|[z_1, \infty) \cap \text{ext}^+ V_2^0|[z_1, \infty).$$

Утверждение 9 доказано.

10. Утверждение 10 следует из асимптотической ограниченности множества \widehat{V} .

Доказательство леммы для совмещенного случая A1B1C1 закончено. Доказательство леммы для совмещенного случая A1B1C3 аналогично.

Лемма 21.3. Пусть имеет место один из неособых невырожденных совмещенных случаев A1B1C2 и A1B1C4 (вторая, пятая и шестая ситуации на рис. 10). Справедливы следующие утверждения.

1. Кривая переключения знака z -координаты имеет вид $V_1^0 = V_{11}^0 = \text{gr } h_{11}$.
2. Кривая переключения знака p -координаты имеет вид $V_2^0 = V_{12}^0 = \text{gr } h_{12}$.
3. Имеют место утверждения 3–10 леммы 21.2.

Лемма 21.4. Пусть имеет место неособый невырожденный совмещенный случай A1B1C7 (первая ситуация в нижнем ряду на рис. 10). Справедливы следующие утверждения.

1. Кривая переключения знака z -координаты имеет вид $V_1^0 = V_{11}^0 = \text{gr } h_{11}$.
2. Кривая V_2^0 переключения знака p -координаты есть объединение лежащих над полуинтервалом $[\bar{z}_{12}, \infty)$ горизонтальной оси расположенных друг над другом и смыкающихся в точке $(\bar{z}_{12}, h_{12}(\bar{z}_{12})) = (\bar{z}_{12}, h_{22}(\bar{z}_{12}))$ “верхней дуги” V_{12}^0 и “нижней дуги” V_{22}^0 :

$$V_2^0 = V_{12}^0 \cup V_{22}^0 = \text{gr } h_{12}|[\bar{z}_{12}, \infty) \cup \text{gr } h_{22}|(\bar{z}_{12}, \infty).$$

3. Множество всех точек покоя имеет вид

$$V_1^0 \cap V_2^0 = V_{11}^0 \cap V_{12}^0 = \{(z_1, p_1)\}$$

и содержится во внутренности зоны \widehat{V} трансверсальности; при этом $z_1 > \bar{z}_{12}$.

4. В вертикальной полосе, опирающейся на интервал (z_1, ∞) горизонтальной оси, “верхняя дуга” V_{12}^0 кривой V_2^0 расположена строго выше кривой V_1^0 :

$$V_{12}^0|(z_1, \infty) \subset \text{ext}^+ V_1^0|(z_1, \infty).$$

5. Оставшаяся часть кривой V_2^0 , за вычетом точки покоя (z_1, p_1) , т.е. объединение части $V_{12}^0|[\bar{z}_{12}, z_1]$ ее “верхней дуги” V_{12}^0 с ее “нижней дугой” V_{22}^0 , расположена строго ниже кривой V_1^0 :

$$V_{12}^0|[\bar{z}_{12}, z_1] \cup V_{22}^0 \subset \text{ext}^- V_1^0|[\bar{z}_{12}, \infty).$$

6. Зона V^{++} роста обеих координат есть область, лежащая в вертикальной полосе, в которой (см. утверждение 4) кривая V_{12}^0 строго выше кривой V_1^0 , и расположенная строго между этими кривыми:

$$V^{++} = \text{ext}^+ V_1^0|(z_1, \infty) \cap \text{ext}^- V_{12}^0|(z_1, \infty) = \text{int}[V_1^0|[z_1, \infty) \cup V_{12}^0|[z_1, \infty)].$$

7. Зона V^{--} убывания обеих координат есть внутренность “юго-западного” криволинейного угла в Γ с вершиной в точке покоя (z_1, p_1) , образованного кривой $V_1^0|(0, z_1]$ (“верхняя граница” V^{--}) и частью кривой V_2^0 , расположенной ниже кривой V_1^0 (“правая граница” V^{--}):

$$V^{--} = \text{ext}^- V_1^0|(0, \bar{z}_{12}) \cup [\text{ext}^- V_1^0|[\bar{z}_{12}, z_1] \cap \text{ext}^+ V_{12}^0|[\bar{z}_{12}, z_1]] \cup \text{ext}^- V_{22}^0|[\bar{z}_{12}, \infty).$$

8. Зона V^{+-} роста z -координаты и убывания p -координаты есть область, расположенная над верхней огибающей кривых V_1^0 и V_{12}^0 :

$$V^{+-} = \text{ext}^+ V_1^0|(0, z_1] \cup \text{ext}^+ V_{12}^0|(z_1, \infty).$$

9. Зона V^{-+} убывания z -координаты и роста p -координаты есть внутренность “юго-восточного” криволинейного угла в Γ с вершиной в точке покоя (z_1, p_1) , образованного кривой $V_1^0|[z_1, \infty)$ (“верхняя граница” V^{-+}) и частью кривой V_2^0 , расположенной ниже кривой V_1^0 (“левая граница” V^{-+}):

$$\begin{aligned} V^{-+} &= [\text{ext}^- V_{12}^0|[\bar{z}_{12}, z_1] \cap \text{ext}^+ V_{22}^0|[\bar{z}_{12}, z_1]] \cup [\text{ext}^- V_1^0|[z_1, \infty) \cap \text{ext}^+ V_{22}^0|[z_1, \infty)] = \\ &= \text{int}[V_1^0|[z_1, \infty) \cup V_{12}^0|[\bar{z}_{12}, z_1] \cup V_{22}^0]. \end{aligned}$$

10. Пересечение $V^{++} \cap \widehat{V}$ асимптотически ограничено.

Лемма 21.5. Пусть имеет место неособый невырожденный совмещенный случай A9B1C10 (вторая ситуация в нижнем ряду на рис. 10). Справедливы следующие утверждения.

1. Кривая переключения знака z -координаты имеет вид $V_1^0 = V_{11}^0 = \text{gr } h_{11}$.

2. Кривая V_2^0 переключения знака p -координаты есть объединение кривой V_{12}^0 — направленного вверх вертикального луча, исходящего из точки $(\bar{z}_{12}, h_{22}(\bar{z}_{12}))$, и примыкающей к этой точке кривой V_{22}^0 :

$$V_2^0 = V_{12}^0 \cup V_{22}^0 = \text{gr}^+ h_{22}|\{\bar{z}_{12}\} \cup \text{gr } h_{22}|[\bar{z}_{12}, \infty) = \{(\bar{z}_{12}, p) : p \geq h_{22}(\bar{z}_{12})\} \cup \text{gr } h_{22}|[\bar{z}_{12}, \infty).$$

3. Множество всех точек покоя имеет вид

$$V_1^0 \cap V_2^0 = V_{11}^0 \cap V_{12}^0 = \{(\bar{z}_{12}, \bar{p}_{12})\}$$

и содержится во внутренней зоне \widehat{V} трансверсальности.

4. Зона V^{++} роста обеих координат есть внутренность “северо-восточного” криволинейного угла в Γ с вершиной в точке покоя $(\bar{z}_{12}, \bar{p}_{12})$, образованного лежащим выше кривой V_1^0 (прямолинейным) участком кривой V_2^0 (“левая граница” V^{++}) и кривой $V_1^0|_{[z_1, \infty)}$ (“нижняя граница” V^{++}):

$$V^{++} = \text{ext}^+ V_1^0|(\bar{z}_{12}, \infty).$$

5. Зона V^{--} убывания обеих координат есть внутренность “юго-западного” криволинейного угла в Γ с вершиной в точке покоя $(\bar{z}_{12}, \bar{p}_{12})$, образованного лежащим ниже кривой V_1^0 участком кривой V_2^0 (“правая граница” V^{--}) и кривой $V_1^0|(0, \bar{z}_{12}]$ (“верхняя граница” V^{--}):

$$V^{--} = \text{ext}^- V_1^0|(0, \bar{z}_{12}) \cup \text{ext}^- V_2^0|[\bar{z}_{12}, \infty) = \text{gr}^- h_{11}|(0, \bar{z}_{12}) \cup \text{gr}^- h_{22}|[\bar{z}_{12}, \infty).$$

6. Зона V^{+-} роста z -координаты и убывания p -координаты есть внутренность “северо-западного” криволинейного угла в Γ с вершиной в точке покоя $(\bar{z}_{12}, \bar{p}_{12})$, образованного лежащим выше кривой V_1^0 (прямолинейным) участком кривой V_2^0 (“правая граница” V^{+-}) и кривой $V_1^0|(0, z_1]$ (“нижняя граница” V^{+-}):

$$V^{+-} = \text{ext}^+ V_1^0|(0, \bar{z}_{12}).$$

7. Зона V^{-+} убывания z -координаты и роста p -координаты есть внутренность “юго-восточного” криволинейного угла в Γ с вершиной в точке покоя $(\bar{z}_{12}, \bar{p}_{12})$, образованного лежащим ниже кривой V_1^0 участком кривой V_2^0 (“левая граница” V^{-+}) и кривой $V_1^0|[z_1, \infty)$ (“верхняя граница” V^{-+}):

$$V^{-+} = \text{ext}^- V_1^0|(\bar{z}_{12}, \infty) \cap \text{ext}^+ V_2^0|(\bar{z}_{12}, \infty).$$

8. Пересечение $V^{++} \cap \widehat{V}$ асимптотически ограничено.

Леммы 21.2–21.5 характеризуют все неособые невырожденные совмещенные случаи (см. рис. 10).

Перейдем к особым невырожденным совмещенным случаям, изображенным на рис. 11.

Лемма 21.6. Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай A4B2C6 (первая ситуация на рис. 11). Справедливы следующие утверждения.

1. Имеют место утверждения 1–3 леммы 21.4.
2. Кривые V_1^0 и V_2^0 лежат во внутренней зоне \widehat{V} трансверсальности.
3. Кривая V_2^0 , за вычетом точки покоя (z_1, p_1) , расположена строго ниже кривой V_1^0 :

$$V_2^0 \setminus \{(z_1, p_1)\} \subset \text{ext}^- V_1^0.$$

4. Зона V^{++} роста обеих координат пуста.

5. Зона V^{--} убывания обеих координат есть объединение двух множеств V_1^{--} и V_2^{--} ; множество V_1^{--} есть внутренность “юго-западного” криволинейного угла в Γ с вершиной в точке покоя (z_1, p_1) , образованного кривой $V_1^0|(0, z_1]$ (“верхняя граница” V_1^{--}) и объединением кривых $V_{12}^0|[\bar{z}_{12}, z_1]$ и V_{22}^0 (“правая граница” V_1^{--}):

$$V_1^{--} = [\text{ext}^- V_1^0|(0, z_1) \cap \text{ext}^+ V_{12}^0|[\bar{z}_{12}, z_1]] \cup \text{ext}^- V_{22}^0|[\bar{z}_{12}, \infty);$$

множество V_2^{--} есть внутренность “юго-восточного” криволинейного угла в Γ с вершиной в точке покоя (z_1, p_1) , образованного кривой $V_1^0|_{[z_1, \infty)}$ (“верхняя граница” V_2^{--}) и кривой $V_{12}^0|_{[z_1, \infty)}$ (“левая граница” V_2^{--}):

$$V_2^{--} = \text{ext}^- V_1^0|_{[z_1, \infty)} \cap \text{ext}^+ V_{12}^0|_{[z_1, \infty)}.$$

6. Зона V^{+-} роста z -координаты и убывания p -координаты есть область, расположенная над кривой V_1^0 :

$$V^{+-} = \text{ext}^+ V_1^0.$$

7. Зона V^{-+} убывания z -координаты и роста p -координаты есть внутренность кривой V_2^0 :

$$V^{-+} = \text{ext}^- V_{12}^0 \cap \text{ext}^+ V_{22}^0 = \text{int} V_2^0.$$

Лемма 21.7. Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай A5B2C6 (вторая ситуация на рис. 11). Справедливы следующие утверждения.

1. Имеют место утверждения 1, 2 леммы 21.4.
2. Кривые V_1^0 и V_2^0 лежат во внутренности зоны \widehat{V} трансверсальности.
3. Множество всех точек покоя имеет вид

$$V_1^0 \cap V_2^0 = V_{11}^0 \cap V_{12}^0 = \{(z_1, p_1), (z_2, p_2)\}$$

и содержится во внутренности зоны \widehat{V} трансверсальности; при этом $z_2 > z_1 > \bar{z}_{12}$.

4. В вертикальной полосе, опирающейся на интервал (z_1, z_2) горизонтальной оси, “верхняя дуга” V_{12}^0 кривой V_2^0 расположена строго выше кривой V_1^0 :

$$V_{12}^0|_{(z_1, z_2)} \subset \text{ext}^+ V_1^0|_{(z_1, z_2)}.$$

5. Оставшаяся часть кривой V_2^0 , за вычетом точек покоя (z_1, p_1) и (z_2, p_2) , т.е. объединение частей $V_{12}^0|_{[\bar{z}_{12}, z_1)}$ и $V_{12}^0|_{(z_2, \infty)}$ ее “верхней дуги” V_{12}^0 с ее “нижней дугой” V_{22}^0 , расположена строго ниже кривой V_1^0 :

$$V_{12}^0|_{[\bar{z}_{12}, z_1)} \cup V_{12}^0|_{(z_2, \infty)} \cup V_{22}^0 \subset \text{ext}^- V_1^0|_{[\bar{z}_{12}, \infty)}.$$

6. Зона V^{++} роста обеих координат есть область, лежащая в вертикальной полосе, в которой (см. утверждение 4) кривая V_{12}^0 строго выше кривой V_1^0 , и расположенная строго между этими кривыми:

$$V^{++} = \text{ext}^+ V_1^0|_{(z_1, z_2)} \cap \text{ext}^- V_{12}^0|_{(z_1, z_2)} = \text{int} [V_1^0|_{[z_1, z_2]} \cup V_{12}^0|_{[z_1, z_2]}].$$

7. Зона V^{--} убывания обеих координат есть объединение двух множеств V_1^{--} и V_2^{--} ; множество V_1^{--} есть внутренность “юго-западного” криволинейного угла в Γ с вершиной в точке покоя (z_1, p_1) , образованного кривой $V_1^0|_{(0, z_1]}$ (“верхняя граница” V_1^{--}) и объединением кривых $V_{12}^0|_{[\bar{z}_{12}, z_1]}$ и V_{22}^0 (“правая граница” V_1^{--}):

$$V_1^{--} = [\text{ext}^- V_1^0|_{(0, z_1]} \cap \text{ext}^+ V_{12}^0|_{[\bar{z}_{12}, z_1]}] \cup \text{ext}^- V_{22}^0|_{[\bar{z}_{12}, \infty)};$$

множество V_2^{--} есть внутренность “юго-восточного” криволинейного угла в Γ с вершиной в точке покоя (z_2, p_2) , образованного кривой $V_1^0|_{[z_2, \infty)}$ (“верхняя граница” V_2^{--}) и кривой

$V_{12}^0|z_2, \infty)$ (“левая граница” V_2^{--}):

$$V_2^{--} = \text{ext}^- V_1^0|z_2, \infty) \cap \text{ext}^+ V_{12}^0|z_2, \infty).$$

8. Зона V^{+-} роста z -координаты и убывания p -координаты есть область, расположенная над верхней огибающей кривых V_1^0 и V_{12}^0 :

$$V^{+-} = \text{ext}^+ V_1^0|(0, z_1] \cup \text{ext}^+ V_{12}^0|(z_1, z_2) \cup \text{ext}^+ V_1^0|z_2, \infty).$$

9. Зона V^{-+} убывания z -координаты и роста p -координаты есть область, расположенная ниже нижней огибающей кривых V_1^0 и V_{12}^0 и выше кривой V_{22}^0 :

$$\begin{aligned} V^{-+} &= [\text{ext}^- V_{12}^0|[\bar{z}_{12}, z_1] \cap \text{ext}^+ V_{22}^0|[\bar{z}_{12}, z_1]] \cup [\text{ext}^- V_1^0|(z_1, z_2) \cap \text{ext}^+ V_{22}^0|(z_1, z_2)] \cup \\ &\cup [\text{ext}^- V_{12}^0|z_2, \infty) \cap \text{ext}^+ V_{22}^0|z_2, \infty)] = \\ &= \text{int}[V_{12}^0|z_2, \infty) \cup V_1^0|[z_1, z_2] \cup V_{12}^0|[\bar{z}_{12}, z_1] \cup V_{22}^0]. \end{aligned}$$

Лемма 21.8. Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай A6B2C6 (третья ситуация на рис. 11). Справедливы следующие утверждения.

1. Имеют место утверждения 1–9 леммы 21.4.

2. Кривые V_1^0 и V_2^0 лежат во внутренности зоны \widehat{V} трансверсальности.

Леммами 21.6–21.8 описаны все особые невырожденные совмещенные случаи, изображенные на рис. 11.

Последние три леммы данного раздела характеризуют все вырожденные совмещенные случаи (см. рис. 12).

Лемма 21.9. Пусть имеет место один из вырожденных совмещенных случаев A2B2C5, A7B2C5 (первая ситуация на рис. 12). Справедливы следующие утверждения.

1. Кривая переключения знака z -координаты имеет вид $V_1^0 = V_{11}^0 = \text{gr } h_{11}$.

2. Кривая переключения знака p -координаты имеет вид $V_2^0 = V_{12}^0 = \text{gr } h_{12}$.

3. Кривая V_1^0 лежит во внутренности зоны \widehat{V} трансверсальности.

4. Кривая V_2^0 расположена выше кривой V_1^0 и лежит в дополнении зоны \widehat{V} трансверсальности:

$$V_2^0 \subset \text{ext}^+ V_1^0 \cap [\Gamma \setminus \widehat{V}].$$

5. Множество $V_1^0 \cap V_2^0$ всех точек покоя пусто.

6. Зона V^{++} роста обеих координат есть верхняя внешность кривой V_2^0 :

$$V^{++} = \text{ext}^+ V_2^0.$$

7. Зона V^{--} убывания обеих координат есть нижняя внешность кривой V_1^0 :

$$V^{--} = \text{ext}^- V_1^0.$$

8. Зона V^{+-} роста z -координаты и убывания p -координаты есть область, расположенная строго между кривыми V_1^0 и V_2^0 :

$$V^{+-} = \text{ext}^+ V_1^0 \cap \text{ext}^- V_2^0.$$

9. Зона V^{-+} убывания z -координаты и роста p -координаты пуста.

Лемма 21.10. Пусть имеет место один из вырожденных совмещенных случаев A2B2C6, A3B2C6, A7B2C6 (вторая ситуация на рис. 12). Справедливы следующие утверждения.

1. Кривая переключения знака z -координаты имеет вид $V_1^0 = V_{11}^0 = \text{gr } h_{11}$.

2. Кривая V_2^0 переключения знака p -координаты есть объединение лежащих над полуинтервалом $[\bar{z}_{12}, \infty)$ горизонтальной оси расположенных друг над другом и смыкающихся в точке $(\bar{z}_{12}, h_{12}(\bar{z}_{12})) = (\bar{z}_{12}, h_{22}(\bar{z}_{12}))$ “верхней дуги” V_{12}^0 и “нижней дуги” V_{22}^0 :

$$V_2^0 = V_{12}^0 \cup V_{22}^0 = \text{gr } h_{12}|[\bar{z}_{12}, \infty) \cup \text{gr } h_{22}|(\bar{z}_{12}, \infty).$$

3. Кривые V_1^0 и V_2^0 лежат во внутренности зоны \widehat{V} трансверсальности.

4. Кривая V_2^0 расположена ниже кривой V_1^0 :

$$V_2^0 \subset \text{ext}^- V_1^0.$$

5. Множество $V_1^0 \cap V_2^0$ всех точек покоя пусто.

6. Зона V^{++} роста обеих координат пуста.

7. Зона V^{--} убывания обеих координат есть нижняя внешность кривой V_1^0 , за вычетом кривой V_2^0 и ее внутренности:

$$V^{--} = \text{ext}^- V_1^0 \setminus (V_2^0 \cup \text{int } V_2^0).$$

8. Зона V^{+-} роста z -координаты и убывания p -координаты есть верхняя внешность кривой V_1^0 :

$$V^{+-} = \text{ext}^+ V_1^0.$$

9. Зона V^{-+} убывания z -координаты и роста p -координаты есть внутренность кривой V_2^0 :

$$V^{-+} = \text{int } V_2^0.$$

Лемма 21.11. Пусть имеет место один из вырожденных совмещенных случаев A2B2C8, A8B2C9 (третья ситуация на рис. 12). Справедливы следующие утверждения.

1. Кривая переключения знака z -координаты имеет вид $V_1^0 = V_{11}^0 = \text{gr } h_{11}$.

2. Кривая V_2^0 переключения знака p -координаты пуста.

3. Кривая V_1^0 лежит во внутренности зоны \widehat{V} трансверсальности.

4. Множество $V_1^0 \cap V_2^0$ всех точек покоя пусто.

5. Зона V^{++} роста обеих координат пуста.

6. Зона V^{--} убывания обеих координат есть нижняя внешность кривой V_1^0 :

$$V^{--} = \text{ext}^- V_1^0.$$

7. Зона V^{+-} роста z -координаты и убывания p -координаты есть верхняя внешность кривой V_1^0 :

$$V^{+-} = \text{ext}^+ V_1^0.$$

8. Зона V^{-+} убывания z -координаты и роста p -координаты пуста.

Итак, в леммах 21.2–21.11 мы дали описания всех возможных вариантов векторного поля гамильтоновой системы (19.24), (19.25), отвечающих всем реализуемым совмещенным случаям (см. табл. 4). Полученные описания доставляют необходимую базу для характеристики

путем применения в каждом из вариантов принципа максимума Понтрягина (следствие 19.1) искомого решения изучаемой задачи (\mathcal{P}). Следующие разделы посвящены реализации этой программы.

В предстоящем анализе будем пользоваться следующим определением. Решение (z_*, p_*) гамильтоновой системы (19.24), (19.25) будем называть *трансверсальным*, если, во-первых, область Δ его определения содержит полуинтервал $[0, \infty)$, во-вторых, значения (z_*, p_*) лежат в зоне \widehat{V} трансверсальности и, в-третьих, удовлетворяется условие стационарности (см. следствие 19.1, условие (iv)):

$$M(z_*(t), p_*(t)) = \rho e^{-\rho t} \int_t^{\infty} e^{-\rho s} [\kappa \ln z_*(s) + \ln(b - u_*(s))] ds \quad \text{для любого } t \geq 0,$$

где u_* — определенная на Δ скалярная функция, задаваемая формулой (19.26) для $p = p_*$. Переформулировка следствия 19.1 с учетом приведенного определения и определения (20.106), (20.105) зоны \widehat{V} трансверсальности дает следующее компактное описание необходимого условия оптимальности для задачи (\mathcal{P}).

Лемма 21.12. *Если z_* — оптимальная допустимая траектория для задачи (\mathcal{P}), то существует такая определенная на $[0, \infty)$ скалярная функция p_* , что (z_*, p_*) есть трансверсальное решение гамильтоновой системы (19.24), (19.25).*

В дальнейшем нашей основной задачей станет характеристика трансверсальных решений гамильтоновой системы (19.24), (19.25) для каждого из вариантов ее векторного поля.

22. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В НЕОСОБЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ СОВМЕЩЕННЫХ СЛУЧАЯХ

Начнем с рассмотрения неособых невырожденных совмещенных случаев (см. табл. 5). Графически они представлены на рис. 10 и формально охарактеризованы в табл. 4. В леммах 21.2–21.5 для этих совмещенных случаев дано подробное описание векторного поля гамильтоновой системы. Поясним схему предстоящего анализа неформально, апеллируя к рис. 10 и 13.

Итак, мы концентрируемся на выделении трансверсальных решений гамильтоновой системы — тех ее решений, которые определены на $[0, \infty)$ и принимают значения в зоне трансверсальности \widehat{V} (заметим, что по своему определению зона трансверсальности \widehat{V} есть часть

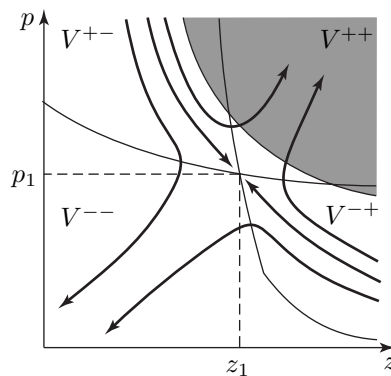


Рис. 13. Фазовые траектории решений гамильтоновой системы в неособых невырожденных совмещенных случаях (см. рис. 10). Трансверсальные решения сходятся к точке покоя (z_1, p_1) . Все остальные решения нетрансверсальны. Затененная область — внешность зоны трансверсальности

квадранта Γ). На рис. 10 и 13 зона \widehat{V} показана как внешность сильно затененной области, заполняющей “северо-восточную” часть квадранта Γ .

Рассмотрим какую-либо из ситуаций, изображенных на рис. 10, например первую ситуацию верхнего ряда, отвечающую невырожденному совмещенному случаю A1B1C1 (для всех других ситуаций, кроме, может быть, первой ситуации из нижнего ряда, рассуждения аналогичны). То обстоятельство, что единственная точка покоя (z_1, p_1) гамильтоновой системы лежит внутри зоны трансверсальности, сразу ведет к выделению трех возможных типов трансверсальных решений. Решения первого типа — это “стояние” в точке покоя (z_1, p_1) . Решения второго типа начинаются в зоне V^{+-} — “северо-западном” углу, образованном кривыми переключения знака, и, оставаясь внутри этого угла (и в пределах зоны трансверсальности), подходят при стремлении времени к бесконечности к его вершине — точке покоя (z_1, p_1) . Вдоль такого решения z -координата гамильтоновой системы возрастает и ее p -координата убывает. Естественно ожидать, что все решения этого типа следуют вдоль одной и той же фазовой траектории. Решения третьего типа устроены симметрично: они начинаются в “юго-восточном” углу V^{-+} , образованном кривыми переключения знака, и, оставаясь внутри него (и в пределах зоны трансверсальности), подходят к точке покоя (z_1, p_1) . Вдоль такого решения z -координата гамильтоновой системы убывает и ее p -координата возрастает. Естественно ожидать, что все решения этого типа также следуют вдоль одной и той же фазовой траектории. В последующем анализе решения указанных трех типов будут называться равновесными.

Примечательно, что расположение начальной точки z_0 управляемой системы задачи (\mathcal{P}) единственным образом выделяет то из обозначенных выше трансверсальных (равновесных) решений, z -координата которого начинается в z_0 : при $z_0 = z_1$, $z_0 < z_1$ и $z_0 > z_1$ это решение соответственно первого, второго и третьего типа. При этом в соответствии с леммой 21.12 z -координата выделенного равновесного решения доставляет траекторию управляемой системы задачи (\mathcal{P}) , которая удовлетворяет необходимому условию оптимальности. Эта траектория в самом деле оптимальна (и при этом является единственной оптимальной траекторией), если, кроме равновесных решений, других трансверсальных решений гамильтонова система не имеет.

Картина векторного поля позволяет сделать это заключение. Действительно, если решение гамильтоновой системы неравновесно, то оно либо начинается вне зон V^{+-} и V^{-+} , либо, начинаясь в одной из них, но “промахиваясь” мимо точки покоя, попадает во внешность этих зон в какой-то момент времени. Нахождение состояния гамильтоновой системы во внешности зон V^{+-} и V^{-+} означает его принадлежность либо “северо-восточному” углу V^{++} — зоне возрастания обеих координат (вместе с ее границей), либо “юго-западному” углу V^{--} — зоне убывания обеих координат (вместе с ее границей). Исходная позиция в “северо-восточном” углу V^{++} (либо на его границе) и возрастание в этом углу обеих координат влекут движение с ненулевой скоростью в пределах V^{++} в “северо-восточном” направлении; поскольку пересечение V^{++} с зоной трансверсальности ограничено, решение за конечное время приходит в дополнение зоны трансверсальности (затененная область на рис. 13). Исходная позиция в “юго-западном” углу V^{--} (либо на его границе) и убывание в этом углу обеих координат влекут движение с ненулевой скоростью в “юго-западном” направлении; в результате рассматриваемое решение за конечное время выходит за пределы квадранта Γ и, стало быть, за пределы зоны трансверсальности. В обеих ситуациях рассматриваемое решение не является трансверсальным.

Такова в общих чертах логика выделения трансверсальных решений гамильтоновой системы и основанного на них решения задачи (\mathcal{P}) в неособых невырожденных совмещенных случаях. В дальнейшем мы реализуем эту логику на уровне строгого изложения.

Обозначенное выше качественное поведение решений гамильтоновой системы характеризуется следующей леммой (для всякого множества $E \subset \Gamma$ через $\text{cl } E$ обозначается его замыкание в \mathbb{R}^2).

Лемма 22.1. Пусть имеет место какой-либо из неособых невырожденных совмещенных случаев (все они перечислены в табл. 5 и показаны на рис. 10) и (\bar{z}, \bar{p}) — точка покоя гамильтоновой системы. Пусть далее (z_*, p_*) — непродолжимое направо решение гамильтоновой системы (19.24), (19.25) в квадранте Γ , Δ — полуинтервал его определения с начальной точкой $t_* \in (-\infty, \infty)$. Справедливы следующие утверждения.

1. Если $(z_*(t_*), p_*(t_*)) = (\bar{z}, \bar{p})$, то $\Delta = [t_*, \infty)$ и $(z_*(t), p_*(t)) = (\bar{z}, \bar{p})$ при всех $t \in \Delta$.
2. Если $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in \text{cl } V^{++} \setminus \{(\bar{z}, \bar{p})\}$, то $(z_*(\xi), p_*(\xi)) \notin \widehat{V}$ при некотором $\xi \in \Delta$.
3. Если $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in \text{cl } V^{--} \setminus \{(\bar{z}, \bar{p})\}$, то полуинтервал Δ ограничен.
4. Если $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in V^{+-} \cup V^{-+}$, то верно одно из следующих условий:
 - (i) $(z_*(\xi), p_*(\xi)) \notin \widehat{V}$ при некотором $\xi \in \Delta$;
 - (ii) полуинтервал Δ ограничен;
 - (iii) $\Delta = [t_*, \infty)$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_*(t) = \bar{z}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_*(t) = \bar{p};$$

при этом в случае $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in V^{+-}$ при всех $t \geq t_*$ выполняется $(z_*(t), p_*(t)) \in V^{+-}$ и в случае $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in V^{-+}$ при всех $t \geq t_*$ выполняется $(z_*(t), p_*(t)) \in V^{-+}$.

Доказательство. 1. Утверждение 1 очевидно.

2. Пусть $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in \text{cl } V^{++} \setminus \{(\bar{z}, \bar{p})\}$. Предположим, что утверждение 2 неверно, т.е.

$$(z_*(t), p_*(t)) \in \widehat{V} \quad \text{при всех } t \in \Delta. \tag{22.1}$$

Согласно леммам 21.2–21.5 зона V^{++} есть внутренность “северо-восточного” криволинейного угла в Γ с вершиной в точке покоя (\bar{z}, \bar{p}) , образованного кривой

$$\overline{V}_1^0 = V_1^0|[\bar{z}, \infty) = \text{gr } h_{11}|[\bar{z}, \infty) \tag{22.2}$$

(“нижняя граница” V^{++}) и той частью \overline{V}_2^0 кривой V_2^0 , которая расположена выше кривой V_1^0 (“левая граница” либо в совмещенном случае A1B1C7 “верхняя граница” V^{++}). В разных неособых совмещенных случаях “левая (верхняя) граница” \overline{V}_2^0 зоны V^{++} имеет разные аналитические описания.

Пусть имеет место любой из неособых невырожденных совмещенных случаев, кроме совмещенного случая A1B1C7 (первая ситуация в нижнем ряду на рис. 10). Легко видеть, что в любой точке (z, p) , принадлежащей “нижней границе” \overline{V}_1^0 зоны V^{++} и отличной от точки покоя (\bar{z}, \bar{p}) , вектор $(\varphi_1(z, p), \varphi_2(z, p))$ векторного поля гамильтоновой системы (19.24), (19.25) направлен вертикально вверх, т.е. $\varphi_1(z, p) = 0$ и $\varphi_2(z, p) > 0$. Действительно, для всякой такой точки (z, p) равенство $\varphi_1(z, p) = 0$ следует из того, что (z, p) лежит на кривой V_1^0 переключения знака z -координаты; при этом $\varphi_2(z, p) \neq 0$, поскольку (z, p) не есть точка покоя; наконец, так как (z, p) лежит на границе зоны V^{++} роста обеих координат, то условие $\varphi_2(z, p) \neq 0$ означает, что $\varphi_2(z, p) > 0$. Значит, вектор $(\varphi_1(z, p), \varphi_2(z, p))$ направлен в верхнюю внешность кривой \overline{V}_1^0 , т.е. во внутренность зоны V^{++} .

Пусть точка $(z, p) \neq (\bar{z}, \bar{p})$ принадлежит “левой границе” \overline{V}_2^0 зоны V^{++} . Рассуждая, как выше, получаем, что вектор $(\varphi_1(z, p), \varphi_2(z, p))$ векторного поля гамильтоновой системы направлен горизонтально вправо, т.е. $\varphi_1(z, p) > 0$ и $\varphi_2(z, p) = 0$. Покажем, что этот вектор также направлен внутрь зоны V^{++} . Для этого привлечем описания “левой границы” \overline{V}_2^0 , данные в леммах 21.2–21.5 для всех неособых невырожденных совмещенных случаев. Если имеет место один из совмещенных случаев A1B1C1 и A1B1C3, то по утверждениям 6, 3 и 2 леммы 21.2

$$\bar{z} = z_1, \quad \overline{V}_2^0 = V_2^0|(0, \bar{z}] = \text{gr } h_2|(0, \bar{z}], \quad V^{++} = \text{ext}^+ \overline{V}_1^0 \cup \text{ext}^+ \overline{V}_2^0.$$

Функция h_2 монотонно убывает на $[\bar{z}, \infty)$; это следует из определения (21.33) этой функции и монотонного убывания функции h_{12} на $(0, \bar{z}_{12}]$ (см. (20.34), (20.39)). Поэтому при $(z, p) \in \bar{V}_2^0$, $\varphi_1(z, p) > 0$, $\varphi_2(z, p) = 0$ вектор $(\varphi_1(z, p), \varphi_2(z, p))$ направлен в верхнюю внешность кривой \bar{V}_2^0 , т.е. во внутренность зоны V^{++} . Если имеет место один из совмещенных случаев А1В1С2 и А1В1С4, то к аналогичному заключению приходим, используя лемму 21.3 и заменяя в приведенном выше рассуждении функцию h_2 на h_{12} . Наконец, если имеет место совмещенный случай А9В1С10, то по утверждениям 4, 3 и 2 леммы 21.5 $(\bar{z}, \bar{p}) = (\bar{z}_{12}, \bar{p}_{12})$,

$$\bar{V}_2^0 = \{(\bar{z}, p) : p \geq \bar{p}\}, \quad V^{++} = \text{gr}^+ h_{11}|(\bar{z}_{12}, \infty).$$

Итак, какой бы из неособых невырожденных совмещенных случаев (кроме А1В1С7) ни имел место, в каждой точке (z, p) границы зоны V^{++} , за исключением точки покоя, вектор $(\varphi_1(z, p), \varphi_2(z, p))$ векторного поля гамильтоновой системы направлен внутрь этой зоны. Значит, замыкание $\text{cl } V^{++}$ инвариантно для гамильтоновой системы. Точнее, тот факт, что $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in \text{cl } V^{++}$, влечет

$$(z_*(t), p_*(t)) \in \text{cl } V^{++} \quad \text{при всех } t \in \Delta, \quad (22.3)$$

или иначе

$$\dot{z}_*(t) = \varphi_1(z_*(t), p_*(t)) \geq 0, \quad \dot{p}_*(t) = \varphi_2(z_*(t), p_*(t)) \geq 0 \quad \text{при всех } t \in \Delta. \quad (22.4)$$

Если $(z_*(t_*), p_*(t_*))$ лежит на “нижней границе” \bar{V}_1^0 зоны V^{++} , то $\varphi_1(z_*(t_*), p_*(t_*)) = 0$ и $\varphi_2(z_*(t_*), p_*(t_*)) > 0$. Тогда при малом приращении времени решение (z_*, p_*) сдвигается вверх и попадает внутрь V^{++} : для некоторого $\tau > t_*$ выполняется

$$(z_*(\tau), p_*(\tau)) \in V^{++}. \quad (22.5)$$

Аналогично заключаем, что если $(z_*(t_*), p_*(t_*))$ лежит на “левой границе” \bar{V}_2^0 зоны V^{++} , то для некоторого $\tau > t_*$ также верно (22.5). Наконец, если $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in V^{++}$, то (22.5) выполняется для $\tau = t_*$. Таким образом, при любом расположении точки (z_*, p_*) в $\text{cl } V^{++} \setminus \{(\bar{z}, \bar{p})\}$ для некоторого $\tau \geq t_*$ имеем (22.5). Заметим, что вследствие (22.4) $(z_*(t), p_*(t)) \in [z_*(\tau), \infty) \times [p_*(\tau), \infty)$ при всех $t \geq \tau$ и, таким образом (см. (22.3)),

$$(z_*(t), p_*(t)) \in \text{cl } V^{++} \cap ([z_*(\tau), \infty) \times [p_*(\tau), \infty)) \quad \text{при всех } t \in [\tau, \infty) \cap \Delta. \quad (22.6)$$

Покажем, что

$$(\bar{z}, \bar{p}) \notin [z_*(\tau), \infty) \times [p_*(\tau), \infty). \quad (22.7)$$

Если $z_*(\tau) > \bar{z}$, то (22.7) очевидно. Пусть $z_*(\tau) \leq \bar{z}$, или, что то же самое,

$$(z_*(\tau), p_*(\tau)) \in V^{++}|(0, \bar{z}], \quad (22.8)$$

где

$$V^{++}|(0, \bar{z}] = V^{++} \cap \{(z, p) \in \Gamma : z \leq \bar{z}\}.$$

Допустим, имеет место какой-либо из совмещенных случаев А1В1С1 и А1В1С3 (первая, третья и четвертая ситуации на рис. 10). По утверждениям 3, 2 и 6 леммы 21.2

$$V_1^0 \cap V_2^0 = \{(z_1, p_1)\} = \{(\bar{z}, \bar{p})\}, \quad V_2^0 = \text{gr } h_2, \quad (22.9)$$

$$V^{++}|(0, \bar{z}] = \text{ext}^+ V_2^0|(0, \bar{z}] = \text{gr}^+ h_2|(0, \bar{z}].$$

Тогда (22.8) влечет неравенство $p_*(\tau) > h_2(z_*(\tau))$. Как отмечено выше, функция h_{12} монотонно убывает на $(0, \bar{z}] = (0, z_1]$. Поэтому из неравенств $p_*(\tau) > h_{12}(z_*(\tau))$ и $z_*(\tau) \leq \bar{z}$ следует, что $p_*(\tau) > h_2(\bar{z})$. Но, как видно из (22.9), $h_{12}(\bar{z}) = \bar{p}$. Значит, $p_*(\tau) > \bar{p}$, откуда получаем (22.7). Если имеет место какой-либо из совмещенных случаев А1В1С2 и А1В1С4 (вторая, пятая и шестая ситуации на рис. 10), то к (22.7) приходим, повторяя приведенное выше доказательство с использованием леммы 21.3 вместо леммы 21.2 и заменой функции h_2 на h_{12} . Если, наконец, имеет место совмещенный случай А9В1С10 (вторая ситуация в нижнем ряду на рис. 10), то согласно утверждениям 3 и 4 леммы 21.5

$$V_1^0 \cap V_2^0 = \{(\bar{z}_{12}, \bar{p}_{12})\} = \{(\bar{z}, \bar{p})\}, \quad V^{++} = \text{ext}^+ V_1^0|(\bar{z}, \infty) = \text{gr}^+ h_{11}|(\bar{z}, \infty)$$

и, значит, исходное (для данного рассуждения) предположение $z_*(\tau) \leq \bar{z}$, или (22.8), нарушается. Итак, независимо от того, какой из неособых невырожденных совмещенных случаев (кроме совмещенного случая А1В1С7) имеет место, справедливо (22.7).

Из (22.6) легко следует, что полуинтервал Δ определения решения (z_*, p_*) бесконечен. Перепишем включение (22.6) с учетом этого обстоятельства и с учетом (22.1):

$$(z_*(t), p_*(t)) \in \bar{V}^{++} \quad \text{при всех } t \geq \tau, \quad (22.10)$$

где

$$\bar{V}^{++} = \text{cl } V^{++} \cap ([z_*(\tau), \infty) \times [p_*(\tau), \infty)) \cap \hat{V}. \quad (22.11)$$

Теперь используем тот факт, что пересечение $V^{++} \cap \hat{V}$ асимптотически ограничено (см. леммы 21.2, 21.3, 21.5). Из этого факта с очевидностью следует ограниченность \bar{V}^{++} . Из ограниченности и замкнутости \bar{V}^{++} и из непрерывности на \bar{V}^{++} функций φ_1 (19.22) и φ_2 (19.23) вытекает, что норма вектора $(\varphi_1(z, p), \varphi_2(z, p))$ достигает на \bar{V}^{++} своего наименьшего значения. Данное значение необходимо положительно — это обеспечивается условием (22.7) и единственностью точки покоя гамильтоновой системы (см. леммы 21.2, 21.3, 21.5). Таким образом, включение (22.10) и неравенства (22.4) дают

$$\dot{z}_*(t) + \dot{p}_*(t) = \varphi_1(z_*(t), p_*(t)) + \varphi_2(z_*(t), p_*(t)) \geq \delta \quad \text{при всех } t \geq \tau, \quad (22.12)$$

где $\delta > 0$. Следовательно, норма вектора $(z_*(t), p_*(t))$ стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Отсюда, поскольку множество \bar{V}^{++} ограничено, заключаем, что

$$(z_*(\xi), p_*(\xi)) \notin \bar{V}^{++} \quad (22.13)$$

при некотором $\xi \geq \tau$. Противоречие с (22.10) завершает доказательство утверждения 2 в предположении, что имеет место любой из неособых невырожденных совмещенных случаев, кроме А1В1С7.

Пусть теперь имеет место совмещенный случай А1В1С7 (первая ситуация в нижнем ряду на рис. 10). Согласно лемме 21.4 (см. утверждения 2–4 и 6 этой леммы) точка покоя (\bar{z}, \bar{p}) есть (z_1, p_1) и “верхняя граница” зоны V^{++} есть

$$\bar{V}_2^0 = V_{12}^0|[\bar{z}, \infty) = \text{gr } h_{12}|[\bar{z}, \infty). \quad (22.14)$$

Совмещенный случай А1В1С7 предполагает, что $\beta_0 = \rho + \nu - b < 0$ и $\beta_2 = \rho + \kappa(\nu - b) > 0$ (см. табл. 4 и (20.2)), откуда $\kappa < 1$. Поэтому в соответствии с (20.38) функция h_{12} возрастает на $(0, \eta^+]$ и убывает на $[\eta^+, \infty)$ ($\eta^+ > 0$ определено в (20.36)). Значит, на полуинтервале $[\bar{z}, \infty)$ функция h_{12} имеет точку максимума $\bar{\eta} = \max\{\bar{z}, \eta^+\}$ и убывает на $[\bar{\eta}, \infty)$.

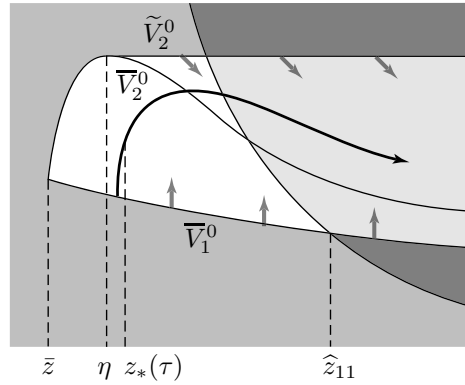


Рис. 14. Иллюстрация к доказательству утверждения 2 леммы 22.1 для смещенного случая A1B1C7. Затененная область в “северо-восточном” углу — внешность зоны \hat{V} трансверсальности. Светлая область — множество \tilde{V}^{++} . Стрелки показывают направления векторного поля. Фазовая траектория решения (z_*, p_*) гамильтоновой системы (жирная кривая), оставаясь в \tilde{V}^{++} , покидает зону \hat{V} трансверсальности

Отметим, что в отличие от других неособых невырожденных смещенных случаев полученные для них сведения о направлениях векторного поля на “нижней границе” \bar{V}_1^0 и на “верхней границе” \bar{V}_2^0 зоны V^{++} (эти сведения, как легко видеть, имеют место и в смещенном случае A1B1C7) сейчас уже не означают, что в каждой точке (z, p) границы этой зоны (за исключением точки покоя) вектор $(\varphi_1(z, p), \varphi_2(z, p))$ векторного поля гамильтоновой системы направлен внутрь V^{++} . Действительно, поскольку на интервале $(\bar{\eta}, \infty)$ функция h_{12} убывает, в любой точке $(z, p) \in \bar{V}_2^0|(\bar{\eta}, \infty) = \text{gr } h_{12}|(\bar{\eta}, \infty)$ направленный горизонтально направо вектор $(\varphi_1(z, p), \varphi_2(z, p))$ векторного поля гамильтоновой системы указывает во внешность расположенной под кривой \bar{V}_2^0 зоны V^{++} . Таким образом, в рассматриваемом случае замыкание $\text{cl } V^{++}$ неинвариантно для гамильтоновой системы и важное для дальнейшего доказательства условие (22.4) не имеет места. Рассуждения, использованные выше для смещенных случаев, отличных от смещенного случая A1B1C7, требуют определенной модификации.

Предлагаемая модификация состоит в “замене” зоны V^{++} на следующее объемлющее эту зону множество \tilde{V}^{++} . Функцию \tilde{h}_{12} , определенную на $[\bar{z}, \infty)$, зададим так:

$$\tilde{h}_{12}(z) = \max_{\eta \in [\bar{z}, z]} h_{12}(\eta) = \begin{cases} h_{12}(z) & \text{при } z \in [\bar{z}, \bar{\eta}], \\ \tilde{p} & \text{при } z > \bar{\eta}, \end{cases} \quad (22.15)$$

где

$$\tilde{p} = h_{12}(\bar{\eta}) = \max_{z \geq \bar{z}} h_{12}(z), \quad (22.16)$$

и положим

$$\tilde{V}_2^0 = \text{gr } \tilde{h}_{12}|[\bar{z}, \infty).$$

За \tilde{V}^{++} примем множество, расположенное выше кривой \bar{V}_1^0 (22.2) и ниже кривой \tilde{V}_2^0 :

$$\tilde{V}^{++} = \text{ext}^+ \bar{V}_1^0 \cap \text{ext}^- \tilde{V}_2^0 = \text{gr}^+ h_{11}|(\bar{z}, \infty) \cap \text{gr}^- \tilde{h}_{12}|(\bar{z}, \infty). \quad (22.17)$$

Схематичная иллюстрация дальнейших рассуждений дана на рис. 14.

Поскольку $\tilde{h}_{12}(z) \geq h_{12}(z)$ при всех $z > \bar{z}$, то кривая \tilde{V}_2^0 расположена выше (не ниже) кривой \bar{V}_2^0 (22.14): $\tilde{V}_2^0 \setminus \bar{V}_2^0 \subset \text{ext}^+ \bar{V}_2^0$. Значит, зона V^{++} , ограниченная кривой \bar{V}_1^0 снизу и кривой \bar{V}_2^0 сверху, содержится в множестве \tilde{V}^{++} , ограниченном кривой \bar{V}_1^0 снизу и кривой \tilde{V}_2^0 сверху. Из утверждения 8 леммы 21.4 и из (22.14) следует, что $\text{ext}^+ \bar{V}_2^0 \subset V^{+-}$. Так как

$\tilde{V}_2^0 \setminus \bar{V}_2^0 \subset \text{ext}^+ \bar{V}_2^0$, то

$$\tilde{V}^{++} \subset V^{++} \cup V^{+-} \cup \bar{V}_2^0 \quad (22.18)$$

и $\tilde{V}_2^0 \setminus \bar{V}_2^0 \subset V^{+-}$. Поэтому в каждой точке (z, p) , лежащей на “верхней границе” \tilde{V}_2^0 множества \tilde{V}^{++} , для вектора $(\varphi_1(z, p), \varphi_2(z, p))$ векторного поля гамильтоновой системы выполняются неравенства $\varphi_1(z, p) > 0$, $\varphi_2(z, p) \leq 0$; данный вектор направлен либо в подграфик кривой \tilde{V}_2^0 , т.е. во внутренность множества \tilde{V}^{++} , либо по касательной к “верхней границе” \tilde{V}_2^0 множества \tilde{V}^{++} . В каждой точке (z, p) “нижней границы” \bar{V}_1^0 множества \tilde{V}^{++} вектор $(\varphi_1(z, p), \varphi_2(z, p))$ таков, что $\varphi_1(z, p) = 0$, $\varphi_2(z, p) > 0$, и, следовательно, направлен во внутренность множества \tilde{V}^{++} . Таким образом, в каждой точке (z, p) границы зоны V^{++} , за исключением точки покоя, вектор $(\varphi_1(z, p), \varphi_2(z, p))$ векторного поля гамильтоновой системы направлен внутрь этой зоны либо по касательной к ее границе. Значит, замыкание $\text{cl } \tilde{V}^{++}$ инвариантно для гамильтоновой системы: из включения $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in \text{cl } \tilde{V}^{++}$ следует, что

$$(z_*(t), p_*(t)) \in \text{cl } \tilde{V}^{++} \quad \text{при всех } t \in \Delta. \quad (22.19)$$

Отсюда и из (22.18)

$$\dot{z}_*(t) = \varphi_1(z_*(t), p_*(t)) \geq 0 \quad \text{при всех } t \in \Delta. \quad (22.20)$$

Если $(z_*(t_*), p_*(t_*))$ лежит на “нижней границе” \bar{V}_1^0 зоны V^{++} , которая является также “нижней границей” множества \tilde{V}^{++} , то $\varphi_1(z_*(t_*), p_*(t_*)) = 0$ и $\varphi_2(z_*(t_*), p_*(t_*)) > 0$ и тогда при малом приращении времени решение (z_*, p_*) сдвигается вверх и попадает в верхнюю внешность кривой \bar{V}_1^0 (22.2): для некоторого $\tau \in \Delta$, большего t_* , выполняется

$$(z_*(\tau), p_*(\tau)) \in \text{ext}^+ \bar{V}_1^0 = \text{gr}^+ h_{11} | [\bar{z}, \infty). \quad (22.21)$$

Если $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in V^{++}$, то (22.21) выполняется для $\tau = t_*$. Таким образом, при любом расположении точки (z_*, p_*) в $\text{cl } V^{++} \setminus \{(\bar{z}, \bar{p})\}$ для некоторого $\tau \in \Delta$ имеем (22.21). Соединяя (22.21) с (22.19) и учитывая вид множества \tilde{V}^{++} (22.17), получаем

$$(z_*(\tau), p_*(\tau)) \in \text{gr}^+ h_{11} | [\bar{z}, \infty) \cap \text{gr}_0^- \tilde{h}_{12} | [\bar{z}, \infty),$$

или, что то же,

$$h_{11}(z_*(\tau)) < p_*(\tau) \leq \tilde{h}_{12}(z_*(\tau)). \quad (22.22)$$

Из определений функции \tilde{h}_{12} (22.15) и точки покоя (\bar{z}, \bar{p}) (см. утверждение 3 леммы 21.4 и (22.14)) имеем $\tilde{h}_{12}(\bar{z}) = h_{12}(\bar{z}) = h_{11}(\bar{z}) = \bar{p}$. Поэтому (22.22) невозможно при $z_*(\tau) = \bar{z}$. Но так как по (22.21) $z_*(\tau) \geq \bar{z}$, то

$$z_*(\tau) > \bar{z}. \quad (22.23)$$

Из (22.19) легко следует, что полуинтервал Δ определения решения (z_*, p_*) бесконечен. Уточним (22.19) с учетом данного обстоятельства, а также с учетом (22.20) и (22.1):

$$(z_*(t), p_*(t)) \in \bar{V}^{++} \quad \text{при всех } t \geq \tau, \quad (22.24)$$

где

$$\bar{V}^{++} = \text{cl } \tilde{V}^{++} \cap ([z_*(\tau), \infty) \times (0, \infty)) \cap \hat{V}. \quad (22.25)$$

Из описания совмещенного случая A1B1C7, данного в табл. 4 (см. вторую колонку), получаем

$$h_{11}(z) \leq \hat{h}(z) \quad \text{при всех } z \leq \hat{z}_{11} \quad \text{и} \quad h_{11}(z) > \hat{h}(z) \quad \text{при всех } z > \hat{z}_{11}. \quad (22.26)$$

Поэтому множество \bar{V}^{++} ограничено и замкнуто. Покажем, что для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\varphi_\varepsilon(z, p) := \varphi_1(z, p) + \varepsilon\varphi_2(z, p) > 0 \quad \text{при всех } (z, p) \in \bar{V}^{++}. \quad (22.27)$$

Действительно, $\varphi_1(z, p) \geq 0$ в \bar{V}^{++} и если $\varphi_1(z, p) = 0$, то $\varphi_2(z, p) > 0$ (см. (22.23) и (22.25)). Поэтому в каждой точке \bar{V}^{++} неравенство (22.27) выполнено для некоторого $\varepsilon > 0$ (зависящего от точки), а значит, в силу непрерывности φ_ε оно выполнено и в некоторой окрестности каждой точки \bar{V}^{++} (с тем же ε). Взяв для каждой точки \bar{V}^{++} соответствующую окрестность, получим открытое покрытие компактного множества \bar{V}^{++} . Из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие \bar{V}^{++} окрестностями U_j , $j = 1, \dots, k$, в каждой из которых неравенство (22.27) выполнено с некоторым $\varepsilon_j > 0$. Но тогда (22.27) выполнено во всем \bar{V}^{++} при $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$.

В силу непрерывности функция φ_ε достигает на компактном множестве \bar{V}^{++} своего минимального значения, которое положительно в силу (22.27), поэтому

$$\dot{z}_*(t) + \varepsilon\dot{p}_*(t) = \varphi_1(z_*(t), p_*(t)) + \varepsilon\varphi_2(z_*(t), p_*(t)) \geq \delta \quad \text{при всех } t \geq \tau, \quad (22.28)$$

где $\delta > 0$. Следовательно, норма вектора $(z_*(t), p_*(t))$ стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Отсюда, поскольку множество \bar{V}^{++} ограничено, заключаем, что

$$(z_*(\xi), p_*(\xi)) \notin \bar{V}^{++} \quad (22.29)$$

при некотором $\xi \geq \tau$. Противоречие с (22.24) завершает доказательство утверждения 2.

3. Пусть $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in \text{cl } V^{--} \setminus \{(\bar{z}, \bar{p})\}$. Предположим, что утверждение 3 неверно, т.е. полуинтервал Δ определения решения (z_*, p_*) бесконечен: $\sup \Delta = \infty$. Согласно леммам 21.2–21.5 V^{--} есть внутренность “юго-западного” криволинейного угла в Γ с вершиной в точке покоя (\bar{z}, \bar{p}) , образованного кривой

$$\bar{V}_1^0 = V_1^0|_{(0, \bar{z}] = \text{gr } h_{11}|_{(0, \bar{z}]} \quad (22.30)$$

(“верхняя граница” V^{--}) и той частью кривой V_2^0 (обозначим здесь эту ее часть через \bar{V}_2^0), которая расположена ниже кривой V_1^0 (“правая граница” V^{--}). В разных неособых совмещенных случаях “правая граница” \bar{V}_2^0 зоны V^{--} имеет разные аналитические описания.

Пусть имеет место любой из неособых невырожденных совмещенных случаев, кроме совмещенного случая А1В1С7 (первая ситуация в нижнем ряду на рис. 10). Рассуждая так же, как при доказательстве утверждения 2, легко показать, что в каждой точке (z, p) границы зоны V^{--} , за исключением точки покоя, вектор $(\varphi_1(z, p), \varphi_2(z, p))$ векторного поля гамильтоновой системы направлен внутрь этой зоны. Значит, замыкание $\text{cl } V^{--}$ инвариантно для гамильтоновой системы. Точнее, тот факт, что $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in \text{cl } V^{--}$, влечет $(z_*(t), p_*(t)) \in \text{cl } V^{--}$ при всех $t \in \Delta$, или, что то же,

$$\dot{z}_*(t) = \varphi_1(z_*(t), p_*(t)) \leq 0, \quad \dot{p}_*(t) = \varphi_2(z_*(t), p_*(t)) \leq 0 \quad \text{при всех } t \in \Delta. \quad (22.31)$$

Далее, рассуждая так же, как при доказательстве утверждения 2, с помощью лемм 21.2, 21.3 и 21.5 (привлекая свойство монотонности функции h_{12}), устанавливаем, что существует $\tau \in \Delta$ такое, что

$$(z_*(\tau), p_*(\tau)) \in V^{--}, \quad (22.32)$$

$$(z_*(t), p_*(t)) \in \text{cl } V^{--} \cap ([0, z_*(\tau)] \times [0, p_*(\tau)]) \quad \text{при всех } t \geq \tau \quad (22.33)$$

и при этом

$$(\bar{z}, \bar{p}) \notin (0, z_*(\tau)] \times (0, p_*(\tau)]. \quad (22.34)$$

Из включения (22.33), замкнутости и ограниченности его правой части и следующей из (22.31) монотонности функций z_* и p_* вытекает, что

$$(z_*(t), p_*(t)) \rightarrow (\bar{z}_*, \bar{p}_*) \in \text{cl } V^{--} \cap ([0, z_*(\tau)] \times [0, p_*(\tau)]) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (22.35)$$

Допустим, что $\bar{z}_* > 0$ и $\bar{p}_* > 0$, или, что то же, $(\bar{z}_*, \bar{p}_*) \in \Gamma$. Тогда (22.35) означает, что (\bar{z}_*, \bar{p}_*) — точка покоя гамильтоновой системы в Γ . Так как единственная точка покоя гамильтоновой системы в Γ есть (\bar{z}, \bar{p}) (см. леммы 21.2–21.5), то $(\bar{z}_*, \bar{p}_*) = (\bar{z}, \bar{p})$. Значит, в силу (22.35) $(\bar{z}, \bar{p}) \in (0, z_*(\tau)] \times (0, p_*(\tau)]$. Последнее противоречит (22.34).

Допустим, что $\bar{z}_* = 0$. Как следует из вида функции φ_2 (см. (19.23)), существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\sup_{p \in [0, p_*(\tau)]} \varphi_2(z, p) < -1$ при всех положительных $z < \varepsilon$. Согласно (22.35) найдется действительное ξ такое, что $z_*(t) < \varepsilon$ для всех $t > \xi$. Тогда (с учетом (22.33)) получаем, что для всех $t > \xi$ выполняется $\dot{p}_*(t) = \varphi_2(z_*(t), p_*(t)) < -1$. Следовательно, существует $\vartheta < \infty$ такое, что $p_*(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \vartheta$, $t < \vartheta$, что противоречит предположению $\sup \Delta = \infty$.

Допустим, наконец, что $\bar{z}_* > 0$ и $\bar{p}_* = 0$. Как следует из определения множества Γ_2 (см. (20.1)), точка (\bar{z}_*, \bar{p}_*) , принадлежащая “нижней” границе этого множества, расположена строго ниже его “верхней” границы — графика функции \bar{h} . Следовательно, замкнутая ε -окрестность E точки (\bar{z}_*, \bar{p}_*) при некотором $\varepsilon > 0$ расположена правее вертикальной оси и ниже этого графика: $\bar{z}_* - \varepsilon > 0$ и $E \subset \text{gr}^- \bar{h}$. Отсюда и из определения функции φ_1 (см. (19.22)) следует, что при всех $(z, p) \in E$ верно $\varphi_1(z, p) = -\nu z \leq -\delta = -\nu(\bar{z}_* - \varepsilon)$. Согласно (22.35) найдется действительное ξ такое, что

$$(z_*(t), p_*(t)) \in E \quad \text{при всех } t \geq \xi. \quad (22.36)$$

Поэтому $\dot{z}_*(t) = \varphi_1(z_*(t), p_*(t)) \leq -\delta$ при всех $t \geq \xi$. Так как множество E ограничено, $(z_*(\vartheta), p_*(\vartheta)) \notin E$ для некоторого $\vartheta \geq \xi$. Последнее вступает в противоречие с (22.36).

Полученные противоречия доказывают неверность предположения о неограниченности полуинтервала Δ . Утверждение 3 доказано в предположении, что имеет место любой из неособых невырожденных совмещенных случаев, кроме совмещенного случая А1В1С7.

Пусть теперь имеет место совмещенный случай А1В1С7 (первая ситуация в нижнем ряду на рис. 10). По утверждениям 7, 3 и 2 леммы 21.4 точка покоя (\bar{z}, \bar{p}) есть (z_1, p_1) и “правая граница” зоны V^{--} есть

$$\bar{V}_2^0 = V_{12}^0|[\bar{z}_{12}, \bar{z}] \cup V_{22}^0|[\bar{z}_{12}, \infty) = \text{gr } h_{12}|[\bar{z}_{12}, \bar{z}] \cup \text{gr } h_{22}|(\bar{z}_{12}, \infty),$$

при этом

$$V^{--} = \text{gr}^- h_{11}|(0, \bar{z}_{12}) \cup [\text{gr}^- h_{11}|[\bar{z}_{12}, \bar{z}] \cap \text{gr}^+ h_{12}|[\bar{z}_{12}, \bar{z}]] \cup \text{gr}^- h_{22}|[\bar{z}_{12}, \infty). \quad (22.37)$$

Совмещенный случай А1В1С7 предполагает, что $\beta_0 = \rho + \nu - b < 0$ и $\beta_2 = \rho + \kappa(\nu - b) > 0$ (см. табл. 4 и (20.2)), откуда $\kappa < 1$. Поэтому в соответствии с (20.38) функция h_{12} возрастает на $(0, \eta^+]$ и убывает на $[\eta^+, \infty)$ ($\eta^+ > 0$ определено в (20.36)). Значит, на полуинтервале $(0, \bar{z}]$ функция h_{12} имеет точку максимума $\bar{\eta} = \min\{\bar{z}, \eta^+\}$, возрастает на $(0, \bar{\eta}]$ и убывает на $[\bar{\eta}, \bar{z}]$. Введем множество $\tilde{V}^{--} \subset \Gamma$, “верхней границей” которого служит кривая

$$\tilde{V}_1^0 = \text{gr } h_{11}|(0, \bar{\eta}] \subset \bar{V}_1^0,$$

а “правой границей” — кривая

$$\tilde{V}_2^0 = \bar{I} \cup \text{gr } h_{12}|[\bar{z}_{12}, \bar{\eta}] \cup \text{gr } h_{22}|(\bar{z}_{12}, \infty) \subset \bar{I} \cup \bar{V}_2^0,$$

где \bar{I} — вертикальный интервал, соединяющий точку $(\bar{\eta}, h_{12}(\bar{\eta}))$ с (расположенной над ней) точкой $(\bar{\eta}, h_{11}(\bar{\eta}))$:

$$\bar{I} = \{(\bar{\eta}, p) : p \in (h_{12}(\bar{\eta}), h_{11}(\bar{\eta}))\} \subset V^{--}.$$

Таким образом,

$$\tilde{V}^{--} = \text{gr}^- h_{11}|(0, \bar{z}_{12}) \cup [\text{gr}^- h_{11}|[\bar{z}_{12}, \bar{\eta}] \cap \text{gr}^+ h_{12}|[\bar{z}_{12}, \bar{\eta}]] \cup \text{gr}^- h_{22}|[\bar{z}_{12}, \infty), \quad (22.38)$$

или в соответствии с (22.37)

$$\tilde{V}^{--} = [V^{--} \cap \{(z, p) \in \Gamma_1 : z \leq \bar{\eta}\}] \cup [V^{--} \cap \Gamma_2] \subset V^{--}. \quad (22.39)$$

Легко видеть, что

$$\bar{I} = \emptyset, \quad \tilde{V}^{--} = V^{--} \quad \text{при} \quad \bar{\eta} = \bar{z}. \quad (22.40)$$

Так как функция h_{12} возрастает на $[\bar{z}_{12}, \bar{\eta}]$, а функция h_{22} убывает на $[\bar{z}_{12}, \infty)$ (см. (20.97)), то в каждой точке части $\tilde{V}_2^0 \setminus \bar{I}$ “правой границы” множества \tilde{V}^{--} вектор векторного поля гамильтоновой системы, направленный влево, указывает внутрь множества \tilde{V}^{--} . В каждой точке дополняющей части “правой границы” множества \tilde{V}^{--} , т.е. вертикального интервала \bar{I} (лежащего в $V^{--} \cap \Gamma_1$), вектор векторного поля направлен налево и вниз и, следовательно, также указывает внутрь множества \tilde{V}^{--} . Наконец, в каждой точке “верхней границы” \tilde{V}_1^0 множества \tilde{V}^{--} вектор векторного поля гамильтоновой системы направлен вертикально вниз — также внутрь этого множества. Таким образом, в каждой точке границы множества \tilde{V}^{--} вектор векторного поля направлен внутрь этого множества. Следовательно, замыкание $\text{cl } \tilde{V}^{--}$ инвариантно для гамильтоновой системы.

Предположим, что существует $t^* \geq t_*$ такое, что

$$(z_*(t^*), p_*(t^*)) \in \text{cl } \tilde{V}^{--}. \quad (22.41)$$

В этом предположении оставшаяся часть доказательства утверждения 3 проводится так же, как для рассмотренных выше совмещенных случаев при замене начального момента времени t_* на момент t^* . Именно, из инвариантности множества $\text{cl } \tilde{V}^{--}$ и включения $(z_*(t^*), p_*(t^*)) \in \text{cl } \tilde{V}^{--}$ получаем, что справедливы аналоги соотношений (22.31), т.е.

$$\dot{z}_*(t) = \varphi_1(z_*(t), p_*(t)) \leq 0, \quad \dot{p}_*(t) = \varphi_2(z_*(t), p_*(t)) \leq 0 \quad \text{при всех} \quad t \geq t^*,$$

и для некоторого $\tau \geq t^*$ аналоги соотношений (22.32) и (22.33):

$$(z_*(\tau), p_*(\tau)) \in \tilde{V}^{--}, \\ (z_*(t), p_*(t)) \in \text{cl } \tilde{V}^{--} \cap ([0, z_*(\tau)] \times [0, p_*(\tau)]) \quad \text{при всех} \quad t \geq \tau.$$

Если в дополнение к этим соотношениям показано, что

$$(\bar{z}, \bar{p}) \notin (0, z_*(\tau)] \times (0, p_*(\tau)] \quad (22.42)$$

(см. (22.34)), то доказательство утверждения 3 завершается точно так же, как для рассмотренных выше совмещенных случаев (мы не повторяем эти рассуждения).

Покажем, что (22.42) действительно имеет место. Так как при $z_*(\tau) < \bar{z}$ (22.42) выполняется с очевидностью, предположим, что $z_*(\tau) \geq \bar{z}$. Как видно из (22.37), множество

$$V^{--} \cap \Gamma_1 = [\text{gr}^- h_{11}|(0, \bar{z}_{12}) \cap \Gamma_1] \cup [\text{gr}^- h_{11}|[\bar{z}_{12}, \bar{z}] \cap \text{gr}^+ h_{12}|[\bar{z}_{12}, \bar{z}] \cap \Gamma_1]$$

расположено внутри вертикальной полосы, опирающейся на интервал $(0, \bar{z})$ горизонтальной оси. Таким образом, из $z_*(\tau) \geq \bar{z}$ и того, что $(z_*(\tau), p_*(\tau)) \in V^{--}$, с необходимостью следует, что $(z_*(\tau), p_*(\tau)) \in V^{--} \cap \Gamma_2$. Тогда, как видно из (22.37), $(z_*(\tau), p_*(\tau)) \in \text{gr}^- h_{22}|[\bar{z}, \infty)$, или $p_*(\tau) \leq h_{22}(z_*(\tau))$. Так как функция h_{22} убывает и $h_{22}(z) < \bar{h}(z)$ при всех $z > \bar{z}_{12}$ (см. (20.98) и (20.100)), имеем $h_{22}(z_*(\tau)) \leq h_{22}(\bar{z}) < \bar{h}(\bar{z})$, откуда $p_*(\tau) < \bar{h}(\bar{z})$. Но $\bar{h}(\bar{z}) < h_{11}(\bar{z}) = \bar{p}$ (см. (20.11)) и, значит, $p_*(\tau) < \bar{p}$. Справедливость условия (22.42) показана. Этим завершается обоснование утверждения 3 в предположении, что при некотором $t^* \geq t_*$ выполняется включение (22.41).

Осталось установить существование указанного выше $t^* \geq t_*$. Если $\bar{\eta} = \bar{z}$, или, что то же, точка максимума η^+ функции h_{12} на $[\bar{z}_{12}, \infty)$ расположена правее точки \bar{z} , то, как видно из (22.40), включение (22.41) выполняется при $t^* = t_*$.

Предположим, что $\bar{\eta} < \bar{z}$, или, что то же, $\bar{\eta} = \eta^+ < \bar{z}$, и при этом $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \notin \text{cl } \tilde{V}^{--}$ (в противном случае заключаем, что (22.41) выполняется для $t^* = t_*$). Привлекая исходное предположение утверждения 3, получаем, что $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in \text{cl } V^{--} \setminus \text{cl } \tilde{V}^{--}$. Из последнего соотношения и представления (22.39) множества \tilde{V}^{--} вытекает, что $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in \Gamma_1$ и $z_*(t_*) > \bar{\eta} = \eta^+$. При этом, в частности, имеем вложение

$$(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in \text{cl } V^{--} \cap \Gamma_1. \quad (22.43)$$

Заметим, что согласно виду (22.37) зоны V^{--} пересечение $V^{--} \cap \Gamma_1$ лежит в вертикальной полосе, опирающейся на интервал $(0, \bar{z})$ горизонтальной оси. Поэтому из (22.43) и того факта, что $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \neq (\bar{z}, \bar{p})$, следует, что $z_*(t_*) < \bar{z}$.

Если $(z_*(t_*), p_*(t_*))$ принадлежит “верхней границе” $\bar{V}_1^0 = \text{gr } h_{11}|(0, \bar{z}]$ зоны V^{--} (см. (22.30)), то в этой точке вектор векторного поля гамильтоновой системы направлен вертикально вниз и поэтому, взяв $\bar{\tau} > t_*$ достаточно близким к t_* , получим, что точка $(z_*(\bar{\tau}), p_*(\bar{\tau}))$ лежит, во-первых, левее точки покоя и, во-вторых, в подграфике функции h_{11} :

$$z_*(\bar{\tau}) < \bar{z}, \quad p_*(\bar{\tau}) < h_{11}(z_*(\bar{\tau})) - \varepsilon \quad (22.44)$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Если $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \notin \bar{V}_1^0$, то (22.44) верно для $\bar{\tau} = t_*$. Итак, при любом допустимом расположении точки $(z_*(t_*), p_*(t_*))$ для некоторых $\bar{\tau} \geq t_*$ и $\varepsilon > 0$ имеем (22.44).

Рассмотрим нестрогий подграфик $\text{gr}_0^-(h_{11} - \varepsilon)|(0, z_*(\bar{\tau})]$. С учетом первого неравенства из (22.44) и вида функции φ_1 (19.22) заключаем, что при выборе ε достаточно малым в каждой точке “верхней границы” $\text{gr}(h_{11} - \varepsilon)|(0, z_*(\bar{\tau})]$ множества $\text{gr}_0^-(h_{11} - \varepsilon)|(0, z_*(\bar{\tau})]$ вектор векторного поля гамильтоновой системы направлен внутрь этого множества (“почти” вертикально вниз). В каждой точке “правой границы” множества $\text{gr}_0^-(h_{11} - \varepsilon)|(0, z_*(\bar{\tau})]$ — вертикального полуотрезка, соединяющего точки $(z_*(\bar{\tau}), 0)$ и $(z_*(\bar{\tau}), h_{11}(z_*(\bar{\tau})) - \varepsilon)$ и располагающегося в объединении зон V^{--} и V^{-+} (см. утверждения 7 и 9 леммы 21.4), первая компонента вектора векторного поля гамильтоновой системы отрицательна, следовательно, этот вектор направлен внутрь множества $\text{gr}_0^-(h_{11} - \varepsilon)|(0, z_*(\bar{\tau})]$. Поэтому (при выборе ε достаточно малым) множество $\text{gr}_0^-(h_{11} - \varepsilon)|(0, z_*(\bar{\tau})]$ инвариантно для гамильтоновой системы. Отсюда и из того, что $(z_*(\bar{\tau}), p_*(\bar{\tau})) \in \text{gr}_0^-(h_{11} - \varepsilon)|(0, z_*(\bar{\tau})]$ (последнее справедливо в силу второго неравенства из (22.44)), вытекает, что

$$(z_*(t), p_*(t)) \in \text{gr}_0^-(h_{11} - \varepsilon)|(0, z_*(\bar{\tau})] \quad \text{при всех } t \geq \bar{\tau}. \quad (22.45)$$

Возьмем какое-либо положительное $\eta_0 < \bar{z}_{12}$. Рассмотрев вид (22.38) множества \tilde{V}^{--} , замечаем, что вертикальный интервал I_0 , соединяющий точки $(\eta_0, 0)$ и $(\eta_0, h_{11}(\eta_0))$, содержится в \tilde{V}^{--} :

$$I_0 = \{(\eta_0, p) : p \in (0, h_{11}(\eta_0))\} \subset \tilde{V}^{--}. \quad (22.46)$$

Обращаясь к определению функции φ_1 (19.22) и принимая во внимание неравенство $z_*(\bar{\tau}) < \bar{z}$ (см. (22.44)), легко получаем следующее: найдется $\delta > 0$ такое, что $\varphi_1(z, p) \leq -\delta$ для всех $(z, p) \in \text{gr}_0^-(h_{11} - \varepsilon)|(0, z_*(\bar{\tau})]$ таких, что $z \geq \eta_0$. Отсюда и из (22.45) следует, что $\dot{z}_*(t) = \varphi_1(z_*(t), p_*(t)) \leq -\delta$ при всех $t \geq \bar{\tau}$ таких, что $z_*(t) \geq \eta_0$. Тогда с необходимостью $t^* = \sup\{t \geq t_* : z_*(t) \geq \eta_0\}$ конечно и $z_*(t^*) = \eta_0$. Так как при этом в силу (22.45) выполняется $p_*(t^*) \leq h_{11}(z_*(t^*)) - \varepsilon = h_{11}(\eta_0) - \varepsilon$, то, учитывая (22.46), заключаем, что точка $(z_*(t^*), p_*(t^*)) = (\eta_0, p_*(t^*))$ принадлежит вертикальному полуинтервалу I_0 и, значит, множеству \tilde{V}^{--} . Существование момента времени $t^* \geq t_*$, для которого выполняется включение (22.41), установлено. Доказательство утверждения 3 закончено.

4. Доказательство утверждения 4 проведем лишь для случая $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in V^{+-} \setminus \{(\bar{z}, \bar{p})\}$ (для случая $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in V^{-+} \setminus \{(\bar{z}, \bar{p})\}$ рассуждения идентичны). Заметим, что поскольку $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \neq (\bar{z}, \bar{p})$, то

$$(z_*(t), p_*(t)) \neq (\bar{z}, \bar{p}) \quad \text{при всех } t \in \Delta. \quad (22.47)$$

Как следует из лемм 21.2–21.5, граница зоны V^{+-} есть объединение частей границ зон V^{++} и V^{--} . Поэтому возможны лишь следующие три случая. Первый случай: при некотором $t^* \in \Delta$ точка $(z_*(t^*), p_*(t^*))$ принадлежит границе зоны V^{++} . Второй случай: при некотором $t^* \in \Delta$ точка $(z_*(t^*), p_*(t^*))$ принадлежит границе зоны V^{--} . Третий случай:

$$(z_*(t), p_*(t)) \in V^{+-} \quad \text{при всех } t \in \Delta. \quad (22.48)$$

В первом случае с учетом (22.47) получаем, что $(z_*(t^*), p_*(t^*)) \in \text{cl } V^{++} \setminus \{(\bar{z}, \bar{p})\}$, т.е. имеют место условия утверждения 2 настоящей леммы, где t_* заменено на t^* ; по этому утверждению $(z_*(\xi), p_*(\xi)) \notin \tilde{V}$ при некотором $\xi \in \Delta$: справедливо свойство (i) из утверждения 4. Во втором случае с учетом (22.47) получаем, что имеют место условия утверждения 3 настоящей леммы, где t_* заменено на t^* ; по этому утверждению полуинтервал Δ ограничен: справедливо свойство (ii) из утверждения 4. Пусть имеет место третий случай, т.е. верно (22.48). Пусть также не выполняется ни одно из свойств (i) и (ii) утверждения 4, т.е. $\Delta = [t_*, \infty)$ и

$$(z_*(t), p_*(t)) \in \hat{V} \quad \text{при всех } t \geq t_*. \quad (22.49)$$

Следует показать, что тогда справедливо свойство (iii) из утверждения 4. Для этого в силу сделанных предположений достаточно установить, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_*(t) = \bar{z}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_*(t) = \bar{p}. \quad (22.50)$$

Из (22.48) следует, что функция z_* возрастает, а функция p_* убывает. Тогда, принимая во внимание (22.48) и (22.49), получаем

$$(z_*(t), p_*(t)) \in \Pi \quad \text{при всех } t \geq t_*, \quad (22.51)$$

где

$$\Pi = V^{+-} \cap [[z_*(t_*), \infty) \times (0, p_*(t_*))] \cap \hat{V}. \quad (22.52)$$

Во всех рассматриваемых совмещенных случаях, кроме совмещенного случая А1В1С7, зона V^{+-} располагается в пересечении множества Γ_1 с вертикальной полосой, опирающейся на интервал $(0, \bar{z})$ горизонтальной оси (см. леммы 21.2, 21.3, 21.5 и рис. 10). Отсюда видно, что во всех рассматриваемых совмещенных случаях, кроме совмещенного случая А1В1С7, замыкание $\text{cl } \Pi$ ограничено и содержится в Γ_1 . Покажем, что это имеет место и в совмещенном случае

A1B1C7. В этом совмещенном случае по утверждению 8 леммы 21.4 (см. также рис. 10) зона V^{+-} располагается над верхней огибающей кривых V_1^0 и V_{12}^0 :

$$V^{+-} = \text{ext}^+ V_1^0 | (0, \bar{z}] \cup \text{ext}^+ V_{12}^0 | [\bar{z}, \infty) \subset \Gamma_1; \tag{22.53}$$

при этом согласно табл. 4 z -проекция пересечения $V_{12}^0 \cap \widehat{V}$ есть отрезок $[\bar{z}_{12}, \widehat{z}_{12}]$. Отсюда и из того, что \widehat{V} есть нестрогий подграфик убывающей функции \widehat{h} (см. (20.106) и (20.105)), следует, что z -проекция пересечения $\text{ext}^+ V_{12}^0 \cap \widehat{V}$ есть тот же отрезок $[\bar{z}_{12}, \widehat{z}_{12}]$. Поэтому, обращаясь к (22.52) и (22.53), заключаем, что замыкание $\text{cl} \Pi$ ограничено и содержится в Γ_1 .

Возвратимся к условию (22.51). Из этого условия, монотонности функций z_* и p_* и ограниченности множества $\text{cl} \Pi \subset \Gamma_1$ вытекает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_*(t) = \bar{z}_*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_*(t) = \bar{p}_*,$$

где $(\bar{z}_*, \bar{p}_*) \in \text{cl} \Pi \subset \Gamma$. Тогда (\bar{z}_*, \bar{p}_*) есть с необходимостью точка покоя гамильтоновой системы в Γ . Но в каждом из рассматриваемых неособых невырожденных совмещенных случаев (\bar{z}, \bar{p}) — единственная точка покоя гамильтоновой системы в Γ . Следовательно, $(\bar{z}_*, \bar{p}_*) = (\bar{z}, \bar{p})$. Значит, имеют место равенства (22.50). Доказательство леммы закончено.

Лемма 22.1 позволяет охарактеризовать трансверсальные решения гамильтоновой системы (19.24), (19.25) как ее равновесные решения, т.е. те, которые сходятся к точке покоя. Дадим точное определение. Пусть имеет место какой-либо из невырожденных совмещенных случаев (все они показаны на рис. 10). Определенное на $[0, \infty)$ решение (z_*, p_*) гамильтоновой системы (19.24), (19.25) в квадранте Γ будем называть *равновесным*, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_*(t) = \bar{z}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_*(t) = \bar{p},$$

где (\bar{z}, \bar{p}) — (единственная) точка покоя данной гамильтоновой системы.

Итак, лемма 22.1 влечет следующее

Следствие 22.1. Пусть имеет место какой-либо из неособых невырожденных совмещенных случаев, (\bar{z}, \bar{p}) — точка покоя гамильтоновой системы (19.24), (19.25) в квадранте Γ и (z_*, p_*) — трансверсальное решение гамильтоновой системы (19.24), (19.25). Тогда решение (z_*, p_*) равновесно и удовлетворяет одному из следующих условий:

- (i) $(z_*(t), p_*(t)) = (\bar{z}, \bar{p})$ при всех $t \geq 0$;
- (ii) $(z_*(t), p_*(t)) \in V^{+-}$ при всех $t \geq 0$;
- (iii) $(z_*(t), p_*(t)) \in V^{-+}$ при всех $t \geq 0$.

Доказательство. Если $(z_*(0), p_*(0)) = (\bar{z}, \bar{p})$, то $(z_*(t), p_*(t)) = (\bar{z}, \bar{p})$ при всех $t \in \Delta$ по утверждению 1 леммы 22.1. Следовательно, (z_*, p_*) равновесно и удовлетворяет условию (i). Пусть $(z_*(0), p_*(0)) \neq (\bar{z}, \bar{p})$. Если $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in \text{cl} V^{++}$, то по утверждению 1 леммы 22.1 $(z_*(\xi), p_*(\xi)) \notin \widehat{V}$ при некотором $\xi \in \Delta$, что противоречит трансверсальности решения (z_*, p_*) . Если $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in \text{cl} V^{--}$, то полуинтервал Δ определения решения (z_*, p_*) ограничен, что также противоречит его трансверсальности. Таким образом, необходимо $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in V^{+-} \cup V^{-+}$. По утверждению 4 леммы 22.1 выполняется одно из следующих трех условий. Первое: $(z_*(\xi), p_*(\xi)) \notin \widehat{V}$ при некотором $\xi \geq 0$. Второе: полуинтервал Δ определения решения (z_*, p_*) ограничен. Третье: $(z_*(t), p_*(t)) \rightarrow (\bar{z}, \bar{p})$ при $t \rightarrow \infty$ и $(z_*(t), p_*(t)) \in V^{+-}$ для всех $t \geq 0$ или $(z_*(t), p_*(t)) \in V^{-+}$ для всех $t \geq 0$. Первое и второе условия противоречат трансверсальности решения (z_*, p_*) . Значит, имеет место третье условие. Оно влечет равновесность решения (z_*, p_*) и справедливость одного из условий (ii), (iii), утверждаемых настоящим следствием. Доказательство закончено.

Условия (i)–(iii) из следствия 22.1 выделяют класс равновесных решений, в который погружены все трансверсальные решения. Оказывается, что равновесных решений, которые выходили бы за пределы этого класса, не существует. Именно справедлива следующая

Лемма 22.2. Пусть имеет место какой-либо из неособых невырожденных совмещенных случаев, (\bar{z}, \bar{p}) — точка покоя гамильтоновой системы (19.24), (19.25) в квадранте Γ и (z_*, p_*) — равновесное решение этой гамильтоновой системы. Справедливы следующие утверждения:

- 1) если $z_*(0) = \bar{z}$, то $(z_*(t), p_*(t)) = (\bar{z}, \bar{p})$ при всех $t \geq 0$;
- 2) если $z_*(0) < \bar{z}$, то $(z_*(t), p_*(t)) \in V^{+-}$ при всех $t \geq 0$;
- 3) если $z_*(0) > \bar{z}$, то $(z_*(t), p_*(t)) \in V^{-+}$ при всех $t \geq 0$.

Доказательство. 1. Пусть $z_*(0) = \bar{z}$. Предположим, что

$$p_*(0) > \bar{p}, \quad (22.54)$$

или, что то же, $(z_*(0), p_*(0)) = (\bar{z}, p_*(0)) \in \text{ext}^+ V_1^0 = \text{gr}^+ h_{11}$. Обращаясь к виду векторного поля гамильтоновой системы (см. леммы 21.2–21.5 и рис. 10), видим, что $(z_*(0), p_*(0))$ находится в зоне V_1^+ возрастания z -координаты. Значит, для некоторого достаточно малого $\tau > 0$ выполняется

$$(z_*(\tau), p_*(\tau)) \in V_1^+ = \text{gr}^+ h_{11}, \quad z_*(\tau) > \bar{z}. \quad (22.55)$$

Заметим, что часть $\text{gr} h_{11} | [z_*(\tau), \infty)$ “нижней границы” множества V_1^+ есть часть “нижней границы” множества V^{++} (см. леммы 21.2–21.5 и рис. 10), поэтому в каждой точке этой части “нижней границы” множества V_1^+ вектор векторного поля гамильтоновой системы направлен вертикально вверх. Следовательно, множество

$$\Pi_1^+ = V_1^+ \cap [[z_*(\tau), \infty) \times (0, \infty)] = \text{gr}^+ h_{11} \cap [[z_*(\tau), \infty) \times (0, \infty)]$$

инвариантно для гамильтоновой системы. Отсюда и из включения $(z_*(\tau), p_*(\tau)) \in \Pi_1^+$ (равносильного (22.55)) имеем $(z_*(t), p_*(t)) \in \Pi_1^+$ при всех $t \geq \tau$. В частности, при всех $t \geq \tau$ выполняется $z_*(t) \geq z_*(\tau) > \bar{z}$. Следовательно, равенство $\lim_{t \rightarrow \infty} z_*(t) = \bar{z}$ не имеет места. Это противоречит равновесности решения (z_*, p_*) . В предположении, что

$$p_*(0) < \bar{p}, \quad (22.56)$$

рассуждение, симметричное предыдущему, также приводит к противоречию с равновесностью решения (z_*, p_*) . Таким образом, неравенства (22.54) и (22.56) исключаются. Следовательно, $p_*(0) = \bar{p}$. Поскольку $(z_*(0), p_*(0))$ есть точка покоя (\bar{z}, \bar{p}) , в силу единственности решения задачи Коши для гамильтоновой системы имеем $(z_*(t), p_*(t)) = (\bar{z}, \bar{p})$ при всех $t \geq 0$. Доказательство утверждения 1) закончено.

2. Пусть $z_*(0) < \bar{z}$. Обращаясь к описанию векторного поля, приведенному в леммах 21.2–21.5 и на рис. 10, заключаем, что если имеет место любой из невырожденных совмещенных случаев, кроме совмещенного случая A1B1C7, то точка $(z_*(0), p_*(0))$ принадлежит одному из множеств $\text{cl} V^{++}$, V^{+-} и $\text{cl} V^{--}$, а если имеет место совмещенный случай A1B1C7, то одному из множеств V^{+-} , $\text{cl} V^{--}$ и V^{-+} .

Пусть $(z_*(0), p_*(0)) \in \text{cl} V^{++}$. Тогда исключен совмещенный случай A1B1C7. В этой ситуации, как следует из вида векторного поля, выполняется неравенство $p_*(0) \geq h_{12}(z_*(0))$; кроме того, функция h_{12} убывает. Отсюда и из неравенства $z_*(0) < \bar{z}$ имеем $p_*(0) > h_{12}(\bar{z}) = \bar{p}$. Как отмечено при доказательстве утверждения 2 леммы 22.1, множество $\text{cl} V^{++}$ инвариантно для

гамильтоновой системы. Поэтому функции z_* и p_* возрастают. Стало быть, $p_*(t) \geq p_*(0) > \bar{p}$ при всех $t \geq 0$. Значит, равенство $\lim_{t \rightarrow \infty} p_*(t) = \bar{p}$ не имеет места. Это противоречит равновесности решения (z_*, p_*) .

Пусть $(z_*(0), p_*(0)) \in \text{cl } V^{--}$. Тогда по лемме 22.1 решение (z_*, p_*) определено на ограниченном полуинтервале и, следовательно, не может быть равновесным.

Пусть, наконец, имеет место совмещенный случай A1B1C7 и $(z_*(0), p_*(0)) \in V^{-+}$. Тогда, очевидно, в некоторый момент $t_* > 0$ текущая точка решения (z_*, p_*) попадает на “левую границу” зоны V^{-+} , точнее на ее часть $V_{12}^0[\bar{z}_{12}, z_*(0)] \cup V_{22}^0[\bar{z}_{12}, z_*(0)]$, являющуюся также частью “правой границы” зоны V^{--} . Так как при этом $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in \text{cl } V^{--}$, то по лемме 22.1 решение (z_*, p_*) не может быть равновесным.

Таким образом, включения $(z_*(0), p_*(0)) \in \text{cl } V^{++}$, $(z_*(0), p_*(0)) \in \text{cl } V^{--}$ и $(z_*(0), p_*(0)) \in V^{-+}$ невозможны. Значит, $(z_*(0), p_*(0)) \in V^{+-}$. Предположение о существовании момента $\tau \geq 0$ такого, что $(z_*(\tau), p_*(\tau)) \in \text{cl } V^{++}$ либо $(z_*(\tau), p_*(\tau)) \in \text{cl } V^{--}$, так же как и выше, приводит к противоречию с равновесностью решения (z_*, p_*) . Исключение этого предположения означает, что $(z_*(t), p_*(t)) \in V^{+-}$ при всех $t \geq 0$. Доказательство утверждения 2) закончено.

3. Доказательство утверждения 3) (оно аналогично предыдущему) опускаем. Лемма доказана.

Отталкиваясь от утверждений 1)–3) леммы 22.2, удобно ввести следующую классификацию равновесных решений. Пусть имеет место какой-либо из неособых невырожденных совмещенных случаев и (\bar{z}, \bar{p}) — точка покоя гамильтоновой системы (19.24), (19.25) в квадранте Γ . Равновесное решение (z_*, p_*) этой гамильтоновой системы будем называть *стационарным*, если $z_*(0) = \bar{z}$, *левым*, если $z_*(0) < \bar{z}$, и *правым*, если $z_*(0) > \bar{z}$. Ясно, что всякое равновесное решение (z_*, p_*) с необходимостью является либо стационарным, либо левым, либо правым; при этом в соответствии с утверждениями 1)–3) леммы 22.2 (z_*, p_*) является стационарным тогда и только тогда, когда $(z_*(t), p_*(t)) = (\bar{z}, \bar{p})$ при всех $t \geq 0$, является левым тогда и только тогда, когда $(z_*(t), p_*(t)) \in V^{+-}$ при всех $t \geq 0$, и является правым тогда и только тогда, когда $(z_*(t), p_*(t)) \in V^{-+}$ при всех $t \geq 0$. Таким образом, для левого равновесного решения (z_*, p_*) координатная функция z_* возрастает и, следовательно, $(z_*(t), p_*(t))$ стремится (при стремлении t к бесконечности) к точке покоя (\bar{z}, \bar{p}) слева; для правого равновесного решения (z_*, p_*) координатная функция z_* убывает и $(z_*(t), p_*(t))$ стремится к (\bar{z}, \bar{p}) справа.

Ясно, что стационарное равновесное решение гамильтоновой системы (19.24), (19.25) существует и единственно. Установим факт существования и единственности левого и правого равновесных решений с заданными начальными значениями z -координаты.

Лемма 22.3. Пусть имеет место какой-либо из неособых невырожденных совмещенных случаев, (\bar{z}, \bar{p}) — точка покоя гамильтоновой системы (19.24), (19.25) в квадранте Γ , $z_{01} \in (0, \bar{z})$ и $z_{02} > \bar{z}$. Тогда существует и единственно такое левое равновесное решение (z_{*1}, p_{*1}) гамильтоновой системы (19.24), (19.25), что $z_{*1}(0) = z_{01}$, и существует и единственно такое правое равновесное решение (z_{*2}, p_{*2}) гамильтоновой системы (19.24), (19.25), что $z_{*2}(0) = z_{02}$.

Доказательство. Рассмотрим задачу (\mathcal{P}) , где в качестве начального состояния z_0 управляемой системы возьмем z_{01} . В силу леммы 19.1 и теоремы 18.1 (см. следствие 18.3) для этой задачи существует оптимальная траектория z_{*1} . По лемме 21.12 существует такая определенная на $[0, \infty)$ скалярная функция p_{*1} , что (z_{*1}, p_{*1}) есть трансверсальное решение гамильтоновой системы (19.24), (19.25); при этом, очевидно, $z_{*1}(0) = z_{01}$. По следствию 22.1 решение (z_{*1}, p_{*1}) равновесно. Так как $z_{01} < \bar{z}$, то (z_{*1}, p_{*1}) — левое равновесное решение. Аналогично устанавливаем факт существования правого равновесного решения (z_{*2}, p_{*2}) гамильтоновой системы (19.24), (19.25), удовлетворяющего начальному условию $z_{*2}(0) = z_{02}$.

Доказательство единственности указанных левого и правого равновесных решений построим на основе теоремы Гробмана–Хартмана (теорема 4.1). Для этого составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\bar{z}, \bar{p})}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_1(\bar{z}, \bar{p})}{\partial p} \\ \frac{\partial \varphi_2(\bar{z}, \bar{p})}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_2(\bar{z}, \bar{p})}{\partial p} \end{pmatrix} \quad (22.57)$$

первых производных правой части гамильтоновой системы (19.24), (19.25) в точке покоя (\bar{z}, \bar{p}) и рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} z(t) - \bar{z} \\ p(t) - \bar{p} \end{pmatrix}. \quad (22.58)$$

Покажем, что собственные значения матрицы A действительны и имеют разные знаки.

Пусть имеет место любой из невырожденных неособых совмещенных случаев, кроме совмещенных случаев A1B1C7 и A9B1C10 (см. нижний ряд на рис. 10). Тогда согласно табл. 4 $\beta_0, \beta_2 > 0$ и $(\bar{z}, \bar{p}) = (z_1, p_1)$. Обратимся к виду функций φ_1 и φ_2 (19.22), (19.23). Заметим, что

$$\varphi_2(z, p) = \beta_0 p - \beta_0 h_{12}(z) \quad (22.59)$$

(см. (20.2) и (20.7)). Получаем

$$A = \begin{pmatrix} b - \nu & \frac{1}{p_1^2} \\ -\beta_0 \frac{d}{dz} h_{12}(z_1) & \beta_0 \end{pmatrix}. \quad (22.60)$$

Имеем

$$\det A = (b - \nu)\beta_0 + \frac{\beta_0}{p_1^2} \frac{d}{dz} h_{12}(z_1). \quad (22.61)$$

Для того чтобы собственные значения матрицы A были действительными и имели разные знаки, достаточно выполнения неравенства $\det A < 0$. Покажем, что это неравенство верно. Как замечено выше, $\beta_0, \beta_2 > 0$. Поэтому, как следует из (20.84), (20.85) (см. также верхние два ряда рис. 10), $h_{12}(z) > h_{11}(z)$ при $z < z_1$ и $h_{12}(z) < h_{11}(z)$ при $z > z_1$. Отсюда получаем

$$\frac{d}{dz} h_{12}(z_1) \leq \frac{d}{dz} h_{11}(z_1). \quad (22.62)$$

Предположим, что

$$\frac{d}{dz} h_{12}(z_1) = \frac{d}{dz} h_{11}(z_1). \quad (22.63)$$

Тогда поскольку в точке z_1 функция $h_{12} - h_{11}$ меняет знак, то

$$\frac{d^2}{dz^2} [h_{12}(z_1) - h_{11}(z_1)] = 0.$$

Из последних двух равенств, записав

$$h_{12}(z) = \frac{q_{12}(z)}{s_{12}(z)}, \quad h_{11}(z) = \frac{q_{11}(z)}{s_{11}(z)}, \quad (22.64)$$

где

$$q_{12}(z) = \gamma\kappa + (\kappa - 1)z, \quad s_{12}(z) = \beta_0(z + \gamma)z, \quad q_{11}(z) = 1, \quad s_{11}(z) = b\gamma - (\nu - b)z$$

(см. (20.4), (20.7)), и положив

$$\zeta(z) = s_{11}(z)q_{12}(z) - s_{12}(z)q_{11}(z),$$

легко получаем (учитывая также, что $h_{11}(z_1) = h_{12}(z_1)$)

$$\zeta(z_1) = 0, \quad \frac{d}{dz}\zeta(z_1) = 0, \quad \frac{d^2}{dz^2}\zeta(z_1) = 0.$$

Но, как показано ранее, $z \mapsto \zeta(z)$ есть квадратичная функция, задаваемая левой частью уравнения (20.57). Следовательно, эта функция тождественно равна нулю. Однако это невозможно, так как ее свободный член $\gamma^2\kappa b$ не равен нулю ($\gamma, \kappa, b > 0$). Значит, предположение (22.63) неверно. Следовательно, неравенство (22.62) строгое:

$$\frac{d}{dz}h_{12}(z_1) < \frac{d}{dz}h_{11}(z_1). \quad (22.65)$$

Обращаясь к виду функции h_{11} , находим

$$\frac{d}{dz}h_{11}(z_1) = -\frac{b - \nu}{[b\gamma - (\nu - b)z_1]^2} = -(b - \nu)h_{11}^2(z_1) = -(b - \nu)p_1^2; \quad (22.66)$$

последнее равенство следует из того, что точка покоя (z_1, p_1) лежит на кривой $V_1^0 = V_{11}^0 = \text{gr } h_{11}$ переключения знака z -координаты (см. (21.27)). Объединяя с (22.65) и принимая во внимание, что $\beta_0 > 0$, получаем

$$\frac{\beta_0}{p_1^2} \frac{d}{dz}h_{12}(z_1) < -\beta_0(b - \nu). \quad (22.67)$$

Отсюда и из (22.61) следует желаемое неравенство $\det A < 0$. Итак, в предположении, что имеет место любой из невырожденных неособых совмещенных случаев, кроме совмещенных случаев A1B1C7 и A9B1C10, показано, что собственные значения матрицы A действительны и имеют разные знаки.

Пусть имеет место совмещенный случай A1B1C7 (см. первую ситуацию в нижнем ряду на рис. 10). Согласно табл. 4 $\beta_0 < 0$, $\beta_2 > 0$ и $(\bar{z}, \bar{p}) = (z_1, p_1)$. Для того чтобы собственные значения матрицы A были действительными и имели разные знаки, достаточно выполнения неравенства $\det A < 0$. Покажем, выполнение этого неравенства. Так как $\beta_0 < 0$ и $\beta_2 > 0$, то (см. (20.86) и (20.87), а также рис. 10) $h_{12}(z) < h_{11}(z)$ при $z < z_1$ и $h_{12}(z) > h_{11}(z)$ при $z > z_1$. Рассуждая так же, как при обосновании неравенства (22.65), получаем

$$\frac{d}{dz}h_{12}(z_1) > \frac{d}{dz}h_{11}(z_1). \quad (22.68)$$

Обращаясь к виду функции h_{11} , так же как и выше, получаем представление (22.66) для производной $\frac{d}{dz}h_{11}(z_1)$. Объединяя (22.66) с (22.68) и принимая во внимание, что $\beta_0 < 0$, как и раньше, получаем неравенство (22.67). Отсюда и из (22.61) следует неравенство $\det A < 0$. Таким образом, в предположении, что имеет место совмещенный случай A1B1C7, мы показали, что собственные значения матрицы A действительны и имеют разные знаки.

Пусть, наконец, имеет место совмещенный случай A9B1C10 (см. вторую ситуацию в нижнем ряду на рис. 10). Согласно табл. 4 $\beta_0 = 0$, $\kappa < 1$ и $(\bar{z}, \bar{p}) = (\bar{z}_{12}, \bar{p}_{12})$, при этом в соответствии с (20.30)

$$\bar{z}_{12} = \frac{\gamma\kappa}{1 - \kappa}.$$

В соответствии с видом функции φ_2 (19.23) условие $\beta_0 = 0$ означает, что

$$\varphi_2(z, p) = -\frac{\gamma\kappa - (1 - \kappa)z}{(z + \gamma)z}.$$

Элементарные вычисления дают

$$c = \frac{\partial\varphi_2(\bar{z}, \bar{p})}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_2(\bar{z}_{12}, \bar{p}_{12})}{\partial z} = \frac{(1 - \kappa)^3}{\gamma^2\kappa} > 0.$$

Заметим также, что $\frac{\partial\varphi_2(\bar{z}, \bar{p})}{\partial p} = 0$. Отсюда получаем следующее представление для матрицы A (см. (22.57)):

$$A = \begin{pmatrix} b - \nu & \frac{1}{\bar{p}_{12}^2} \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $c > 0$, то $\det A = -c/\bar{p}_{12}^2 < 0$, т.е. собственные значения матрицы A действительны и имеют разные знаки.

Итак, независимо от того, какой из невырожденных неособых совмещенных случаев имеет место, собственные значения матрицы A действительны и имеют разные знаки. Пусть $\tilde{\lambda}$ — отрицательное собственное значение матрицы A и $(\tilde{z}, \tilde{p})'$ (здесь штрих — знак транспонирования вектора-строки) — отвечающий этому собственному значению ненулевой собственный вектор матрицы A . Всякое решение (z, p) линейного дифференциального уравнения (22.58), определенное на бесконечном полуинтервале и стремящееся к точке покоя, т.е. такое, что $(z(t), p(t)) \rightarrow (\bar{z}, \bar{p})$ при $t \rightarrow \infty$, имеет вид

$$z(t) = \bar{z} + c_0 e^{\tilde{\lambda}t} \tilde{z}, \quad p(t) = \bar{p} + c_0 e^{\tilde{\lambda}t} \tilde{p}; \quad (22.69)$$

здесь c_0 — произвольное действительное число и t меняется в области определения решения (z, p) .

По теореме Гробмана–Хартмана (теорема 4.1) существуют окрестности V и W точки покоя (\bar{z}, \bar{p}) и гомеоморфизм $h: V \mapsto W$ такие, что для всякого решения (z^*, p^*) гамильтоновой системы (19.30), (19.31), принимающего значения в V , функция $t \mapsto (z(t), p(t)) = h(z^*(t), p^*(t))$ является решением линейного дифференциального уравнения (22.58), принимающим значения в W .

Возвратимся к построенным в начале доказательства левому равновесному решению (z_{*1}, p_{*1}) и правому равновесному решению (z_{*2}, p_{*2}) гамильтоновой системы (19.30), (19.31). Они принимают значения в непересекающихся множествах V^{+-} и V^{-+} соответственно (см. лемму 22.2), и поэтому их фазовые траектории не пересекаются.

Теперь предположим, что утверждение единственности нарушается в отношении, например, левого равновесного решения (z_{*1}, p_{*1}) гамильтоновой системы: существует отличное от (z_{*1}, p_{*1}) левое равновесное решение (z_1^*, p_1^*) гамильтоновой системы такое, что $z_1^*(0) = z_{*1}$. Вследствие единственности решения задачи Коши для гамильтоновой системы с необходимостью имеем $p_1^*(0) \neq p_{*1}(0)$. Покажем, что фазовые траектории решений (z_{*1}, p_{*1}) и (z_1^*, p_1^*) не пересекаются, т.е. ни одна из них не содержится в другой. Действительно, так как левые равновесные решения (z_{*1}, p_{*1}) и (z_1^*, p_1^*) гамильтоновой системы (19.30), (19.31) принимают значения в V^{+-} , то функции z_{*1} и z_1^* строго возрастают, при этом они совпадают в начальный момент времени. Значит, ни одна из траекторий не содержит начальную точку другой, т.е. эти траектории не пересекаются.

Фазовая траектория левого равновесного решения (z_1^*, p_1^*) , очевидно, не пересекается с фазовой траекторией правого равновесного решения (z_{*2}, p_{*2}) . Далее вместо равновесных решений (z_{*1}, p_{*1}) , (z_1^*, p_1^*) и (z_{*2}, p_{*2}) гамильтоновой системы будем без переобозначения рассматривать их сужения на некоторый примыкающий к бесконечности полуинтервал, на котором

все эти решения принимают значения в окрестности V точки покоя. Как отмечено выше, фазовые траектории данных решений попарно не пересекаются. Следовательно, решения $(\tilde{z}_{*1}, \tilde{p}_{*1})$, $(\tilde{z}_1^*, \tilde{p}_1^*)$ и $(\tilde{z}_{*2}, \tilde{p}_{*2})$ линейной системы (22.58), определяемые как поточечные образы в силу гомеоморфизма h соответственно решений (z_{*1}, p_{*1}) , (z_1^*, p_1^*) и (z_{*2}, p_{*2}) , таковы, что их фазовые траектории также попарно не пересекаются. Поскольку решения (z_{*1}, p_{*1}) , (z_1^*, p_1^*) и (z_{*2}, p_{*2}) равновесные, то каждое из решений $(\tilde{z}_{*1}, \tilde{p}_{*1})$, $(\tilde{z}_1^*, \tilde{p}_1^*)$ и $(\tilde{z}_{*2}, \tilde{p}_{*2})$ сходится к точке покоя (\bar{z}, \bar{p}) линейной системы (22.58). Значит, каждое из последних трех решений имеет вид (22.69). Это противоречит тому, что фазовые траектории этих решений попарно не пересекаются. Полученное противоречие доказывает единственность левого равновесного решения (z_{*1}, p_{*1}) гамильтоновой системы, удовлетворяющего условию $z_{*1} = z_{01}$.

Аналогично устанавливается единственность правого равновесного решения (z_{*2}, p_{*2}) гамильтоновой системы, удовлетворяющего условию $z_{*2} = z_{02}$. Доказательство леммы закончено.

Итак, в соответствии с леммой 22.3 для каждого $z_{*0} > 0$ существует единственное равновесное решение (z_*, p_*) гамильтоновой системы (19.24), (19.25) в Γ такое, что $z_*(0) = z_{*0}$; про данное равновесное решение будем говорить, что оно *определяется* точкой z_{*0} . Ясно, что если z_{*0} совпадает с z -координатой \bar{z} (единственной) точки покоя гамильтоновой системы (19.24), (19.25), то равновесное решение (z_*, p_*) , определяемое начальной проекцией z_{*0} , является стационарным, если $z_{*0} < \bar{z}$, то оно является левым, и если $z_{*0} > \bar{z}$, то правым.

Установленные свойства трансверсальных и равновесных решений гамильтоновой системы существенно дополняют полученное ранее необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина (следствие 19.1 и лемма 21.12) и приводят к следующей окончательной характеристике решения рассматриваемой нами задачи оптимального управления (\mathcal{P}) в невырожденных неособых совмещенных случаях.

Теорема 22.1. Пусть имеет место какой-либо из неособых невырожденных совмещенных случаев (все они перечислены в табл. 5, показаны на рис. 10 и описаны аналитически в табл. 4). Тогда

- (i) для задачи (\mathcal{P}) существуют единственная оптимальная траектория z_* и единственное с точностью до значений, принимаемых на множестве нулевой меры Лебега, оптимальное управление u_* ;
- (ii) оптимальная траектория z_* есть компонента равновесного решения (z_*, p_*) гамильтоновой системы (19.24), (19.25), определяемого начальным состоянием z_0 управляемой системы задачи (\mathcal{P}) ;
- (iii) оптимальное управление u_* имеет вид

$$u_*(t) = \begin{cases} b - \frac{1}{p_*(t)(z_*(t) + \gamma)}, & \text{если } (z_*(t), p_*(t)) \in \Gamma_1, \\ 0, & \text{если } (z_*(t), p_*(t)) \in \Gamma_2, \end{cases} \quad \text{при почти всех } t \geq 0. \quad (22.70)$$

Доказательство. В силу леммы 19.1 и теоремы 18.1 (см. следствие 18.3) для задачи (\mathcal{P}) существует оптимальная допустимая пара (z_*, u_*) . По лемме 21.12 существует такая определенная на $[0, \infty)$ скалярная функция p_* , что (z_*, p_*) есть трансверсальное решение гамильтоновой системы (19.24), (19.25). По следствию 22.1 решение (z_*, p_*) равновесно. Так как $z_*(0) = z_0$, то равновесное решение (z_*, p_*) определяется точкой z_0 . Равновесное решение гамильтоновой системы, определяемое точкой z_0 , единственно (см. текст, следующий за доказательством леммы 22.3). Следовательно, оптимальной траектории, отличной от z_* , не существует. Наконец, по следствию 19.1 оптимальное управление u_* с необходимостью имеет вид (22.70). Теорема доказана.

23. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ВЫРОЖДЕННЫХ СОВМЕЩЕННЫХ СЛУЧАЯХ

Обратимся к вырожденным совмещенным случаям (см. табл. 5). Графически они представлены на рис. 12 и аналитически охарактеризованы в табл. 4. В леммах 21.9–21.11 для вырожденных совмещенных случаев описано устройство векторного поля гамильтоновой системы.

Поясним схему анализа неформально, прибегая к рис. 12 и 15. Напомним, что, имея в виду необходимое условие оптимальности, данное в лемме 21.12, мы стремимся к характеристике трансверсальных решений гамильтоновой системы, т.е. тех ее решений, которые определены на $[0, \infty)$ и принимают значения в зоне \hat{V} трансверсальности. Рассмотрим какую-либо из ситуаций, изображенных на рис. 12, например первую ситуацию, отвечающую вырожденным совмещенным случаям A2B2C5 и A7B2C5 (для других ситуаций рассуждения аналогичны). Понятно, что трансверсальным может быть решение, которое течет направо и вниз в сужающемся коридоре, заключенном между кривой переключения знака z -координаты (на рис. 15 тонкая кривая в незатененной области) и внешностью зоны трансверсальности на “северо-востоке” квадранта Γ (на рис. 15 затененная область). Ниже будем называть такое решение трансверсальным растущим решением. Растущее решение уходит в “правую бесконечность”, прижимаясь к горизонтальной оси. Решения, текущие выше трансверсального растущего решения и также уходящие в “правую бесконечность”, пересекают верхнюю границу допустимого коридора, покидая зону трансверсальности. Решения, текущие сначала направо и вниз ниже трансверсального растущего решения, рано или поздно пересекают нижнюю границу допустимого коридора, попадая в зону убывания обеих координат и более не выходя из нее. Такие решения за конечное время достигают “юго-западной” границы квадранта Γ и, таким образом, не являются трансверсальными. Наконец, решения, начинающиеся ниже нижней границы допустимого коридора — кривой переключения знака z -координаты, также за конечное время покидают квадрант Γ . Получается, что трансверсальным может быть только растущее решение. Естественно ожидать, что задание z -координаты начального состояния гамильтоновой системы определяет соответствующее трансверсальное растущее решение однозначно. Тем самым выделяется единственное трансверсальное решение гамильтоновой системы. Такова в общих чертах логика выделения трансверсальных решений гамильтоновой системы в вырожденных совмещенных случаях. Ниже мы реализуем эту логику на уровне строгих формулировок.

Обозначенное выше качественное поведение решений гамильтоновой системы характеризует следующая лемма.

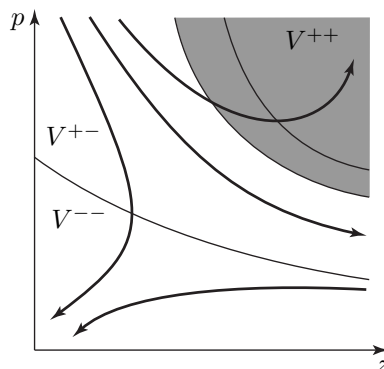


Рис. 15. Фазовые траектории решений гамильтоновой системы в вырожденных совмещенных случаях (см. рис. 12). Трансверсальное решение, оставаясь в коридоре между дополнением к зоне трансверсальности (затененная область) и кривой переключения знака z -координаты (тонкая кривая в незатененной области), уходит к бесконечности. Все остальные решения нетрансверсальны

Лемма 23.1. Пусть имеет место какой-либо из вырожденных совмещенных случаев (все они перечислены в табл. 5 и показаны на рис. 12). Пусть далее (z_*, p_*) — непродолжимое направо решение гамильтоновой системы (19.24), (19.25) в квадранте Γ и Δ — полуинтервал его определения с начальной точкой $t_* \in (-\infty, \infty)$. Справедливы следующие утверждения.

1. Если $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in \text{cl} V^{--} \cup \text{cl} V^{-+}$ (отметим, что в совмещенных случаях A2B2C5, A7B2C5, A2B2C8 и A8B2C9 множество $\text{cl} V^{-+}$ пусто (см. рис. 12)), то полуинтервал Δ ограничен.

2. Если $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in V^{+-} \cup \text{cl} V^{++}$ (отметим, что в совмещенных случаях A2B2C6, A3B2C6, A7B2C6, A2B2C8 и A8B2C9 множество $\text{cl} V^{++}$ пусто (см. рис. 12)), то верно одно из следующих условий:

- (i) полуинтервал Δ ограничен;
- (ii) $(z_*(\xi), p_*(\xi)) \notin \widehat{V}$ при некотором $\xi \in \Delta$;
- (iii) $\Delta = [t_*, \infty)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} z_*(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_*(t) = 0$ и $(z_*(t), p_*(t)) \in V^{+-} \cap \widehat{V}$ при всех $t \geq t_*$.

Доказательство апеллирует к описаниям векторного поля гамильтоновой системы для вырожденных совмещенных случаев (см. леммы 21.9–21.11). Обоснование утверждения 1 опускаем: оно аналогично доказательству утверждения 3 леммы 22.1, описывающей поведение решений гамильтоновой системы для неособых невырожденных совмещенных случаев. К утверждению 2 приходим элементарным логическим рассуждением: если не выполняется ни одно из условий (i) и (ii), то, как сразу следует из структуры векторного поля (леммы 21.9–21.11 и рис. 12), необходимо имеет место условие (iii). На этом доказательство леммы закончим.

Лемма 23.1 позволяет охарактеризовать трансверсальные решения гамильтоновой системы (19.24), (19.25) как ее растущие решения, т.е. те, которые не покидают пересечения зоны V^{+-} с зоной \widehat{V} трансверсальности и стремятся в “правую бесконечность”, одновременно приближаясь к горизонтальной оси. Дадим точное определение. Пусть имеет место какой-либо из вырожденных совмещенных случаев. Определенное на $[0, \infty)$ решение (z_*, p_*) гамильтоновой системы (19.24), (19.25) в квадранте Γ будем называть *растущим*, если $\lim_{t \rightarrow \infty} z_*(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_*(t) = 0$ и $(z_*(t), p_*(t)) \in V^{+-}$ при всех $t \geq 0$.

Лемма 23.1 с очевидностью влечет

Следствие 23.1. Пусть имеет место какой-либо из вырожденных совмещенных случаев. Если определенное на $[0, \infty)$ решение гамильтоновой системы (19.24), (19.25) трансверсально, то оно является растущим.

Установим факт существования и единственности трансверсального растущего решения гамильтоновой системы с заданным начальным значением z -координаты.

Лемма 23.2. Пусть имеет место какой-либо из вырожденных совмещенных случаев. Тогда для любого $z_{01} > 0$ существует и единственно трансверсальное растущее решение (z_{*1}, p_{*1}) гамильтоновой системы (19.24), (19.25) такое, что $z_{*1}(0) = z_{01}$.

Доказательство. Рассмотрим задачу (\mathcal{P}) , где в качестве начального состояния z_0 управляемой системы возьмем z_{01} . В силу леммы 19.1 и теоремы 18.1 (см. следствие 18.3) для этой задачи существует оптимальная траектория z_{*1} . По лемме 21.12 существует такая определенная на $[0, \infty)$ скалярная функция p_{*1} , что (z_{*1}, p_{*1}) есть трансверсальное решение гамильтоновой системы (19.24), (19.25); при этом, очевидно, $z_{*1}(0) = z_{01}$. По следствию 23.1 решение (z_{*1}, p_{*1}) является растущим.

Докажем единственность этого трансверсального растущего решения. Заметим, что в отличие от ситуации, рассмотренной ранее в аналогичной лемме 22.3 (неособые невырожденные совмещенные случаи), отсутствие точек покоя не позволяет воспользоваться теоремой Гробмана–Хартмана (теорема 4.1). Здесь мы применим другой способ доказательства.

Предположим, что существует отличное от (z_{*1}, p_{*1}) трансверсальное растущее решение (z_{*2}, p_{*2}) такое, что $z_{*2}(0) = z_{01}$. В силу единственности решения задачи Коши для гамильтоновой системы $p_{*2}(0) \neq p_{*1}(0)$. Не нарушая общности, считаем, что

$$p_{*2}(0) > p_{*1}(0). \quad (23.1)$$

Запишем более подробно тот факт, что решения (z_{*1}, p_{*1}) и (z_{*2}, p_{*2}) (как трансверсальные растущие) принимают значения в пересечении $V^{+-} \cap \widehat{V}$. Как следует из описания V^{+-} (леммы 21.9–21.11) и вида \widehat{V} (20.106), $V^{+-} \cap \widehat{V} = \text{gr}^+ h_{11} \cap \text{gr}_0^- \widehat{h}$. Таким образом, с учетом вида функций h_{11} (20.4) и \widehat{h} (20.105) имеем

$$\frac{1}{b\gamma - (\nu - b)z_{*i}(t)} < p_{*i}(t) \leq \frac{\kappa}{\rho z_{*i}(t)} \quad \text{при всех } t \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (23.2)$$

Наконец, зафиксируем предельные свойства растущих решений (z_{*1}, p_{*1}) и (z_{*2}, p_{*2}) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_{*i}(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_{*i}(t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (23.3)$$

Так как (z_{*1}, p_{*1}) и (z_{*2}, p_{*2}) принимают значения в V^{+-} , функции z_{*1} и z_{*2} строго возрастают. На полуинтервале $[z_{01}, \infty)$ определим функции p_1^* и p_2^* , полагая

$$p_i^*(\eta) = p_{*i}(z_{*i}^{-1}(\eta)) \quad \text{при всех } \eta \geq z_{01}, \quad i = 1, 2.$$

Поскольку (z_{*1}, p_{*1}) и (z_{*2}, p_{*2}) принимают значения в V^{+-} , то

$$(z, p_1^*(z)), (z, p_2^*(z)) \in V^{+-} \quad \text{при всех } z \in [z_{01}, \infty). \quad (23.4)$$

Так как (z_{*1}, p_{*1}) и (z_{*2}, p_{*2}) — решения гамильтоновой системы (19.24), (19.25), правые части которой задаются функциями φ_1 и φ_2 (см. (19.22), (19.23)), то p_1^* и p_2^* суть решения на $[z_{01}, \infty)$ дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dz} p(z) = w(z, p(z)), \quad (23.5)$$

где

$$w(z, p) = \frac{\varphi_2(z, p)}{\varphi_1(z, p)} \quad \text{при всех } (z, p) \in V^{+-}.$$

Так как $p_i^*(z_{01}) = p_{*i}(0)$, $i = 1, 2$, то в силу (23.1) $p_2^*(z_{01}) > p_1^*(z_{01})$. Тогда вследствие очевидной единственности решения задачи Коши для уравнения (23.5) в V^{+-}

$$p_2^*(z) > p_1^*(z) \quad \text{при всех } z \in [z_{01}, \infty). \quad (23.6)$$

В силу (23.2)

$$\frac{1}{b\gamma - (\nu - b)z} < p_i^*(z) \leq \frac{\kappa}{\rho z} \quad \text{при всех } z \in [z_{01}, \infty), \quad i = 1, 2, \quad (23.7)$$

откуда

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [p_2^*(z) - p_1^*(z)] = 0. \quad (23.8)$$

Привлекая определения функций φ_1 (см. (19.22)) и φ_2 (см. (19.23)), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(z, p)}{\partial p} &= \frac{1}{\varphi_1^2(z, p)} \left(\frac{\partial \varphi_2(z, p)}{\partial p} \varphi_1(z, p) - \frac{\partial \varphi_1(z, p)}{\partial p} \varphi_2(z, p) \right) = \\ &= \frac{1}{\varphi_1^2(z, p)} \left(\beta_0 \varphi_1(z, p) - \frac{1}{p^2} \varphi_2(z, p) \right). \end{aligned} \quad (23.9)$$

Предположим, что имеет место любой из вырожденных совмещенных случаев, при которых $\beta_0 \geq 0$; согласно табл. 4 (см. также рис. 12) к таким вырожденным совмещенным случаям относятся совмещенные случаи А2В2С5, А7В2С5 и А8В2С9. Заметим, что по определению зоны V^{+-} имеем $\varphi_1(z, p) > 0$, $\varphi_2(z, p) < 0$ при всех $(z, p) \in V^{+-}$. Поэтому $\frac{\partial w(z, p)}{\partial p} > 0$ при всех $(z, p) \in V^{+-}$ и, значит, решения p_1^* и p_2^* дифференциального уравнения (23.5), удовлетворяющие условию (23.4) и связанные соотношением (23.6), с необходимостью таковы, что $p_2^*(z) - p_1^*(z) \geq \delta = p_2^*(z_{01}) - p_1^*(z_{01}) > 0$ при всех $z \in [z_{01}, \infty)$. Последнее невозможно в силу (23.8). Противоречие показывает единственность решения (z_{*1}, p_{*1}) и завершает доказательство леммы для вырожденных совмещенных случаев А2В2С5, А7В2С5 и А8В2С9, предполагающих неравенство $\beta_0 \geq 0$.

Теперь предположим, что имеет место любой из оставшихся вырожденных совмещенных случаев А2В2С6, А2В2С8, А3В2С6 либо А7В2С6. Каждый из этих совмещенных случаев предполагает, что $\beta_0 < 0$; заметим, что последнее влечет неравенство $b > \nu$ (см. вид β_0 (20.2)). Применим рассуждение, аналогичное предыдущему при замене переменных. Вместо фазовой переменной z введем фазовую переменную $q = pz$. В переменных (q, p) гамильтонова система (19.24), (19.25) принимает следующий вид (мы опускаем соответствующие элементарные вычисления):

$$\dot{q}(t) = \tilde{\varphi}_1(q(t), p(t)), \tag{23.10}$$

$$\dot{p}(t) = \tilde{\varphi}_2(q(t), p(t)), \tag{23.11}$$

где

$$\tilde{\varphi}_1(q, p) = \begin{cases} \rho q - \frac{\gamma \kappa p - (1 - \kappa)q}{q + \gamma p} + \gamma b p - 1, & \text{если } (q, p) \in \tilde{\Gamma}_1, \\ \rho q - \kappa, & \text{если } (q, p) \in \tilde{\Gamma}_2, \end{cases} \tag{23.12}$$

$$\tilde{\varphi}_2(q, p) = \begin{cases} \beta_0 p - \frac{\gamma \kappa p^2}{(q + \gamma p)q} + \frac{(1 - \kappa)p}{q + \gamma p}, & \text{если } (q, p) \in \tilde{\Gamma}_1, \\ \left(\nu + \rho - \frac{\kappa}{q} \right) p, & \text{если } (q, p) \in \tilde{\Gamma}_2, \end{cases} \tag{23.13}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_1 &= \{(q, p) \in \tilde{\Gamma} : q \geq (1 - \gamma b p)/b\}, & \tilde{\Gamma}_2 &= \{(q, p) \in \tilde{\Gamma} : q < (1 - \gamma b p)/b\}, \\ \tilde{\Gamma} &= \{(q, p) : q > 0, p > -\varepsilon_0\}. \end{aligned}$$

Таким образом, несмотря на то что произведенная замена переменных переводит квадрант Γ в себя, мы считаем, что правые части преобразованной системы (23.10), (23.11) определены на слегка большей, чем Γ , области $\tilde{\Gamma}$. Замена переменных преобразует растущие решения (z_{*1}, p_{*1}) и (z_{*2}, p_{*2}) гамильтоновой системы (19.24), (19.25) в решения (q_{*1}, p_{*1}) и (q_{*2}, p_{*2}) системы (23.10), (23.11), которые, так же как (z_{*1}, p_{*1}) и (z_{*2}, p_{*2}) , определены на $[0, \infty)$. Неравенства (23.2) трансформируются в

$$\frac{1 - \gamma b p_{*i}(t)}{b - \nu} < q_{*i}(t) \leq \frac{\kappa}{\rho} \quad \text{при всех } t \geq 0, \quad i = 1, 2. \tag{23.14}$$

Поскольку (z_{*1}, p_{*1}) и (z_{*2}, p_{*2}) принимают значения в V^{+-} , функции p_{*1} и p_{*2} строго убывают. Отсюда и из (23.1) получаем, что p_{*1} и p_{*2} принимают значения в полуинтервалах $(0, p_{*1}(0)]$ и $(0, p_{*2}(0)]$ соответственно. Принимая во внимание (23.14), заключаем, что решения (q_{*1}, p_{*1}) и (q_{*2}, p_{*2}) системы (23.10), (23.11) принимают значения в некотором компакте, содержащемся в $\tilde{\Gamma}$.

Данное замечание и тот факт, что p_{*1} и p_{*2} строго убывают, в силу теоремы Пуанкаре–Бендиксона (см. [60, Ch. 11, § 4]) означают, что при $t \rightarrow \infty$ точка $(q_{*i}(t), p_{*i}(t))$, $i = 1, 2$, стремится к точке покоя $(\tilde{q}_i, 0) \in \tilde{\Gamma}$ системы (23.10), (23.11). Обращаясь к правой части системы (23.10), (23.11), легко устанавливаем, что ее единственная точка покоя, имеющая указанный выше вид, есть $(\kappa/\rho, 0)$. Таким образом,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_{*i}(t) = \frac{\kappa}{\rho}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_{*i}(t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (23.15)$$

Отметим, что так как $p_{*2}(0) > p_{*1}(0)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{*2}(t) = 0$ (см. (23.1) и (23.3)), то существует $\tau > 0$ такое, что $p_{*2}(\tau) = p_{*1}(0)$ и $p_{*2}(t) \leq p_{*1}(0)$ при всех $t \geq \tau$. Очевидно,

$$p_{*2}([\tau, \infty)) = p_{*1}([0, \infty)) = (0, p_{*1}(0)], \quad (23.16)$$

$$q_{*2}(t) = z_{*2}(t)p_{*2}(t) \quad \text{при всех } t \geq \tau, \quad q_{*1}(t) = z_{*1}(t)p_{*1}(t) \quad \text{при всех } t \geq 0. \quad (23.17)$$

На полуинтервале $(0, p_{*1}(0)]$ (содержащемся в $(0, p_{*2}(0)]$) определим функции q_1^* и q_2^* , полагая

$$q_i^*(\eta) = q_{*i}(p_{*i}^{-1}(\eta)) \quad \text{при всех } \eta \in (0, p_{*1}(0)], \quad i = 1, 2.$$

Так как (q_{*1}, p_{*1}) и (q_{*2}, p_{*2}) — решения системы (23.10), (23.11), то q_1^* и q_2^* суть решения на $(0, p_{*1}(0)]$ дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dp}q(p) = \tilde{w}(q(p), p),$$

где

$$\tilde{w}(q, p) = \frac{\tilde{\varphi}_1(q, p)}{\tilde{\varphi}_2(q, p)} \quad \text{при всех } (q, p) \in \tilde{\Gamma} \text{ таких, что } \tilde{\varphi}_2(q, p) \neq 0. \quad (23.18)$$

Вследствие (23.16), (23.17) графики функций q_1^* и q_2^* суть образы в силу замены переменных графиков функций $p_1^*(z)$ и $p_2^*(z)|[z_{*2}(\tau), \infty)$. В силу (23.6) графики последних двух функций не пересекаются. Следовательно, графики функций q_1^* и q_2^* не пересекаются, или, что то же, $q_1^*(p) \neq q_2^*(p)$ при всех $p \in (0, p_{*1}(0)]$. Не нарушая общности (переставляя, если нужно, нижние индексы), считаем, что

$$q_2^*(p) > q_1^*(p) \quad \text{при всех } p \in (0, p_{*1}(0)]. \quad (23.19)$$

Отметим, что в соответствии с (23.15)

$$\lim_{p \rightarrow 0} q_i^*(p) = \frac{\kappa}{\rho}, \quad i = 1, 2, \quad (23.20)$$

и согласно (23.14)

$$\frac{1 - \gamma bp}{b - \nu} < q_i^*(p) \leq \frac{\kappa}{\rho} \quad \text{при всех } p \in (0, p_{*1}(0)], \quad i = 1, 2,$$

или

$$(q_i^*(p), p) \in \Pi \quad \text{при всех } p \in (0, p_{*1}(0)], \quad i = 1, 2, \quad (23.21)$$

где

$$\Pi = \left\{ (q, p) \in \tilde{\Gamma}: p > 0, \frac{1 - \gamma bp}{b - \nu} < q \leq \frac{\kappa}{\rho} \right\}. \quad (23.22)$$

Обратим внимание, что Π есть образ в силу замены переменных множества $V^{+-} \cap \widehat{V}$ и поэтому, в частности,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_2(q, p) = \tilde{\varphi}_2(zp, p) = \varphi_2(z, p) < 0 \quad \text{при всех } (q, p) \in \Pi \\ ((q, p) = (zp, p), (z, p) \in V^{+-} \cap \widehat{V}). \end{aligned} \quad (23.23)$$

Теперь допустим, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\frac{\partial \tilde{w}(q, p)}{\partial q} < 0 \quad \text{при всех } (q, p) \in \Pi \cap O(\varepsilon), \quad (23.24)$$

где $O(\varepsilon)$ — ε -окрестность точки покоя $(\kappa/\rho, 0)$ системы (23.10), (23.11). Из (23.20) и (23.21) вытекает, что найдется $\varepsilon_* \in (0, \varepsilon]$ такое, что $(q_1^*(p), p), (q_2^*(p), p) \in \Pi \cap O(\varepsilon)$ при всех $p \in (0, \varepsilon_*]$. Тогда вследствие (23.24) и (23.19) $q_2^*(p) - q_1^*(p) \geq q_2^*(\varepsilon_*) - q_1^*(\varepsilon_*) > 0$ при всех $p \in (0, \varepsilon_*]$. Это, однако, невозможно, так как в силу (23.20) $\lim_{p \rightarrow 0} [q_2^*(p) - q_1^*(p)] = 0$. Противоречие показывает, что исходное предположение о неединственности трансверсального растущего решения (z_{*1}, p_{*1}) гамильтоновой системы (19.24), (19.25), удовлетворяющего условию $z_{*1}(0) = z_{01}$, неверно. Тем самым доказательство леммы завершается.

Итак, чтобы закончить доказательство, осталось показать существование $\varepsilon > 0$, для которого выполняется (23.24). Покажем это. Возьмем достаточно малое $\varepsilon > 0$ (которое, если нужно, будем впоследствии уменьшать) и произвольную точку $(q, p) \in \Pi \cap O(\varepsilon)$. Используя вид функций $\tilde{\varphi}_1$ (23.12) и $\tilde{\varphi}_2$ (23.13) (следует обратить внимание, что $(q, p) \in \Pi \subset \tilde{\Gamma}_1$), получаем

$$\frac{\partial \tilde{w}(q, p)}{\partial q} = \frac{\zeta_{12}(q, p) - \zeta_{21}(q, p)}{\tilde{\varphi}_2^2(q, p)}, \quad (23.25)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_{12}(q, p) &= \frac{\partial \tilde{\varphi}_1(q, p)}{\partial q} \tilde{\varphi}_2(q, p) = \left(\rho + \frac{\gamma p}{(q + \gamma p)^2} \right) \left(\beta_0 p - \frac{\gamma \kappa p^2}{(q + \gamma p)q} + \frac{(1 - \kappa)p}{q + \gamma p} \right) = \\ &= p \left(\rho + \frac{\gamma p}{(q + \gamma p)^2} \right) \left(\beta_0 - \frac{\gamma \kappa p}{(q + \gamma p)q} + \frac{1 - \kappa}{q + \gamma p} \right), \end{aligned} \quad (23.26)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{21}(q, p) &= \frac{\partial \tilde{\varphi}_2(q, p)}{\partial q} \tilde{\varphi}_1(q, p) = \left(\frac{\gamma \kappa p^2 (2q + \gamma p)}{(q + \gamma p)^2 q^2} - \frac{(1 - \kappa)p}{(q + \gamma p)^2} \right) \tilde{\varphi}_1(q, p) = \\ &= p \left(\frac{\gamma \kappa p (2q + \gamma p)}{(q + \gamma p)^2 q^2} - \frac{1 - \kappa}{(q + \gamma p)^2} \right) \tilde{\varphi}_1(q, p). \end{aligned} \quad (23.27)$$

При $(q, p) \rightarrow (\kappa/\rho, 0)$ первая и вторая скобки в правой части (23.26) стремятся соответственно к ρ и

$$\beta_0 + \frac{\rho(1 - \kappa)}{\kappa} = \frac{\kappa\beta_0 + \rho(1 - \kappa)}{\kappa} = \frac{\kappa(\rho + \nu - b) + \rho(1 - \kappa)}{\kappa} = \frac{\rho + \kappa(\nu - b)}{\kappa} = \frac{\beta_2}{\kappa}$$

(см. выражения для β_0 и β_2 в (20.2)). Таким образом,

$$\zeta_{12}(q, p) = p \frac{\rho\beta_2}{\kappa} + p\omega_{12}(q, p), \quad \omega_{12}(q, p) \rightarrow 0 \quad \text{при } (q, p) \rightarrow (\kappa/\rho, 0).$$

Рассмотрим выражение для $\zeta_{21}(q, p)$, данное в последнем равенстве цепочки (23.27). При $(q, p) \rightarrow (\kappa/\rho, 0)$ скобка в этом выражении стремится к $-\rho^2(1 - \kappa)/\kappa^2$, а $\tilde{\varphi}_1(q, p)$ стремится к нулю, так как $(\kappa/\rho, 0)$ — точка покоя системы (23.10), (23.11). Поэтому

$$\zeta_{21}(q, p) = p\omega_{21}(q, p), \quad \omega_{21}(q, p) \rightarrow 0 \quad \text{при } (q, p) \rightarrow (\kappa/\rho, 0).$$

Следовательно,

$$\zeta_{12}(q, p) - \zeta_{21}(q, p) = p \left(\frac{\rho\beta_2}{\kappa} + \omega(q, p) \right),$$

$$\omega(q, p) = \omega_{12}(q, p) - \omega_{21}(q, p) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad (q, p) \rightarrow (\kappa/\rho, 0).$$

Предположим, что $\beta_2 < 0$. Тогда, выбрав ε столь малым, что при всех $(q, p) \in \Pi \cap O(\varepsilon)$ выполняется $|\omega(q, p)| < \rho|\beta_2|/\kappa$, получаем

$$\zeta_{12}(q, p) - \zeta_{21}(q, p) < 0 \quad \text{при всех} \quad (q, p) \in \Pi \cap O(\varepsilon). \quad (23.28)$$

Отсюда и из (23.25) приходим к справедливости (23.24). Это завершает доказательство в предположении, что $\beta_2 < 0$. Из рассматриваемых сейчас четырех вырожденных совмещенных случаев А2В2С6, А2В2С8, А3В2С6 и А7В2С6 (для которых $\beta_0 < 0$) все совмещенные случаи, кроме А7В2С6, предполагают, что $\beta_2 < 0$ (см. табл. 4). Таким образом, доказательство леммы закончено в предположении, что имеет место любой из вырожденных совмещенных случаев, кроме совмещенного случая А7В2С6.

Аналогичный прием, требующий, однако, некоторых дополнительных вычислений, применим при рассмотрении вырожденного совмещенного случая А7В2С6.

Согласно табл. 4 этот совмещенный случай описывается условиями $\beta_0 < 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 = 0$ и $\sigma \geq 0$. Заметим, что условия $\beta_0 < 0$ и $\beta_2 = 0$ влекут, что

$$b > \nu, \quad \kappa = \frac{\rho}{b - \nu} < 1, \quad \beta_0 = -\frac{\rho(1 - \kappa)}{\kappa} \quad (23.29)$$

(см. вид β_0 и β_2 (20.2)), а из условий $\beta_2 = 0$ и $\sigma \geq 0$ (см. вид σ (20.58)) следует, что

$$\nu - b\kappa \leq 0. \quad (23.30)$$

Как и в предыдущих рассуждениях, вместо фазовой переменной z введем фазовую переменную $q = pz$. В переменных (q, p) гамильтонова система (19.24), (19.25) принимает вид (23.10), (23.11), где функции $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ определяются в области $\tilde{\Gamma}$ равенствами (23.12), (23.13). Дословно повторяя приведенные выше выкладки, получаем, что для рассмотрения случая А7В2С6 достаточно показать выполнение условия (23.24) в некоторой окрестности точки $(\kappa/\rho, 0)$ (при положительных значениях переменных q и p), что равносильно выполнению условия

$$\zeta_{12}(q, p) - \zeta_{21}(q, p) < 0. \quad (23.31)$$

Здесь, как и выше, функции ζ_{12}, ζ_{21} определяются в области $\tilde{\Gamma}$ равенствами (23.26), (23.27).

В силу (23.26), (23.27) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} [\zeta_{12}(q, p) - \zeta_{21}(q, p)] &= \rho\beta_0 - \frac{\kappa\rho}{q} + \frac{\rho}{q + \gamma p} - \frac{\kappa\rho}{q} + \frac{\kappa^2}{q^2} + \frac{\rho q}{(q + \gamma p)^2} - \frac{\kappa}{(q + \gamma p)^2} + \\ &+ \gamma p \left(\frac{\beta_0}{(q + \gamma p)^2} - \frac{\kappa}{(q + \gamma p)^2 q} - \frac{\kappa b}{q^2} + \frac{\kappa}{(q + \gamma p)q^2} + \frac{b}{(q + \gamma p)^2} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\kappa(q + \gamma p)^2 q^2}{p} [\zeta_{12}(q, p) - \zeta_{21}(q, p)] = h_0(q) + h_1(q)(\gamma p) + h_2(q)(\gamma p)^2 + h_3(q)(\gamma p)^3, \quad (23.32)$$

где после приведения подобных членов с учетом (23.29) получаем

$$h_0(q) = -q^2(1 - \kappa)(\rho q - \kappa)^2 \leq 0, \quad (23.33)$$

$$h_1(q) = -2\rho^2(1 - \kappa)q^3 + (-4\kappa^2\rho + \kappa\rho - \rho(1 - \kappa) + \kappa b(1 - \kappa))q^2 + 2\kappa^3q, \quad (23.34)$$

$$h_2(q) = -\rho^2(1 - \kappa)q^2 - 2\kappa^2\rho q + \kappa^3 - 2\kappa^2bq + \kappa^2, \quad (23.35)$$

$$h_3(q) = -\kappa^2b < 0. \quad (23.36)$$

При $q = \kappa/\rho$ имеем (см. (23.34), (23.35))

$$h_1\left(\frac{\kappa}{\rho}\right) = \frac{\kappa^3}{\rho^2}(\nu - b\kappa) \leq 0, \quad h_2\left(\frac{\kappa}{\rho}\right) = -2\frac{\kappa^3b}{\rho} < 0.$$

Отсюда и из неравенств (23.33), (23.36) вытекает выполнение неравенства (23.31) при всех достаточно малых положительных p и при q , близких к κ/ρ , в случае $\nu - b\kappa < 0$ (см. (23.30)).

Рассмотрим оставшуюся ситуацию, когда $\nu = b\kappa$ и, следовательно, $h_1(\kappa/\rho) = 0$. В этом случае в силу (23.29) имеем $\rho = b\kappa(1 - \kappa)$ и

$$\dot{h}_1\left(\frac{\kappa}{\rho}\right) = -6\rho^2(1 - \kappa)\frac{\kappa^2}{\rho^2} + 2\frac{\kappa}{\rho}(-4\kappa^2\rho + \kappa\rho - \rho(1 - \kappa)) + 2\frac{\kappa^2}{\rho}b(1 - \kappa) + 2\kappa^3 = -2\kappa^2.$$

Используя последнее равенство, выпишем разложение первых трех слагаемых в правой части (23.32) в ряд Тейлора по степеням $r = \kappa/\rho - q$ и γp в достаточно малой окрестности нуля до членов более высокого порядка малости, чем $r^2 + p^2$:

$$\begin{aligned} h_0(q) + h_1(q)p + h_2(q)p^2 &= -\kappa^2(1 - \kappa)r^2 + 2\kappa^2r\gamma p - 2\kappa^3\frac{b}{\rho}(\gamma p)^2 + o(r^2 + p^2) = \\ &= -\kappa^2(1 - \kappa)r^2 + 2\frac{\kappa r\sqrt{2(1 - \kappa)}}{\sqrt{3}}\frac{\kappa\gamma p\sqrt{3}}{\sqrt{2(1 - \kappa)}} - 2\kappa^2\frac{(\gamma p)^2}{1 - \kappa} + o(r^2 + p^2) \leq \\ &\leq -\frac{\kappa^2(1 - \kappa)r^2}{3} - \frac{\kappa^2(\gamma p)^2}{2(1 - \kappa)} + o(r^2 + p^2) < 0 \end{aligned}$$

(напомним, что $\kappa < 1$, см. (23.29)). Отсюда в силу (23.32), (23.36) вытекает справедливость неравенства (23.31) в некоторой окрестности точки $(\kappa/\rho, 0)$ (при положительных p) и в случае $\nu = b\kappa$. Таким образом, рассмотрение случая А7В2С6 завершено.

Доказательство леммы закончено.

Итак, в соответствии с леммой 23.2 для каждого $z_{*0} > 0$ существует единственное трансверсальное растущее решение (z_*, p_*) гамильтоновой системы (19.24), (19.25) в Γ такое, что $z_*(0) = z_{*0}$; про данное решение будем говорить, что оно *определяется* точкой z_{*0} . Сопоставляя полученные свойства трансверсальных решений гамильтоновой системы с необходимым условием оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина (следствие 19.1 и лемма 21.12), приходим к следующей окончательной характеристике решения задачи оптимального управления (\mathcal{P}) в вырожденных совмещенных случаях.

Теорема 23.1. Пусть имеет место какой-либо из вырожденных совмещенных случаев (все они показаны на рис. 12 и описаны аналитически в табл. 4). Тогда

- (i) для задачи (\mathcal{P}) существуют единственная оптимальная траектория z_* и единственное с точностью до значений, принимаемых на множестве нулевой меры Лебега, оптимальное управление u_* ;

- (ii) оптимальная траектория z_* есть компонента трансверсального растущего решения (z_*, p_*) гамильтоновой системы (19.24), (19.25), определяемого начальным состоянием z_0 управляемой системы задачи (P);
- (iii) оптимальное управление u_* имеет вид

$$u_*(t) = \begin{cases} b - \frac{1}{p_*(t)(z_*(t) + \gamma)}, & \text{если } (z_*(t), p_*(t)) \in \Gamma_1, \\ 0, & \text{если } (z_*(t), p_*(t)) \in \Gamma_2, \end{cases} \quad \text{при почти всех } t \geq 0. \quad (23.37)$$

Доказательство. В силу леммы 19.1 и теоремы 18.1 (см. следствие 18.3) для задачи (P) существует оптимальная допустимая пара (z_*, u_*) . По лемме 21.12 существует такая определенная на $[0, \infty)$ скалярная функция p_* , что (z_*, p_*) есть трансверсальное решение гамильтоновой системы (19.24), (19.25). По следствию 23.1 решение (z_*, p_*) является растущим. Так как $z_*(0) = z_0$, то трансверсальное растущее решение (z_*, p_*) определяется точкой z_0 . Трансверсальное растущее решение гамильтоновой системы, определяемое точкой z_0 , единственно (см. текст, следующий за доказательством леммы 23.2). Следовательно, оптимальной траектории, отличной от z_* , не существует. Наконец, по следствию 19.1 оптимальное управление u_* с необходимостью имеет вид (23.37). Теорема доказана.

24. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ОСОБОМ НЕВЫРОЖДЕННОМ СОВМЕЩЕННОМ СЛУЧАЕ С ДВУМЯ ТОЧКАМИ ПОКОЯ

Обратимся к особым невырожденным совмещенным случаям (см. табл. 5). Графически они представлены на рис. 7, аналитически охарактеризованы в табл. 4. Леммы 21.6–21.8 дают описание векторного поля гамильтоновой системы для особых невырожденных совмещенных случаев.

В этом разделе мы рассмотрим особый невырожденный совмещенный случай А5В2С6, предполагающий наличие у гамильтоновой системы двух точек покоя (z_1, p_1) и (z_2, p_2) (см. рис. 11). Это наиболее сложный из трех особых невырожденных совмещенных случаев. В известном смысле он родственен неособому невырожденному совмещенному случаю А1В1С7 (см. первую ситуацию в нижнем ряду на рис. 10): чтобы заметить это, достаточно сравнить приведенные на рисунках изображения векторных полей. Первая из двух точек покоя (z_1, p_1) , расположенная левее, получается, как легко себе представить, непрерывной трансформацией единственной точки покоя, имеющей место в родственном неособом невырожденном совмещенном случае А1В1С7. Вторая точка покоя (z_2, p_2) , расположенная правее, получается “катастрофическим” образом.

Варианты расположения фазовых траекторий решений гамильтоновой системы для совмещенного случая А5В2С6 показаны на рис. 16. На этом рисунке затененная область — внешность зоны трансверсальности. На рисунке видно, что, так же как во всех неособых невырожденных совмещенных случаях (см. рис. 13), гамильтонова система имеет правое и левое равновесные решения, сходящиеся к основной точке покоя и являющиеся трансверсальными. Наконец, возможны трансверсальные решения того типа, который присущ вырожденным совмещенным случаям (см. рис. 15), — растущие решения, уходящие в “правую бесконечность”. Все другие нестационарные решения гамильтоновой системы нетрансверсальны: они либо покидают зону трансверсальности, либо за конечное время выходят за пределы квадранта Γ .

Обрисованное выше качественное поведение решений гамильтоновой системы характеризуется формулируемая ниже лемма 24.3. Дадим точные определения обозначенных выше типов решений гамильтоновой системы.

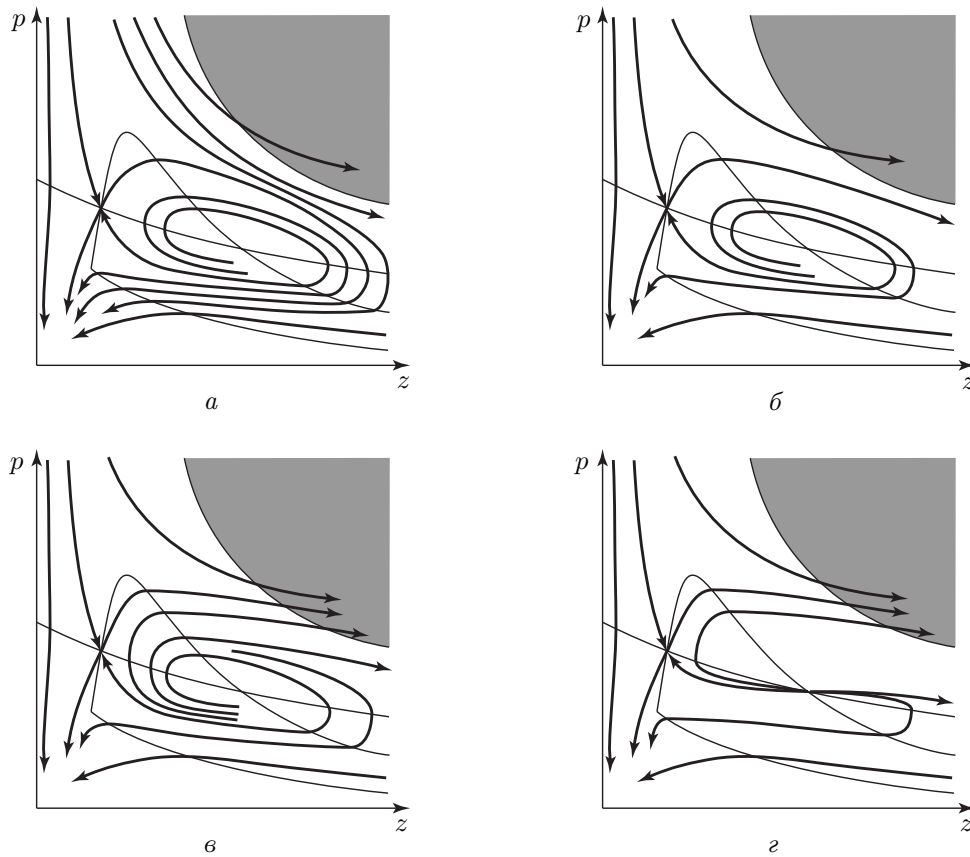


Рис. 16. Варианты фазовых траекторий гамильтоновой системы в особом невырожденном совмещенном случае А5В2С6. Показаны фазовые траектории следующих трансверсальных решений: левых и правых равновесных и растущих. Левые и правые равновесные решения сходятся к левой точке покоя соответственно с “северо-запада” и “юго-востока”. Трансверсальные растущие решения уходят в “правую бесконечность” внутри зоны трансверсальности (ниже затененной области). Остальные нестационарные решения нетрансверсальны

Определенное на $[0, \infty)$ решение (z_*, p_*) гамильтоновой системы (19.24), (19.25) будем называть *левым равновесным*, если $\lim_{t \rightarrow \infty} z_*(t) = z_1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_*(t) = p_1$ и $z_*(t) < z_1$ при всех достаточно больших t , и *правым равновесным*, если $\lim_{t \rightarrow \infty} z_*(t) = z_1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_*(t) = p_1$ и $z_*(t) > z_1$ при всех достаточно больших t . Будем говорить, что правое равновесное решение (z_*, p_*) *монотонно*, если функция z_* строго убывает, а функция p_* строго возрастает. Определенное на $[0, \infty)$ решение гамильтоновой системы, принимающее постоянное значение (z_1, p_1) , будем называть *стационарным равновесным*, а такое решение, принимающее постоянное значение (z_2, p_2) , — *дополнительным стационарным*.

Определенное на $[0, \infty)$ решение (z_*, p_*) гамильтоновой системы (19.24), (19.25) будем называть *растущим*, если $\lim_{t \rightarrow \infty} z_*(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_*(t) = 0$ и существует $t_* \geq 0$ такое, что $(z_*(t), p_*(t)) \in V^{+-}$ при всех $t \geq t_*$. Растущее решение будем называть *монотонным*, если его z -компонента строго возрастает.

Перейдем к выделению трансверсальных решений гамильтоновой системы.

Сначала отметим один полезный факт, касающийся всех особых невырожденных совмещенных случаев.

Лемма 24.1. Пусть имеет место любой из особых невырожденных совмещенных случаев А4В2С6, А5В2С6, А6В2С6. Тогда дополнение зоны трансверсальности до квадранта Γ , т.е. множество $\Gamma \setminus \widehat{V}$, инвариантно для гамильтоновой системы (19.24), (19.25).

Доказательство. Следует показать, что в точках (верхней) границы зоны \widehat{V} трансверсальности вектор векторного поля гамильтоновой системы направлен во внешность этой зоны. Пусть точка (z, p) принадлежит границе зоны \widehat{V} трансверсальности, т.е. (см. (20.106) и (20.105))

$$p = \widehat{h}(z) = \frac{\kappa}{\rho z}. \quad (24.1)$$

В точке (z, p) касательный вектор к верхней границе зоны трансверсальности имеет в качестве z -координаты единицу, а в качестве p -координаты число

$$\frac{d}{dz} \widehat{h}(z) = -\frac{\kappa}{\rho z^2} = -\frac{p}{z}. \quad (24.2)$$

Вектор, коллинеарный вектору векторного поля гамильтоновой системы в точке (z, p) , имеет в качестве z -координаты единицу, а в качестве p -координаты число

$$\frac{\varphi_2(z, p)}{\varphi_1(z, p)} = \left(\beta_0 p - \frac{\gamma \kappa - (1 - \kappa)z}{(z + \gamma)z} \right) \frac{1}{(b - \nu)z + b\gamma - 1/p} \quad (24.3)$$

(см. вид функций φ_1 и φ_2 (19.22), (19.23), задающих правые части гамильтоновой системы (19.24), (19.25); заметим, что $\varphi_1(z, p) > 0$ в точках границы зоны трансверсальности). Поэтому для того, чтобы установить, что в точке (z, p) вектор векторного поля гамильтоновой системы направлен во внешность зоны \widehat{V} трансверсальности, следует проверить, что

$$\frac{\varphi_2(z, p)}{\varphi_1(z, p)} > \frac{d}{dz} \widehat{h}(z), \quad (24.4)$$

или, что то же самое в силу (24.2),

$$z\varphi_2(z, p) + p\varphi_1(z, p) > 0.$$

Имеем

$$z\varphi_2(z, p) + p\varphi_1(z, p) = \beta_0 zp - \kappa + \frac{z}{z + \gamma} + (b - \nu)zp + b\gamma p - 1 = \rho zp - \kappa + b\gamma p - \frac{\gamma}{z + \gamma}$$

(здесь мы использовали равенство $\beta_0 = \rho + \nu - b$ (20.2)). Далее с учетом (24.1) получаем

$$z\varphi_2(z, p) + p\varphi_1(z, p) = \gamma \left(\frac{b\kappa}{\rho z} - \frac{1}{z + \gamma} \right) > 0.$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку согласно табл. 4 во всех особых невырожденных совмещенных случаях $\beta_2 = \rho + \kappa(\nu - b) \leq 0$, откуда следует, что $\rho < \kappa b$.

Таким образом, (24.4) имеет место и, значит, в точке (z, p) вектор векторного поля гамильтоновой системы направлен во внешность зоны \widehat{V} трансверсальности. Лемма доказана.

В отношении рассматриваемого сейчас особого невырожденного совмещенного случая А5В2С6 заметим также следующее.

Лемма 24.2. Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай А5В2С6. Не существует определенного на $[0, \infty)$ решения (z, p) гамильтоновой системы (19.24), (19.25), отличного от дополнительного стационарного и такого, что $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = z_2$, $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_2$.

Доказательство. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} z(t) - z_2 \\ p(t) - p_2 \end{pmatrix}, \quad (24.5)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(z_2, p_2)}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_1(z_2, p_2)}{\partial p} \\ \frac{\partial \varphi_2(z_2, p_2)}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_2(z_2, p_2)}{\partial p} \end{pmatrix}$$

— матрица первых производных правой части гамильтоновой системы (19.24), (19.25) в точке покоя (z_2, p_2) . Так же как при доказательстве леммы 22.3 (при рассмотрении неособых совмещенных случаев, отличных от А1В1С7 и А9В1С10), устанавливаем, что

$$A = \begin{pmatrix} b - \nu & \frac{1}{p_2^2} \\ -\beta_0 \frac{d}{dz} h_{12}(z_2) & \beta_0 \end{pmatrix}, \quad (24.6)$$

$$\frac{d}{dz} h_{11}(z) = -(b - \nu)p_2^2, \quad \frac{d}{dz} h_{11}(z) > \frac{d}{dz} h_{12}(z).$$

Отсюда с учетом того, что в рассматриваемом особом невырожденном совмещенном случае А5В2С6 имеем $\beta_0 < 0$ (см. табл. 4), получаем

$$\det A = \beta_0(b - \nu) + \frac{\beta_0}{p_2^2} \frac{d}{dz} h_{12}(z) = \frac{\beta_0}{p_2^2} \left(\frac{d}{dz} h_{12}(z) - \frac{d}{dz} h_{11}(z) \right) > 0.$$

След матрицы A , равный $b - \nu + \beta_0 = \rho$, положителен. Поэтому оба собственных значения матрицы A имеют положительные действительные части. Стало быть, всякое решение линейной системы (24.5), не тождественно равное (z_2, p_2) , не стремится к точке покоя (z_2, p_2) при стремлении аргумента к бесконечности. Отсюда, пользуясь теоремой Гробмана–Хартмана (теорема 4.1), заключаем, что справедливо утверждение настоящей леммы. Лемма доказана.

Придадим обозначенной ранее неформальной характеристике решений гамильтоновой системы более строгую форму. С привлечением вида гамильтоновой системы (19.24), (19.25) и ее связи с текущим гамильтонианом M задачи (\mathcal{P}) можно установить следующее.

Лемма 24.3. Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай А5В2С6. Пусть далее (z_*, p_*) — произвольное определенное на полуинтервале $\Delta \subset [0, \infty)$ и непродолжимое направо решение гамильтоновой системы (19.24), (19.25). Тогда верно одно из следующих утверждений:

- (i) (z_*, p_*) — левое, правое либо стационарное равновесное решение;
- (ii) (z_*, p_*) — дополнительное стационарное решение;
- (iii) (z_*, p_*) — растущее решение;
- (iv) полуинтервал Δ определения решения (z_*, p_*) ограничен;
- (v) $(z_*(\xi), p_*(\xi)) \notin \widehat{V}$ при некотором $\xi \in \Delta$.

Доказательство леммы опустим. Оно использует лемму 24.2 и описание векторного поля гамильтоновой системы (см. лемму 21.7 и рис. 11) и проводится аналогично доказательствам лемм 22.1, 23.1, проведенным ранее соответственно для неособых невырожденных совмещенных случаев и вырожденных совмещенных случаев.

Из перечисленных в лемме 24.3 возможностей для непродолжимого направо решения (z_*, p_*) гамильтоновой системы последние две отрицают трансверсальность этого решения; первые же три не исключают его трансверсальности. Таким образом, оптимальная траектория в исходной задаче есть с необходимостью z -компонента решения гамильтоновой системы какого-либо из введенных выше типов.

Изучим некоторые свойства решений этих типов.

Сначала рассмотрим левые и правые равновесные решения. Верна следующая

Лемма 24.4. Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай А5В2С6. Справедливы следующие утверждения.

1. Для всякого $z_{01} \in (0, z_1)$ существует и единственно левое равновесное решение (z_*, p_*) такое, что $z_*(0) = z_{01}$; данное решение принимает значения в зоне V^{+-} .
2. Для всякого $z_{02} \in (z_1, z_2)$ существует и единственно монотонное правое равновесное решение (z_*, p_*) такое, что $z_*(0) = z_{02}$; данное решение принимает значения в зоне V^{-+} .
3. Всякое правое равновесное решение принимает значения в пересечении $V^{-+} \cap \Gamma_1$ при всех достаточно больших значениях аргумента.
4. Фазовая траектория всякого правого равновесного решения содержится в интервале (z_1, ∞) .

Доказательство. Ограничимся обозначением лишь схемы рассуждений. Доказательства утверждений о единственности аналогичны соответствующим доказательствам леммы 22.3, касающимся неособых невырожденных совмещенных случаев. Доказательства утверждений о существовании отличаются от аналогичных утверждений леммы 22.3. Поясним это отличие. При доказательстве леммы 22.3, обосновывая существование левого и правого равновесных решений, мы исходили из того, что оптимальная траектория в исходной задаче (\mathcal{P}) , где в качестве начального состояния z_0 управляемой системы взято z_{01} или z_{02} , существует и является z -проекцией некоторого трансверсального решения (лемма 21.12), а трансверсальное решение с необходимостью равносечно (следствие 22.1). В изучаемой сейчас ситуации аналогичный факт не установлен, поэтому обозначенную выше упрощенную схему рассуждений, базирующуюся в конечном итоге на существовании решения задачи (\mathcal{P}) , реализовать не удастся. Существование рассматриваемых левого и правого равновесных решений (z_{*1}, p_{*1}) и (z_{*2}, p_{*2}) следует устанавливать, опираясь на описание векторного поля гамильтоновой системы (лемма 21.7).

Схема рассуждений при обосновании существования, например, левого равновесного решения (z_{*1}, p_{*1}) может быть такой (апеллируем к рис. 11). Возьмем точку (z_1^0, p_1^0) , расположенную на кривой V_{11}^0 переключения знака z -координаты слева от “основной” точки покоя (z_1, p_1) , и точку (z_2^0, p_2^0) , расположенную на “восходящей” части кривой V_{12}^0 переключения знака p -координаты справа от точки (z_1, p_1) . Векторное поле гамильтоновой системы устроено так, что решение, начинающееся в точке (z_1^0, p_1^0) , сразу уходит в зону V^{--} , а решение, начинающееся в точке (z_2^0, p_2^0) , сразу уходит в зону V^{++} . Соединим точки (z_1^0, p_1^0) и (z_2^0, p_2^0) отрезком и заставим точку (z^0, p^0) пробегать этот отрезок. Из упомянутых выше свойств экстремальных положений $((z_1^0, p_1^0)$ и $(z_2^0, p_2^0))$ точки (z^0, p^0) легко заключить, что имеет место такое ее промежуточное положение, что исходящее из (z^0, p^0) решение (\tilde{z}, \tilde{p}) продолжимо до бесконечности и не покидает зоны V^{+-} . Последнее означает, что данное решение является левым равновесным. Продолжая решение (\tilde{z}, \tilde{p}) по времени назад, замечаем, что оно остается в зоне V^{+-} и, таким образом, его z -координата (в обратном времени) убывает. Стало быть, в некоторый момент времени \tilde{t} данная z -координата достигнет значения z_{01} (с самого начала без нарушения общности считаем, что $z_2^0 > z_1^0 > z_{01}$). Тогда после замены времени с переносом начала координат в \tilde{t} решение (\tilde{z}, \tilde{p}) превращается в нужное левое равновесное решение (z_{*1}, p_{*1}) , удовлетворяющее условию $z_{*1}(0) = z_{01}$. Лемма доказана.

Итак, в соответствии с утверждением 1 леммы 24.4 для каждого $z_{*0} \in (0, z_1)$ существует единственное левое равновесное решение (z_*, p_*) гамильтоновой системы (19.24), (19.25) такое, что $z_*(0) = z_{*0}$; про данное левое равновесное решение будем говорить, что оно *определяется* точкой z_{*0} . Для правых равновесных решений аналогичное определение нам в рамках нашего теперешнего исследования не потребуется.

Вопрос о трансверсальности левых и правых равновесных решений проясняет следующая

Лемма 24.5. *Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай А5В2С6. Каждое левое либо правое равновесное решение гамильтоновой системы (19.24), (19.25) трансверсально.*

Доказательство. Допустим, что какое-либо левое либо правое равновесное решение не является трансверсальным, т.е. при некотором значении аргумента принимает значение в дополнении $\Gamma \setminus \widehat{V}$ зоны трансверсальности. Но по лемме 24.1 множество $\Gamma \setminus \widehat{V}$ инвариантно для гамильтоновой системы. Следовательно, рассматриваемое решение принимает значения вне зоны \widehat{V} трансверсальности при всех достаточно больших значениях аргумента. Однако по своему определению данное решение сходится к расположенной во внутренности зоны трансверсальности точке покоя (z_1, p_1) . Противоречие доказывает лемму.

Обратимся к свойствам растущих решений.

Лемма 24.6. *Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай А5В2С6 и $z_{*0} > z_2$. Тогда монотонное трансверсальное растущее решение (z_*, p_*) гамильтоновой системы такое, что $z_*(0) = z_{*0}$, существует, единственно и принимает значения в зоне V_1^+ роста z -координаты.*

Доказательство. Покажем существование трансверсального растущего решения (ниже мы допускаем некоторые отклонения от формального стиля изложения и опускаем ряд технических деталей). Возьмем точку $(z_{*0}, p_1^0) \in \Gamma$, расположенную на (верхней) границе зоны трансверсальности. Как показано в доказательстве леммы 24.1, в точке (z_{*0}, p_1^0) вектор векторного поля гамильтоновой системы направлен во внешность зоны трансверсальности. Поэтому решение гамильтоновой системы, начинающееся (в нулевой момент времени) в (z_{*0}, p_1^0) , сразу уходит во внешность зоны трансверсальности. В соответствии с леммой 24.1 данное решение продолжимо до бесконечности и не покидает внешности зоны трансверсальности. Внешность зоны трансверсальности лежит в зоне V^{+-} , поэтому указанное решение принимает значения в V^{+-} .

Введем в рассмотрение множество I всех точек $(z_{*0}, p^0) \in \Gamma$ таких, что $p^0 \leq p_1^0$ и решение гамильтоновой системы, начинающееся (в нулевой момент времени) в (z_{*0}, p^0) , продолжимо до бесконечности, протекает в зоне V^{+-} и в какой-либо момент времени принимает значение во внешности зоны трансверсальности. Множество I непусто, так как ему принадлежит точка (z_{*0}, p_1^0) . Отметим точную нижнюю грань \bar{p}^0 p -координат p^0 всех точек $(z_{*0}, p^0) \in I$ (ясно, что $\bar{p}^0 > 0$).

Рассмотрим непродолжимое направо решение (z_*, p_*) гамильтоновой системы, начинающееся (в нулевой момент времени) в точке (z_{*0}, \bar{p}^0) . Данное решение принимает значения выше кривой V_1^0 переключения знака z -координаты. Действительно, предположим, что для (z_*, p_*) допустимы значения на кривой V_1^0 . Поскольку (z_{*0}, \bar{p}^0) находится выше V_1^0 , т.е. в зоне V_1^+ , и $z_{*0} > z_2$, то в первый момент t_* такой, что $(z_*(t_*), p_*(t_*)) \in V_1^0$, решение (z_*, p_*) пересекает кривую V_1^0 сверху вниз и, значит, при некотором $\tau > t_*$ точка $(z_*(\tau), p_*(\tau))$ расположена строго ниже кривой V_1^0 . Но тогда при $p^0 > \bar{p}^0$, достаточно близком к \bar{p}^0 , решение (z, p) гамильтоновой системы, начинающееся (в момент 0) в точке $(z_{*0}, p^0) \in I$, таково, что точка $(z(\tau), p(\tau))$ также находится строго ниже кривой V_1^0 и, значит, не принадлежит зоне V_1^+ ; последнее противоречит тому, что $(z_{*0}, p^0) \in I$. Итак, решение (z_*, p_*) принимает значения выше кривой V_1^0 переключения знака z -координаты, или, что то же, в зоне V_1^+ роста z -координаты. Отсюда следует, что решение (z_*, p_*) определено на $[0, \infty)$. Предположим, что решение (z_*, p_*) имеет значение во внешности зоны трансверсальности. Тогда непродолжимое направо решение (z, p) гамильтоновой системы, начинающееся (в момент 0) в точке $(z_{*0}, \bar{p}^0 - \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, также принимает значения выше кривой V_1^0 и имеет значение во внешности зоны трансверсальности. В силу инвариантности внешности зоны трансверсальности (лемма 24.1) решение (z, p) определено на $[0, \infty)$. Таким образом, начальная точка $(z_{*0}, \bar{p}^0 - \varepsilon)$ этого ре-

нения принадлежит множеству I , что противоречит определению значения \bar{p}^0 . Противоречие означает, что решение (z_*, p_*) принимает значения в зоне \widehat{V} трансверсальности. Таким образом, решение (z_*, p_*) принимает значения в пересечении $\widehat{V} \cap V_1^+$. Отсюда следует, что данное решение является трансверсальным монотонным растущим.

Доказательство единственности трансверсального растущего решения опускаем. Оно аналогично соответствующему доказательству леммы 23.2 для вырожденных совмещенных случаев А2В2С6, А3В2С6, которые, как и рассматриваемый совмещенный случай А5В2С6, предполагают, что $\beta_0, \beta_2 < 0$. Этим завершим изложение доказательства леммы.

Множеством *допустимых z -проекций* монотонных трансверсальных растущих решений назовем множество S_∞ всех точек $z_{*0} > 0$, для каждой из которых существует монотонное трансверсальное растущее решение (z_*, p_*) такое, что $z_*(0) = z_{*0}$. Согласно предыдущей лемме множество S_∞ содержит интервал (z_2, ∞) . Из утверждения о единственности леммы 24.6 вытекает, что для каждой точки $z_{*0} \in S_\infty$ монотонное трансверсальное растущее решение (z_*, p_*) такое, что $z_*(0) = z_{*0}$, единственно; про это решение будем говорить, что оно *определяется* точкой z_{*0} .

Лемма 24.7. *Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай А5В2С6. Справедливы следующие утверждения.*

1. Множество S_∞ допустимых z -проекций монотонных трансверсальных растущих решений есть либо $(0, \infty)$, либо (z_1, ∞) , либо $[\xi, \infty)$, где $\xi \in (z_1, z_2)$, либо (z_2, ∞) .

2. Если S_∞ есть либо $(0, \infty)$, либо (z_1, ∞) , либо (z_2, ∞) , то всякое трансверсальное растущее решение является монотонным трансверсальным растущим решением, определяемым некоторой точкой из S_∞ .

3. Множество S_∞ содержит z -проекцию фазовой траектории всякого трансверсального растущего решения.

Описанные в утверждении 1 данной леммы варианты, когда множество S_∞ допустимых z -проекций монотонных трансверсальных растущих решений есть $(0, \infty)$, (z_1, ∞) , $[\xi, \infty)$, где $\xi \in (z_1, z_2)$, и (z_2, ∞) , показаны на рис. 16 в ситуациях *a*, *b*, *в* и *г* соответственно.

Лемма 24.8. *Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай А5В2С6 и $S_\infty \neq (0, \infty)$. Тогда для всякого правого равновесного решения (z, p) и всякого $t \geq 0$ такого, что $z(t) \notin S_\infty$, необходимо $z(t) > z_1$.*

Доказательства лемм опустим; они опираются на вид векторного поля гамильтоновой системы.

Опишем расположение фазовых траекторий монотонных трансверсальных растущих решений гамильтоновой системы по отношению к фазовым траекториям ее решений других типов. Будем говорить, что фазовая траектория решения (z_{*1}, p_{*1}) гамильтоновой системы (19.24), (19.25) расположена *выше* фазовой траектории решения (z_{*2}, p_{*2}) этой системы, если либо пересечение z -проекций фазовых траекторий решений (z_{*1}, p_{*1}) и (z_{*2}, p_{*2}) пусто, либо это пересечение непусто и для всякой точки \tilde{z} из этого пересечения каждая точка фазовой траектории решения (z_{*1}, p_{*1}) с z -проекцией \tilde{z} расположена (строго) выше каждой точки фазовой траектории решения (z_{*2}, p_{*2}) с z -проекцией \tilde{z} .

Лемма 24.9. *Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай А5В2С6. Тогда фазовая траектория всякого монотонного трансверсального растущего решения гамильтоновой системы расположена выше фазовых траекторий ее произвольных решений следующих типов: левых равновесных, правых равновесных, а также стационарного равновесного и дополнительного стационарного.*

Лемма извлекается из рассмотрения векторного поля гамильтоновой системы; доказательство опускаем.

Перейдем к характеристике решения задачи (\mathcal{P}) . Ограничимся ситуациями, когда начальное состояние z_0 управляемой системы этой задачи достаточно близко к нулю, именно $z_0 < z_1$ либо $z_0 = z_1$. Мы используем приведенные выше свойства решений гамильтоновой системы, а также представление значений функционала полезности задачи (\mathcal{P}) , указанное в следствии 19.1. Данное представление доставляет критерий отбора оптимальной допустимой траектории.

Именно, согласно следствию 19.1 для оптимальной допустимой пары (z_*, u_*) задачи (\mathcal{P}) допустимая траектория z_* является z -компонентой некоторого определенного на $[0, \infty)$ трансверсального решения (z_*, p_*) гамильтоновой системы (19.24), (19.25) и при этом выполняется следующее условие стационарности:

$$M(z_*(t), p_*(t)) = \rho e^{\rho t} \int_t^\infty e^{-\rho s} [\kappa \ln z_*(s) + \ln(b - u_*(s))] ds \quad \text{для любого } t \geq 0,$$

где M — текущий гамильтониан задачи (\mathcal{P}) . При $t = 0$ данное условие дает следующую формулу для значения $J(z_*, u_*)$ на допустимой паре (z_*, u_*) функционала полезности (19.4) задачи (\mathcal{P}) :

$$J(z_*, u_*) = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\kappa \ln z_*(t) + \ln(b - u_*(t))] dt = \frac{M(z_*(0), p_*(0))}{\rho} = \frac{M(z_0, p_*(0))}{\rho}.$$

Так как для любого трансверсального решения (z, p) гамильтоновой системы (19.24), (19.25) имеем $H(z(t), t, \psi(t)) = e^{-\rho t} M(z(t), p(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то в силу леммы 3.1 справедливо

Следствие 24.1. Пусть \mathcal{T} — множество всех определенных на $[0, \infty)$ трансверсальных решений (z, p) гамильтоновой системы (19.24), (19.25) таких, что $z(0) = z_0$. Тогда оптимальная траектория z_* задачи (\mathcal{P}) есть z -компонента некоторого решения $(z_*, p_*) \in \mathcal{T}$ такого, что

$$M(z_0, p_*(0)) = \max_{(z, p) \in \mathcal{T}} M(z_0, p(0)).$$

Ранее была найдена формула для значений текущего гамильтониана M задачи (\mathcal{P}) (см. (19.34)–(19.36)). Из этой формулы следует, что для каждого $z > 0$

$$M(z, p) \text{ строго возрастает по } p \text{ при } (z, p) \in \text{ext}^+ V_1^0 = V_1^+. \quad (24.7)$$

Теорема 24.1. Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай A5B2C6 и $z_0 < z_1$. Справедливы следующие утверждения.

1. Для задачи (\mathcal{P}) существуют единственная оптимальная допустимая траектория z_* и единственное с точностью до значений, принимаемых на множестве нулевой меры Лебега, оптимальное допустимое управление u_* .

2. Если $S_\infty = (0, \infty)$, то оптимальная допустимая траектория z_* есть z -проекция монотонного трансверсального растущего решения, определяемого точкой z_0 , и оптимальное допустимое управление u_* имеет вид

$$u_*(t) = \begin{cases} b - \frac{1}{p_*(t)(z_*(t) + \gamma)}, & \text{если } (z_*(t), p_*(t)) \in \Gamma_1, \\ 0, & \text{если } (z_*(t), p_*(t)) \in \Gamma_2, \end{cases} \quad \text{при почти всех } t \geq 0. \quad (24.8)$$

3. Если $S_\infty \neq (0, \infty)$, то оптимальная допустимая траектория z_* есть z -проекция левого равновесного решения, определяемого точкой z_0 , и оптимальное допустимое управление u_* имеет вид (24.8).

Доказательство. В силу леммы 19.1 и теоремы 18.1 (см. следствие 18.3) для задачи (\mathcal{P}) существует оптимальная допустимая пара (z_*, u_*) . По лемме 21.12 существует такая определенная на $[0, \infty)$ скалярная функция p_* , что (z_*, p_*) есть трансверсальное решение гамильтоновой системы (19.24), (19.25), при этом, очевидно, $z_*(0) = z_0$. Согласно лемме 24.3 таким трансверсальным решением может быть решение одного из следующих типов: левое равновесное, правое равновесное, стационарное равновесное, растущее либо дополнительное стационарное.

Докажем утверждение 2. Пусть $S_\infty = (0, \infty)$. По определению множества S_∞ существует единственное монотонное трансверсальное растущее решение (\bar{z}_*, \bar{p}_*) гамильтоновой системы, определяемое точкой z_0 . По утверждению 2 леммы 24.7 других трансверсальных растущих решений (z, p) гамильтоновой системы таких, что $z(0) = z_0$, не существует. Пусть \mathcal{T} — множество всех трансверсальных решений (z, p) гамильтоновой системы таких, что $z(0) = z_0$. Если (z, p) — стационарное равновесное либо дополнительное стационарное решение, то $z(0) > z_0$, т.е. $(z, p) \notin \mathcal{T}$. Если (z, p) — правое равновесное решение, то по утверждению 4 леммы 24.4 также $z(0) > z_0$ и $(z, p) \notin \mathcal{T}$. Таким образом, множество \mathcal{T} включает в себя, помимо решения (\bar{z}_*, \bar{p}_*) , только левые равновесные решения. Обратимся к критерию отбора оптимальных траекторий, сформулированному в следствии 24.1. Согласно этому критерию для доказательства того, что \bar{z}_* есть оптимальная допустимая траектория, достаточно показать, что для любого решения $(\tilde{z}, \tilde{p}) \in \mathcal{T}$, отличного от (\bar{z}_*, \bar{p}_*) , справедливо неравенство

$$M(z_0, \tilde{p}(0)) < M(z_0, \bar{p}_*(0)), \quad (24.9)$$

где M — текущий гамильтониан задачи (\mathcal{P}) . Возьмем произвольное решение $(\tilde{z}, \tilde{p}) \in \mathcal{T}$, отличное от (\bar{z}_*, \bar{p}_*) . Как замечено выше, (\tilde{z}, \tilde{p}) левое равновесное. По лемме 24.9 фазовая траектория монотонного трансверсального растущего решения (\bar{z}_*, \bar{p}_*) расположена выше фазовой траектории решения (\tilde{z}, \tilde{p}) . Таким образом,

$$\tilde{p}(0) < \bar{p}_*(0). \quad (24.10)$$

Заметим, что в соответствии с утверждением 1 леммы 24.4 точка $(z_0, \tilde{p}(0))$ расположена выше кривой V_1^0 переключения знака z -координаты:

$$(z_0, \tilde{p}(0)) = (\tilde{z}(0), \tilde{p}(0)) \in \text{ext}^+ V_1^0. \quad (24.11)$$

Поскольку при $(z, p) \in \text{ext}^+ V_1^0$ текущий гамильтониан M строго возрастает по переменной p (см. (24.7)), из (24.10) и (24.11) получаем (24.9). По следствию 19.1 оптимальное допустимое управление u_* имеет вид (24.8). Утверждение 2 доказано.

Докажем утверждение 3. Пусть $S_\infty \neq (0, \infty)$. По утверждению 1 леммы 24.4 существует единственное левое равновесное решение (\bar{z}_*, \bar{p}_*) гамильтоновой системы такое, что $z(0) = z_0$ (левое равновесное решение, определяемое точкой z_0). Установим, что \bar{z}_* есть оптимальная допустимая траектория. Для этого покажем, что решение (z, p) гамильтоновой системы любого из оставшихся типов не может удовлетворить начальному условию $z(0) = z_0$. Действительно, если (z, p) — стационарное равновесное либо дополнительное стационарное решение, то $z(0) > z_0$. Пусть (z, p) — растущее трансверсальное решение. По утверждению 3 леммы 24.7 z -проекция фазовой траектории этого решения содержится в S_∞ . Поскольку $z_0 \notin S_\infty$, имеем $z(0) \neq z_0$. Пусть, наконец, (z, p) — правое равновесное решение. По утверждению 4 леммы 24.4 $z(0) > z_0$. В обеих ситуациях $z(0) \neq z_0$. Итак, \bar{z}_* — единственная оптимальная допустимая траектория. По следствию 19.1 оптимальное допустимое управление u_* имеет вид (24.8). Утверждение 3 доказано.

Утверждения 2 и 3 влекут утверждение 1. Доказательство теоремы закончено.

Теорема 24.2. Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай А5В2С6 и $z_0 = z_1$. Справедливы следующие утверждения.

1. Для задачи (P) существуют единственная оптимальная допустимая траектория z_* и единственное с точностью до значений, принимаемых на множестве нулевой меры Лебега, оптимальное допустимое управление u_* .

2. Если $S_\infty = (0, \infty)$, то оптимальная допустимая траектория z_* есть z -проекция монотонного трансверсального растущего решения, определяемого точкой z_0 , и оптимальное допустимое управление u_* имеет вид (24.8).

3. Если $S_\infty \neq (0, \infty)$, то оптимальная допустимая траектория z_* есть z -проекция стационарного равновесного решения и оптимальное допустимое управление u_* имеет вид (24.8).

Доказательство опустим, оно подобно доказательству предыдущей теоремы.

В ситуации $z_0 > z_1$ в зависимости от значений параметров задачи выделение оптимальных режимов либо осуществляется так же, как выше, либо требует более тщательного анализа гамильтоновой системы (19.24), (19.25). Ограничимся здесь только краткими комментариями.

Рассмотрим, например, ситуацию, когда $z_0 \in (z_1, z_2)$ и S_∞ есть $(0, \infty)$ либо (z_1, ∞) . В этой ситуации мы имеем в точности два решения гамильтоновой системы, z -компоненты которых могут давать оптимальную допустимую траекторию. Это монотонное трансверсальное растущее решение (z_{*1}, p_{*1}) такое, что $z_{*1}(0) = z_0$, и правое равновесное решение (z_{*2}, p_{*2}) такое, что $z_{*2}(0) = z_0$. В силу свойств гамильтоновой системы (19.24), (19.25) можно заключить, что $M(z_0, p_{*1}(0)) > M(z_0, p_{*2}(0))$ (напомним, что M — текущий гамильтониан задачи (P)). Отсюда, применяя критерий отбора, сформулированный в следствии 24.1, получаем, что в данной ситуации для задачи (P) существуют единственная оптимальная допустимая траектория z_* и единственное с точностью до значений, принимаемых на множестве нулевой меры Лебега, оптимальное допустимое управление u_* ; при этом z_* есть z -проекция (единственного) монотонного трансверсального растущего решения (z_{*1}, p_{*1}) , а u_* имеет вид (24.8).

Если $S_\infty = [\xi, \infty)$ с $\xi \in (z_1, z_2)$ (см. утверждение 1 леммы 24.7), то при $z_0 \in (z_1, \xi)$ лишь правое равновесное решение (z_{*2}, p_{*2}) удовлетворяет начальному условию $z_{*2}(0) = z_0$ и, следовательно, оптимальная допустимая траектория есть z_{*2} . При $z_0 = \xi$ можно видеть, что начальная точка $(z_0, p_{*1}(0))$ монотонного трансверсального растущего решения (z_{*1}, p_{*1}) находится на кривой V_1^0 (см. рис. 16, в), в то время как начальная точка $(z_0, p_{*2}(0))$ правого равновесного решения (z_{*2}, p_{*2}) под этой кривой. По свойству монотонности текущего гамильтониана получаем, что опять единственная оптимальная допустимая траектория есть z_{*2} . В ситуации $z_0 > \xi$ выделение оптимальной траектории требует более тщательного рассмотрения гамильтоновой системы (19.24), (19.25). Эту ситуацию мы оставляем за пределами нашего исследования.

Та же неопределенность появляется при рассмотрении и других ситуаций.

25. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ОСОБЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ СОВМЕЩЕННЫХ СЛУЧАЯХ С ОДНОЙ ТОЧКОЙ ПОКОЯ

В этом разделе мы кратко рассмотрим оставшиеся два особых невырожденных совмещенных случая А6В2С6 и А4В2С6 (см. рис. 11). Формальные описания векторного поля гамильтоновой системы для этих совмещенных случаев даны в леммах 21.6 и 21.8.

Каждый из особых невырожденных совмещенных случаев А6В2С6 и А4В2С6 предполагает наличие у гамильтоновой системы (19.24), (19.25) единственной точки покоя (z_1, p_1) . В совмещенном случае А6В2С6 кривые переключения знака z - и p -координат пересекаются в точке покоя (\bar{z}_0, \bar{p}_0) , а в совмещенном случае А4В2С6 они касаются друг друга в точке покоя (z_1, p_1) . Данное различие в структуре векторного поля индуцирует некоторое различие фазовых портретов гамильтоновой системы в совмещенных случаях А6В2С6 и А4В2С6. Варианты

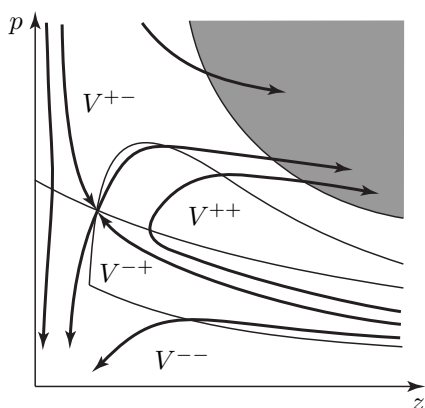


Рис. 17. Варианты фазовых траекторий гамильтоновой системы в особом невырожденном совмещенном случае A6B2C6. Левые и правые равновесные решения, сходящиеся к точке покоя, трансверсальны. Остальные решения нетрансверсальны

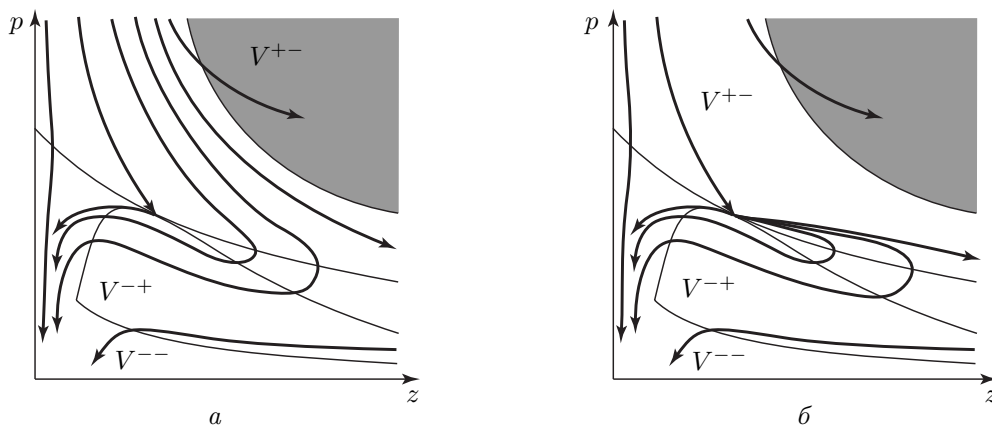


Рис. 18. Варианты фазовых траекторий гамильтоновой системы в особом невырожденном совмещенном случае A4B2C6. Левые равновесные решения, сходящиеся к точке покоя слева и сверху, и растущие решения, уходящие в “правую бесконечность” внутри зоны трансверсальности, являются трансверсальными. Остальные нестационарные решения нетрансверсальны. Правые равновесные решения, сходящиеся к точке покоя справа и снизу, отсутствуют

расположения фазовых траекторий решений гамильтоновой системы для совмещенных случаев A6B2C6 и A4B2C6 показаны на рис. 17 и 18 соответственно (на рисунках затененная область изображает внешность зоны трансверсальности). Из рис. 17 следует, что в совмещенном случае A6B2C6 нестационарными трансверсальными решениями гамильтоновой системы являются правые и левые равновесные решения, сходящиеся к точке покоя. Все другие решения гамильтоновой системы нетрансверсальны: они либо покидают зону трансверсальности, либо за конечное время выходят за пределы квадранта Г. Заметим, что в совмещенном случае A6B2C6 растущие решения, уходящие в “правую бесконечность”, также нетрансверсальны; в этом отличие данного совмещенного случая от совмещенного случая A5B2C6, рассмотренного в предыдущем разделе. Из рис. 18 следует, что совмещенный случай A4B2C6 предполагает два типа нестационарных трансверсальных решений — левые равновесные и растущие.

Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай A6B2C6.

Определенное на $[0, \infty)$ решение (z_*, p_*) гамильтоновой системы (19.24), (19.25) будем называть *равновесным*, если $\lim_{t \rightarrow \infty} z_*(t) = z_1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_*(t) = p_1$; данное равновесное решение будем называть *стационарным*, если $z_*(t) = z_1$ при всех $t \geq 0$, *левым*, если $z_*(t) < z_1$ при

всех достаточно больших $t \geq 0$, и *правым*, если $z_*(t) > z_1$ при всех достаточно больших $t \geq 0$. Определенное на $[0, \infty)$ решение (z_*, p_*) гамильтоновой системы (19.24), (19.25) будем называть *растущим*, если $\lim_{t \rightarrow \infty} z_*(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_*(t) = 0$ и существует $t_* \geq 0$ такое, что $(z_*(t), p_*(t)) \in V^{+-}$ при всех $t \geq t_*$.

Лемма 25.1. *Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай А6В2С6. Пусть далее (z_*, p_*) — произвольное определенное на полуинтервале $\Delta \subset [0, \infty)$ и непродолжимое направо решение гамильтоновой системы (19.24), (19.25). Тогда верно одно из следующих утверждений:*

- (i) (z_*, p_*) — левое, правое либо стационарное равновесное решение;
- (ii) (z_*, p_*) — растущее решение;
- (iii) полуинтервал Δ определения решения (z_*, p_*) ограничен;
- (iv) $(z_*(\xi), p_*(\xi)) \notin \widehat{V}$ при некотором $\xi \in \Delta$.

Доказательство леммы опустим. Оно основано на анализе векторного поля гамильтоновой системы (см. леммы 21.8, 21.6 и рис. 11).

Согласно лемме 25.1 в совмещенном случае А6В2С6 оптимальная допустимая траектория есть с необходимостью z -компонента левого равновесного, стационарного равновесного, правого равновесного либо трансверсального растущего решения гамильтоновой системы.

Лемма 25.2. *Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай А6В2С6. Справедливы следующие утверждения.*

1. Для всякого $z_{*0} \in (0, \bar{z}_0)$ существует и единственно левое равновесное решение (z_*, p_*) такое, что $z_*(0) = z_{*0}$; данное решение принимает значения в зоне V^{+-} .
2. Для всякого $z_{*0} > \bar{z}_0$ существует и единственно правое равновесное решение (z_*, p_*) такое, что $z_*(0) = z_{*0}$; данное решение принимает значения в зоне V^{-+} .

Доказательство леммы опустим. Оно подобно доказательству леммы 24.4.

Итак, для каждого $z_{*0} > 0$ существует единственное равновесное решение (z_*, p_*) такое, что $z_*(0) = z_{*0}$ (оно левое, если $z_{*0} < \bar{z}_0$, правое, если $z_{*0} > \bar{z}_0$, и стационарное, если $z_{*0} = \bar{z}_0$); про это равновесное решение будем говорить, что оно *определяется* точкой z_{*0} .

Лемма 25.3. *Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай А6В2С6. Тогда всякое растущее решение гамильтоновой системы не является трансверсальным.*

Доказательство. Предположим, что существует растущее равновесное решение (z_*, p_*) , которое является трансверсальным. Тогда при всех достаточно больших $t \geq 0$ имеем $(z_*(t), p_*(t)) \in V^{+-} \cap \widehat{V}$. Поскольку зона V^{+-} располагается выше кривой $V_{12}^0 = \text{gr } h_{12}$, а зона трансверсальности \widehat{V} не выше $\text{gr } \widehat{h}$, то, привлекая вид функций h_{12} и \widehat{h} (см. (20.7) и (20.105)), получаем, что при больших $t \geq 0$

$$\frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z_*(t)}{\beta_0(z_*(t) + \gamma)z_*(t)} < p_*(t) \leq \frac{\kappa}{\rho z_*(t)}. \quad (25.1)$$

Заметим, что последнее предполагает, что $(z_*(t), p_*(t)) \in \Gamma_1$ при больших $t \geq 0$. Привлекая вид правых частей гамильтоновой системы в области Γ_1 (см. (19.22), (19.23)), при больших $t \geq 0$ имеем

$$\dot{z}_*(t) = (b - \nu)z_*(t) + b\gamma - \frac{1}{p_*(t)}, \quad (25.2)$$

$$\dot{p}_*(t) = \beta_0 p_*(t) - \frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z_*(t)}{(z_*(t) + \gamma)z_*(t)}. \quad (25.3)$$

Из (25.2) и правой оценки (25.1) следует, что при больших $t \geq 0$

$$\dot{z}_*(t) \leq (b - \nu)z_*(t) + b\gamma - \frac{\rho z_*(t)}{\kappa} = \frac{[\kappa(b - \nu) - \rho]z_*(t)}{\kappa} + b\gamma = b\gamma;$$

в последнем равенстве мы учли, что в рассматриваемом совмещенном случае А6В2С6 $\beta_2 = \rho + \kappa(\nu - b) = 0$ (см. табл. 4). Следовательно, при больших $t \geq 0$

$$z_*(t) \leq c_0 + c_1 t, \quad (25.4)$$

где c_0 и c_1 — положительные константы.

Далее в силу (25.2) и (25.3) при больших $t \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(p_*(t)z_*(t)) &= p_*(t) \left[(b - \nu)z_*(t) + b\gamma - \frac{1}{p_*(t)} \right] + z_*(t) \left[\beta_0 p_*(t) - \frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z_*(t)}{(z_*(t) + \gamma)z_*(t)} \right] = \\ &= (\rho z_*(t) + b\gamma)p_*(t) - 1 - \frac{\gamma\kappa + (\kappa - 1)z_*(t)}{z_*(t) + \gamma}; \end{aligned}$$

в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $\beta_0 = \rho + \nu - b$. Применяя левую оценку (25.1), продолжим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p_*(t)z_*(t) &\geq [\gamma\kappa + (\kappa - 1)z_*(t)] \left(\frac{\rho z_*(t) + b\gamma}{\beta_0(z_*(t) + \gamma)z_*(t)} - \frac{1}{z_*(t) + \gamma} \right) - 1 = \\ &= \frac{[\gamma\kappa + (\kappa - 1)z_*(t)](\rho z_*(t) + b\gamma - \beta_0 z_*(t)) - \beta_0(z_*(t) + \gamma)z_*(t)}{\beta_0(z_*(t) + \gamma)z_*(t)}. \end{aligned} \quad (25.5)$$

Числитель после замены β_0 на $\rho + \nu - b$ принимает вид

$$\begin{aligned} &[\gamma\kappa + (\kappa - 1)z_*(t)][b\gamma + (b - \nu)z_*(t)] - (\rho + \nu - b)(z_*(t) + \gamma)z_*(t) = \\ &= \gamma^2\kappa b + \gamma\kappa(b - \nu)z_*(t) + b\gamma(\kappa - 1)z_*(t) + (\kappa - 1)(b - \nu)z_*^2(t) - \\ &\quad - (\rho + \nu - b)z_*^2(t) - \gamma(\rho + \nu - b)z_*(t) = \\ &= a_0 + a_1 z_*(t) + a_2 z_*^2(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \gamma^2\kappa b, \\ a_1 &= \gamma\kappa b - \gamma\kappa\nu + b\gamma\kappa - b\gamma - \gamma\rho - \gamma\nu + \gamma b, \\ a_2 &= \kappa(b - \nu) - (b - \nu) - (\rho + \nu - b). \end{aligned}$$

Поскольку в рассматриваемом совмещенном случае А6В2С6 $\beta_2 = \rho + \kappa(\nu - b) = 0$ и $\sigma = \kappa b - \nu - \beta_2 = \kappa b - \nu < 0$ (см. (20.58) и табл. 4), то

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma(\kappa b - \kappa\nu - \rho) + \gamma(\kappa b - \nu) = \gamma(\kappa b - \nu) < 0, \\ a_2 &= \beta_2 = 0. \end{aligned}$$

Теперь оценка (25.5) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(p_*(t)z_*(t)) \geq \frac{a_0 + a_1 z_*(t)}{\beta_0(z_*(t) + \gamma)z_*(t)}.$$

Поскольку $a_1 < 0$ и $\beta_0 < 0$ (см. табл. 4), то для больших $t \geq 0$ имеем

$$\frac{d}{dt}(p_*(t)z_*(t)) \geq \frac{\omega(z_*(t)) + \varepsilon}{z_*(t)},$$

где $\varepsilon > 0$ и $\omega(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Так как решение (z_*, p_*) растущее, то $\lim_{t \rightarrow \infty} z_*(t) = \infty$; поэтому для больших $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}(p_*(t)z_*(t)) \geq \frac{\varepsilon_0}{z_*(t)}$$

при некотором $\varepsilon_0 > 0$. Наконец, используя оценку (25.4), получаем, что для больших $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}(p_*(t)z_*(t)) \geq \frac{\varepsilon_0}{c_0 + c_1 t}.$$

Интегрирование дает, что для больших $t \geq 0$

$$p_*(t)z_*(t) \geq c_2 \ln(c_1 t + c_0)$$

при некотором $c_2 > 0$. Значит, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_*(t)z_*(t) = \infty$. Но это невозможно в силу правой оценки (25.1). Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Последняя лемма вместе с леммой 25.1 указывают на то, что в особом невырожденном совмещенном случае А6В2С6 трансверсальные решения гамильтоновой системы в точности те же, что и в неособых невырожденных случаях — левые равновесные, правые равновесные и стационарное равновесное.

Следующая теорема, описывающая решение задачи (P) в особом невырожденном совмещенном случае А6В2С6, обосновывается так же, как теорема 22.1, доказанная для неособых невырожденных совмещенных случаев. Доказательство опустим; отметим только, что оно опирается на принцип максимума (лемма 21.12) и использует полученную выше характеристику решений гамильтоновой системы, содержащуюся в леммах 25.1, 25.2 и 25.3, а также вид оптимального допустимого управления, приведенный в следствии 19.1.

Теорема 25.1. Пусть имеет место особый невырожденный совмещенный случай А6В2С6. Тогда

- (i) для задачи (P) существуют единственная оптимальная допустимая траектория z_* и единственное с точностью до значений, принимаемых на множестве нулевой меры Лебега, оптимальное допустимое управление u_* ;
- (ii) оптимальная допустимая траектория z_* есть z -проекция равновесного решения, определяемого точкой z_0 ;
- (iii) оптимальное допустимое управление u_* имеет вид

$$u_*(t) = \begin{cases} b - \frac{1}{p_*(t)(z_*(t) + \gamma)}, & \text{если } (z_*(t), p_*(t)) \in \Gamma_1, \\ 0, & \text{если } (z_*(t), p_*(t)) \in \Gamma_2, \end{cases} \quad \text{при почти всех } t \geq 0. \tag{25.6}$$

По поводу вырожденного совмещенного случая А4В2С6 приведем лишь неформальный комментарий. Для этого совмещенного случая, так же как при рассмотрении совмещенного случая А5В2С6 (см. лемму 24.6), можно установить, что для каждой точки $z_{*0} > z_1$ существует единственное трансверсальное растущее решение (z_*, p_*) гамильтоновой системы, определяемое этой точкой, т.е. такое, что $z_*(0) = z_{*0}$; при этом данное решение автоматически монотонно

в смысле определения разд. 24: его z -компонента z_* возрастает. Для множества S_∞ допустимых z -проекций трансверсальных растущих решений, определяемого так же, как в разд. 24, допустимы два варианта: $S_\infty = (0, \infty)$ и $S_\infty = (z_1, \infty)$ (аналог утверждения 1 леммы 24.7).

Опираясь на принцип максимума Понтрягина (лемма 21.12) и используя критерий отбора, сформулированный в следствии 24.1, можно установить следующее. При $S_\infty = (0, \infty)$ оптимальная допустимая траектория z_* для задачи (\mathcal{P}) есть z -проекция трансверсального растущего решения, определяемого точкой z_0 . При $S_\infty = (z_1, \infty)$ возможны три ситуации. Если $z_0 > z_1$, то оптимальная допустимая траектория z_* есть z -проекция трансверсального растущего решения, определяемого точкой z_0 . Если $z_0 = z_1$, то z_* принимает постоянное значение z_1 . Если $z_0 < z_1$, то z_* есть z -проекция левого равновесного решения, определяемого точкой z_0 (в силу возможной множественности левых равновесных решений (z, p) таких, что $z(0) = z_0$, под левым равновесным решением, определяемым точкой z_0 , следует понимать то из них, для которого начальное значение $p(0)$ максимально). В каждом из этих случаев оптимальное управление u_* имеет вид (25.6).

26. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Установленный выше вид решений задачи (\mathcal{P}) позволяет дать некоторые качественные характеристики типов оптимального поведения технологического последователя, отвечающих разным соотношениям параметров. Приведем в конспективном изложении несколько таких характеристик. Оговоримся, что здесь мы ограничиваемся лишь элементарными интерпретациями, логически вытекающими из содержания переменных и параметров задачи.

Напомним, что по своему определению значение $z(t)$ в момент времени t фазовой переменной управляемой системы (19.2), (19.3) задачи (\mathcal{P}) есть отношение количества $x(t) = N^B(t)$ технологий, накопленных к моменту времени t технологическим последователем, к количеству $y(t) = N^A(t)$ технологий, накопленных к этому моменту технологическим лидером (см. (19.1), (17.22)). Напомним также, что в принятых нами предположениях страна, играющая роль технологического лидера, оптимально распределяет имеющиеся у нее трудовые ресурсы; при этом текущее количество $y(t)$ технологий, накопленных страной-лидером, растет по экспоненциальному закону и удельная скорость этого роста равна ν : $\dot{y}(t) = \nu y(t)$ (см. (17.25)).

Как следует из полученных выше описаний решений задачи (\mathcal{P}) , при любом соотношении параметров оптимальная траектория z_* либо строго возрастает, либо строго убывает, либо принимает постоянное значение (последняя возможность может иметь место лишь при совпадении начального состояния z_0 управляемой системы задачи (\mathcal{P}) с z -проекцией точки покоя гамильтоновой системы принципа максимума). Возрастание (соответственно убывание) z_* означает, что в оптимальном режиме удельная скорость

$$\zeta_*(t) = \frac{\dot{x}_*(t)}{x_*(t)}$$

роста запаса технологий страны-последователя больше (соответственно меньше) удельной скорости роста ν запаса технологий страны-лидера; здесь и далее $x_*(t)$ — запас технологий страны-последователя в момент времени t при оптимальном режиме управления. Действительно,

$$\dot{z}_*(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{x_*(t)}{y(t)} \right) = \frac{x_*(t)}{y(t)} \left(\frac{\dot{x}_*(t)}{x_*(t)} - \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \right) = \frac{x_*(t)}{y(t)} (\zeta_*(t) - \nu)$$

и поэтому

$$\dot{z}_*(t) > 0 \quad \text{равносильно} \quad \zeta_*(t) > \nu \quad \text{и} \quad \dot{z}_*(t) < 0 \quad \text{равносильно} \quad \zeta_*(t) < \nu.$$

Стационарность z_* (имеющая место, как отмечено выше, в исключительных ситуациях) означает, что страна-последователь, развиваясь оптимально, увеличивает свой технологический запас с той же удельной скоростью ν роста, что и страна-лидер.

Ситуация, когда страна-последователь, следуя стратегии оптимального развития, растет в технологическом отношении быстрее, чем страна-лидер (z_* строго возрастает), допускает две принципиально различные возможности — назовем их условно *опережение с выравниванием* и *бесконечное опережение*. Опережение с выравниванием предполагает стремление переменной $z_*(t)$ при росте времени t к конечному пределу, бесконечное опережение — стремление $z_*(t)$ к бесконечности.

Опережение с выравниванием есть, таким образом, такой оптимальный режим технологического развития страны-последователя, при котором на старте процесса удельная скорость $\zeta_*(t)$ ее технологического роста превосходит удельную скорость ν роста страны-лидера, затем она постепенно снижается, оставаясь, однако, все время больше ν , и в пределе при стремлении времени к бесконечности сравнивается с ν . Опережение с выравниванием имеет место во всех неособых невырожденных совмещенных случаях при достаточно малом по отношению к стране-лидеру начальном запасе технологий у страны-последователя, т.е. при малом значении z_0 (см. теорему 22.1).

Бесконечное опережение — это такой оптимальный режим развития страны-последователя, при котором удельная скорость $\zeta_*(t)$ ее технологического роста не только в течение всего процесса превосходит удельную скорость ν роста страны-лидера, но и с ростом времени стремится к бесконечности: последователь бесконечно опережает лидера по скорости технологического развития. Бесконечное опережение имеет место во всех вырожденных совмещенных случаях при любом соотношении между начальными запасами технологий у страны-лидера и страны-последователя (см. теорему 23.1).

Ситуация, когда страна-последователь, развиваясь оптимально, растет в технологическом отношении медленнее, чем страна-лидер (т.е. z_* убывает), предполагает, кроме того, стремление переменной $z_*(t)$ при росте времени t к конечному пределу. Это может быть интерпретировано как *отставание с выравниванием*: на старте оптимального процесса удельная скорость $\zeta_*(t)$ технологического роста страны-последователя достаточно мала, затем она постепенно увеличивается, оставаясь все время меньше ν , и стремится к ν при стремлении времени к бесконечности. Отставание с выравниванием имеет место во всех неособых невырожденных совмещенных случаях при достаточно большом по отношению к стране-лидеру начальном запасе технологий у страны-последователя, т.е. при большом значении z_0 (см. теорему 22.1).

Итак, при соотношениях параметров, отвечающих неособым невырожденным совмещенным случаям, схема выбора оптимального пути технологического развития для страны-последователя может быть выражена условной формулой: “начальный запас технологий мал — опережение с выравниванием, начальный запас технологий велик — отставание с выравниванием”. При соотношениях параметров, отвечающих вырожденным совмещенным случаям, оптимальный путь технологического развития страны-последователя единствен: “бесконечное опережение”. В особых невырожденных совмещенных случаях схема принятия оптимального решения страной-последователем может быть такой же, как в неособых невырожденных совмещенных случаях (см. теорему 25.1), а может в зависимости от соотношений параметров “имитировать” схему принятия решения как неособых невырожденных, так и вырожденных совмещенных случаев (см. теорему 24.1).

Проследим, как может меняться схема принятия оптимального решения страной-последователем при изменении некоторых параметров модели.

Возможности страны-лидера описываются параметром ν , представляющим удельную скорость ее технологического роста; отметим, что этот параметр, исходное обозначение которого g^A (см. (17.23)), линейным образом зависит от размера L^A трудовых ресурсов страны-лидера

(см. (17.14)). Возможности страны-последователя описываются двумя параметрами: “ресурсным” — верхней границей b для значений управления, которая пропорциональна размеру L^B трудовых ресурсов страны-последователя (см. (17.23)), и “информационным” — емкостью γ абсорбции. Целевой функционал (19.4) страны-последователя определяется параметром ρ дисконтирования и параметром κ , имеющим смысл преобразованной эластичности ε замещения между потребляемыми продуктами. Как следует из представления κ (см. (17.23), (17.3)), эта величина строго убывает при возрастании ε ; таким образом, большие значения κ соответствуют малым значениям эластичности замещения, а малые значения κ — большим значениям эластичности замещения.

В представленной в табл. 4 классификации совмещенных случаев (в конечном счете определяющих тип оптимального решения страны-последователя) главную роль играют три комбинации параметров (см. (20.2)):

$$\beta_0 = \rho + \nu - b, \quad \beta_1 = \rho + \nu - \kappa b, \quad \beta_2 = \rho + \kappa(\nu - b). \quad (26.1)$$

Обратим внимание, что в описании параметрических областей, соответствующих всем реализуемым совмещенным случаям (табл. 4), не участвует емкость абсорбции γ страны-последователя; таким образом, никакие изменения емкости абсорбции γ страны-последователя в пределах допустимого интервала $(0, 1)$ не меняют общую схему выбора страной-последователем оптимальной стратегии технологического роста в зависимости от начального соотношения z_0 запасов технологий.

Все неособые невырожденные совмещенные случаи, за исключением совмещенного случая A1B1C7, предполагают, что $\beta_0 \geq 0$. В несколько огрубленной интерпретации это означает, что трудовой ресурс b страны-последователя мал по сравнению с трудовым ресурсом страны-лидера; в частности, $b \leq \nu$. В совмещенном случае A1B1C7 $\beta_0 < 0$, но $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 > 0$; последние два неравенства также накладывают верхние ограничения на ресурс страны-последователя. Огрубляя, можно высказать следующее: если трудовой ресурс страны-последователя мал, то оптимальный режим ее роста определяется приведенной выше условной формулой, характерной для неособых невырожденных совмещенных случаев: “начальный запас технологий мал — опережение с выравниванием, начальный запас технологий велик — отставание с выравниванием”.

Асимптотически при времени, стремящемся к бесконечности, опережение с выравниванием и отставание с выравниванием неотличимы друг от друга в том смысле, что в каждом из этих режимов оптимальное отношение $z_*(t) = x_*(t)/y(t)$ текущих технологических запасов страны-последователя и страны-лидера (представляющее собой в этих ситуациях z -проекцию текущего значения левого либо соответственно правого равновесного решения гамильтоновой системы (19.24), (19.25) принципа максимума; см. теоремы 22.1, 24.1 и 25.1) стремится к одному и тому же пределу \bar{z} — к z -проекции точки покоя гамильтоновой системы. Во всех невырожденных совмещенных случаях, как неособых, так и особых (выше мы заметили, что только они допускают опережение с выравниванием и отставание с выравниванием в качестве оптимальных режимов технологического последования),

$$\bar{z} = z_1 = \frac{\gamma(\sigma + d^{1/2})}{2\beta_2} \quad (26.2)$$

(см. табл. 4, 5 и теоремы 22.1, 24.1 и 25.1, а также (20.60)), исключение составляют совмещенный случай A9B1C10, в котором

$$\bar{z} = \bar{z}_{12} = \frac{\gamma\kappa b}{\beta_1}$$

(см. (20.17)), и совмещенный случай А6В2С6, в котором

$$\bar{z} = \bar{z}_0 = -\frac{\gamma\kappa b}{\sigma}$$

(см. (20.64)). Так как σ и d не зависят от γ (см. (20.58) и (20.59)), то при приближении емкости абсорбции γ страны-последователя к нулю предел \bar{z} отношения $x_*(t)/y(t)$ технологических запасов страны-последователя и страны-лидера стремится к нулю. При приближении γ к допустимой верхней границе (единице) предельное отношение \bar{z} технологических запасов двух стран стремится к вполне определенной конечной верхней границе. Эти эффекты, напомним, имеют место при условии относительной малости трудовых ресурсов страны-последователя, что в большинстве случаев подразумевает выполнение неравенства $b \leq \nu$.

Рассмотрим ситуацию, когда трудовые ресурсы страны-последователя относительно велики; точнее, $b > \nu$. Проследим возможные изменения оптимального режима технологического роста страны-последователя при изменении ее параметра ρ дисконтирования от нуля до бесконечности. Отметим, что близость ρ к нулю может быть интерпретирована как тот факт, что страна-последователь придерживается политики “долгосрочного планирования”: в ее интегральном целевом функционале (19.4) значение индекса потребления (подынтегральной функции, умножаемой на дисконтирующий множитель $e^{-\rho t}$) “сегодня”, т.е. для моментов времени t , близких к началу процесса управления (к нулю), имеет невысокий приоритет по отношению к значению индекса потребления для будущих моментов t , далеких от “сегодняшнего”. В противоположность этому большие значения параметра ρ дисконтирования свидетельствуют о том, что страна-последователь придерживается политики “краткосрочного планирования”: “сегодняшнее” значение индекса потребления имеет для нее значительно более высокий приоритет, чем его значения в будущем.

Для ρ , близкого к нулю, очевидно,

$$\beta_0 < 0, \quad \beta_1 > 0 \quad \text{при } b \leq \frac{\nu}{\kappa}, \quad \beta_1 < 0 \quad \text{при } b > \frac{\nu}{\kappa}, \quad \beta_2 < 0.$$

Как показывают табл. 4, 5, при $\nu < b \leq \nu/\kappa$ (т.е. при $\beta_1 > 0$) может иметь место один из двух вырожденных совмещенных случаев А2В2С6 и А3В2С6 либо один из двух особых невырожденных совмещенных случаев А4В2С6 и А5В2С6, а при

$$b > \max \left\{ \nu, \frac{\nu}{\kappa} \right\} \quad (26.3)$$

(т.е. при $\beta_1 < 0$) имеет место вырожденный совмещенный случай А2В2С8.

Рассмотрим чуть подробнее ситуацию (26.3) (или $\beta_1 < 0$), предполагающую достаточно большой размер b трудовых ресурсов страны-последователя и малое значение параметра ρ дисконтирования. Поскольку тогда имеет место вырожденный совмещенный случай А2В2С8, то получаем, что оптимальный режим роста мощной (с большим b) и “долгосрочно” ориентированной (с малым ρ) страны-последователя есть бесконечное опережение.

Рассмотрим теперь страну-последователь, трудовой ресурс которой столь же велик (выполняется (26.3)), но политика технологического развития “краткосрочна”: значение ρ ее параметра дисконтирования велико. Как видно из (26.1), при достаточно большом ρ величины β_0 , β_1 и β_2 становятся положительными; более того,

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2 \rightarrow \infty \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty. \quad (26.4)$$

Положительность этих значений вместе с (26.3) означает, что имеет место неособый невырожденный совмещенный случай А1В1С1 (см. табл. 4, 5). Стало быть, страна-последователь

с большим трудовым ресурсом, будучи “краткосрочно” ориентированной, уже не может рассматривать бесконечное опережение в качестве оптимального режима своего технологического развития: она вынуждена следовать либо в режиме опережения с выравниванием (при малом начальном запасе технологий), либо в режиме отставания с выравниванием (при большом начальном запасе технологий). При каждом из этих двух оптимальных режимов предел $\bar{z} = z_1$ отношения $x_*(t)/y(t)$ технологических запасов страны-последователя и страны-лидера дается формулой (26.2). По (20.58) и (20.59) имеем

$$\sigma = b\kappa - \nu - \beta_2, \quad d = \sigma^2 + 4\kappa b\beta_2,$$

поэтому вследствие (26.4), (20.58)

$$\frac{\sigma}{\beta_2} = \frac{b\kappa - \nu}{\beta_2} - 1 \rightarrow -1, \quad \frac{d^{1/2}}{\beta_2} = \left[\left(\frac{\sigma}{\beta_2} \right)^2 + \frac{4\kappa b\beta_2}{\beta_2^2} \right]^{1/2} \rightarrow 1 \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty.$$

Отсюда, возвращаясь к (26.2), получаем

$$\bar{z} \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty.$$

Таким образом, при все более “краткосрочной” ориентации своей политики технологического развития потенциально мощная страна-последователь, выравниваясь в перспективе со страной-лидером по скорости технологического роста, начинает катастрофически отставать от нее по запасу накопленных технологий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимизация динамики управляемых систем. М.: Изд-во МГУ, 2000.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
3. Арнольд В.И. Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах // Функциональный анализ и его прил. 2002. Т. 36, № 2. С. 1–11.
4. Арутюнов А.В. Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности // Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1989. Т. 27. С. 147–235. (Итоги науки и техники).
5. Арутюнов А.В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
6. Асеев С.М. Метод гладких аппроксимаций в теории необходимых условий оптимальности для дифференциальных включений // Изв. РАН. Сер. мат. 1997. Т. 61, № 2. С. 3–26.
7. Асеев С.М. Экстремальные задачи для дифференциальных включений с фазовыми ограничениями // Тр. МИАН. 2001. Т. 233. С. 5–70.
8. Асеев С.М., Кряжисимский А.В. Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с функционалом, заданным несобственным интегралом // ДАН. 2004. Т. 394, № 5. С. 583–585.
9. Асеев С.М., Кряжисимский А.В., Тарасьев А.М. Принцип максимума Понтрягина и условия трансверсальности для одной задачи оптимального управления на бесконечном интервале // Тр. МИАН. 2001. Т. 233. С. 71–88.
10. Асеев С.М., Смирнов А.И. Необходимые условия оптимальности первого порядка для задачи оптимального прохождения через заданную область // Нелинейная динамика и управление: Сб. ст. под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. М.: Физматлит, 2004. Вып. 4. С. 179–204.
11. Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К. Геометрические методы в вариационных задачах. М.: Магистр, 1998.
12. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
13. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: УРСС, 2001.
14. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
15. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
16. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
17. Мордухович Б.Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988.
18. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
19. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
20. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех., астрон., физ., хим. 1959. № 2. С. 25–32.
21. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
22. Aghion P., Howitt P. Endogenous growth theory. Cambridge (MA): MIT Press, 1998.
23. Arrow K.J. Applications of control theory to economic growth // Mathematics of the Decision Sciences. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1968. Pt. 2. P. 85–119.

24. Arrow K.J., Kurz M. Public investment, the rate of return, and optimal fiscal policy. Baltimore (MD): J. Hopkins Univ. Press, 1970.
25. Arutyunov A.V., Aseev S.M. Investigation of the degeneracy phenomenon of the maximum principle for optimal control problems with state constraints // SIAM J. Control and Optim. 1997. V. 35. P. 930–952.
26. Aseev S.M. Methods of regularization in nonsmooth problems of dynamic optimization // J. Math. Sci. 1999. V. 94, N 3. P. 1366–1393.
27. Aseev S., Hutschenreiter G., Kryazhimskii A. A dynamic model of optimal allocation of resources to R&D: IIASA Interim Rept. IR-02-016. Laxenburg (Austria), 2002.
28. Aseev S., Hutschenreiter G., Kryazhimskii A. Optimal investment in R&D with international knowledge spillovers: WIFO Working Paper N 175, 2002.
29. Aseev S.M., Hutschenreiter G., Kryazhimskii A.V. A dynamical model of optimal investment in R&D // J. Math. Sci. 2005. V. 126, N 6. P. 1495–1535.
30. Aseev S., Hutschenreiter G., Kryazhimskiy A., Lysenko A. A dynamical model of optimal investment in research and development with international knowledge spillovers // Math. and Comput. Model. Dyn. Syst. 2005. V. 11, N 2. P. 125–123.
31. Aseev S., Kryazhimskii A. The Pontryagin maximum principle for infinite-horizon optimal controls: IIASA Interim Rept. IR-03-013. Laxenburg (Austria), 2003.
32. Aseev S.M., Kryazhimskiy A.V. The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons // SIAM J. Control and Optim. 2004. V. 43. P. 1094–1119.
33. Aseev S., Kryazhimskii A., Tarasyev A. First order necessary optimality conditions for a class of infinite horizon optimal control problems: IIASA Interim Rept. IR-01-007. Laxenburg (Austria), 2001.
34. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V., Tarasyev A.M. The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal economic growth problems // Nonlinear Control Systems 2001: Proc. 5th IFAC Symp., St.-Petersburg (Russia), July 4–6, 2001. New York; London: Elsevier, 2001. V. 1. P. 71–76.
35. Aubin J.P., Clarke F.H. Shadow prices and duality for a class of optimal control problems // SIAM J. Control and Optim. 1979. V. 17. P. 567–586.
36. Bagliano F.-C., Bertola G. Models for dynamic macroeconomics. New York: Oxford Univ. Press, 2004.
37. Balder E.J. An existence result for optimal economic growth problems // J. Math. Anal. and Appl. 1983. V. 95. P. 195–213.
38. Baratchart L., Chyba M., Pomet J.-B. A Grobman–Hartnman theorem for control systems // J. Dyn. and Diff. Equat. 2007. V. 19, N 1. P. 75–107.
39. Barro R.J., Sala-i-Martin X. Economic growth. New York: McGraw Hill, 1995.
40. Bellman R. Dynamic programming. Princeton (NJ): Princeton Univ. Press, 1957.
41. Benassy J.-P. Is there always too little research in endogenous growth with expanding product variety? // Eur. Econ. Rev. 1998. V. 42. P. 61–69.
42. Benveniste L.M., Scheinkman J.A. Duality theory for dynamic optimization models of economics: the continuous time case // J. Econ. Theory. 1982. V. 27. P. 1–19.
43. Blot J., Michel P. First-order necessary conditions for infinite-horizon variational problems // J. Optim. Theory and Appl. 1996. V. 88, N 2. P. 339–364.
44. Borisov V.F., Hutschenreiter G., Kryazhimskii A.V. Asymptotic growth rates in knowledge-exchanging economies // Ann. Oper. Res. 1999. V. 89. P. 61–73.
45. Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A. Infinite horizon optimal control. Deterministic and stochastic systems. Berlin: Springer, 1991.
46. Cass D. Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation // Rev. Econ. Stud. 1965. V. 32. P. 233–240.
47. Cesari L. Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations. Berlin: Springer, 1959.
48. Cesari L. Optimization — theory and applications. Problems with ordinary differential equations. New York: Springer, 1983.
49. Chiang A.C. Elements of dynamic optimization. Singapore: McGraw Hill, 1992.
50. Clarke F.H. Optimization and nonsmooth analysis. New York: J. Wiley, 1983.
51. Dixit A.K., Pyndyck R.S. Investment under uncertainty. Princeton (NJ): Princeton Univ. Press, 1994.
52. Dixit A.K., Stiglitz J. Monopolistic competition and optimum product diversity // Amer. Econ. Rev. 1977. V. 67. P. 297–308.
53. Dorfman R. An economic interpretation of optimal control theory // Amer. Econ. Rev. 1969. V. 59. P. 817–831.
54. Ekeland I. Some variational problems arising from mathematical economics // Mathematical economics. Berlin: Springer, 1988. P. 1–18. (Lect. Notes Math.; V. 1330).

55. *Ethier W.J.* National and international returns to scale in the modern theory of international trade // *Amer. Econ. Rev.* 1982. V. 72. P. 389–405.
56. *Gamkrelidze R.V.* Principles of optimal control theory. New York; London: Plenum Press, 1978.
57. *Grossman G.M., Helpman E.* Innovation and growth in the global economy. Cambridge (MA): MIT Press, 1991.
58. *Halkin H.* Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // *Econometrica.* 1974. V. 42. P. 267–272.
59. *Hartman P.* Ordinary differential equations. New York: J. Wiley & Sons, 1964.
60. *Hirsch M.W., Smale S.* Differential equations, dynamical systems, and linear algebra. London: Acad. Press, 1974.
61. *Hutschenreiter G., Kaniowski Yu.M., Kryazhinskiy A.V.* Endogenous growth, absorptive capacities, and international R&D spillovers: IIASA Work. Paper WP-95-092. Laxenburg (Austria), 1995.
62. *Inada K.* On a two-sector model of economic growth: comments and a generalization // *Rev. Econ. Stud.* 1963. V. 30, N 2. P. 119–127.
63. *Intriligator M.D.* Mathematical optimization and economic theory. Englewood Cliffs (NJ): Prentice-Hall, 1971.
64. *Kamihigashi T.* Necessity of transversality conditions for infinite horizon problems // *Econometrica.* 2001. V. 69. P. 995–1012.
65. *Koopmans T.C.* Objectives, constraints, and outcomes in optimal growth models // *Econometrica.* 1967. V. 35. P. 1–15.
66. *Liapounoff A.* Problème général de la stabilité du mouvement. Princeton (NJ): Princeton Univ. Press, 1947. (*Ann. Math. Stud.*; V. 17).
67. *Leung S.F.* Transversality condition and optimality in a class of infinite horizon continuous time economic models // *J. Econ. Theory.* 1991. V. 54. P. 224–233.
68. *Lorenz H.-W.* Nonlinear dynamical economics and chaotic motion. Berlin: Springer, 1989. (*Lect. Notes Econ. and Math. Syst.*; V. 334).
69. *Mangasarian O.L.* Sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems // *SIAM J. Control.* 1966. V. 4. P. 139–152.
70. *Michel P.* On the transversality condition in infinite horizon optimal problems // *Econometrica.* 1982. V. 50. P. 975–985.
71. *Nordhaus W.D.* Managing the global commons. The economics of climate change. Cambridge (MA): MIT Press, 1994.
72. *Ramsey F.P.* A mathematical theory of saving // *Econ. J.* 1928. V. 38. P. 543–559.
73. *Romer P.M.* Endogenous technological change // *J. Polit. Econ.* 1990. V. 98, N 5, Pt. 2. P. S71–S102.
74. *Samuelson P.A.* Paul Douglas's measurement of production functions and marginal productivities // *J. Polit. Econ.* 1979. V. 87, N 5. P. 923–939.
75. *Seierstad A.* Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon, optimal control problems // *J. Optim. Theory and Appl.* 1999. V. 103, N 1. P. 201–229.
76. *Seierstad A., Sydsæter K.* Optimal control theory with economic applications. Amsterdam: North-Holland, 1987.
77. *Sethi S.P., Thompson G.L.* Optimal control theory: applications to management science and economics. Dordrecht: Kluwer, 2000.
78. *Shell K.* Applications of Pontryagin's maximum principle to economics // *Mathematical systems theory and economics 1.* Berlin: Springer, 1969. P. 241–292. (*Lect. Notes Oper. Res. and Math. Econ.*; V. 11).
79. *Smirnov G.V.* Transversality condition for infinite-horizon problems // *J. Optim. Theory and Appl.* 1996. V. 88, N 3. P. 671–688.
80. *Solow R.M.* Growth theory: an exposition. New York: Oxford Univ. Press, 1970.
81. *Stern L.E.* Criteria of optimality in the infinite-time optimal control problem // *J. Optim. Theory and Appl.* 1984. V. 44, N 3. P. 497–508.
82. *Weitzman M.L.* Income, wealth, and the maximum principle. Cambridge (MA): Harvard Univ. Press, 2003.
83. *Ye J.J.* Nonsmooth maximum principle for infinite-horizon problems // *J. Optim. Theory and Appl.* 1993. V. 76, N 3. P. 485–500.