В. М. Бухштабер, С. Терзич, Разрешение особенностей пространств орбит $G_{n,2}/T^n$, *Труды МИАН*, 2022, том 317, 27–63

DOI: 10.4213/tm4278

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2022, т. 317, с. 27–63

УДК 515.164.8+515.164.22+515.165.2

Разрешение особенностей пространств орбит $G_{n,2}/T^n$ *

В. М. Бухштабер[а,б], **С. Терзич**[в]

Поступило 07.04.2022; после доработки 24.05.2022; принято к публикации 03.06.2022

Изучается пространство орбит $X_n = G_{n,2}/T^n$ стандартного действия компактного тора T^n на комплексном многообразии Грассмана $G_{n,2}$. Описана структура множества критических точек $\operatorname{Crit} G_{n,2}$ обобщенного отображения моментов $\mu_n\colon G_{n,2} \to \mathbb{R}^n$, образом которого является гиперсимплекс $\Delta_{n,2}$. Каноническая проекция $G_{n,2} \to X_n$ переводит множество $\operatorname{Crit} G_{n,2}$ в множество $\operatorname{Crit} X_n$, состоящее по определению из орбит $x \in X_n$ с нетривиальной стационарной подгруппой в $T^{n-1} = T^n/S^1$, где $S^1 \subset T^n$ — диагональный одномерный тор. В терминах пространств параметров орбит введено понятие особой точки $x \in \operatorname{Sing} X_n \subset X_n$. Доказано, что множество $Y_n = X_n \setminus \operatorname{Sing} X_n$ является открытым многообразием, всюду плотным в X_n. Показано, что $\operatorname{Crit} X_n \subset \operatorname{Sing} X_n$ для $n > 4$, но $\operatorname{Sing} X_4 \subset \operatorname{Crit} X_4$. Центральным результатом является построение проекции $p_n\colon U_n = \mathcal{F}_n \times \Delta_{n,2} \to X_n$, $\dim U_n = \dim X_n$, где $\mathcal{F}_n$ — универсальное пространство параметров. Ранее авторами было доказано, что $\mathcal{F}_n$ — замкнутое гладкое многообразие, диффеоморфное известному многообразию $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$. Показано, что отображение $p_n\colon Z_n = p_n^{-1}(Y_n) \to Y_n$ является диффеоморфизмом, и описана структура множеств $p_n^{-1}(x)$ для $x \in \operatorname{Sing} X_n$.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4278

*Исследование выполнено при финансовой поддержке первого автора в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и при финансовой поддержке второго автора Черногорской академией наук и искусств.

[а] Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.

[б] Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия.

[в] Faculty of Science and Mathematics, University of Montenegro, Podgorica, Montenegro.

E-mail: buchstab@mi-ras.ru (В.М. Бухштабер), sterzic@ucg.ac.me (С. Терзич).

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Формулировка и история проблемы. Многие задачи алгебраической топологии, комплексной, алгебраической и симплектической геометрии, теории действий групп и комбинаторики приводят к изучению пространства орбит $G_{n,k}/T^n$ комплексного многообразия Грассмана $G_{n,k}$ комплексных плоскостей размерности k в $\mathbb{C}^n$ по стандартному действию компактного тора $T^n = \mathbb{T}^n$. В работах Гельфанда, Макферсона, Сергановой и Горески [14–16] (1982–1987) был получен ряд результатов о стандартном действии алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^n$ на грассманиане $G_{n,k}$, $1 < k < n-1$. Эти работы указали на необходимость изучения случая $k = 2$ с учетом специфики пространств $G_{n,2}$. В 1993 г. в работе [17] Капранов связал $(\mathbb{C}^*)^n$-действие на $G_{n,2}$ с конструкцией фактора Чжоу из алгебраической геометрии. Он показал, что фактор Чжоу $G_{n,2}//(\mathbb{C}^*)^n$ изоморфен компактификации Гротендика–Кнудсена $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ пространства модулей $\mathcal{M}(0,n)$ стабильных n-точечных кривых рода 0. Эти работы получили большой отклик в виде серии статей по смежным вопросам (см., например, [20, 21, 27]).

Комплексные проективные пространства $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} = G_{n,1}$ со стандартным действием алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^n$ и индуцированным действием компактного тора $T^n \subset (\mathbb{C}^*)^n$ являются ключевыми объектами торической геометрии и торической топологии соответственно (см. [5]). Известно, что пространство орбит $G_{n,1}/T^n$ можно отождествить с симплексом Δ^{n-1}, который является стандартным примером гладкого многообразия с углами. Первоначально наше исследование пространства орбит $X_n = G_{n,2}/T^n$ с каноническим отображением моментов

$$\mu_n\colon G_{n,2} \xrightarrow{\pi} X_n \xrightarrow{\widehat{\mu}_n} \Delta_{n,2},$$

где $\Delta_{n,2}$ — гиперсимплекс, было мотивировано задачей распространения методов торической топологии на случай торических действий положительной сложности. Мы столкнулись со спецификой случая $k = 2$ в исследованиях T^n-действия на $G_{n,k}$ при $k \geq 2$ в контексте нашей теории $(2n,k)$-многообразий (см. [8]). В недавних работах [6] и [7] были явно описаны пространства орбит $X_4 = G_{4,2}/T^4$ и $X_5 = G_{5,2}/T^5$. В [6] доказано, что пространство X_4 гомеоморфно сфере S^5. Согласно знаменитой работе Смейла [30] топологическая сфера S^5 имеет единственную (с точностью до диффеоморфизма) гладкую структуру. Оказалось, что невозможно ввести такую гладкую структуру на X_4, чтобы каноническая проекция $G_{4,2} \to G_{4,2}/T^4$ была гладким отображением. В [6] описана явная структура конических особенностей в особых точках пространства $X_4 = S^5$, т.е. в точках, соответствующих орбитам с нетривиальным стабилизатором эффективного действия тора T^3 на $G_{4,2}$. В этом случае нетривиальные стабилизаторы имеют размерности 1, 2, 3 и сложность особенности растет вместе с размерностью стабилизатора. Пространство X_5 уже не является многообразием. В [7] (см. также [31]) показано, что $H_i(X_5;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $i = 0, 8$, $H_5(X_5;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ и $H_i(X_5;\mathbb{Z}) = 0$ в остальных случаях.

Точка $x \in X_n$ называется *критической*, если соответствующая ей T^{n-1}-орбита в $G_{n,2}$, где $T^{n-1} = \mathbb{T}^n/\mathrm{diag}(\mathbb{T}^n)$, имеет нетривиальный стабилизатор. В работах [7, 8] доказано, что точка $x \in X_n$ является критической тогда и только тогда, когда точки из ее T^{n-1}-орбиты являются особыми точками гладкого отображения моментов $\mu_n\colon G_{n,2} \to \Delta_{n,2}$ (в смысле математического анализа), где $\Delta_{n,2}$ рассматривается как гладкое подмногообразие с особыми углами в $\mathbb{R}^n$.

Для любого k, $0 < k < n$, существует разложение многообразия $G_{n,k}$ на страты такое, что каждый страт W_σ состоит из орбит алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^n$, имеющих один и тот же образ при отображении моментов $\mu = \mu_n$. Этот образ представляет собой внутренность многогранника $P_\sigma \subset \Delta_{n,k}$. Многогранник P_σ мы называем допустимым многогранником для W_σ. Пространство орбит $F_\sigma = W_\sigma/(\mathbb{C}^*)^n$ называется пространством параметров страта W_σ. Показано, что $W_\sigma/T^n \cong F_\sigma \times \mathring{P}_\sigma$ (см. [7]). По определению главным стратом W называется страт, допустимым многогранником которого является весь гиперсимплекс $\Delta_{n,k}$. Пространство параметров главного страта мы обозначаем через $F_{n,k}$.

Главный страт представляет собой открытое плотное множество в $G_{n,k}$, откуда следует, что пространство $F_{n,k} \times \mathring{\Delta}_{n,k}$ является открытым плотным множеством в пространстве орбит $G_{n,k}/T^n$. Действие тора T^n на $G_{n,k}$ определяет полунепрерывную сверху функцию из $G_{n,k}$ со значениями в множестве $S(T^n)$ всех торических подгрупп в T^n. Эта функция любой точке $L \in G_{n,k}$ ставит в соответствие ее стабилизатор T_L. Она принимает постоянное значение T_σ на каждом страте W_σ, откуда следует, что тор $T^\sigma = T^n/T_\sigma$ действует свободно на W_σ.

Понятия стратов, допустимых многогранников и пространства параметров в некоторых контекстах уже были известны в литературе. В ходе наших исследований мы поняли, что этих понятий недостаточно для описания структуры пространства орбит $G_{n,k}/T^n$. В работах [7, 8] мы ввели новые понятия универсального пространства параметров $\mathcal{F}_{n,k}$ и виртуальных пространств параметров $\widetilde{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{n,k}$ стратов W_σ. Ключевые свойства этих понятий состоят в том, что $\mathcal{F}_{n,k}$ является компактификацией пространства параметров $F_{n,k}$ главного страта и что объединение всех виртуальных пространств параметров $\widetilde{F}_\sigma$ дает пространство $\mathcal{F}_{n,k}$. Более того, для любого σ определена проекция $p_\sigma\colon \widetilde{F}_\sigma \to F_\sigma$. В [9] мы явно описали универсальное пространство параметров $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n,2}$ и показали, что оно является гладким компактным многообразием, которое можно отождествить с фактором Чжоу $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$, определенным Капрановым в [17], и, таким образом, с компактификацией Гротендика–Кнудсена $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ стабильных n-точечных кривых рода 0. В этой работе мы показываем, что конструкция пространства $\mathcal{F}_n$ является контравариантной относительно координатных вложений $\mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}^n$ и при отождествлении $\mathcal{F}_n = \overline{\mathcal{M}}(0,n)$ соответствует (согласно Кнудсену [24]) контравариантности конструкции пространства $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ относительно забывания одной точки.

Точка $x \in W_\sigma/T^n \subset G_{n,2}/T^n$ называется *особой*, если пространство параметров F_σ *не гомеоморфно* виртуальному пространству параметров $\widetilde{F}_\sigma$. В статье дано эквивалентное определение особой точки в терминах координат Плюккера.

При $n \geq 5$ все критические точки $\operatorname{Crit} X_n$ пространства X_n принадлежат множеству особых точек $\operatorname{Sing} X_n$. Случай $n = 4$ оказался исключением, а именно: $\operatorname{Sing} X_4 \subset \operatorname{Crit} X_4$.

1.2. Основные результаты. Цели этой работы следующие:

- описать комбинаторную структуру пространства орбит $X_n = G_{n,2}/T^n$, $n = 4, 5, \dots$;
- ввести пространство $U_n = \mathcal{F}_n \times \Delta_{n,2}$ как гладкое многообразие с особыми углами (в терминологии Фултона [12]);
- построить отображение $p_n\colon U_n \to X_n$, которое разрешает особенности пространства X_n и согласовано с комбинаторной структурой пространства X_n.

Пусть $Y_n = X_n \setminus \operatorname{Sing} X_n$. Отметим, что Y_n — открытое многообразие, всюду плотное в пространстве X_n. Под разрешением особенностей мы понимаем такое отображение $p_n\colon U_n \to X_n$, что для открытого подмногообразия $V_n = p^{-1}(Y_n)$, всюду плотного в U_n, отображение $p_n\colon V_n \to Y_n$ является диффеоморфизмом.

В случае торических многообразий внутренности допустимых многогранников не пересекаются. Трудность задачи описания пространств орбит $G_{n,k}/T^n$ при $k \neq 1$ и $k \neq n-1$ во многом связана с тем, что существуют допустимые многогранники, внутренности которых имеют непустое пересечение.

В статье Горески и Макферсона [16] предложено разложение гиперсимплекса $\Delta_{n,k}$ в несвязное объединение так называемых камер C_ω. Эти камеры являются пересечениями внутренностей допустимых многогранников, а именно: $C_\omega = \bigcap_{\sigma\in\omega} \mathring{P}_\sigma$ и $C_\omega \cap \mathring{P}_\sigma = \varnothing$, если $\sigma \notin \omega$. Они показали, что для любых $x, y \in C_\omega$ пространства орбит прообразов $\mu^{-1}(x)/T^n$ и $\mu^{-1}(y)/T^n$ гомеоморфны, т.е. гомеоморфны некоторому компактному топологическому пространству F_ω. Заметим, что F_ω имеет каноническое разложение в виде $F_\omega = \bigcup_{\sigma\in\omega} F_\sigma$. Пространства F_{ω_1}

и F_{ω_2}, вообще говоря, не гомеоморфны для $\omega_1 \neq \omega_2$. Возникла задача описать структуру множества таких пространств F_ω.

Мы решаем эту задачу для грассманианов $G_{n,2}$, показывая, что существуют гладкое многообразие $\mathcal{F}_n$ — так называемое универсальное пространство параметров и непрерывная проекция $p_n\colon U_n = \mathcal{F}_n \times \Delta_{n,2} \to X_n$ (см. теоремы 9.7 и 9.8). Проекция p_n определяет на U_n отношение эквивалентности, которое мы явно описываем в терминах камерного разложения гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$ и соответствующих разложений многообразия $\mathcal{F}_n$. В результате мы получаем, что пространство орбит X_n является фактор-пространством пространства U_n по этому отношению эквивалентности.

Наша конструкция основана на двух ключевых результатах: *во-первых*, мы показываем, что камерное разложение гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$ описывается некоторой специальной конфигурацией гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$; *во-вторых*, мы доказываем, что для любой точки $x \in \Delta_{n,2}$ объединение $\widetilde{F}_x = \bigcup \widetilde{F}_\sigma$ всех виртуальных пространств параметров $\widetilde{F}_\sigma$ для допустимых многогранников P_σ таких, что $x \in \mathring{P}_\sigma$, совпадает с универсальным пространством параметров, т.е. $\mathcal{F}_n = \widetilde{F}_x$ для *любой* точки $x \in \Delta_{n,2}$. В результате мы получаем требуемую проекцию $p_n\colon U_n = \mathcal{F}_n \times \Delta_{n,2} \to X_n$, которая разрешает особенности пространства X_n. Точнее, если $x \in Y_n$ и $x \in W_\sigma/T^n$, то $\widetilde{F}_\sigma \cong F_\sigma$. В этом случае имеем $p_n^{-1}(x) = (f, \widehat{\mu}_n(x))$, где точка $f \in \widetilde{F}_\sigma \subset \widetilde{F}_x$ однозначно определяется гомеоморфизмом $h_\sigma\colon W_\sigma/T^n \to F_\sigma \times \mathring{P}_\sigma$. Следовательно, $V_n = p_n^{-1}(Y_n)$ — гладкое подмногообразие в U_n, а $p_n\colon V_n \to Y_n$ — диффеоморфизм. В случае $x \in \operatorname{Sing} X_n$ пространства F_σ и $\widetilde{F}_\sigma$ не диффеоморфны и множество

$$p_n^{-1}(x) = \bigl\{(\widetilde{f}, \widehat{\mu}_n(x))\colon\ \widetilde{f} \in \widetilde{F}_\sigma \subset \widetilde{F}_x,\ p_\sigma(\widetilde{f}) = f\bigr\}$$

не является точкой.

Конструкция многообразия U_n согласована с последовательностью естественных вложений $X_{n-1} \subset X_n$ пространств орбит и со структурой камерного разложения гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$.

Действие нормализатора $N(T^n)$ максимального тора $T^n \subset \mathrm{U}(n)$ на многообразии $G_{n,2} = \mathrm{U}(n)/(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(n-2))$ определяет действие симметрической группы S_n на X_n. Более того, группа S_n действует на $\Delta_{n,2}$ перестановками вершин, сохраняя камерное разложение гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$. Индуцированное отображение моментов $\widehat{\mu}_n\colon X_n \to \Delta_{n,2}$ является S_n-эквивариантным. Используя это, мы получаем S_n-действие на U_n такое, что отображение $p_n\colon U_n \to X_n$ является S_n-эквивариантным.

Универсальное пространство параметров $\mathcal{F}_n$ мы описали в [9], используя метод замечательной компактификации из алгебраической геометрии. Мы применяем этот метод для разрешения особенностей группы автоморфизмов пространства параметров главного страта, которые определяются функциями перехода между картами многообразия $G_{n,2}$. Таким образом, наш метод построения пространства U_n является обобщением метода замечательной компактификации на случай разрешения особенностей пространства орбит $G_{n,2}/T^n$.

Отметим, что в [8] мы построили модель $(2n,k)$-многообразия, составляющими которой являются пространства параметров, универсальное пространство параметров, виртуальные пространства параметров и комплекс допустимых многогранников. Комплексом допустимых многогранников называется несвязное объединение всех допустимых многогранников, наделенное соответствующей топологией при помощи отображения моментов.

Наши результаты уже нашли применение и развитие в общей теории торических действий положительной сложности, которая активно развивается в последнее время (см., например, [2–4, 19, 32]). Многочисленные примеры таких действий дает теория сферических многообразий, включая теорию однородных пространств компактных групп Ли. Интересные примеры можно найти также в теории симплектических многообразий с гамильтоновыми действиями торов (см. [18]).

Обратим внимание также на недавние работы [25, 26, 29], в которых описываются замыкания пространства орбит действия алгебраического тора на различных многообразиях.

В заключение напомним, что гиперсимплекс $\Delta_{n,k}$ можно рассматривать как матроидный многогранник, вершины которого представляют базу *универсального* матроида ранга k на множестве из n элементов, а любой допустимый многогранник в $\Delta_{n,k}$ можно рассматривать как матроидный многогранник ранга k на множестве из n элементов, база которого задается подмножеством вершин этого допустимого многогранника. Таким образом, имеется определение допустимого многогранника в $\Delta_{n,k}$, не зависящее от понятия страта в многообразии Грассмана $G_{n,k}$. С другой стороны, в данной работе мы описали семейство всех допустимых многогранников в $\Delta_{n,2}$, используя специальную конфигурацию гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$. Эти результаты можно рассматривать как результаты теории матроидов, представляющие интерес независимо от проблемы пространства орбит $G_{n,2}/T^n$.

2. T^n-ЭКВИВАРИАНТНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ МНОГООБРАЗИЯ $G_{n,k}$

Сначала проанализируем связи между T^n-эквивариантными автоморфизмами многообразия $G_{n,k}$ и стандартным отображением моментов $\mu_{n,k}\colon G_{n,k}\to\mathbb{R}^n$.

Пусть $G_{n,k}$ — комплексное грассманово многообразие k-мерных комплексных подпространств в $\mathbb{C}^n$. Известно [11], что группа голоморфных автоморфизмов $\operatorname{Aut} G_{n,k}$ изоморфна проективной группе $\mathrm{PU}(n)$, если $n\neq 2k$, а при $n=2k$ она изоморфна группе $\mathbb{Z}_2\times\mathrm{PU}(2k)$. Группа $\mathbb{Z}_2$ порождается гомеоморфизмом двойственности. Напомним, что гомеоморфизм двойственности для $G_{2k,k}$ получается из стандартного диффеоморфизма $c_{n,k}\colon G_{n,k}\to G_{n,n-k}$. Введем канонический изоморфизм $l\colon\mathbb{C}^n\to(\mathbb{C}^n)^*$, где $(\mathbb{C}^n)^*$ — пространство, двойственное к $\mathbb{C}^n$. Пусть $L\in G_{n,k}$, и положим

$$L'=\bigl\{\lambda\in(\mathbb{C}^*)^n\colon\ \lambda(v)=0\ \text{для любого}\ v\in L\bigr\}.$$

Тогда гомеоморфизм $c_{n,k}$ определяется по формуле $c_{n,k}(L)=l^{-1}(L')$, и при $n=2k$ он дает еще один нелинейный гомеоморфизм многообразия $G_{2k,k}$.

Симметрическая группа S_n действует на $\mathbb{C}^n$ перестановками координат, поэтому любой элемент $\mathfrak{s}\in S_n$ порождает автоморфизм $\mathfrak{s}\colon G_{n,k}\to G_{n,k}$. Отсюда следует, что S_n является подгруппой группы $\operatorname{Aut} G_{n,k}$.

Далее рассмотрим каноническое действие компактного тора T^n на $G_{n,k}$. Получаем, что тор $T^{n-1}=T^n/S^1$ эффективно действует на $G_{n,k}$, где S^1 — диагональная одномерная подгруппа в T^n, и T^{n-1} является максимальным тором в группе $\mathrm{PU}(n)$. Нормализатором тора T^{n-1} в $\mathrm{PU}(n)$ является группа $T^{n-1}\rtimes S_n$. Кроме того, автоморфизм $c_{n,k}\colon G_{n,k}\to G_{n,n-k}$ также является эквивариантным относительно действия канонического тора. Таким образом, справедлива

Лемма 2.1. *Подгруппа группы* $\operatorname{Aut} G_{n,k}$, *состоящая из всех элементов, которые коммутируют с каноническим T^n-действием на $G_{n,k}$, является группой $T^{n-1}\rtimes S_n$ при $n\neq 2k$ и группой $\mathbb{Z}_2\times(T^{n-1}\rtimes S_n)$ при $n=2k$.*

Пусть $W_0\subset G_{n,k}/T^n$ — множество неподвижных точек канонического T^n-действия на $G_{n,k}$. Полезно отметить следующий факт.

Предложение 2.2. *Пусть H — подгруппа группы* $\operatorname{Aut} G_{n,k}$, *для которой множество W_0 является инвариантным. Тогда $H=T^{n-1}\rtimes S_n$ для $n\neq 2k$ и $H=\mathbb{Z}_2\times(T^{n-1}\rtimes S_n)$ для $n=2k$.*

Доказательство. Надо доказать, что если $f\in H$, то этот автоморфизм коммутирует с каноническим T^n-действием на $G_{n,k}$. Неподвижными точками канонического T^n-действия на $G_{n,k}$ являются все k-мерные координатные подпространства в $\mathbb{C}^n$. Пусть v — некоторый координатный вектор. Существует $\binom{n-1}{k-1}$ экземпляров k-мерных координатных подпространств, содержащих v. Пусть L — такое подпространство, заданное уравнениями $z_{i_1} = \ldots = z_{i_{n-k}} = 0$, $1 \le i_1 < \ldots < i_{n-k} \le n$, и пусть W_0 инвариантно относительно $f \in \mathrm{PU}(n)$. Для линейного изоморфизма $\widehat{f}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, представляющего элемент f, координаты вектора $\widehat{f}(v)$ с индексами $i_1, \ldots, i_{n-k}$ равны нулю. Так как существует $n-1$ экземпляров различных k-мерных координатных подпространств, содержащих v, отсюда следует, что $\widehat{f}(v)$ также должен быть координатным вектором с точностью до константы. Таким образом, изоморфизм $\widehat{f}$ с точностью до константы переставляет координатные векторы. Следовательно, $\widehat{f}$ коммутирует с T^n-действием на $\mathbb{C}^n$, и поэтому f коммутирует с индуцированным T^n-действием на $G_{n,k}$. При $n = 2k$ образующий f группы $\mathbb{Z}_2$ переводит любое k-мерное координатное подпространство в его ортогональное дополнение, которое в данном случае также является k-мерным координатным подпространством. $\square$

Пусть $P^J(L)$, где $J \subset \{1, \ldots, n\}$, $\|J\| = k$, — плюккеровы координаты k-мерного подпространства $L \in \mathbb{C}^n$. Определено стандартное отображение моментов $\mu_{n,k}\colon G_{n,k} \to \Delta_{n,k} \subset \mathbb{R}^n$ (см. [1, 22]) такое, что

$$\mu_{n,k}(L) = \frac{1}{\sum |P^J(L)|^2} \sum |P^J(L)|^2 \Lambda_J.$$

Здесь $\Lambda_J = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\Lambda_i = 1$ при $i \in J$, $\Lambda_i = 0$ при $i \notin J$, и сумма берется по всем J.

Предположим, что $f \in \operatorname{Aut} G_{n,k}$ — автоморфизм, для которого существует комбинаторный изоморфизм $\overline{f}\colon \Delta_{n,k} \to \Delta_{n,k}$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G_{n,k} & \xrightarrow{f} & G_{n,k} \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mu_{n,k}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mu_{n,k}} \\ \Delta_{n,k} & \xrightarrow{\overline{f}} & \Delta_{n,k} \end{array} \tag{2.1}$$

коммутативна, т.е. $\mu_{n,k} \circ f = \overline{f} \circ \mu_{n,k}$.

Лемма 2.3. *Если $f \in \operatorname{Aut} G_{n,k}$ удовлетворяет условию* (2.1), *то $f \in T^{n-1} \rtimes S_n$ при $n \ne 2k$ и $f \in T^{n-1} \times (\mathbb{Z}_2 \times S_n)$ при $n = 2k$.*

Доказательство. Так как $\mu_{n,k}$ задает взаимно однозначное соответствие между множеством W_0 неподвижных точек T^n-действия на $G_{n,k}$ и множеством вершин гиперсимплекса $\Delta_{n,k}$ и так как по предположению $\overline{f}$ является комбинаторным изоморфизмом, то мы получаем, что f оставляет W_0 инвариантным. Таким образом, утверждение леммы следует из предложения 2.2. $\square$

Докажем теперь, что группа автоморфизмов f, удовлетворяющих диаграмме (2.1), совпадает с группой $T^{n-1} \rtimes S_n$ при $n \ne 2k$ или с группой $\mathbb{Z}_2 \times (T^{n-1} \rtimes S_n)$ при $n = 2k$.

Прежде всего заметим, что так как отображение $\mu_{n,k}$ является T^n-инвариантным, то любой элемент $f \in T^{n-1} \subset \operatorname{Aut} G_{n,k}$ удовлетворяет диаграмме (2.1), поскольку в качестве $\overline{f}$ можно взять $\mathrm{id}_{\Delta_{n,k}}$. Действие симметрической группы S_n на $G_{n,k}$ порождает действие группы S_n на $\Delta_{n,k}$, индуцированное перестановками координат в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 2.4. *Для любого элемента $\mathfrak{s} \in S_n$ комбинаторный автоморфизм $\overline{\mathfrak{s}}\colon \Delta_{n,k} \to \Delta_{n,k}$ такой, что выполняется диаграмма* (2.1), *задается перестановкой координат в $\mathbb{R}^n$, определяемой этим элементом $\mathfrak{s}$.*

Доказательство. Так как $P^J(\mathfrak{s}(L)) = P^{\mathfrak{s}(J)}(L)$ для любой точки $L \in G_{n,k}$, отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\mu_{n,k}(\mathfrak{s}(L)) &= \big((\mathrm{pr}_1 \circ \mu_{n,k})(\mathfrak{s}(L)), \dots, (\mathrm{pr}_n \circ \mu_{n,k})(\mathfrak{s}(L))\big) = \\ &= \big((\mathrm{pr}_{\mathfrak{s}(1)} \circ \mu_{n,k})(L), \dots, (\mathrm{pr}_{\mathfrak{s}(n)} \circ \mu_{n,k})(L)\big) = \overline{\mathfrak{s}}(\mu_{n,k}(L)),\end{aligned}$$

где $\mathrm{pr}_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1_i$ — проекция на i-ю координату, $1 \le i \le n$. $\square$

Для получения результата в случае инволютивного автоморфизма $c_{n,k}\colon G_{n,k} \to G_{n,n-k}$ напомним его определение. Пусть $L \in G_{n,k}$ и $P^J(L) \neq 0$, где $J = \{1, \dots, k\}$. Существует базис в L, который в стандартном базисе пространства $\mathbb{C}^n$ записывается $(n \times k)$-матрицей такой, что подматрица, состоящая из первых k строк, является единичной, т.е.

$$L = \begin{pmatrix} I \\ A \end{pmatrix}, \qquad \text{где } A \text{ является } ((n-k) \times k)\text{-матрицей.} \tag{2.2}$$

Более того, относительно этого базиса в $\mathbb{C}^n$ мы получаем, что $(n-k)$-мерное подпространство $l^{-1}(L')$ можно представить в виде матрицы

$$l^{-1}(L') = \begin{pmatrix} -A^{\mathrm{T}} \\ I \end{pmatrix}, \qquad \text{где } I \text{ — единичная } ((n-k) \times (n-k))\text{-матрица.} \tag{2.3}$$

Таким образом, справедлива

Лемма 2.5. *Для любого набора* $J \subset \{1, \dots, n\}$, $\|J\| = k$, *верно равенство*

$$P^J(L) = \pm P^{\overline{J}}(l^{-1}(L')), \qquad \text{где} \quad \overline{J} = \{1, \dots, n\} \setminus J. \tag{2.4}$$

Отсюда сразу же вытекает

Лемма 2.6. *Существует комбинаторный изоморфизм* $\overline{c}_{n,k}\colon \Delta_{n,k} \to \Delta_{n,n-k}$ *такой, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} G_{n,k} & \xrightarrow{c_{n,k}} & G_{n,n-k} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{n,k}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu_{n,n-k}} \\ \Delta_{n,k} & \xrightarrow{\overline{c}_{n,k}} & \Delta_{n,n-k} \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Рассмотрим изоморфизм $\overline{c}_{n,k}\colon \Delta_{n,k} \to \Delta_{n,n-k}$ такой, что для точки $x = \sum_{J \subset \{1,\dots,n\},\, \|J\|=k} \alpha_J \Lambda_J$ мы имеем $\overline{c}_{n,k}(x) = \sum_{J \subset \{1,\dots,n\},\, \|J\|=k} \alpha_{\overline{J}} \Lambda_{\overline{J}}$, где $\overline{J} = \{1, \dots, n\} \setminus J$. Непосредственно из формулы (2.4) следует, что $\overline{c}_{n,k}$ является требуемым комбинаторным изоморфизмом. $\square$

Для $n = 2k$ мы получаем автоморфизм $\overline{c}_{2k,k}\colon \Delta_{2k,k} \to \Delta_{2k,k}$, заданный уравнением

$$\overline{c}_{2k,k}(x) = \sum_{J \subset \{1,\dots,2k\},\, \|J\|=k} \alpha_{\overline{J}} (\mathbf{1} - \Lambda_J), \tag{2.5}$$

где $x = \sum_{J \subset \{1,\dots,n\},\, \|J\|=k} \alpha_J \Lambda_J$ и $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$.

Вместе с леммой 2.6 это дает следующее.

Лемма 2.7. *Для* $n = 2k$ *изоморфизм* $\overline{c}_{2k,k}\colon \Delta_{2k,k} \to \Delta_{2k,k}$ *задается уравнением*

$$x \to \mathbf{1} - x, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$.

Доказательство. Для $x=(x_1,\dots,x_{2k})\in\Delta_{2k,k}$ имеем

$$x_i=\frac{1}{\sum_{J,\,\|J\|=k}|P^J(L)|^2}\sum_{J,\,i\in J,\,\|J\|=k}|P^J(L)|^2 \qquad \text{для некоторого} \quad L\in G_{n,k}.$$

Тогда из (2.5) с учетом того, что $x_1+\ldots+x_n=k$, получаем

$$\overline{c}_{2k,k}(x)_i=\frac{1}{\sum_{J\subset\{1,\dots,n\},\,\|J\|=k}|P^J(L)|^2}\sum_{J\subset\{1,\dots,n\}\setminus\{i\},\,\|J\|=k}|P^J(L)|^2=$$

$$=\frac{1}{k}\bigl(x_2+\ldots+x_n-(k-1)x_1,\dots,x_1+\ldots+x_{n-1}-(k-1)x_n\bigr)=(1-x_1,\dots,1-x_n). \qquad \square$$

В итоге мы получаем

Предложение 2.8. *Элемент $f\in G_{n,k}$ удовлетворяет диаграмме* (2.1) *тогда и только тогда, когда $f\in T^{n-1}\rtimes S_n$ при $n\neq 2k$ и $f\in\mathbb{Z}_2\times(T^{n-1}\rtimes S_n)$ при $n=2k$.*

Для прообразов точек гиперсимплекса $\Delta_{n,k}$ при отображении моментов справедлива следующая

Лемма 2.9. *Если элемент $f\in\operatorname{Aut}G_{n,k}$ удовлетворяет диаграмме* (2.1), *то пространство $\mu_{n,k}^{-1}(x)$ гомеоморфно пространству $\mu_{n,k}^{-1}(\overline{f}(x))$ для любого $x\in\Delta_{n,k}$.*

Доказательство. Из диаграммы (2.1) непосредственно имеем $f\colon\mu_{n,k}^{-1}(x)\to\mu_{n,k}^{-1}(\overline{f}(x))$. Так как f — автоморфизм, отсюда вытекает требуемое. $\square$

Любой автоморфизм многообразия $G_{n,k}$, коммутирующий с T^n-действием, порождает гомеоморфизм пространства орбит $G_{n,k}/T^n$. Так как отображение моментов T^n-инвариантно, то согласно предложению 2.8 мы получаем

Следствие 2.10. *Пространства $\mu_{n,k}^{-1}(x)/T^n$ и $\mu_{n,k}^{-1}(\mathfrak{s}(x))/T^n\subset G_{n,k}/T^n$ гомеоморфны для любых $x\in\Delta_{n,k}$ и $\mathfrak{s}\in S_n$. Более того, при $n=2k$ пространства $\mu_{n,k}^{-1}(x)/T^n$ и $\mu_{n,k}^{-1}(\overline{f}(x))/T^n$ гомеоморфны для любого $x\in\Delta_{n,k}$, где $\overline{f}(x)=\mathbf{1}-x$.*

3. МНОГООБРАЗИЯ ГРАССМАНА $G_{n,2}$

3.1. Допустимые многогранники и страты. Сначала напомним понятия допустимого многогранника и страта, а также связанные с ними результаты, следуя [7]. Некоторые другие эквивалентные определения этих понятий можно найти в [15].

Пусть $M_{ij}=\{L\in G_{n,2}\colon P^{ij}(L)\neq 0\}$ — стандартные карты Плюккера на $G_{n,2}$, где $\{i,j\}\subset\{1,\dots,n\}$, $i<j$. Положим $Y_{ij}=G_{n,2}\setminus M_{ij}$. Множество

$$W_\sigma=\Biggl(\bigcap_{\{i,j\}\in\sigma}M_{ij}\Biggr)\cap\Biggl(\bigcap_{\{i,j\}\notin\sigma}Y_{ij}\Biggr)$$

такое, что $W_\sigma\neq\varnothing$, называется *стратом*, где $\sigma\subset\{\{i,j\}\colon 1\le i,j\le n,\ i\neq j\}$. Очевидно, что $\mu(W_\sigma)=\mathring{P}_\sigma$, где $\mathring{P}_\sigma$ — внутренность многогранника P_σ, являющегося выпуклой оболочкой вершин Λ_{ij}, $\{i,j\}\in\sigma$. Напомним, что $\mathring{P}_\sigma=P_\sigma\setminus\partial P_\sigma$. Следовательно, если P_σ — точка, то $\partial P_\sigma=\varnothing$ и поэтому $\mathring{P}_\sigma=P_\sigma$.

Определение 3.1. Многогранник P_σ называется *допустимым* для $G_{n,2}$, если $\mathring{P}_\sigma$ является образом некоторого страта W_σ при отображении моментов. Индекс σ допустимого многогранника P_σ называется *допустимым множеством.*

Все точки из W_σ имеют один и тот же стабилизатор $T_\sigma\subseteq T^n$, и тор $T^\sigma=T^n/T_\sigma$ действует свободно на W_σ.

Понятия страта W_σ и допустимого многогранника P_σ вводятся аналогично и в случае многообразия $G_{n,k}$. Напомним определение допустимого многогранника, не зависящее от понятия страта в $G_{n,k}$. *Матроидом* $\mathcal{M}$ ранга k, $1 \le k < n$, на множестве из n элементов называется совокупность $\mathcal{M} = \{I \subset \{1, \dots, n\} \colon \|I\| = k\}$, удовлетворяющая следующему условию: если $I, J \in \mathcal{M}$, $I \ne J$, $i \in I \setminus J$, то существует такое $j \in J \setminus I$, что $(I \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in \mathcal{M}$.

Матроидным многогранником $\Delta_{\mathcal{M}}$ в [13, 15] называется выпуклый многогранник, натянутый на векторы $\delta_I \in \mathbb{R}^n$, $I \in \mathcal{M}$, с координатами $\delta_{I,i} = 1$ для $i \in I$ и $\delta_{I,i} = 0$ для $i \notin I$. В [13, 15] показано, что гиперсимплекс $\Delta_{n,k}$ является матроидным многогранником, соответствующим универсальному матроиду ранга k на множестве из n элементов.

Непосредственно из определений вытекает следующая

Лемма 3.2. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством допустимых многогранников P_σ для $G_{n,k}$ и множеством всех матроидов ранга k на множестве из n элементов.*

Лемма 3.3. *Граница $\partial\Delta_{n,2}$ гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$ представляет собой сферу S^{n-2}, разбитую на гиперсимплексы $\Delta_{n-1,2}(i)$, задаваемые уравнениями $x_i = 0$, $1 \le i \le n$, и симплексы $\Delta^{n-2}(i)$, задаваемые уравнениями $x_i = 1$, $1 \le i \le n$. Структура этого разбиения следующая*:

- $\Delta_{n-1,2}(i) \cap \Delta_{n-1,2}(j) = \Delta_{n-2,2}(ij)$ — *гиперсимплекс, задаваемый уравнениями $x_i = x_j = 0$, где $i \ne j$*;
- $\Delta_{n-1,2}(i) \cap \Delta^{n-2}(j) = \Delta^{n-3}(ij)$ — *симплекс, задаваемый уравнениями $x_i = 1$, $x_j = 0$, где $i \ne j$*;
- $\Delta^{n-2}(i) \cap \Delta^{n-2}(j) = \Lambda_{ij}$ — *вершина, где $i \ne j$.*

Таким образом,

$$\mu^{-1}(\partial\Delta_{n,2}) = n \,\#\, \mu^{-1}(\Delta_{n-1,2}) \cup n \,\#\, \mu^{-1}(\Delta_{n-1,1}) = n \,\#\, G_{n-1,2} \cup n \,\#\, \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-2}. \tag{3.1}$$

Отсюда следует, что множество всех допустимых многогранников многообразия $G_{n,2}$ можно описать индуктивно: достаточно на каждом шаге по n описать множество тех из них, которые имеют непустое пересечение с внутренностью $\mathring{\Delta}_{n,2}$ гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$. Напомним, что для любого допустимого многогранника P_σ выполняется равенство $\dim P_\sigma = \dim T^\sigma$ (см. [7]).

В работе [17] Капранов дал описание допустимых многогранников $P_\sigma \subset \Delta_{n,2}$ для T^n-действия на $G_{n,2}$ с точки зрения теории матроидов и фактора Чжоу $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$. Он привел алгоритмическое перечисление всех матроидных разложений гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$, ввел понятие страта Чжоу в факторе Чжоу $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$ и доказал, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех матроидных разложений гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$ и множеством таких стратов Чжоу.

Далее мы приводим новое, чисто аналитическое, описание множества всех допустимых многогранников для $G_{n,2}$, которое больше соответствует нашей цели описать структуру пространства орбит $G_{n,2}/T^n$.

Полезным будет следующее наблюдение, верное для всех k, $1 \le k \le n$.

Лемма 3.4. *Точка $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_{n,k}$ принадлежит границе $\partial\Delta_{n,k} = \Delta_{n,k} \setminus \mathring{\Delta}_{n,k}$ тогда и только тогда, когда $x_i = 0$ или $x_i = 1$ для некоторого i, $1 \le i \le n$. Более того, многогранник P, являющийся выпуклой оболочкой некоторого набора вершин гиперсимплекса $\Delta_{n,k}$, принадлежит границе $\partial\Delta_{n,k}$ тогда и только тогда, когда существует такое i, $1 \le i \le n$, что либо $x_i = 0$ для всех $x \in P$, либо $x_i = 1$ для всех $x \in P$.*

Доказательство этого утверждения следует из того факта, что гиперсимплекс $\Delta_{n,k}$ является пересечением стандартного куба $I \subset \mathbb{R}^n$ с гиперплоскостью $\{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, \mathbf{1} \rangle = k\}$.

В частности, $x \in \Delta_{n-1,2}(q) \subset \partial\Delta_{n,2}$, $1 \le q \le n$, тогда и только тогда, когда $x_q = 0$, и $x \in \Delta_{n-1,1}(q) \subset \partial\Delta_{n,2}$, $1 \le q \le n$, тогда и только тогда, когда $x_q = 1$. $\square$

Предложение 3.5. *Любой допустимый многогранник размерности* $\leq n-3$ *принадлежит границе* $\partial\Delta_{n,2}$ *гиперсимплекса* $\Delta_{n,2}$.

Доказательство. Пусть P_σ — допустимый многогранник и $\dim P_\sigma = q \leq n-3$. Используя действие симметрической группы S_n, можно считать, что точка $V_0 = (1,1,0,\dots,0)$ является вершиной этого многогранника. Тогда у него имеется q вершин $V_1,\dots,V_q$, смежных с V_0, и размерность подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$, натянутого на вершины $V_0,V_1,\dots,V_q$, равна q. Многогранник P_σ является пересечением гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$ и q-мерной плоскости L. Так как вершины $V_1,\dots,V_q$ смежны с вершиной V_0, значения их первых двух координат различны и равны 0 или 1. Поскольку $q \leq n-3$, все эти вершины V_i, $1 \leq i \leq q$, должны иметь одну общую координату x_j, $j \geq 3$, равную нулю. Учитывая, что при $j > 2$ координата x_j вершины V_0 тоже равна нулю, получаем, что P_σ принадлежит границе $\partial\Delta_{n,2}$. $\square$

В завершение напомним следующий результат, доказанный в [7] для общего случая $G_{n,k}$.

Предложение 3.6. *Любая грань допустимого многогранника является допустимым многогранником.*

3.2. Допустимые многогранники размерности $n-2$. Допустимые многогранники размерности $n-2$ можно разделить на многогранники, принадлежащие границе $\partial\Delta_{n,2}$, и многогранники, имеющие непустое пересечение с $\mathring{\Delta}_{n,2}$. Многогранники на границе $\partial\Delta_{n,2}$ либо принадлежат n гиперсимплексам $\Delta_{n-1,2}$ и являются их $(n-2)$-мерными допустимыми многогранниками, либо являются одним из n симплексов $\Delta_{n-1,1} = \Delta^{n-2}$.

Опишем теперь допустимые $(n-2)$-мерные многогранники P_σ такие, что $P_\sigma \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \neq \varnothing$. Пусть $e_1,\dots,e_n$ — координатные векторы в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\Pi_{\{i,j\}}$ множество всех $(n-2)$-мерных плоскостей, каждая из которых имеет непустое пересечение с $\mathring{\Delta}_{n,2}$, содержит вершину $\Lambda_{\{i,j\}} = e_i + e_j$ и параллельна некоторым $n-2$ ребрам гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$, смежным с вершиной $\Lambda_{\{i,j\}}$. Ребра, смежные с $\Lambda_{\{i,j\}}$, задаются формулами

$$e_{\{j,s\}} = \Lambda_{\{i,j\}} - \Lambda_{\{i,s\}}, \quad s \neq i,j, \qquad \text{и} \qquad e_{\{i,q\}} = \Lambda_{\{i,j\}} - \Lambda_{\{q,j\}}, \quad q \neq i,j.$$

Используя тот факт, что многообразие $G_{n,2}$ можно представить как однородное пространство $\mathrm{U}(n)/(\mathrm{U}(2)\times\mathrm{U}(n-2))$, мы можем отождествить векторы $e_{\{j,m\}}$ и $e_{\{i,s\}}$ с дополнительными корнями подгруппы $\mathrm{U}(2)\times\mathrm{U}(n-2)$ группы $\mathrm{U}(n)$.

Множество плоскостей $\Pi_{\{i,j\}}$ можно описать следующим образом.

Лемма 3.7. *Множество* $\Pi_{\{i,j\}}$ *состоит из аффинных плоскостей*

$$\alpha^S_{\{i,j\},l} = \Lambda_{\{i,j\}} + F_{l,S}, \qquad 1 \leq l \leq n-3, \quad S \subset \{1,\dots,n\}, \quad \|S\| = l, \quad i,j \notin S.$$

Направляющая плоскость $F_{l,S}$ *натянута на векторы*

$$e_{\{j,s\}} \ \ \text{и} \ \ e_{\{i,q\}}, \qquad s \in S, \quad q \notin S \cup \{i,j\}.$$

Далее будем писать $\alpha_{\{i,j\},l}$, когда $S = \{1,2,\dots,l\}$.

Легко проверить, что плоскости $\alpha^S_{\{i,j\},l}$ можно записать более явно.

Следствие 3.8. *Множество* $\Pi_{\{i,j\}}$ *состоит из* $(n-2)$*-мерных плоскостей* $\alpha^S_{\{i,j\},l}$, *которые образуются при пересечении плоскости* $\sum_{k=1}^n x_k = 2$ *с плоскостями*

$$x_j + \sum_{s\in S} x_s = 1, \qquad \text{где} \quad S \subset \{1,\dots,n\}, \quad \|S\| = l, \quad 1 \leq l \leq n-3, \quad i,j \notin S. \tag{3.2}$$

Эти плоскости совпадают с плоскостями

$$x_i + \sum_{s \notin \{i,j\}\cup S} x_s = 1. \tag{3.3}$$

Подгруппа $S_2 \times S_{n-2} \subset S_n$ действует на множестве $\Pi_{\{1,2\}}$. А на произвольном множестве $\Pi_{\{i,j\}}$, $1 \le i < j \le n$, действует подгруппа группы S_n, сопряженная с группой $S_2 \times S_{n-2}$. Таким образом, на совокупности множеств $\{\Pi_{\{i,j\}},\ 1 \le i < j \le n\}$ определено действие группы S_n; стационарными подгруппами этого действия являются группы, сопряженные с группой $S_2 \times S_{n-2}$.

Предложение 3.9. *Допустимые многогранники размерности $n-2$, не принадлежащие границе $\partial\Delta_{n,2}$, совпадают с многогранниками, полученными пересечением гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$ с плоскостями из множества $\Pi_{\{i,j\}}$, где $1 \le i < j \le n$.*

Доказательство. Пусть P_σ — допустимый многогранник, не принадлежащий $\partial\Delta_{n,2}$. В силу действия симметрической группы S_n можно считать, что точка $\Lambda_{\{1,2\}} = (1,1,0,\dots,0)$ является вершиной многогранника P_σ. Так как $\dim P_\sigma = n-2$, то вершина $\Lambda_{\{1,2\}}$ имеет не менее $n-2$ смежных вершин в P_σ. Первые две координаты любой из этих вершин принимают разные значения, равные 1 и 0. Пусть l — количество таких вершин, у которых первая координата равна 1 и, следовательно, имеется ровно одна координата со значением 1 среди оставшихся $n-2$ координат. В силу действия группы S_n можно считать, что такими являются вершины $\Lambda_{\{1,3\}},\dots,\Lambda_{\{1,l+2\}}$. У остальных $n-2-l$ вершин первая координата равна 0, а вторая равна 1, и все они имеют только одну координату, равную 1, среди оставшихся $n-2$ координат. Мы утверждаем, что значение 1 должна принимать одна из последних $n-l-2$ координат у всех таких $n-l-2$ вершин. В противном случае у одной из этих вершин последние $n-l-2$ координат должны быть равны 0. Тогда оставшиеся вершины будут иметь координату, равную 1, среди последних $n-l-2$ координат, причем номера координат со значением 1 должны быть разными у разных вершин. Число таких вершин не больше $n-l-3$, и, следовательно, они должны иметь общую координату, равную 0, среди последних $n-l-2$ координат. Но в этом случае эта нулевая координата будет у всех $n-l-2$ вершин, а значит, по построению у всех $n-2$ вершин. Тогда получается, что $P_\sigma \in \partial\Delta_{n,2}$.

Таким образом, оставшимися $n-l-2$ вершинами будут $\Lambda_{\{2,j\}}$, $l+2 \le j \le n$. Это означает, что многогранник P_σ с точностью до действия группы симметрии S_n принадлежит плоскости $\alpha_{\{1,2\},l} = \alpha^S_{\{1,2\},l}$, где $S = \{3,\dots,l+2\}$ для некоторого $1 \le l \le n-3$.

Рассмотрим теперь многогранник P, который с точностью до действия группы S_n получен как пересечение гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$ с плоскостью из множества $\Pi_{\{1,2\}}$. Точки плоскости $\alpha_{\{1,2\},l}$ можно явно записать в $\mathbb{R}^n$ в виде

$$(1+a_{l+1}+\ldots+a_{n-2}, 1+a_1+\ldots+a_l, -a_1,\dots,-a_{n-2}), \qquad a_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \le i \le n-2.$$

Отсюда следует, что вершинами гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$, принадлежащими этой плоскости, являются $\Lambda_{\{1,j\}}$, $2 \le j \le l+2$, $\Lambda_{\{2,\}j}$, $l+3 \le j \le n$, и $\Lambda_{\{i,j\}}$, $3 \le i \le l+2$, $l+3 \le j \le n$, т.е. P — выпуклая оболочка этих вершин. Если мы рассмотрим точку $L \in G_{n,2}$, заданную матрицей A_L и такую, что $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{i1} = a_{2j} = 0$, $3 \le i \le l+2$, $l+3 \le j \le n$, и $a_{1j} \ne 0$, $l+3 \le j \le n$, $a_{2j} \ne 0$, $3 \le j \le l+2$, то увидим, что многогранник P является образом отображения моментов замыкания $(\mathbb{C}^*)^n$-орбиты точки L. Следовательно, P — допустимый многогранник. $\square$

Предложение 3.10. *Количество неприводимых представлений для действия группы $S_2 \times S_{n-2}$ на множестве $\Pi_{\{i,j\}}$ равно $[(n-2)/2]$. Размерности этих неприводимых представлений таковы*:

$$2\binom{n-2}{l}, \quad 1 \le l \le \left[\frac{n-2}{2}\right], \qquad \textit{при нечетном } n;$$

$$2\binom{n-2}{l}, \quad 1 \le l < \frac{n-2}{2}, \quad \textit{и} \quad \binom{n-2}{(n-2)/2} \qquad \textit{при четном } n.$$

Доказательство. Количество элементов в множестве $\Pi_{\{i,j\}}$ равно

$$\|\Pi_{\{i,j\}}\| = \sum_{l=1}^{n-3} \binom{n-2}{l} = 2^{n-2} - 2.$$

Группа S_{n-2} действует на множестве $\Gamma_{\{i,j\}} = \Pi_{\{i,j\}}/S_2$, состоящем из $q = 2^{n-3} - 1$ элементов. Более того, из описания плоскостей, составляющих множество $\Pi_{\{i,j\}}$, следует, что множество образующих орбит S_{n-2}-действия на $\Gamma_{\{i,j\}}$ задается плоскостями $\alpha_{\{i,j\},l} = \alpha^S_{\{i,j\},l}$, где $S = \{1, \ldots, l + \delta_{\{i,j\}}\}$, $\delta_{\{i,j\}} = 0, 1, 2$ соответственно случаям $l < i < j$, $i \le l < j$, $i < j \le l$ для $1 \le l \le [(n-2)/2]$. Стабилизатором элемента $\alpha_{\{i,j\},l}$ является группа $S_l \times S_{n-2-l}$ при $1 \le l < [(n-2)/2]$. Для $l = [(n-2)/2]$, где n нечетно, т.е. $l = (n-3)/2$, стабилизатором будет группа $S_l \times S_{n-2-l}$, а для четного n, т.е. $l = (n-2)/2$, стабилизатором будет группа $S_l \times S_l \times S_l$. Отсюда следует, что действие группы S_{n-2} на $\Gamma_{\{i,j\}}$ задает представление группы $S_2 \times S_{n-2}$ на $\mathbb{C}^{2^{n-3}-1}$, неприводимые компоненты которого при нечетных n имеют размерности

$$\frac{(n-2)!}{l!\,(n-2-l)!}, \qquad 1 \le l \le \left[\frac{n-2}{2}\right],$$

а при четных n их размерности равны

$$\frac{(n-2)!}{l!\,(n-2-l)!}, \quad 1 \le l < \left[\frac{n-2}{2}\right], \qquad \text{и} \qquad \frac{(n-2)!}{2(((n-2)/2)!)^2}. \qquad \square$$

Из приведенного доказательства предложения 3.9 видно, что его утверждение можно улучшить следующим образом.

Следствие 3.11. *Каждый допустимый многогранник размерности $n-2$, не принадлежащий границе $\partial\Delta_{n,2}$, задается с точностью до действия симметрической группы S_n пересечением гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$ с плоскостями $\alpha_{\{1,2\},l}$, где $1 \le l \le [(n-2)/2]$.*

Суммируя предыдущие результаты, получаем такую теорему.

Теорема 3.12. *Допустимые многогранники для $G_{n,2}$ размерности $n-2$, имеющие непустое пересечение с $\mathring{\Delta}_{n,2}$, задаются пересечением гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$ с плоскостями вида*

$$\sum_{i\in S,\ \|S\|=p} x_i = 1, \qquad \text{где} \quad S \subset \{1, \ldots, n\}, \quad 2 \le p \le \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{3.4}$$

Полезно отметить также такое

Следствие 3.13. *Допустимый многогранник P_σ, $\dim P_\sigma = n-2$, определенный гиперплоскостью $x_k + \sum_{i\in S,\, k\notin S} x_i = 1$, является выпуклой оболочкой вершин $\Lambda_{i,k}$ для $i \in S$, где $S \subset \{1, \ldots, n\}$, $\|S\| = p$, $2 \le p \le [n/2]$, и $1 \le k \le n$.*

Таким образом, получаем

Следствие 3.14. *Допустимый многогранник P_σ, $\dim P_\sigma = n-2$, такой, что $P_\sigma \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \ne \varnothing$, имеет $n_p = p(n-p)$ вершин для некоторого p, $2 \le p \le [n/2]$. Более того, количество q_p допустимых многогранников, имеющих n_p, $2 \le p \le [n/2]$, вершин, равно*

$$q_p = \binom{n}{p} \qquad \text{для нечетного } n,$$

$$q_p = \binom{n}{p}, \quad 1 \le p < \frac{n}{2}, \quad \text{и} \quad q_{n/2} = \frac{1}{2}\binom{n}{n/2} \qquad \text{для четного } n.$$

Допустимый многогранник будем называть *порождающим*, если он выбран в качестве представителя орбиты действия группы S_n на множестве допустимых многогранников в $\Delta_{n,2}$.

Из следствия 3.11 получаем

Пример 3.15. Грассманиан $G_{4,2}$ имеет один порождающий допустимый многогранник размерности 2, лежащий внутри гиперсимплекса $\Delta_{4,2}$, который является октаэдром. Сам многогранник является квадратом, он имеет четыре вершины, а его S_4-орбита состоит из трех многогранников, составляющих все множество допустимых многогранников размерности 2, лежащих в $\mathring{\Delta}_{4,2}$. Эти многогранники задаются плоскостями $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 + x_3 = 1$ и $x_1 + x_4 = 1$. Изображение допустимых многогранников для $G_{4,2}$ см. на рисунке в работе [10].

Пример 3.16. Грассманиан $G_{5,2}$ имеет один порождающий допустимый многогранник размерности 3, лежащий в $\mathring{\Delta}_{5,2}$. Этот многогранник имеет шесть вершин, а в его S_5-орбите имеется десять элементов, и они составляют все множество допустимых многогранников размерности 3, лежащих в $\mathring{\Delta}_{5,2}$. Эти многогранники задаются плоскостями $x_i + x_j = 1$, где $1 \le i < j \le 5$.

Пример 3.17. Грассманиан $G_{6,2}$ имеет два порождающих допустимых многогранника размерности 4, лежащих в $\mathring{\Delta}_{6,2}$. Эти многогранники имеют восемь и девять вершин, а их S_6-орбиты состоят из 15 и 10 элементов соответственно. Они задаются плоскостями $x_i + x_j = 1$, $1 \le i < j \le 6$, и $x_1 + x_j + x_k = 1$, $2 \le i < j \le 6$, соответственно. Заметим, что в этом случае представление группы $S_2 \times S_4$ на $\mathbb{C}^7$ имеет два неприводимых слагаемых размерностей 4 и 3.

3.3. Допустимые многогранники размерности $n-1$. Прежде чем приступить к описанию допустимых многогранников размерности $n-1$, получим следующий результат.

Лемма 3.18. *Предположим, что точки допустимого многогранника P_σ, $\dim P_\sigma = n-1$, удовлетворяют неравенствам*

$$\sum_{i\in I} x_i \le 1 \qquad \text{и} \qquad \sum_{j\in J} x_j \le 1,$$

где $I, J \subset \{1,\dots,n\}$. Если $I \cap J \ne \varnothing$, то точки многогранника P_σ удовлетворяют также неравенству

$$\sum_{s\in I\cup J} x_s \le 1.$$

Доказательство. Если $I \cap J \ne \varnothing$, то многогранник P_σ не содержит вершин Λ_{ij}, $i \in I$, $j \in J$, т.е. $P^{ij}(L) = 0$ для всех точек L из страта W_σ. Теперь если $x = (x_1,\dots,x_n) \in P_\sigma$, то $x = \mu(L)$ для некоторого $L \in W_\sigma$. Заметим, что для $s \in I \cup J$ мы имеем

$$x_s = \frac{S_s}{S}, \qquad S_s = \sum_{m\notin I\cup J} P^{sm}(L), \qquad S = \sum_{1\le p<q\le n} P^{pq}(L).$$

Отсюда следует, что в разные суммы S_s, $s \in I \cup J$, входят разные координаты Плюккера $P^{sm}(L)$. Поэтому

$$\sum_{s\in I\cup J} x_s = \frac{1}{S} \sum_{s\in I\cup J} S_s \le 1. \qquad \square$$

Следствие 3.19. *Если плоскости $\sum_{i\in I} x_i = 1$ и $\sum_{j\in J} x_j = 1$ определяют грани допустимого многогранника P_σ, $\dim P_\sigma = n-1$, $\|I\|, \|J\| \ge 2$, и точки многогранника P_σ удовлетворяют неравенствам $\sum_{i\in I} x_i \le 1$ и $\sum_{j\in J} x_j \le 1$, то $I \cap J = \varnothing$.*

Дадим теперь описание допустимых многогранников размерности $n-1$.

Определение 3.20. Совокупность $\mathcal{H} = \{H_{S_1}, \dots, H_{S_l}\}$ полупространств вида

$$H_S\colon \ \sum_{i \in S} x_i \le 1, \qquad S \subset \{1, \dots, n\}, \quad \|S\| = k, \quad 2 \le k \le n-2,$$

называется *допустимой*, если $S_i \cap S_j = \varnothing$, как только $H_{S_1}, H_{S_2} \in \mathcal{H}$.

Теорема 3.21. *Допустимый многогранник* P_σ *такой, что* $\dim P_\sigma = n-1$, *является либо гиперсимплексом* $\Delta_{n,2}$, *либо пересечением гиперсимплекса* $\Delta_{n,2}$ *с допустимой совокупностью* $\mathcal{H}$.

Из этой теоремы следует, что любой многогранник, который может быть получен пересечением с $\Delta_{n,2}$ полупространства вида $\sum_{s \in S} x_s \le 1$, где $S \subset \{1, \dots, n\}$, $\|S\| = k$ и $2 \le k \le n-2$, является допустимым $(n-1)$-мерным многогранником. Более того, любой многогранник, который может быть получен пересечением с $\Delta_{n,2}$ пересечения двух полупространств вида $\sum_{i \in I} x_i \le 1$ и $\sum_{j \in J} x_j \le 1$ таких, что $I \cap J = \varnothing$, является допустимым многогранником, где $\|I\|, \|J\| \ge 2$. Продолжая таким образом, мы опишем все допустимые многогранники размерности $n-1$.

Доказательство теоремы 3.21. Любой допустимый многогранник P_σ размерности $n-1$, не являющийся гиперсимплексом $\Delta_{n,2}$, имеет такую гипергрань Q, что $Q \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \ne \varnothing$.

1. Если P_σ имеет только одну такую грань Q, то согласно теореме 3.12 многогранник P_σ задается теми точками из $\Delta_{n,2}$, которые удовлетворяют одному из неравенств $\sum_{i \in I} x_i \le 1$ или $\sum_{i \in I} x_i \ge 1$ для некоторого $I \subset \{1, \dots, n\}$, $\|I\| = l$ и $2 \le l \le [n/2]$. Так как точки из $\Delta_{n,2}$ удовлетворяют уравнению $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2$, мы получаем, что второе неравенство эквивалентно неравенству $\sum_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus I} x_j \le 1$.

2. Предположим, что многогранник P_σ имеет две гиперграни Q_1 и Q_2, $Q_k \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \ne \varnothing$, $k = 1, 2$, которые задаются плоскостями

$$\sum_{i \in I} x_i = 1 \qquad \text{и} \qquad \sum_{j \in J} x_j = 1. \tag{3.5}$$

Уравнения (3.5) эквивалентны уравнениям

$$\sum_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus I} x_i = 1 \qquad \text{и} \qquad \sum_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus J} x_j = 1, \tag{3.6}$$

где $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, $\|I\|, \|J\| \ge 2$. Следовательно, мы всегда можем считать, что P_σ задается неравенствами

$$\sum_{i \in I} x_i \le 1 \qquad \text{и} \qquad \sum_{j \in J} x_j \le 1. \tag{3.7}$$

Таким образом, согласно лемме 3.18 получаем $I \cap J = \varnothing$.

Рассуждая по индукции, можно аналогично доказать утверждение для допустимого многогранника P_σ с произвольным конечным числом гиперграней, имеющих непустое пересечение с $\mathring{\Delta}_{n,2}$. $\square$

Суммируя предыдущие результаты, получаем следующее описание множества допустимых многогранников.

Теорема 3.22. *Пусть* $\Pi = \{\pi_S : S \subset \{1,\dots,n\},\ \|S\| = p,\ 2 \le p \le [n/2]\}$ *— конфигурация гиперплоскостей, заданных уравнениями* $\pi_S : \sum_{i\in S} x_i = 1$.

1. *Любой допустимый многогранник* P_σ *размерности* $n-2$ *такой, что* $P_\sigma \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \ne \varnothing$, *является пересечением гиперсимплекса* $\Delta_{n,2}$ *с некоторой гиперплоскостью* $\pi_S \in \Pi$.

2. *Любой допустимый многогранник* P_σ *размерности* $n-1$ *такой, что* $P_\sigma \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \ne \varnothing$, *является пересечением гиперсимплекса* $\Delta_{n,2}$ *с допустимой совокупностью полупространств, заданных неравенствами* $\pi_S^- : \sum_{i\in S} x_i \le 1$ *или неравенствами* $\pi_S^+ : \sum_{i\in S} x_i \ge 1$, *где* $\pi_S \in \Pi$.

Следствие 3.23. *Любой допустимый многогранник* P_σ *размерности* $n-2$, *лежащий на границе* $\partial\Delta_{n,2}$, *есть один из следующих многогранников*:

- *гиперсимплекс* $\Delta_{n-1,2}(i) \subset \Delta_{n,2}$, *заданный уравнением* $x_i = 0$ *для некоторого* i, $1 \le i \le n$;
- *симплекс* $\Delta^{n-2}(i) = \Delta_{n-1,1}(i) \subset \Delta_{n,2}$, *заданный уравнением* $x_i = 1$ *для некоторого* i, $1 \le i \le n$;
- *пересечение гиперсимплекса* $\Delta_{n-1,2}(i)$ *с допустимой совокупностью полупространств, заданных неравенствами* $\pi_S^-(i) : \sum_{j\in S,\, j\ne i} x_j \le 1$ *или неравенствами* $\pi_S^+(i) : \sum_{j\in S,\, j\ne i} x_j \ge 1$, *где* $\pi_S \in \Pi$ *и* $1 \le i \le n$.

Теорема 3.22 и следствие 3.23 позволяют индукцией по n получить комбинаторно-геометрическое описание множества всех допустимых многогранников в гиперсимплексе $\Delta_{n,2}$.

Из теоремы 3.21 получаем

Пример 3.24. Трехмерными допустимыми многогранниками для $G_{4,2}$ являются гиперсимплекс $\Delta_{4,2}$ и его пересечения с полупространствами $x_i + x_j \le 1$, $1 \le i < j \le 4$. Существует $\binom{4}{2} = 6$ таких многогранников, и они задаются четырехсторонними пирамидами.

Пример 3.25. Четырехмерными допустимыми многогранниками для $G_{5,2}$ являются гиперсимплекс $\Delta_{5,2}$ и его пересечения

(1) с полупространствами $x_i + x_j \le 1$, $1 \le i < j \le 5$;

(2) с полупространствами $x_i + x_j + x_k \le 1$, $1 \le i < j < k \le 5$, или, что эквивалентно, с полупространствами $x_p + x_q \ge 1$, $1 \le p \le q \le 5$;

(3) с пересечением полупространств $x_i + x_j \le 1$ и $x_p + x_q \le 1$, где $\{i,j\} \cap \{p,q\} = \varnothing$, $1 \le i < j \le 5$, $1 \le p < q \le 5$.

Существует десять многогранников типа (1), и все они имеют девять вершин; существует десять многогранников типа (2), и каждый из них имеет семь вершин; существует 15 многогранников типа (3), и каждый из них имеет восемь вершин.

Пример 3.26. Пятимерными допустимыми многогранниками для $G_{6,2}$ являются гиперсимплекс $\Delta_{6,2}$ и его пересечения

(1) с полупространствами $x_i + x_j \le 1$, $1 \le i < j \le 6$;

(2) с полупространствами $x_i + x_j + x_k \le 1$, $1 \le i < j < k \le 6$;

(3) с полупространствами $x_i + x_j + x_k + x_l \le 1$, $1 \le i < j < k < l \le 6$, или, что эквивалентно, с полупространствами $x_p + x_q \ge 1$, $1 \le p < q \le 6$;

(4) с пересечениями полупространств $x_i + x_j \le 1$ и $x_p + x_q \le 1$, где $\{i,j\} \cap \{p,q\} = \varnothing$, $1 \le i < j \le 6$, $1 \le p < q \le 6$;

(5) с пересечениями полупространств $x_i + x_j \le 1$ и $x_p + x_q + x_s \le 1$, где $\{i,j\} \cap \{p,q,s\} = \varnothing$, $1 \le i < j \le 6$, $1 \le p < q < s \le 6$.

Количество этих многогранников и число их вершин суть 15 и 14 для типа (1), 20 и 12 для типа (2), 15 и 9 для типа (3), 45 и 13 для типа (4), 60 и 11 для типа (5).

4. ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ $G_{n,2}$

Алгебраический тор $(\mathbb{C}^*)^n$ действует канонически на $G_{n,2}$ и задает каноническое действие компактного тора $T^n \subset (\mathbb{C}^*)^n$. Страты $W_\sigma \subset G_{n,2}$ инвариантны относительно $(\mathbb{C}^*)^n$-действия, и соответствующие пространства орбит $F_\sigma = W_\sigma/(\mathbb{C}^*)^n$ называются *пространствами параметров стратов*. В этом разделе согласно индуктивному подходу обсуждаются пространства параметров F_σ стратов W_σ, допустимые многогранники которых имеют непустое пересечение с $\mathring{\Delta}_{n,2}$. Будет показано, что пространство $\mathcal{F}_n$, описанное в [9], является универсальным пространством параметров для $G_{n,2}$, и будут описаны виртуальные пространства параметров этих стратов.

В наших работах [7] и [8] введены универсальное пространство параметров $\mathcal{F}_n$ и виртуальные пространства параметров $\widetilde{F}_\sigma$ стратов W_σ. В этом разделе мы, следуя [9], собрали результаты о $\mathcal{F}_n$ и $\widetilde{F}_\sigma$, необходимые для достижения целей настоящей работы.

4.1. Пространства параметров стратов в $G_{n,2}$. Зафиксируем карту M_{12}. Она является открытым всюду плотным подмногообразием в $G_{n,2}$. Наличие действия группы S_n на $G_{n,2}$ позволяет описать пространства параметров, используя только координаты этой карты. Точки карты M_{12} можно отождествить с блочными $(n\times 2)$-матрицами вида $(I_2, V)^{\mathrm{T}}$, где I_2 — единичная (2×2)-матрица и вектор-строки $z = (z_3, \dots, z_n)$, $w = (w_3, \dots, w_n)$ матрицы V задают координаты в карте M_{12}. (Здесь и далее T — знак транспонирования.)

Карты инвариантны относительно действия алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^n$. Действие точки $t = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ в локальных координатах карты M_{12} принимает вид

$$t(z,w) = \left(\frac{t_3}{t_1}z_3, \dots, \frac{t_n}{t_1}z_n, \frac{t_3}{t_2}w_3, \dots, \frac{t_n}{t_2}w_n\right). \tag{4.1}$$

Положим $\tau_1 = t_3/t_1$, $\dots$, $\tau_{n-2} = t_n/t_1$, $\tau_{n-1} = t_3/t_2$. Тогда

$$\frac{t_i}{t_2} = \frac{\tau_{i-2}\,\tau_{n-1}}{\tau_1}, \qquad 4 \le i \le n.$$

4.1.1. *Главный страт.* Главный страт W_n характеризуется тем, что все его точки имеют ненулевые координаты Плюккера, поэтому W_n принадлежит любой карте и его допустимым многогранником является гиперсимплекс $\Delta_{n,2}$.

Координаты (z, w) точек главного страта в карте M_{12} удовлетворяют системе уравнений

$$c'_{ij} z_i w_j = c_{ij} z_j w_i, \qquad 3 \le i < j \le n, \tag{4.2}$$

где $(c'_{ij} : c_{ij}) \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ — параметры и $c_{ij}, c'_{ij} \ne 0$, $c_{ij} \ne c'_{ij}$ для всех $3 \le i < j \le n$.

Количество параметров равно $N = \binom{n-2}{2}$, и из (4.2) следует, что эти параметры удовлетворяют системе уравнений

$$c'_{ij} c_{ik} c'_{jk} = c_{ij} c'_{ik} c_{jk}, \qquad 3 \le i < j < k \le n, \tag{4.3}$$

в частности уравнениям

$$c'_{3i} c_{3j} c'_{ij} = c_{3i} c'_{3j} c_{ij}, \qquad 4 \le i < j \le n. \tag{4.4}$$

Количество уравнений (4.4) равно $M = \binom{n-3}{2}$. Из (4.4) получаем

$$(c_{ij} : c'_{ij}) = (c'_{3i} c_{3j} : c_{3i} c'_{3j}), \qquad 4 \le i < j \le n, \tag{4.5}$$

$$(c_{3i} : c'_{3i}) \ne (c_{3j} : c'_{3j}), \qquad 4 \le i < j \le n. \tag{4.6}$$

Из уравнений (4.3) и (4.4) вытекает

Лемма 4.1. *Для любой карты M_{ij} определено пространство $F_{n,ij}$, которое реализует пространство параметров $F_n = W_n/(\mathbb{C}^*)^n$ в терминах локальных координат этой карты и определяет вложение пространства F_n в $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^N$, $N = \binom{n-2}{2}$.*

Пространство $F_{n,ij}$ является открытым алгебраическим многообразием в $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^N$, заданным пересечением кубических гиперповерхностей (4.3) и условиями $(c_{ij} : c'_{ij}) \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1_A = \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus A$, где $A = \{(1:0), (0:1), (1:1)\}$.

Размерность пространства F_n равна $2(n-3)$, т.е. в точности совпадает с $2(N-M)$, где $M = \binom{n-3}{2}$.

В работе [9] доказана

Теорема 4.2. *Компактификация $\overline{F}_{n,ij}$ пространства $F_{n,ij}$ в $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^N$ является гладким многообразием.*

Замечание 4.3. Так как главный страт W_n лежит в пересечении всех карт, то функции перехода от координат одной карты к координатам другой задают гомеоморфизмы алгебраических многообразий $F_{n,ij}$. Как указано в [7, 9], эти гомеоморфизмы в общем случае *не продолжаются* даже до непрерывных отображений $\overline{F}_{n,ij}$.

4.1.2. *Произвольные страты.* Страт W_σ состоит из точек многообразия $G_{n,2}$, у которых некоторые фиксированные координаты Плюккера равны нулю. Если $W_\sigma \subset M_{12}$, то он определяется условиями $P^{1i} = 0$, $P^{2j} = 0$ и $P^{pq} = 0$ для некоторых i, j и p, q, где $3 \le i, j \le n$, $3 \le p < q \le n$. В локальных координатах карты M_{12} эти условия принимают вид $w_i = z_j = 0$ и $z_p w_q = z_q w_p$. Следовательно, согласно [8, лемма 14.10] любой страт $W_\sigma \subset M_{12} \simeq \mathbb{C}^{2(n-2)}$ получается сужением поверхностей (4.2) на некоторое координатное подпространство $\mathbb{C}^J \subset \mathbb{C}^{2(n-2)}$, где $J \subset \{(3,3), (3,4), \dots, (n-1,n), (n,n)\}$ и $\|J\| = l$ для некоторого $0 \le l \le (n-2)^2$. В частности, если допустимый многогранник P_σ страта W_σ имеет максимальную размерность $n-1$, то $l \ge n-1$. Следовательно, если пространство параметров $F_\sigma = W_\sigma/(\mathbb{C}^*)^n$ страта W_σ не является точкой, то оно может быть получено ограничением пересечения кубических гиперповерхностей (4.3) на некоторое произведение q экземпляров пространства $\mathbb{C}\mathrm{P}^1_B = \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus B$ в $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^N$, где $B = \{(1:0), (0:1)\}$ и $0 \le q \le l$.

Мы можем сказать больше о пространстве F_σ.

Предложение 4.4. *Пусть $\{1,2\} \in \sigma$, т.е. $W_\sigma \subset M_{12}$. Положим*

$$N_{\sigma,12} = N - \big\|\{(i,j)\colon\ z_i w_j = z_j w_i = 0,\ 3 \le i < j \le n\}\big\| \ne 0.$$

Тогда для пространства параметров $F_\sigma = F_{\sigma,12}$, записанного в координатах карты M_{12}, определено вложение $\xi_{\sigma,12}\colon F_{\sigma,12} \to (\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{N_{\sigma,12}}$.

Доказательство. Пространство параметров $F_{\sigma,12}$ страта $W_\sigma \subset M_{12}$ в координатах карты M_{12} задается точками $(c_{ij} : c'_{ij}) \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, $3 \le i < j < k \le n$, такими, что $c'_{ij} c_{ik} c'_{jk} = c_{ij} c'_{ik} c_{jk}$ и точки $(c_{ij} : c'_{ij})$ таковы:

- любая точка $(c_{ij} : c'_{ij})$, если $z_i w_j, z_j w_i \ne 0$ и $z_i w_j \ne z_j w_i$, $3 \le i < j \le n$;
- $(1:0)$, если $z_i w_j = 0$ и $z_j w_i \ne 0$;
- $(0:1)$, если $z_i w_j \ne 0$ и $z_j w_i = 0$;
- $(1:1)$, если $z_i w_j = z_j w_i \ne 0$.

Используя определение числа $N_{\sigma,12}$, получаем требуемое. $\square$

Замечание 4.5. Числа $N_{\sigma,ij}$ для стратов $W_\sigma \subset M_{ij}$ и вложения $\xi_{\sigma,ij}\colon F_{\sigma,ij} \to (\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{N_{\sigma,ij}}$ можно определить по аналогии для произвольных $\{i,j\} \in \sigma$.

Лемма 4.6. *Если $N_{\sigma,ij} = 0$ для некоторой пары $\{i,j\} \in \sigma$, то $N_{\sigma,kl} = 0$ для всех $\{k,l\} \in \sigma$ и F_σ является точкой.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\{i,j\} = \{1,2\}$. Пусть $z_k \neq 0$ при некотором k, $3 \leq k \leq n$, для страта $W_\sigma \subset M_{12}$. Тогда из условия $N_{\sigma,12} = 0$ вытекает, что $w_l = 0$ для всех l, $3 \leq l \neq k \leq n$. Если при этом $w_k = 0$, то страт W_σ состоит из одной орбиты и принадлежит пересечению карт M_{12} и M_{2l}, где $z_l \neq 0$, $3 \leq l \leq n$. В этом случае очевидно, что $N_{\sigma,2l} = 0$.

Теперь предположим, что $w_k \neq 0$. Тогда $z_l = 0$ для всех $l \neq k$ и мы получаем, что страт W_σ состоит из одной орбиты и принадлежит пересечению карт M_{12}, M_{1k} и M_{2k}. Нетрудно проверить, что в этом случае $N_{\sigma,1k} = N_{\sigma,2k} = 0$. Таким образом, в любом случае F_σ — точка. $\square$

Отметим важный факт: в общем случае числа $N_{\sigma,ij}$ и $N_{\sigma,kl}$, а также вложения $\xi_{\sigma,ij}\colon F_{\sigma,ij} \to (\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{N_{\sigma,ij}}$ и $\xi_{\sigma,kl}\colon F_{\sigma,kl} \to (\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{N_{\sigma,kl}}$ различны для разных пар $\{i,j\}$, $\{k,l\}$ из σ (см. пример ниже).

Пример 4.7. Рассмотрим страт $W_\sigma \subset G_{5,2}$, определенный условиями $P^{34} = P^{35} = P^{45} = 0$ и $P^{ij} \neq 0$ для других пар i,j, $1 \leq i < j \leq 5$. В этом случае F_σ — точка. Имеем $\{1,2\}, \{1,3\} \in \sigma$ и $N_{\sigma,12} = 3$, а $N_{\sigma,13} = 2$. Образом отображения $\xi_{\sigma,12}\colon F_{\sigma,12} \to (\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^3$ является точка $((1:1),(1:1),(1:1))$, а образом отображения $\xi_{\sigma,13}\colon F_{\sigma,13} \to (\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^2$ — точка $((0:1),(0:1))$.

Обозначим через $\overline{F}_{n,ij}$ замыкание образа пространства $F_{n,ij}$ в $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^N$. Из предложения 4.4 получаем

Следствие 4.8. *Для любой пары $\{i,j\} \in \sigma$ определена каноническая проекция $\overline{F}_{n,ij} \to \overline{F}_{\sigma,ij}$.*

Предложение 4.9. *Если допустимый многогранник P_σ страта W_σ имеет непустое пересечение с $\mathring{\Delta}_{n,2}$ и $\dim P_\sigma = n-2$, то пространство параметров F_σ является точкой.*

Доказательство. Так как $\mathring{P}_\sigma \subset \mathring{\Delta}_{n,2}$, то из леммы 3.4 следует, что каждая точка $L \in W_\sigma$ в координатах карты M_{12} имеет ненулевые координаты z_i, w_j для некоторых $3 \leq i,j \leq n$. В силу действия симметрической группы можно считать, что $z_i \neq 0$ при $3 \leq i \leq l$, где $3 \leq l \leq n-1$. Условие $l \leq n-1$ вытекает из того, что $\dim P_\sigma = n-2$, поэтому стабилизатор T_σ действия тора T^n на W_σ имеет размерность 2 и мы получаем, что тор $T^\sigma = T^{n-2}$ свободно действует на W_σ. Отсюда следует, что точки $L \in W_\sigma$ в карте M_{12} должны иметь координаты (z,w) вида $z = (z_3,\dots,z_l,0,\dots,0)$, $w = (0,\dots,0,w_{l+1},\dots,w_n)$. Но в этом случае страт W_σ должен состоять из одной $(\mathbb{C}^*)^n$-орбиты, и поэтому F_σ — точка. $\square$

4.2. Универсальное пространство параметров для $G_{n,2}$. Универсальное пространство параметров $\mathcal{F}$ общего $(2n,k)$-многообразия M^{2n} с эффективным действием компактного тора T^k, $k \leq n$, введено и аксиоматизировано в [8]. Оно является компактификацией пространства параметров F главного страта. Отсюда сразу вытекает, что универсальным пространством параметров $\mathcal{F}_4$ для грассманиана $G_{4,2}$ является $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Универсальное пространство параметров для грассманиана $G_{5,2}$ с каноническим T^5-действием описано в явном виде в [7].

В [23] рассмотрено вложение $F_n \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^L$, $L = \binom{n}{4}$, при помощи двойного отношения координат Плюккера (см. также [28]). Показано, что замыкание образа этого вложения совпадает с универсальным пространством $\mathcal{F}_n$. Это позволило, используя результаты работ [28, 17], отождествить пространство $\mathcal{F}_n$ с фактором Чжоу $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$.

В работе [9] мы построили гладкое компактное многообразие $\mathcal{F}_n$, $n \geq 4$, на основе метода замечательной компактификации, хорошо известного в алгебраической геометрии, и доказали, что это многообразие диффеоморфно фактору Чжоу $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$. В данной работе мы показываем, что многообразие $\mathcal{F}_n$ можно отождествить с нашим универсальным пространством параметров.

Зафиксируем карту M_{12} и рассмотрим некоторый страт $W_\sigma \subset M_{12}$. Как уже отмечалось выше, в координатах карты M_{12} этот страт определяется уравнениями $z_s = w_m = 0$ и $z_i w_j = z_j w_i$ для некоторых $3 \le s, m \le n$ и $3 \le i < j \le n$. Главный страт W_n лежит в карте M_{12} и задается уравнениями (4.2).

Аксиоматическое определение пространства $\mathcal{F}_n$ для $G_{n,2}$, $n \ge 4$, требует, чтобы $\mathcal{F}_n$ было

- гладким многообразием;
- компактификацией пространства параметров главного страта F_n;
- объединением виртуальных пространств параметров $\widetilde{F}_\sigma$ всех стратов W_σ.

Пространство F_n лежит в пересечении всех карт M_{ij} многообразия $G_{n,2}$. Действие группы S_n на $G_{n,2}$ задает ее транзитивное действие на множестве карт $\{M_{ij}\}$. Обозначим через $F_{n,ij}$ многообразие F_n, записанное в координатах карты M_{ij}. Ясно, что действие группы S_n на $G_{n,2}$ задает ее представление в группе диффеоморфизмов открытого гладкого многообразия F_n. Мы требуем, чтобы каждый диффеоморфизм многообразия F_n, заданный функциями перехода из одной карты в другую, однозначно продолжался до диффеоморфизма многообразия $\mathcal{F}_n$.

Это позволило нам построить универсальное пространство параметров $\mathcal{F}_n$ и виртуальные пространства параметров $\widetilde{F}_\sigma$ всех стратов W_σ, используя только координаты карты M_{12}.

Мы используем вложение $F_n \subset (\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^N$, $N = \binom{n-2}{2}$. Замыкание $\overline{F}_n$ образа F_n в $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^N$ представляет собой пересечение гиперповерхностей в $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^N$, которые задаются уравнениями (4.3). Исходя из описанных выше требований к пространству $\mathcal{F}_n$, в [9] доказана следующая теорема (в терминологии и обозначениях работы [27]).

Пусть $Y = \overline{F}_n$.

Теорема 4.10. *Пусть $\mathcal{F}_n$ — гладкое компактное многообразие, полученное замечательной компактификацией с производящим множеством $\mathcal{G} = \mathcal{G}_n = \bigl\{G = \bigcap_I \widehat{F}_I \subset Y\bigr\}$, где $\widehat{F}_I = Y \cap \{(c_{ik} : c'_{ik}) = (c_{il} : c'_{il}) = (c_{kl} : c'_{kl}) = (1:1)\}$, $I = \{i,k,l\}$, $1 \le i < k < l \le n$. Тогда любой гомеоморфизм $f_{ij,kl}\colon F_{n,ij} \to F_{n,kl}$, индуцированный переходом от координат в карте M_{ij} к координатам в карте M_{kl}, продолжается до гомеоморфизма многообразия $\mathcal{F}_n$.*

Используя этот результат, можно построить виртуальные пространства $\widehat{F}_\sigma$ стратов $W_\sigma \subset G_{n,2}$, $n \ge 4$, аналогично тому, как это подробно описано в [7] для $n = 5$. Любому страту W_σ поставим в соответствие виртуальное пространство параметров $\widetilde{F}_{\sigma,12} \subset \mathcal{F}_n$ в карте M_{12}, используя тот факт, что главный страт W_n является плотным множеством в $G_{n,2}$. Для этого надо рассмотреть два случая.

1. Если $W_\sigma \subset M_{12}$, то определим пространство $\widetilde{F}_{\sigma,12} \subset \mathcal{F}_n$, используя описание главного страта и страта W_σ в локальных координатах карты M_{12} (см. (4.2)). С помощью предложения 9.10 из [7] в этом случае можно непосредственно показать, что $\widetilde{F}_{\sigma,12}$ не зависит (с точностью до гомеоморфизма) от выбора карты, содержащей страт W_σ.

2. Если $W_\sigma \cap M_{12} = \varnothing$, то выберем такую карту M_{ij}, что $W_\sigma \subset M_{ij}$, и поставим в соответствие страту W_σ пространство $\widetilde{F}_{\sigma,ij}$ аналогично случаю 1. Затем, используя гомеоморфизм $\widetilde{f}_{ij,12}\colon \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_n$, существующий согласно теореме 4.10, поставим в соответствие страту W_σ такое подмножество $\widetilde{F}_{\sigma,12} \subset \mathcal{F}_n$, что $\widetilde{F}_{\sigma,12} = \widetilde{f}_{ij,12}(\widetilde{F}_{\sigma,ij})$. Используя предложение 9.11 из [7], в этом случае можно непосредственно показать, что пространство $\widetilde{F}_{\sigma,12}$ не зависит от выбора карты M_{ij}, содержащей страт W_σ.

Замечание 4.11. Действие симметрической группы S_n на $G_{n,2}$ позволяет описанную выше конструкцию в координатах карты M_{12} провести в координатах произвольной карты M_{ij}, т.е. каждому страту W_σ можно поставить в соответствие пространство $\widetilde{F}_{\sigma,ij} \subset \mathcal{F}_n$.

Замечание 4.12. Согласно (4.2) в случае главного страта W_n выполняется тождество $\widetilde{F}_{ij} \cong F_n$ для любой карты M_{ij}. Более того, если страт W_σ определяется условием равенства нулю только одной координаты Плюккера, то из (4.2) также следует тождество $\widetilde{F}_{\sigma,ij} \cong F_\sigma$. Это справедливо и для стратов W_σ, имеющих ровно две нулевые координаты Плюккера P^{ij} и P^{kl}, где $i,j \neq k,l$. Из (4.2) следует, что для всех остальных стратов W_σ пространства параметров $\widetilde{F}_\sigma$ и F_σ не гомеоморфны. Ясно,что виртуальное пространство параметров $\widetilde{F}_\sigma$ “больше” пространства F_σ. Например, пространство параметров страта в $G_{n,2}$, определяемое равенствами $P^{13} = P^{14} = P^{34} = 0$, согласно обсуждению, предшествующему предложению 4.4, гомеоморфно $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1_A)^{(n-4)(n-5)/2}$ с учетом соотношений вида (4.3). Согласно (4.2) виртуальное пространство параметров этого страта гомеоморфно пространству $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times (1:0)^{2n-8} \times (\mathbb{C}\mathrm{P}^1_A)^{(n-4)(n-5)/2}$ с учетом соотношений (4.3).

Можно непосредственно проверить, что для произвольной карты M_{ij} верно равенство (ср. [9])

$$\bigcup_\sigma \widetilde{F}_{\sigma,ij} = \mathcal{F}_n. \tag{4.7}$$

Замечание 4.13. Чтобы проиллюстрировать равенство (4.7), мы, следуя [7], рассмотрим многообразие Грассмана $G_{5,2}$ и зафиксируем карту M_{12}. В [7] показано, что $\overline{F}_5 = \bigcup_{W_\sigma \subset M_{12}} F_\sigma$. В процедуре замечательной компактификации пространство $\mathcal{F}_5$ получается раздутием пространства $\overline{F}_5 \subset (\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^3$ в точке $S = ((1:1),(1:1),(1:1))$. Пусть в карте M_{12} страт $W_\sigma \subset (\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^3$ задается условиями $P^{34} = P^{35} = P^{45} = 0$ и $P^{ij} \neq 0$ для всех остальных i, j. Пространством параметров этого страта является точка S. Виртуальное пространство параметров для W_σ мы можем получить в явном виде, если запишем этот страт в локальных координатах карты M_{13}. А именно, в локальных координатах карты M_{13} страт W_σ записывается уравнениями $z_2, z_4, z_5 = 0$. Следовательно, из (4.2) получаем $\widetilde{F}_{\sigma,13} = (1:0) \times (1:0) \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, откуда вытекает, что $\widetilde{F}_{\sigma,12} \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, т.е. пространство $\widetilde{F}_{\sigma,12}$ гомеоморфно исключительному дивизору в точке S.

Аналогично тому, как это было сделано для $G_{5,2}$ в [7, Sect. 9.2], можно доказать

Предложение 4.14. *Существует каноническая проекция $g_{\sigma,ij}\colon \widetilde{F}_{\sigma,ij} \to F_\sigma$ для любого допустимого множества σ и любой карты M_{ij}.*

Замечание 4.15. Далее в обозначениях виртуального пространства параметров страта W_σ мы будем опускать индексы карт и писать только $\widetilde{F}_\sigma$.

Доказательство теоремы 11.1 из [7] для $G_{5,2}$ непосредственно обобщается на $G_{n,2}$, $n \geq 6$, и тем самым условие (c) аксиомы 6 для $(2n,k)$-многообразий из [8] выполняется в случае многообразия $G_{n,2}$. Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 4.16. *Пространство $\mathcal{F}_n$ является универсальным пространством параметров для $G_{n,2}$.*

Пример 4.17. Как уже было отмечено выше, универсальное пространство параметров $\mathcal{F}_5$ получается в виде раздутия гладкого алгебраического многообразия

$$\overline{F}_5 = \bigl\{((c_{34}:c'_{34}),(c_{35}:c'_{35}),(c_{45}:c'_{45})) \in (\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^3\colon\ c'_{34}c_{35}c'_{45} = c_{34}c'_{35}c_{45}\bigr\}$$

в точке $((1:1),(1:1),(1:1))$. Этот результат получен в [7] (см. также подробности в [9]).

Пример 4.18. При $n=6$ универсальное пространство параметров $\mathcal{F}_6$ получается из алгебраического многообразия $\overline{F}_6 \subset (\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^6$, заданного уравнениями

$$c'_{34}c_{35}c'_{45} = c_{34}c'_{35}c_{45}, \quad c'_{34}c_{36}c'_{46} = c_{34}c'_{36}c_{46}, \quad c'_{35}c_{36}c'_{56} = c_{35}c'_{36}c_{56}, \quad c'_{45}c_{46}c'_{56} = c_{45}c'_{46}c_{56},$$

процедурой замечательной компактификации с производящим множеством, состоящим из подмногообразий

$$\overline{F}_{345} = \overline{F} \cap \{(c_{34} : c'_{34}) = (c_{35} : c'_{35}) = (c_{45} : c'_{45}) = (1:1)\},$$
$$\overline{F}_{346} = \overline{F} \cap \{(c_{34} : c'_{34}) = (c_{36} : c'_{36}) = (c_{46} : c'_{46}) = (1:1)\},$$
$$\overline{F}_{356} = \overline{F} \cap \{(c_{35} : c'_{35}) = (c_{36} : c'_{36}) = (c_{56} : c'_{56}) = (1:1)\},$$
$$\overline{F}_{456} = \overline{F} \cap \{(c_{45} : c'_{45}) = (c_{46} : c'_{46}) = (c_{56} : c'_{56}) = (1:1)\}$$

и точки $S = (1:1)^6$.

5. КРИТИЧЕСКИЕ И ОСОБЫЕ ТОЧКИ ПРОСТРАНСТВА ОРБИТ $G_{n,2}/T^n$

5.1. Критические точки. Рассмотрим отображение моментов $\mu_n\colon G_{n,2} \to \Delta_{n,2} \subset \mathbb{R}^n$. Как отображение в $\mathbb{R}^n$ оно является гладким, и можно стандартным способом из математического анализа определить критические точки и критические значения этого отображения. В [8] доказано, что точка $L \in G_{n,2}$ является критической точкой отображения моментов μ_n тогда и только тогда, когда для T^{n-1}-действия на $G_{n,2}$, где $T^{n-1} = \mathbb{T}^n/\mathrm{diag}(\mathbb{T}^n)$, стабилизатор этой точки нетривиален. Это равносильно тому, что допустимый многогранник страта, содержащего точку L, имеет размерность, меньшую максимально возможной размерности $n-1$.

Будем говорить, что точка $[L] \in G_{n,2}/T^n$ является *критической точкой*, если точка $L \in G_{n,2}$ является критической в указанном выше смысле. Это определение корректно, так как, очевидно, свойство быть критической точкой в $G_{n,2}$ инвариантно для T^n-действия.

Критические точки в $G_{n,2}/T^n$ можно характеризовать как особые точки пространства орбит, используя теорему о трубчатой окрестности орбит в $G_{n,2}$. А именно, эта теорема утверждает, что для любой точки $L \in G_{n,2}$ существует T^n-эквивариантный диффеоморфизм между векторным расслоением $T^n \times_{T_L} V$ и окрестностью орбиты $T^n \cdot L$ в $G_{n,2}$, где T_L — стабилизатор точки L, а V — нормальное расслоение касательного подрасслоения $T(T^n \cdot L)$ в расслоении $(TG_{n,2})_{T^n \cdot L}$. Отсюда следует, что в пространстве орбит $G_{n,2}/T^n$ существует окрестность точки, определенная орбитой $T^n \cdot L$, которая имеет вид $(T^n \times_{T_L} V)/T^n = V^{T_L} \times \mathrm{cone}(S(U)/T_L)$, где $V^{T_L} \subset V$ — подпространство неподвижных точек действия тора T_L на V, $U \subset V$ — подпространство, определенное разложением $V = V^{T_L} \oplus U$ относительно некоторой T^n-инвариантной метрики на $G_{n,2}$, и $S(U)$ — соответствующая единичная сфера в U. Таким образом, точка пространства орбит $G_{n,2}/T^n$, определенная точкой $L \in G_{n,2}$ с нетривиальным стабилизатором, имеет окрестность с конической особенностью. В этих терминах в [6] описаны все особенности пространства орбит $G_{4,2}/T^4 \cong S^5$.

5.2. Особые точки. Каждому страту $W_\sigma \subset G_{n,2}$ мы ставим в соответствие пространство параметров F_σ и виртуальное пространство параметров $\widetilde{F}_\sigma$. Как показано на примере (см. замечание 4.12), эти пространства, вообще говоря, не гомеоморфны. Будем говорить, что точка $L \in G_{n,2}$ является особой точкой T^n-действия на $G_{n,2}$, если пространство параметров F_σ страта W_σ такого, что $L \in W_\sigma$, не гомеоморфно виртуальному пространству параметров $\widetilde{F}_\sigma$. Поскольку понятия пространств параметров и виртуальных пространств параметров, очевидно, инвариантны относительно стандартного T^n-действия, мы можем определить понятие особой точки в пространстве орбит $G_{n,2}/T^n$.

Определение 5.1. Точка $[L] = T^n \cdot L \in G_{n,2}/T^n$ называется *особой точкой* пространства орбит стандартного T^n-действия на $G_{n,2}$, если пространство параметров F_σ страта W_σ, $L \in W_\sigma$, не гомеоморфно виртуальному пространству параметров $\widetilde{F}_\sigma$.

Заметим, что если точка L страта W_σ особая, то и все точки этого страта будут особыми.

Особые точки можно охарактеризовать в терминах координат Плюккера следующим образом.

Предложение 5.2. *Точка $[L] \in G_{n,2}/T^n$ является особой точкой тогда и только тогда, когда существует такое i, $1 \leq i \leq n$, что $P^{ij}(L) = 0$ для всех $j \neq i$, $1 \leq j \leq n$, или существует такая тройка (i,j,k), $1 \leq i < j < k \leq n$, что $P^{ij}(L) = P^{ik}(L) = P^{jk}(L) = 0$.*

Доказательство. Пусть $[L]$ — особая точка в $G_{n,2}/T^n$ и $L \in W_\sigma$. Прежде всего заметим, что все точки из W_σ имеют одни и те же нулевые координаты Плюккера. Для $P_\sigma \subset \partial\Delta_{n,2}$ из леммы 3.3 следует, что P_σ принадлежит плоскости $x_i = 0$ или плоскости $x_i = 1$ для некоторого i, $1 \leq i \leq n$. Следовательно, $P^{ij}(L) = 0$ для всех $j \neq i$ или $P^{jk}(L) = 0$ для всех $j,k \neq i$. Таким образом, точка L удовлетворяет условию утверждения. Пусть $P_\sigma \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \neq \varnothing$. Без ограничения общности можно считать, что вершина Λ_{12} принадлежит P_σ. Тогда W_σ принадлежит карте M_{12}. Пусть $z_3, \ldots, z_n, w_3, \ldots, w_n$ — локальные координаты в этой карте. Так как F_σ не гомеоморфно пространству $\widetilde{F}_\sigma$ и $P_\sigma \not\subset \partial\Delta_{n,2}$, то существуют такие i, j, $3 \leq i < j \leq n$, что $z_i = z_j = 0$ или $w_i = w_j = 0$. Отсюда следует, что $P^{2i}(L) = P^{2j}(l) = P^{ij}(L) = 0$ или $P^{1i}(L) = P^{1j}(L) = P^{ij}(L) = 0$, т.е. утверждение верно.

При доказательстве обратного утверждения мы также можем предположить, что $W_\sigma \subset M_{12}$ и что $i = 1$. Тогда существуют такие $j,k \geq 3$, что в локальных координатах карты M_{12} выполняются равенства $w_j = w_k = 0$. Используя уравнения (4.2), получаем, что F_σ и $\widetilde{F}_\sigma$ не гомеоморфны, они отличаются как минимум на $\mathbb{C}P^1$. $\square$

Следствие 5.3. *Если $\widehat{\mu}([L]) \in \partial\Delta_{n,2}$, то точка $[L]$ является особой.*

Для любой пары $\{i,j\} \in \sigma$ определено число $N_{\sigma,ij}$ (см. замечание 4.5). Из предложения 5.2 вытекает

Следствие 5.4. *Если $[L] \in W_\sigma/T^n$ и $N_{\sigma,ij} < N$ для некоторой пары $\{i,j\} \in \sigma$, то точка $[L]$ особая.*

5.3. Связь между критическими и особыми точками.

Предложение 5.5. *Все критические точки пространства орбит $G_{n,2}/T^n$ являются особыми точками при $n \geq 5$.*

Доказательство. Пусть $[L]$ — критическая точка в $G_{n,2}/T^n$. Предположим, что L принадлежит карте M_{12}, и пусть $z_3, \ldots, z_n, w_3, \ldots, w_n$ — локальные координаты в этой карте. Так как стабилизатор для L нетривиален и $n \geq 5$, то из (4.1) следует, что должны существовать такие i, j, $3 \leq i < j \leq n$, что $z_i = z_j = 0$ или $w_i = w_j = 0$, или должно существовать такое i, $3 \leq i \leq n$, что $z_i = w_i = 0$. Другими словами, существуют такие i, j, $3 \leq i < j \leq n$, что $P^{2i}(L) = P^{2j}(L) = P^{ij}(L) = 0$ или $P^{1i}(L) = P^{1j}(L) = P^{ij}(L) = 0$, или существует такое i, $3 \leq i \leq n$, что $P^{ij}(L) = 0$ для любого $j \neq i$. Тогда из предложения 5.2 следует, что точка $[L]$ является особой точкой в $G_{n,2}/T^n$. $\square$

Замечание 5.6. Предложение 5.5 неверно при $n = 4$. В этом случае точки, которые в карте M_{12} имеют координаты $z_3, z_4 = 0, w_3 = 0, w_4$ или $z_3 = 0, z_4, w_3, w_4 = 0$, представляют собой точки в $G_{4,2}/T^4$, которые являются критическими, но не являются особыми точками. Точки, имеющие локальные координаты указанного вида в некоторой карте, исчерпывают все критические точки в $G_{4,2}/T^4$, которые не являются особыми. Другими словами, точки из объединения трех стратов, для которых допустимые многогранники являются диагональными квадратами, дают критические точки, не являющиеся особыми.

Пусть $\operatorname{Sing} X_n$ — множество особых точек в X_n и $Y_n = X_n \setminus \operatorname{Sing} X_n$.

Предложение 5.7. *Множество $Y_n \subset X_n$ является открытым многообразием, всюду плотным в X_n.*

Доказательство. Согласно [15] граница $\partial W_\sigma = \overline{W}_\sigma \setminus W_\sigma$ является объединением стратов $W_{\sigma'}$ и при этом координаты Плюккера, которые равны нулю у точек в W_σ, также равны нулю и у точек в $W_{\sigma'}$. Из описания пространства параметров страта, данного в п. 4.1.2, следует, что существует проекция $F_\sigma \to F_{\sigma'}$ для любого страта $W_{\sigma'}$, принадлежащего границе ∂W_σ. Более того, из определения виртуальных пространств параметров и описания главного страта, данного в п. 4.1.1, следует, что $\widetilde{F}_\sigma \subseteq \widetilde{F}_{\sigma'}$ для любого σ' такого, что $W_{\sigma'} \subset \partial W_\sigma$. Следовательно, если страт W_σ состоит из особых точек, то страт $\overline{W}_\sigma$ также состоит из особых точек. Отсюда следует, что $\operatorname{Sing} X_n = \bigcup \overline{W}_\sigma / T^n$, где объединение берется по всем стратам, состоящим из особых точек, поэтому $\operatorname{Sing} X_n$ является замкнутым множеством. Так как открытое множество Y_n содержит пространство орбит главного страта и не содержит критических точек, то оно является многообразием, всюду плотным в X_n. $\square$

Напомним следующие факты. Размерность пространства X_n равна $3n-7$. В [8, лемма 7.10] доказано, что множество $X_n \setminus \operatorname{Crit} X_n$ является открытым многообразием, всюду плотным в X_n.

Теорема 5.8. *Верны следующие утверждения*:

- $\dim \operatorname{Sing} X_n = \dim \operatorname{Crit} X_n = \dim \widehat{\mu}^{-1}(\partial \Delta_{n,2}) = 3n-10$ *при* $n \geq 4$;
- $\operatorname{Sing} X_n \cap \widehat{\mu}^{-1}(\mathring{\Delta}_{n,2}) \neq \varnothing$ *и* $\dim(\operatorname{Sing} X_n \cap \widehat{\mu}^{-1}(\mathring{\Delta}_{n,2})) = 3n-11$ *при* $n \geq 5$;
- $\dim(\operatorname{Crit} X_n \cap \widehat{\mu}^{-1}(\mathring{\Delta}_{n,2})) = n-2$ *при* $n \geq 4$.

Доказательство. Все точки множества $\widehat{\mu}^{-1}(\partial \Delta_{n,2})$ являются критическими и особыми. Отсюда следует, что размерности множеств $\operatorname{Sing} X_n$ и $\operatorname{Crit} X_n$ не меньше $\dim G_{n-1,2}/T^{n-1} = 3n-10$. Критические точки, переводящиеся отображением $\widehat{\mu}$ в $\mathring{\Delta}_{n,2}$, принадлежат пространствам орбит стратов, допустимые многогранники которых имеют размерность $n-2$ (см. предложение 3.9). Согласно предложению 4.9 эти страты являются одноорбитными и поэтому имеют размерность $2n-4$. Таким образом, $\dim \operatorname{Crit} X_n = 3n-10$ и $\dim(\operatorname{Crit} X_n \cap \widehat{\mu}^{-1}(\mathring{\Delta}_{n,2})) = n-2$. Из описания особых точек в терминах координат Плюккера (см. предложение 5.2) следует, что пространства параметров стратов, содержащих такие точки и отображаемых посредством $\widehat{\mu}$ в $\mathring{\Delta}_{n,2}$, имеют размерность $\leq 2n-10$. Это, в свою очередь, означает, что размерность пространства орбит любого такого страта не превышает $2n-10+n-1 = 3n-11$. Так как для страта, определенного уравнениями $P^{13} = P^{14} = 0$, $n \geq 5$, пространство орбит имеет размерность $3n-11$, то $\dim(\operatorname{Sing} X_n \cap \widehat{\mu}^{-1}(\mathring{\Delta}_{n,2})) = 3n-11$, $n \geq 5$. Кроме того, $\dim \operatorname{Sing} X_n = 3n-10$. $\square$

Замечание 5.9. Пространства $X_4 \setminus \operatorname{Sing} X_4$ и $X_4 \setminus \operatorname{Crit} X_4$ являются открытыми многообразиями и всюду плотными множествами в X_4. Заметим, что первое из них связно, а второе имеет восемь связных компонент.

Следствие 5.10. *Точные последовательности гомологий с целыми коэффициентами для пар* (X_n, A_n) *и* (X_n, B_n), *где* $A_n = \operatorname{Sing} X_n$ *и* $B_n = \operatorname{Crit} X_n$, *дают изоморфизмы*

$$H_{3n-p}(X_n) = H_{3n-p}(X_n/A_n) = H_{3n-p}(X_n/B_n), \qquad p = 7, 8.$$

Согласно теореме двойственности Лефшеца получаем

$$H^{p-7}(X_n/A_n) = H^{p-7}(X_n/B_n) = H_{3n-p}(X_n), \qquad p = 7, 8. \tag{5.1}$$

Так как X_n связно, то $H^0(X_n/A_n) = H^0(X_n/B_n) = \mathbb{Z}$. Значит, $H_{3n-7}(X_n) = H^0(X_n/A_n) = \mathbb{Z}$. В [7, Theorem 12.1] мы доказали, что $H_{3n-7}(X_n) \cong \mathbb{Z}$, совершенно другим способом.

Лемма 5.11. $H_i(X_n) = H_i(A_n) = H_i(B_n)$ *при* $i \leq n-4$ *и* $n \geq 5$.

Доказательство. Рассмотрим клеточное разбиение пространства X_n, заданное клеточными разбиениями пространств орбит $W_\sigma/T^\sigma \cong \mathring{P}_\sigma \times F_\sigma$. Обратим внимание, что все пространства W_σ/T^σ имеют размерность $\geq \dim P_\sigma$. Согласно предложению 3.5 при $n \geq 5$ допустимые многогранники размерности $\leq n-3$ принадлежат границе $\partial\Delta_{n,2}$. Так как пространства A_n и B_n инвариантны относительно стратификации и так как $\widehat{\mu}^{-1}(\partial\Delta_{n,2}) \subset B_n \subset A_n$, то пространства X_n, A_n и B_n имеют одинаковый $(n-3)$-мерный остов. Следовательно, вложения $B_n \subset A_n \subset X_n$ индуцируют требуемые изоморфизмы в целочисленных группах i-мерных гомологий при $i \leq n-4$. $\square$

Таким образом, мы получаем

Следствие 5.12. *Имеем* $H_i(X_n/A_n) = 0$ *при* $1 \leq i \leq n-4$, $n \geq 5$, *и* $H^i(X_n/A_n) = 0$ *при* $1 \leq i \leq n-5$, $n \geq 6$.

В частности, $H^1(X_n/A_n) = 0$. Используя изоморфизмы (5.1), мы получаем следующее.

Теорема 5.13. $H_{3n-8}(X_n) = 0$ *при* $n \geq 6$.

Заметим, что утверждение этой теоремы при $n = 4, 5$ вытекает из прямого вычисления групп гомологий пространств X_4 и X_5.

В дополнение к предыдущему докажем

Предложение 5.14. $H_1(X_n) = 0$ *для* $n \geq 4$.

Доказательство. Так как $X_4 \cong S^5$, то утверждение верно в случае $n = 4$. Для $n \geq 5$ согласно следствию 5.12 имеем $H_1(X_n) = H_1(A_n)$. Так как любой допустимый многогранник P_σ, $P_\sigma \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \neq \varnothing$, имеет размерность не меньше $n-2$, т.е. больше 2, то 2-остов пространства $\widehat{\mu}(A_n)$ лежит в $\partial\Delta_{n,2}$. Пространства параметров стратов, у которых допустимые многогранники двумерны, являются точками. Таким образом, если рассмотреть клеточное разбиение пространства орбит $X_n = G_{n,2}/T^n$, заданное клеточными разбиениями пространств орбит стратов $W_\sigma/T^n \cong \mathring{P}_\sigma \times F_\sigma$, то мы получим, что 2-остов $X_n(2)$ пространства X_n совпадает с объединением допустимых многогранников размерности 2. Эти многогранники представляют собой диагональные квадраты в октаэдрах и треугольники на границе октаэдров и симплексов. Пространство $X_n(2)$ гомотопически эквивалентно пространству $\widetilde{X}_n(2)$, полученному из $X_n(2)$ стягиванием в точку диагональных квадратов у всех октаэдров. Ясно, что пространство $\widetilde{X}_n(2)$ гомотопически эквивалентно букету двумерных сфер S^2. Следовательно, $H_1(X_n) = H_1(X_n(2)) = H_1(\widetilde{X}_n(2)) = 0$. $\square$

При доказательстве этого предложения мы показали, что двумерный остов пространства орбит X_n гомотопически эквивалентен букету 2-сфер.

Следствие 5.15. $\pi_1(X_n) = 0$ *для* $n \geq 4$.

6. ВИРТУАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ $G_{n,2}$

Опишем свойства пространств виртуальных параметров для $G_{n,2}$, которые важны для разрешения особенностей пространства орбит $G_{n,2}/T^n$.

Пусть W_σ — такой страт, что $P_\sigma \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \neq \varnothing$. Тогда, как показано выше, размерность многогранника P_σ равна $n-2$ или $n-1$. В предыдущем разделе показано, что если $\dim P_\sigma = n-2$, то страт W_σ состоит из одной орбиты. Если $\dim P_\sigma = n-1$, то страт W_σ в общем случае является объединением многих орбит.

Предложение 6.1. *Пусть* P_σ *— допустимый многогранник и* $P_{\sigma'}$ *— его гипергрань. Тогда если* $\dim P_\sigma = n-1$ *и* $P_{\sigma'} \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \neq \varnothing$, *то* $\widetilde{F}_\sigma \subseteq \widetilde{F}_{\sigma'}$, *где* $\widetilde{F}_\sigma$ *и* $\widetilde{F}_{\sigma'}$ *— виртуальные пространства параметров стратов* W_σ *и* $W_{\sigma'}$.

Доказательство. Этот результат следует из описания главного страта (см. п. 4.1.1) и доказательства предложения 4.9. Тем не менее мы приведем подробное доказательство, которое покажет явный вид вложения $\widetilde{F}_\sigma \subseteq \widetilde{F}_{\sigma'}$.

Сначала заметим, что $W_{\sigma'} \subset \partial W_\sigma$. Это вытекает из того, что страт $W_{\sigma'}$ состоит из одной орбиты, а также из более общего результата работы [15], согласно которому в случае многообразия $G_{n,2}$ условие $W_{\sigma'} \cap \partial W_\sigma \neq \varnothing$ влечет за собой вложение $W_{\sigma'} \subset \partial W_\sigma$. Без ограничения общности можно считать, что вершина Λ_{12} является общей для многогранников P_σ и $P_{\sigma'}$. Пусть $P_{\sigma'}$ задается пересечением гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$ гиперплоскостью $x_{i_1}+\ldots+x_{i_l}=1$, где $1\le i_1<i_2<\ldots<i_l\le n$, $2\le l\le [n/2]$. Так как Λ_{12} — вершина многогранника $P_{\sigma'}$, то, используя действие симметрической группы, можно считать, что уравнение гиперплоскости имеет вид $x_1+x_3+\ldots+x_l=1$. Страт $W_{\sigma'}$ лежит в карте M_{12}, и в координатах этой карты точки $L\in W_{\sigma'}$ можно записать в виде матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_3 & \ldots & a_l & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{l+1} & \ldots & b_n\end{pmatrix}^{\mathrm T},$$

где $a_3,\ldots,a_l\ne 0$ и $b_{l+1},\ldots,b_n\ne 0$, так как $\dim P_{\sigma'}=n-2$. Это вытекает из того, что согласно [7] размерность максимального подтора $T^{\sigma'}\subset T^n$, свободно действующего на $W_{\sigma'}$, равна $\dim P_{\sigma'}=n-2$. Следовательно, пространство

$$\widetilde F_{\sigma'}\subset(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{l-3}\times(1:0)^{n-l}\times(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{l-4}\times(1:0)^{n-l}\times\ldots$$
$$\ldots\times\mathbb{C}\mathrm{P}^1\times(1:0)^{n-l}\times(1:0)^{n-l}\times(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{(n-l)(n-l-1)/2}$$

удовлетворяет уравнениям $c_{ij}c'_{ik}c_{jk}=c'_{ij}c_{ik}c'_{jk}$, где $1\le i<j<k\le n$ и $(c_{ij}:c'_{ij})\in\mathbb{C}\mathrm{P}^1$.

Так как $P_{\sigma'}$ является гипергранью многогранника P_σ, то точки $x\in P_\sigma$ лежат либо в полупространстве $x_1+x_3+\ldots+x_l\le 1$, либо в полупространстве $x_1+x_3+\ldots+x_l\ge 1$.

В случае $x_1+x_3+\ldots+x_l\le 1$ точки страта $W_\sigma\subset M_{12}$ можно записать в координатах карты M_{12} в виде матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_3 & \ldots & a_l & a_{l+1} & \ldots & a_n\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{l+1} & \ldots & b_n\end{pmatrix}^{\mathrm T},$$

где $a_3,\ldots,a_l\ne 0$ и $b_{l+1},\ldots,b_n\ne 0$, так как $P_{\sigma'}$ — гипергрань многогранника P_σ. Более того, по меньшей мере одна из координат $a_{l+1},\ldots,a_n$ не равна нулю, так как тор T^{n-1} действует свободно на страте W_σ. Следовательно,

$$\widetilde F_\sigma\subset(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{l-3}\times(1:0)^{n-l}\times(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{l-4}\times(1:0)^{n-l}\times\ldots\times\mathbb{C}\mathrm{P}^1\times(1:0)^{n-l}\times(1:0)^{n-l}\times\mathcal{D},$$

где $\mathcal{D}$ — некоторое собственное подпространство в $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{(n-l)(n-l-1)/2}$ такое, что точки пространства $\widetilde F_\sigma$ удовлетворяют уравнениям $c_{ij}c'_{ik}c_{jk}=c'_{ij}c_{ik}c'_{jk}$, $l+1\le i<j<k\le n$. Следовательно, $\widetilde F_\sigma\subset\widetilde F_{\sigma'}$.

В случае $x_1+x_3+\ldots+x_l\ge 1$ точки страта $W_\sigma\subset M_{12}$ можно записать в виде матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_3 & \ldots & a_l & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & b_3 & \ldots & b_l & b_{l+1} & \ldots & b_n\end{pmatrix}^{\mathrm T},$$

где $a_3,\ldots,a_l\ne 0$ и $b_{l+1},\ldots,b_n\ne 0$, так как $P_{\sigma'}$ — гипергрань многогранника P_σ. Аналогично предыдущему случаю по крайней мере одна из координат $b_3,\ldots,b_l$ не равна нулю, так как тор T^{n-1} действует свободно на страте W_σ. Следовательно,

$$\widetilde F_\sigma\subset\mathcal{D}_1\times(1:0)^{n-l}\times\mathcal{D}_2\times(1:0)^{n-l}\times\ldots\times\mathcal{D}_{l-3}\times(1:0)^{n-l}\times(1:0)^{n-l}\times(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{(n-l)(n-l-1)/2},$$

где

$$\mathcal{D}_1\subset(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{l-3},\quad \mathcal{D}_2\subset(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{l-4},\quad \ldots,\quad \mathcal{D}_{l-3}\subset\mathbb{C}\mathrm{P}^1.$$

Кроме того, точки пространства $\widetilde F_\sigma$ удовлетворяют уравнениям $c_{ij}c'_{ik}c_{jk}=c'_{ij}c_{ik}c'_{jk}$. Следовательно, $\widetilde F_\sigma\subset\widetilde F_{\sigma'}$. $\square$

Из приведенного доказательства непосредственно получаем

Следствие 6.2. *Пусть $P_{\sigma'}$ — такой допустимый многогранник, что* $\dim P_{\sigma'} = n-2$ *и $P_{\sigma'} \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \neq \varnothing$. Тогда $\widetilde{F}_{\sigma'} = \bigcup_\sigma \widetilde{F}_\sigma$, где объединение берется по всем таким σ, что $P_{\sigma'}$ является гипергранью многогранника P_σ.*

Аналогичный результат верен и для такого допустимого многогранника $P_{\sigma'}$, что $\dim P_{\sigma'} = n-2$ и $P_{\sigma'} \subset \partial\Delta_{n,2}$. Более точно, если $P_{\sigma'} = \Delta_{n-1,1}$, то $P_{\sigma'}$ задается уравнением $x_i = 1$ для некоторого i, $1 \le i \le n$, а если $P_{\sigma'} = \Delta_{n-1,2}$, то $P_{\sigma'}$ задается уравнением $x_i = 0$ для некоторого i, $1 \le i \le n$. В обоих случаях мы получаем

Предложение 6.3. *Пусть $P_{\sigma'}$ — такой допустимый многогранник, что* $\dim P_{\sigma'} = n-2$. *Тогда $\widetilde{F}_{\sigma'} = \bigcup_\sigma \widetilde{F}_\sigma$, где объединение берется по всем таким σ, что многогранник $P_{\sigma'}$ является гипергранью многогранника P_σ.*

Граница $\partial\Delta_{n,2}$ гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$ состоит из гиперсимплексов $\Delta_{n-1,2}$ и симплексов $\Delta_{n-1,1}$, которые являются образами отображения моментов $\mu_n\colon G_{n,2} \to \Delta_{n,2}$ многообразия $G_{n-1,2} \subset G_{n,2}$ и комплексного проективного пространства $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-2} \subset G_{n,2}$ соответственно.

Суммируя предыдущие результаты, получаем следующее утверждение.

Теорема 6.4. *Универсальное пространство параметров $\mathcal{F}_n$ действия тора T^n на $G_{n,2}$ можно представить в виде формального объединения*

$$\mathcal{F}_n = F_n \cup \bigcup_{\substack{\dim P_\sigma = n-2\\ P_\sigma \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \neq \varnothing}} \widetilde{F}_\sigma. \tag{6.1}$$

7. УНИВЕРСАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО ПАРАМЕТРОВ И ДОПУСТИМЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Пусть $\mathcal{F}_n$ — универсальное пространство параметров для $G_{n,2}$ и $\{\widetilde{F}_\sigma\}$ — семейство виртуальных пространств параметров стратов W_σ. Для точки $x \in \mathring{\Delta}_{n,2}$ введем пространство

$$\widetilde{F}_x = \bigcup_{x \in \mathring{P}_\sigma} \widetilde{F}_\sigma.$$

Теорема 7.1. *Для любой точки $x \in \mathring{\Delta}_{n,2}$ верно равенство $\widetilde{F}_x = \mathcal{F}_n$.*

Мы получим доказательство этой теоремы в виде следствия предложения 6.1. Для этого нам надо показать, что $\widetilde{F}_\sigma \subset \widetilde{F}_x$ для любого допустимого многогранника P_σ такого, что $\dim P_\sigma = n-2$ и $P_\sigma \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \neq \varnothing$. Дадим общий метод доказательства этого утверждения в случае $G_{5,2}$.

7.1. Доказательство для случая многообразия $G_{5,2}$. Согласно примеру 3.16 в случае $n=5$ допустимые многогранники размерности 3 задаются пересечениями гиперсимплекса $\Delta_{5,2} \subset \mathbb{R}^5$ гиперплоскостями $x_i + x_j = 1$, где $1 \le i < j \le 5$. Используя действие симметрической группы S_5, без ограничения общности достаточно рассмотреть допустимый многогранник, заданный пересечением гиперсимплекса $\Delta_{5,2}$ с гиперплоскостью $x_1 + x_4 = 1$. Обозначим через P_{14} этот многогранник, через W_{14} соответствующий страт и через $\widetilde{F}_{14}$ виртуальное пространство параметров этого страта. Страт W_{14} лежит в карте M_{12}, и его точки можно записать в этой карте матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 1 & b_3 & 0 & b_5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad a_4, b_3, b_5 \neq 0.$$

Следовательно, $\widetilde{F}_{14} \cong (0:1) \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times (1:0)$. Пусть $x \in \mathring{\Delta}_{5,2}$. Здесь возможны два случая:

(1) если $x \in \mathring{P}_{14}$, то $\widetilde{F}_{14} \subset \widetilde{F}_x$;

(2) если $x \notin \mathring{P}_{14}$, то $x_1 + x_4 > 1$ или $x_1 + x_4 < 1$.

Пусть $x_1 + x_4 > 1$. Тогда точка x принадлежит допустимому многограннику, лежащему в полупространстве $x_1 + x_4 \geq 1$. Обозначим этот многогранник через P_{14}^+. Страт, соответствующий многограннику P_{14}^+ в карте M_{12}, записывается матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad a_4, b_3, b_4, b_5 \neq 0.$$

Следовательно, виртуальное пространство параметров $\widetilde{F}_{14}^+$ этого страта можно отождествить с $(0:1) \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times (1:0)$. Так как $\widetilde{F}_{14}^+ = \widetilde{F}_{14}$, то $\widetilde{F}_{14} \subset \widetilde{F}_x$.

Пусть теперь $x_1 + x_4 < 1$. Тогда точка x принадлежит допустимому многограннику P_{14}^-, лежащему в полупространстве $x_1 + x_4 \leq 1$. Соответствующий страт в карте M_{12} записывается матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 1 & b_3 & 0 & b_5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad a_3, a_4, a_5, b_3, b_5 \neq 0.$$

Соответствующее пространство параметров $\widetilde{F}_{14}^-$ можно отождествить с $(0:1) \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1_A \times (1:0)$, и, следовательно, $\widetilde{F}_{14}^- \subset \widetilde{F}_x$.

Осталось доказать, что точки $A_1 = (0:1) \times (0:1) \times (1:0)$, $A_2 = (0:1) \times (1:0) \times (1:0)$ и $A_3 = (0:1) \times (1:1) \times (1:0)$ принадлежат пространству $\widetilde{F}_x$. Для этого рассмотрим следующие случаи.

(1а) Пусть $x_2 + x_3 \leq 1$. Тогда точка x принадлежит пересечению полупространств $x_1 + x_4 \leq 1$ и $x_2 + x_3 \leq 1$. Рассмотрим страт, записанный в карте M_{12} матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 1 & b_3 & 0 & b_5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad a_4, a_5, b_3, b_5 \neq 0.$$

Его допустимый многогранник в точности совпадает с пересечением этих полупространств, и его виртуальное пространство параметров можно отождествить с точкой A_1. Таким образом, $A_1 \in \widetilde{F}_x$.

(1б) Пусть $x_2 + x_3 \geq 1$. Тогда $x_1 + x_4 + x_5 \leq 1$. В этом случае мы получаем страт, который в карте M_{12} записывается матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 1 & b_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad a_3, a_4, a_5, b_3 \neq 0.$$

Его допустимый многогранник принадлежит полупространству $x_2 + x_3 \geq 1$, и его виртуальное пространство параметров можно отождествить с пространством $(0:1) \times (0:1) \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, которое содержит точку A_1. Таким образом, $A_1 \in \widetilde{F}_x$.

(2а) Пусть $x_2 + x_5 \leq 1$. Тогда точка x принадлежит пересечению полупространств $x_1 + x_4 \leq 1$ и $x_2 + x_5 \leq 1$. Рассмотрим страт, который в карте M_{12} записывается матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 1 & b_3 & 0 & b_5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad a_3, a_4, b_3, b_5 \neq 0.$$

Его допустимый многогранник является в точности пересечением этих полупространств, и его виртуальное пространство параметров можно отождествить с точкой $A_2 = (0:1) \times (1:0) \times (1:0)$. Таким образом, $A_2 \in \widetilde{F}_x$.

(2б) Пусть $x_2 + x_5 \geq 1$. Тогда $x_1 + x_3 + x_4 \leq 1$. Следовательно, надо рассмотреть страт, который в карте M_{12} записывается матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b_5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad a_3, a_4, a_5, b_5 \neq 0.$$

Его допустимый многогранник принадлежит полупространству $x_2 + x_5 \geq 1$, и его виртуальное пространство параметров можно отождествить с $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times (1:0) \times (1:0)$. Таким образом, $A_2 \in \widetilde{F}_x$.

(3а) Пусть $x_3 + x_5 \leq 1$. Тогда точка x принадлежит пересечению полупространств $x_1 + x_4 \leq 1$ и $x_3 + x_5 \leq 1$. Следовательно, надо рассмотреть страт, который в карте M_{12} записывается матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 1 & b_3 & 0 & b_5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad a_3, a_4, a_5, b_3, b_5 \neq 0, \quad a_3 b_5 = a_5 b_3.$$

Его допустимый многогранник является в точности пересечением этих полупространств, и его виртуальное пространство параметров можно отождествить с точкой $A_3 = (0:1) \times (1:1) \times (1:0)$. Таким образом, $A_3 \in \widetilde{F}_x$.

(3б) Пусть $x_3 + x_5 \geq 1$. Тогда $x_1 + x_2 + x_4 \leq 1$. В этом случае страт W_{35}^{+} таков, что его допустимый многогранник не принадлежит карте M_{12}. Этот страт принадлежит карте M_{13} и в координатах этой карты записывается матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad a_2, a_4, a_5, b_5 \neq 0.$$

Его виртуальное пространство параметров можно отождествить с $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times (1:0) \times (1:0)$. Переход от координат карты M_{12} к координатам карты M_{13} индуцирует гомеоморфизм $f\colon F_{12} \to F_{13}$, который можно продолжить до гомеоморфизма $\widetilde{f}\colon \mathcal{F}_5 \to \mathcal{F}_5$. Гомеоморфизм f действует по формуле

$$\bigl((c_{34}:c'_{34}), (c_{35}:c'_{35}), (c_{45}:c'_{45})\bigr) \to$$
$$\to \bigl((c_{34}:c_{34} - c'_{34}), (c_{35}:c_{35} - c'_{35}), (c'_{35}c_{45}(c_{34} - c'_{34}):c'_{34}c'_{45}(c_{35} - c'_{35}))\bigr).$$

Отсюда следует, что прообразом пространства $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times (1:0) \times (1:0)$ является множество $((c_{34}:c'_{34}), (1:1), (c'_{34}:c_{34}))$, где $(c_{34}:c'_{34}) \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Таким образом, при $c_{34} = 0$ мы получаем, что точка $A_3 = (0:1) \times (1:1) \times (1:0)$ принадлежит пространству $\widetilde{F}_x$.

В итоге мы доказали, что $\widetilde{F}_{14} \subset \widetilde{F}_x$.

Используя действие симметрической группы, мы получаем $\widetilde{F}_{ij} \subset \widetilde{F}_x$ для всех i, j и, следовательно, $\widetilde{F}_x = \mathcal{F}_5$ для всех точек $x \in \mathring{\Delta}_{n,2}$. Это завершает доказательство для случая $G_{5,2}$.

7.2. Структура пространства $\widetilde{F}_x$. Используя описанный выше метод, можно получить следующий результат.

Предложение 7.2. *Пусть P_σ и $P_{\sigma'}$ — допустимые многогранники такие, что $\mathring{P}_\sigma \cap \mathring{P}_{\sigma'} \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \neq \varnothing$. Тогда $\widetilde{F}_\sigma \cap \widetilde{F}_{\sigma'} = \varnothing$.*

Доказательство. Необходимо рассмотреть три случая в зависимости от размерностей многогранников P_σ и $P_{\sigma'}$.

1. Пусть $\dim P_\sigma = \dim P_{\sigma'} = n - 1$. Согласно теореме 3.21 проведем доказательство для случая, когда оба многогранника P_σ и $P_{\sigma'}$ определяются только одним полупространством. В случае, когда P_σ или $P_{\sigma'}$ задается пересечением нескольких полупространств, доказательство проводится аналогично.

Используя действие симметрической группы, можно считать, что P_σ определяется полупространством $x_1+x_2+\ldots+x_k\le 1$, $2\le k\le n-2$, и пусть P'_σ определяется полупространством $x_{p_1}+\ldots+x_{p_s}\le 1$. Так как $x_1+\ldots+x_n=2$ и открытые части этих полупространств имеют непустое пересечение, то существует такое i, $k+1\le i\le n$, что $i\ne p_1,\ldots,p_s$. Без ограничения общности можно положить $i=k+1$.

В этом случае страты W_σ и $W_{\sigma'}$ лежат в карте $M_{1,k+1}$. Страт W_σ в координатах этой карты записывается матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_k & 0 & a_{k+2} & \ldots & a_n\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & b_{k+2} & \ldots & b_n\end{pmatrix}^{\mathrm T},$$

где $a_i\ne 0$, $2\le i\le n$, $i\ne k+1$, и $b_i\ne 0$, $k+2\le i\le n$. Следовательно, виртуальное пространство параметров $\widetilde F_\sigma$ можно отождествить с подпространством в

$$(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{k-2}\times(1:0)^{n-k-1}\times(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{k-3}\times(1:0)^{n-k-1}\times\ldots$$
$$\ldots\times\mathbb{C}\mathrm{P}^1\times(1:0)^{n-k-1}\times(1:0)^{n-k-1}\times(\mathbb{C}\mathrm{P}^1_A)^{(n-k-1)(n-k-2)/2},\qquad(7.1)$$

точки которого удовлетворяют уравнениям $c_{ij}c'_{ik}c_{jk}=c'_{ij}c_{ik}c'_{jk}$.

В координатах карты $M_{1,k+1}$ точки страта $W_{\sigma'}$ удовлетворяют условиям $b'_{p_s}=0$, $1\le s\le l$. Допустим теперь, что $\widetilde F_\sigma\cap\widetilde F'_\sigma\ne\varnothing$. Тогда для $\widetilde F_{\sigma'}$ мы получим условие $(c_{pq}:c'_{pq})=(1:0)$ или $\{(c_{pq}:c'_{pq})\}=\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ для любого p, $2\le p\le k$, и любого q, $k+2\le q\le n$. В обоих случаях мы должны иметь $b'_p=0$, а это означает, что $\{2,\ldots,k\}\subset\{p_1,\ldots,p_l\}$. Более того, должно существовать $p_s\notin\{2,\ldots,k\}$ и не все b'_i должны быть равны нулю. Мы можем предположить, что $b'_{k+2}\ne 0$ и $b'_{k+3}=0$. Следовательно, для точек пространства $\widetilde F_{\sigma'}$ должно выполняться условие $(c_{k+2,k+3}:c'_{k+2,k+3})=(0:1)$, которое с учетом формулы (7.1) приводит к противоречию с условием $\widetilde F_\sigma\cap\widetilde F_{\sigma'}\ne\varnothing$.

2. Пусть $\dim P_\sigma=n-1$ и $\dim P_{\sigma'}=n-2$. Предположим, что многогранник P_σ определяется полупространством $x_1+\ldots+x_k\le 1$, $2\le k\le n-2$, и многогранник $P_{\sigma'}$ задается уравнением $x_{p_1}+\ldots+x_{p_l}=1$, $2\le l\le n-2$. Так как $P_\sigma\cap P_{\sigma'}\ne\varnothing$, то мы можем считать, что $k+1\notin\{p_1,\ldots,p_l\}$ и $p_1\notin\{1,\ldots,k\}$. В этом случае страты W_σ и $W_{\sigma'}$ лежат в карте M_{k+1,p_1}. Тогда страт W_σ в координатах этой карты записывается матрицами

$$\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_k & 1 & a_{k+2} & \ldots & a_{p_1-1} & 0 & a_{p_1+1} & \ldots & a_n\\ b_1 & \ldots & b_k & 0 & b_{k+2} & \ldots & b_{p_1-1} & 1 & b_{p_1+1} & \ldots & b_n\end{pmatrix}^{\mathrm T},$$

где $a_ib_j=a_jb_i$ для $1\le i<j\le k$ и $a_i\ne 0$ для $i\ge k+2$, $i\ne p_1$, $b_i\ne 0$ для $i\ge k+2$. Следовательно, виртуальное пространство параметров $\widetilde F_\sigma$ можно отождествить с подпространством в

$$(1:1)^{k-1}\times(\mathbb{C}\mathrm{P}^1_A)^{n-k-2}\times(1:1)^{k-2}\times(\mathbb{C}\mathrm{P}^1_A)^{n-k-2}\times\ldots$$
$$\ldots\times(1:1)\times(\mathbb{C}\mathrm{P}^1_A)^{n-k-2}\times(\mathbb{C}\mathrm{P}^1_A)^{n-k-2}\times((\mathbb{C}\mathrm{P}^1_A)^{n-k-2})^{(n-k-1)(n-k-2)/2},\qquad(7.2)$$

точки которого удовлетворяют уравнениям $c_{ij}c'_{ik}c_{jk}=c'_{ij}c_{ik}c'_{jk}$.

Точки страта $W_{\sigma'}$ в координатах карты M_{k+1,p_1} удовлетворяют условиям $a'_{p_s}=0$ при $1\le$ $\le s\le l$. Отсюда следует, что $b'_{p_s}\ne 0$ и $b'_q=0$, где $q\ne p_s$ при $1\le s\le l$ (см. предложение 4.9). Более того, существует такое $q_0\ne k+1$, что $q_0\notin\{p_1,\ldots,p_l\}$. Следовательно, точки пространства $\widetilde F_{\sigma'}$ должны удовлетворять условию $(c_{q_0p_s}:c'_{q_0p_s})=(0:1)$ или $(1:0)$. Сопоставляя этот факт с (7.2), мы получаем $\widetilde F_\sigma\cap\widetilde F_{\sigma'}=\varnothing$.

3. Пусть $\dim P_\sigma=\dim P_{\sigma'}=n-2$. Предположим, что многогранник P_σ определяется уравнением $x_1+\ldots+x_k=1$, $2\le k\le n-2$, а многогранник $P_{\sigma'}$ определяется уравнением

$x_{p_1} + \ldots + x_{p_l} = 1$, $2 \le l \le n-2$. Мы можем считать, что $x_1 \notin \{p_1, \ldots, p_l\}$ и $p_1 \notin \{1, \ldots, k\}$. В этом случае страты W_σ и $W_{\sigma'}$ лежат в карте M_{1p_1}. Тогда страт W_σ в координатах этой карты записывается матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2 & \ldots & a_k & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{k+1} & \ldots & b_{p_1-1} & 1 & b_{p_1+1} & \ldots & b_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

где $a_i \ne 0$ при $2 \le i \le k$, $b_j \ne 0$ при $k+1 \le j \le n$, $j \ne p_1$. Следовательно, виртуальное пространство параметров $\widetilde{F}_\sigma$ можно отождествить с подпространством

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_\sigma \subset (\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{k-2} \times (1:0)^{n-k-1} \times \ldots \\ \ldots \times \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \times (1:0)^{n-k-1} \times (1:0)^{n-k-1} \times (\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{(n-k-1)(n-k-2)/2}, \end{aligned} \tag{7.3}$$

точки которого удовлетворяют уравнениям $c_{ij}c'_{ik}c_{jk} = c'_{ij}c_{ik}c'_{jk}$.

Точки страта $W_{\sigma'}$ в координатах карты M_{1,p_1} удовлетворяют условиям $a'_{p_s} = 0$ для всех s, $2 \le s \le l$. Следовательно, $b'_{p_s} \ne 0$ и $b'_q = 0$ при $q \ne p_s$, $2 \le s \le l$. Возьмем такое q_0, что $q_0 \notin \{1, \ldots, k\}$ и $q_0 \notin \{p_1, \ldots, p_l\}$. Заметим, что существует такое i_0, $2 \le i_0 \le k$, что $i_0 \in \{p_1, \ldots, p_l\}$. Следовательно, точки пространства $\widetilde{F}_{\sigma'}$ должны удовлетворять условию $(c_{i_0q_0} : c'_{i_0q_0}) = (0:1)$. Сопоставляя этот факт с (7.3), мы получаем $\widetilde{F}_\sigma \cap \widetilde{F}_{\sigma'} = \varnothing$. $\square$

Следствие 7.3. *Пусть $x \in \mathring{\Delta}_{n,2}$. Тогда если $\widetilde{F}_\sigma, \widetilde{F}_{\sigma'} \subset \widetilde{F}_x$, то $\widetilde{F}_\sigma \cap \widetilde{F}_{\sigma'} = \varnothing$.*

8. КАМЕРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ГИПЕРСИМПЛЕКСА $\Delta_{n,2}$

Рассмотрим конфигурацию $\mathcal{A}_n$ в $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{A}_n\colon \quad \Pi \cup \{x_i = 0,\ 1 \le i \le n\} \cup \{x_i = 1,\ 1 \le i \le n\}, \tag{8.1}$$

где гиперплоскости из множества Π заданы уравнениями (3.4). Обозначим через $L(\mathcal{A}_n)$ частично упорядоченное множество граней, определенное конфигурацией $\mathcal{A}_n$. По определению $L(\mathcal{A}_n)$ образовано всеми гиперплоскостями из $\mathcal{A}_n$ и всеми их пересечениями.

Конфигурация $\mathcal{A}_n$ индуцирует конфигурацию гиперплоскостей в $R^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \ldots + x_n = 2\}$, которые являются пересечениями с R^{n-1} гиперплоскостей из $\mathcal{A}_n$.

Введем $L(\mathcal{A}_{n,2}) = L(\mathcal{A}_n) \cap \Delta_{n,2}$. Решетка $L(\mathcal{A}_{n,2})$ задает разбиение гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$, которое называется *камерным разбиением.* Камерами C мы называем внутренности элементов решетки $L(\mathcal{A}_{n,2})$. По построению размерность камеры не превосходит $n-1$. Обозначим через $\mathring{L}(\mathcal{A}_{n,2})$ множество всех камер C таких, что $C \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \ne \varnothing$.

Замечание 8.1. Камера $C \subset \partial\Delta_{n,2}$ принадлежит либо симплексу Δ^{n-2}, т.е. является его гранью, либо гиперсимплексу $\Delta_{n-1,2}$. Следовательно, множество всех камер $C \subset \partial\Delta_{n,2}$ описывается при помощи индукции по n.

Лемма 8.2. *Пусть C — некоторая камера размерности $n-1$. Тогда если $C \cap \mathring{P}_\sigma \ne \varnothing$, то $C \subset \mathring{P}_\sigma$. Таким образом, любая камера C размерности $n-1$ является пересечением внутренностей всех допустимых многогранников, содержащих ее.*

Доказательство. Из описания допустимых многогранников, данного в теореме 3.22, следует, что $C \cap \mathring{P}_\sigma = \varnothing$, если $\dim P_\sigma = n-2$. Таким образом, если $\mathring{P}_\sigma \cap C \ne \varnothing$, то $\dim P_\sigma = n-1$. Более того, если $P_\sigma \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \ne \varnothing$, то любая его гипергрань принадлежит некоторой гиперплоскости из $\Pi \subset \mathcal{A}_n$. Следовательно, $C \subset \mathring{P}_\sigma$.

Для доказательства второго утверждения заметим, что любая грань V камеры C содержится в гиперграни некоторого допустимого многогранника P_σ такого, что $C \subset P_\sigma$. Это следует из теоремы 3.22, согласно которой любая гиперплоскость из Π делит гиперсимплекс $\Delta_{n,2}$ на два допустимых многогранника. $\square$

Верен следующий более общий результат.

Лемма 8.3. *Любую камеру $C \in \mathring{L}(\mathcal{A}_{n,2})$ можно получить как пересечение внутренностей всех допустимых многогранников, содержащих C.*

Доказательство. Пусть $C \in \mathring{L}(\mathcal{A}_{n,2})$. Тогда $C = \bigcap \pi_{S_i}$ для некоторого набора гиперплоскостей $\pi_{S_1}, \ldots, \pi_{S_l}$ из Π. Теперь утверждение следует из того, что $\pi_{S_i} \cap \Delta_{n,2}$ является допустимым многогранником, а плоскости из Π задают камерное разбиение $L(\mathcal{A}_{n,2})$. $\square$

Таким образом, мы получили

Предложение 8.4. *Камерное разбиение $\mathring{L}(\mathcal{A}_{n,2})$ задает разбиение открытого гиперсимплекса $\mathring{\Delta}_{n,2}$, элементами которого являются пересечения внутренностей всех допустимых многогранников P_σ таких, что $P_\sigma \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \neq \varnothing$.*

Камеры из множества $\mathring{L}(\mathcal{A}_{n,2})$ будем обозначать через C_ω, где ω состоит из всех допустимых множеств σ таких, что $C_\omega \subset \mathring{P}_\sigma$.

8.1. Отображение моментов и камерное разложение. Пусть $C_\omega \in \mathring{L}(\mathcal{A}_{n,2})$ — такая камера, что $\dim C_\omega = n-1$. Согласно предложению 8.4 имеем $C_\omega = \bigcap_{\sigma\in\omega} \mathring{P}_\sigma$, где $\dim P_\sigma = n-1$. В работе [7] показано, что для всех $x \in C_\omega$ пространства $\widehat{\mu}^{-1}(x) = \bigcup_{\sigma\in\omega} F_\sigma \subset G_{n,2}/T^n$ являются гладкими многообразиями, диффеоморфными одному и тому же многообразию, которое будем обозначать через F_ω.

С другой стороны, как показано в [7], для любого страта W_σ определен канонический гомеоморфизм

$$h_\sigma = (\widehat{\mu}_\sigma, \pi_{\sigma,\mathbb{C}})\colon\ W_\sigma/T^\sigma \to \mathring{P}_\sigma \times F_\sigma,$$

где проекция $\widehat{\mu}_\sigma\colon W_\sigma/T^\sigma \to \mathring{P}_\sigma$ индуцирована отображением моментов $\widehat{\mu}\colon G_{n,2}/T^n \to \Delta_{n,2}$, а проекция $\pi_{\sigma,\mathbb{C}}\colon W_\sigma/T^\sigma \to F_\sigma$ индуцирована канонической проекцией $W_\sigma \to F_\sigma = W_\sigma/(\mathbb{C}^*)^n$. Для главного страта W существует гомеоморфизм $W/T^n \cong \mathring{\Delta}_{n,2} \times F_n$, и, следовательно, $F \subset F_\omega$ для любой камеры $C_\omega \in \mathring{L}(\mathcal{A}_{n,2})$ такой, что $\dim C_\omega = n-1$. Положим $\widehat{C}_\omega = \widehat{\mu}^{-1}(C_\omega) \subset G_{n,2}/T^n$.

Следствие 8.5. *Для любой камеры $C_\omega \in \mathring{L}(\mathcal{A}_{n,2})$ такой, что $\dim C_\omega = n-1$, определен канонический гомеоморфизм*

$$h_\omega\colon\ \widehat{C}_\omega \to C_\omega \times F_\omega.$$

Здесь компактное гладкое многообразие F_ω является компактификацией пространства F_n, наростами которой служат пространства F_σ с такими σ, что $C_\omega \subset \mathring{P}_\sigma$, т.е.

$$F_\omega = \bigcup_{C_\omega \subset \mathring{P}_\sigma} F_\sigma. \tag{8.2}$$

В определенном смысле результат следствия 8.5 можно распространить на любую камеру.

Как показано в [16], рассматривая пространства $\widehat{\mu}^{-1}(x)$, $\widehat{\mu}^{-1}(y)$ как симплектические редукции, можно отождествить их с некоторым пространством F_ω для любой камеры $C_\omega \in \mathring{L}(\mathcal{A}_{n,2})$ и любых точек x, y этой камеры. В частности, при $\dim C_\omega = n-2$ справедлива

Лемма 8.6. *Для любой камеры $C_\omega \in \mathring{L}(\mathcal{A}_{n,2})$ такой, что $\dim C_\omega = n-2$, определен канонический гомеоморфизм*

$$h_\omega\colon\ \widehat{C}_\omega \to C_\omega \times F_\omega.$$

Пространство F_ω является компактификацией пространства F_n, наростами которой являются пространства F_σ с такими σ, что $C_\omega \subset \mathring{P}_\sigma$ и $\dim P_\sigma = n-1$, а также одноточечное пространство F_σ, где σ таково, что $C_\omega \subset \mathring{P}_\sigma$ и $\dim P_\sigma = n-2$.

Доказательство. Очевидно, что если $C_\omega \subset \mathring{P}_\sigma$ и $\dim P_\sigma = n-1$, то $F_\sigma \subset F_\omega$. Так как $\dim C_\omega = n-2$, то существует единственный допустимый многогранник P_σ такой, что $\dim P_\sigma = n-2$ и $C_\omega \subset \mathring{P}_\sigma$. Этот многогранник P_σ определяется гиперплоскостью, в которой лежит камера C_ω. Согласно предложению 4.9 пространством параметров F_σ такого многогранника является точка. □

Заметим, что камеры $C_\omega \subset \mathring{\Delta}_{n,2}$ могут иметь любые размерности от 0 до $n-1$, несмотря на то что сами допустимые многогранники P_σ такие, что $P_\sigma \cap \mathring{\Delta}_{n,2} \neq \varnothing$, могут иметь размерности только $n-2$ или $n-1$. По аналогии с леммой 8.6 получаем следующий результат.

Лемма 8.7. *Для любой камеры $C_\omega \in \mathring{L}(\mathcal{A}_{n,2})$ такой, что $\dim C_\omega \leq n-3$, определен канонический гомеоморфизм*

$$h_\omega\colon \widehat{C}_\omega \to C_\omega \times F_\omega.$$

Пространство F_ω является компактификацией пространства F_n, наростами которой являются пространства F_σ с такими σ, что $C_\omega \subset \mathring{P}_\sigma$ и $\dim P_\sigma = n-1$, а также q точек, где $q \geq 2$ — количество допустимых многогранников P_σ таких, что $C_\omega \subset \mathring{P}_\sigma$ и $\dim P_\sigma = n-2$.

Действие симметрической группы S_n перестановками координат в $\mathbb{R}^n$ индуцирует S_n-действие на $\mathcal{A}_n$, которое, в свою очередь, задает S_n-действие на камерном разложении $L(\mathcal{A}_{n,2})$. Используя следствие 2.10, мы получаем

Следствие 8.8. *Пространства F_ω и $\mathfrak{s}(F_\omega)$ гомеоморфны для любой перестановки $\mathfrak{s} \in S_n$ и любой камеры $C_\omega \in \mathring{L}(\mathcal{A}_{n,2})$.*

Суммируя предыдущие результаты, получаем

Предложение 8.9. *Многообразие F_ω является компактификацией пространства $F_n \subset \subset (\mathbb{C}\mathrm{P}^1_A)^N$, заданного формулами (4.3). Наростами этой компактификации являются пространства F_σ с такими σ, что $C_\omega \subset \mathring{P}_\sigma$. Среди этих наростов есть такие F_σ, которые являются точками, а также такие $F_\sigma \subset (\mathbb{C}\mathrm{P}^1_B)^q$, где $B = \{(1:0), (0:1)\}$, которые являются образами гиперповерхностей (4.3) в $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^N$ при проекциях $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^N \to (\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^q$, $0 < q < N$.*

8.2. Камерное разложение и виртуальные пространства параметров. Пусть, как и выше, $\mathcal{F}_n$ — универсальное пространство параметров многообразия $G_{n,2}$. Как показано в [7] и описано в п. 4.2, для любого страта $W_\sigma \subset G_{n,2}$ определено виртуальное пространство параметров $\widetilde{F}_{\sigma,12}$ в координатах фиксированной карты M_{12}. Более того, для каждого $\widetilde{F}_{\sigma,12}$ определена проекция $p_{\sigma,12}\colon \widetilde{F}_{\sigma,12} \to F_{\sigma,12}$, где $F_{\sigma,12} \cong F_\sigma$ — пространство параметров страта W_σ.

Для $C_\omega \in \mathring{L}(\mathcal{A}_{n,2})$ из предложения 7.2 вытекает

Следствие 8.10. *Пусть $C_\omega \in \mathring{L}(\mathcal{A}_{n,2})$. Тогда $\widetilde{F}_\sigma \cap \widetilde{F}_{\widehat{\sigma}} = \varnothing$ для любых допустимых множеств σ и $\widehat{\sigma}$ таких, что $C_\omega \subset \mathring{P}_\sigma \cap \mathring{P}_{\widehat{\sigma}}$.*

Используя теперь теорему 3.9, получаем

Следствие 8.11. *Универсальное пространство параметров $\mathcal{F}_n$ представляет собой несвязное объединение*

$$\mathcal{F}_n = \bigcup_{C_\omega \subset \mathring{P}_\sigma} \widetilde{F}_\sigma \tag{8.3}$$

для любой камеры $C_\omega \in \mathring{L}(\mathcal{A}_{n,2})$.

Таким образом, для любой камеры $C_\omega \in \mathring{L}(\mathcal{A}_{n,2})$ и любой карты Плюккера $M_{ij} \subset G_{n,2}$ определена проекция $p_{\omega,ij}\colon \mathcal{F}_n \to F_\omega$ по формуле $p_{\omega,ij}(y) = p_{\sigma,ij}(y)$, где $y \in \widetilde{F}_{\sigma,ij}$.

9. ПРОСТРАНСТВО ОРБИТ $G_{n,2}/T^n$

Положим $\mathring{G}_{n,2} = \mu^{-1}(\mathring{\Delta}_{n,2})$ и $\widehat{C}_\omega = \widehat{\mu}^{-1}(C_\omega)$.

Теорема 9.1. *Определены гомеоморфизмы*

$$\mathring{G}_{n,2}/T^n \cong \bigcup_\omega \widehat{C}_\omega \cong \bigcup_\omega (C_\omega \times F_\omega), \tag{9.1}$$

задающие представления пространства $\mathring{G}_{n,2}/T^n$ в виде несвязных объединений.

Топология в объединении $\bigcup_\omega \widehat{C}_\omega$ определяется условием, что взаимно однозначное соответствие $\bigcup_\omega \widehat{C}_\omega \to G_{n,2}/T^n$ является гомеоморфизмом, тогда как топология в объединении $\bigcup_\omega (C_\omega \times F_\omega)$ индуцирована его вложением в $\Delta_{n,2} \times G_{n,2}/(\mathbb{C}^*)^n$.

Замечание 9.2. Описанная топология на объединении $\bigcup_\omega \widehat{C}_\omega$ характеризуется тем, что проекция $\widehat{\mu}\colon \bigcup_\omega \widehat{C}_\omega \to \Delta_{n,2}$, индуцированная отображением моментов μ, является непрерывным и открытым отображением. Это обусловлено тем, что μ является открытым отображением, $\widehat{\mu}(\widehat{C}_\omega) = C_\omega$ и камеры C_ω не пересекаются. Мы утверждаем, что топология в объединении $\bigcup_\omega (C_\omega \times F_\omega)$ является хаусдорфовой и определяется вложением в $\Delta_{n,2} \times G_{n,2}/(\mathbb{C}^*)^n$. Это требует дополнительного пояснения, так как топология в пространстве орбит $G_{n,2}/(\mathbb{C}^*)^n$ не является хаусдорфовой. Однако мы пользуемся тем, что топология пространства параметров F_ω камер C_ω является хаусдорфовой для всех ω. Более подробно, точка $[K]$ может быть неотделимой от точки $[L]$ в топологии пространства $G_{n,2}/(\mathbb{C}^*)^n$ тогда и только тогда, когда $(\mathbb{C}^*)^n \cdot L \subset \overline{(\mathbb{C}^*)^n \cdot K}$. Но в этом случае точки $[L]$ и $[K]$ не могут принадлежать одному и тому же пространству F_ω, так как из условия $(\mathbb{C}^*)^n \cdot L \subset \overline{(\mathbb{C}^*)^n \cdot K}$ следует, что допустимый многогранник $\mu(\overline{(\mathbb{C}^*)^n \cdot L})$ должен быть гранью допустимого многогранника $\mu(\overline{(\mathbb{C}^*)^n \cdot K})$, и поэтому пересечение их открытых частей пусто. Таким образом, мы получаем, что введенная топология несвязного объединения $\bigcup_\omega (C_\omega \times F_\omega)$ хаусдорфовых пространств $C_\omega \times F_\omega$ является хаусдорфовой.

Симметрическая группа S_n действует на $\mathring{G}_{n,2}/T^n$ по формуле $\mathfrak{s}(C_\omega \times F_\omega) = \mathfrak{s}(C_\omega) \times \mathfrak{s}(F_\omega)$; следовательно, пространства $C_\omega \times F_\omega$ и $\mathfrak{s}(C_\omega \times F_\omega)$ гомеоморфны. Это позволяет значительно упростить описание разложения пространства $\mathring{G}_{n,2}/T^n$ в (9.1), представив его в виде

$$\mathring{G}_{n,2}/T^n = \bigcup_{i=1}^{l} \bigcup_{\mathfrak{s}\in S_n} \mathfrak{s}(C_{\omega_i} \times F_{\omega_i}), \tag{9.2}$$

где $l = l(n) \geq 4$ и $\omega_1, \dots, \omega_l$ — индексы представителей S_n-орбиты.

Пример 9.3. При $n = 4$ камерное разбиение для $\mathring{\Delta}_{4,2}$ состоит из камер размерностей 0, 1, 2, 3 и S_4-действие имеет по одной орбите для каждой размерности, т.е. $l(4) = 4$.

Для любого $n \geq 3$ получаем несвязное разложение

$$G_{n,2}/T^n \cong (\mathring{G}_{n,2}/T^n) \cup \widehat{\mu}^{-1}(\partial\Delta_{n,2}),$$

где

$$\widehat{\mu}^{-1}(\partial\Delta_{n,2}) = \left(\bigcup_{q=1}^{n} G_{n-1,2}(q)/T^{n-1}\right) \cup \left(\bigcup_{q=1}^{n} \Delta^{n-2}(q)\right). \tag{9.3}$$

Топология объединения пространств в правой части определяется топологией пространств $\mu^{-1}(\partial\Delta_{n,2})/T^n$ (см. (3.1)).

Универсальное пространство параметров многообразий $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-2}(q)$, $1 \leq q \leq n$, является точкой. Канонические вложения $i_q\colon G_{n-1,2}(q) \to G_{n,2}$ индуцированы вложениями $\mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}^n$, $(z_1, \dots, z_{n-1}) \to (z_1, \dots, z_{q-1}, 0, z_q, \dots, z_{n-1})$, $1 \leq q \leq n$.

Как показано в п. 4.1, в качестве локальных координат в карте M_{ps} многообразия $G_{n-1,2}(q)$, $p,s\neq q$, можно взять z_i, w_i, $1\le i\le n$, где $i\neq p,s,q$. Следовательно, согласно п. 4.1.1 пространство параметров главного страта многообразия $G_{n-1,2}(q)$ можно отождествить с пространством $F_{n-1}(q)\subset(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{(n-3)(n-4)/2}$, которое в координатах карты M_{ps} задается следующим образом:

$$\bigl\{((c'_{ij}:c_{ij}))\in(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{(n-3)(n-4)/2}\colon\ c_{ij},c'_{ij}\neq 0,\ c_{ij}\neq c'_{ij},\ c_{ij}c'_{il}c_{jl}=c'_{ij}c_{il}c'_{jl}\bigr\},$$

где $1\le i<j\le n$, $i,j\neq p,s,q$.

В соответствии с теоремой 4.10 универсальные пространства параметров $\mathcal{F}_{n-1}(q)$ получаются методом замечательной компактификации пространства $F_{n-1}(q)$ с помощью многообразия $\overline{F}_{n-1}(q)\subset(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{(n-3)(n-4)/2}$ и соответствующего производящего множества $\{\widehat{F}_I,\,I=\{i,j,k\}$, $1\le i<j<k\le n-1,\ i,j,k\neq p,s,q\}$.

Опишем в явном виде связь универсальных пространств параметров многообразий $G_{n,2}$ и $G_{n-1,2}(q)$, $1\le q\le n$.

Предложение 9.4. *Существует непрерывная проекция $s_q\colon\overline{F}_n\to\overline{F}_{n-1}(q)$, индуцированная проекцией $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{(n-2)(n-3)/2}\to(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{(n-3)(n-4)/2}$, которая в координатах карты M_{ps} имеет вид $((c_{ij}:c'_{ij}))_{1\le i<j\le n,\,i,j\neq p,s}\to((c_{ij}:c'_{ij}))_{1\le i<j\le n,\,i,j\neq p,s,q}$.*

Производящее множество замечательной компактификации, использующее многообразие $\overline{F}_{n-1}(q)$, является образом ограничения проекции s_q на производящее множество замечательной компактификации, использующей многообразие $\overline{F}_n$. Таким образом, проекция s_q определяет непрерывную проекцию $r_q\colon\mathcal{F}_n\to\mathcal{F}_{n-1}(q)$.

Это означает, что все предыдущие построения применимы к $\mathcal{F}_{n-1}(q)$ и $\Delta_{n-1,2}(q)\subset\partial\Delta_{n,2}$. Напомним, что $\Delta_{n-1,2}(q)=\Delta_{n,2}\cap\{x_q=0\}$, где $1\le q\le n$. Обозначим через

$$p^q_{\omega,ij}\colon\ \mathcal{F}_{n-1}(q)\to F_\omega$$

проекцию, существующую согласно следствию 8.11 для $G_{n-1,2}(q)$, $1\le q\le n$, где F_ω — пространство параметров камеры C_ω гиперсимплекса $\Delta_{n-1,2}(q)$. Таким образом, мы получаем

Следствие 9.5. *Для любой камеры $C_\omega\subset\partial\Delta_{n,2}$ и любой карты M_{ij} определена проекция $p_{\omega,ij}\colon\mathcal{F}_n\to F_\omega$. Если $C_\omega\subset\Delta^{n-2}(q)$, то эта проекция отображает $\mathcal{F}_n$ в точку, а если $C_\omega\subset\Delta_{n-1,2}(q)$, то эта проекция действует по формуле $p_{\omega,ij}(y)=(p^q_{\omega,ij}\circ r_q)(y)$, где $r_q\colon\mathcal{F}_n\to\mathcal{F}_{n-1}(q)$.*

Замечание 9.6. Из предложения 9.4 следует, что конструкция универсального пространства параметров является контравариантной относительно вложений $i_q\colon G_{n-1,2}(q)\to G_{n,2}$, индуцированных вложениями $\mathbb{C}^{n-1}\to\mathbb{C}^n$, $(z_1,\dots,z_{n-1})\to(z_1,\dots,z_{q-1},0,z_q,\dots,z_{n-1})$, $1\le q\le n$. В работе [24] Кнудсен доказал, что забывание q-й точки определяет проекцию $\pi_q\colon\overline{\mathcal{M}}(0,n)\to\overline{\mathcal{M}}(0,n-1)$. Наше доказательство теоремы, утверждающее, что универсальное пространство параметров $\mathcal{F}_n$ можно отождествить с $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ (см. [9]), вместе с предложением 9.4 показывает, что проекция $r_q\colon\mathcal{F}_n\to\mathcal{F}_{n-1}(q)$ при этом отождествлении переходит в проекцию π_q.

Заметим также, что, как показал Капранов в [17], вложение i_q определяет проекцию $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n\to G_{n-1,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ и эта проекция соответствует проекции π_q при отождествлении многообразия $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ с фактором Чжоу $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$.

Рассмотрим теперь пространство

$$U_n=\Delta_{n,2}\times\mathcal{F}_n \tag{9.4}$$

и положим

$$\widetilde{U}_n=(\mathring{\Delta}_{n,2}\times\mathcal{F}_n)\cup\biggl(\bigcup_{q=1}^n U_{n-1,q}\biggr)\cup\biggl(\bigcup_{q=1}^n\Delta^{n-2}(q)\biggr), \tag{9.5}$$

где $U_{n-1,q} = \Delta_{n-1,q} \times \mathcal{F}_{n-1}(q)$. Индукцией по n можно определить проекцию $U_n \to \widetilde{U}_n$, которая является тождественным отображением по $x \in \mathring{\Delta}_{n,2}$ и задается формулой $(x,f) = (x, r_q(f))$, если $x \in \Delta_{n-1,2}(q)$, и $(x,f) = x$, если $x \in \Delta^{n-2}(q)$, где $1 \leq q \leq n$.

Из следствия 8.11, теоремы 9.1 и следствия 9.5 вытекает

Теорема 9.7. *Фиксируем карту $M_{ij} \subset G_{n,2}$. Пусть $\mathcal{F}_{n,ij}$ — представление пространства $\mathcal{F}_n$ в координатах этой карты* (*см. теорему* 4.10). *Тогда корректно определено отображение*

$$p_n\colon U_n \to G_{n,2}/T^n,$$

которое точке $(x,f) \in \Delta_{n,2} \times \mathcal{F}_{n,ij}$ ставит в соответствие точку

$$p_n(x,f) = h_\omega^{-1}(x, p_{\omega,ij}(f)), \tag{9.6}$$

где $x \in C_\omega \subset \Delta_{n,2}$.

Отображение p_n не зависит от выбора карты M_{ij}.

Из теоремы 9.1, формулы (9.3) и предложения 9.4 вытекает

Теорема 9.8. *Отображение p_n является проекцией на пространство орбит $G_{n,2}/T^n$ и задает гомеоморфизм пространства орбит $G_{n,2}/T^n$ с фактором пространства U_n, определенным отображением p_n, т.е. $(x,f) \equiv (x',f')$ тогда и только тогда, когда $x = x'$ и $p_n(x,f) = p_n(x',f')$.*

Подробное доказательство этой ключевой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 11.1 из [7], посвященной пространству орбит $G_{5,2}/T^5$.

Замечание 9.9. Принципиально важное утверждение теоремы 9.7 о том, что отображение p_n, определенное в координатах фиксированной карты M_{ij}, не зависит от выбора карты, опирается на следующий ключевой факт. Функции перехода от координат карты M_{ij} к координатам карты M_{kl} задают гомеоморфизмы $F_{\sigma,ij} \to F_{\sigma,kl}$ и $\widetilde{F}_{\sigma,ij} \to \widetilde{F}_{\sigma,kl}$. По построению эти гомеоморфизмы коммутируют с проекциями $p_{\sigma,ij}\colon \widetilde{F}_{\sigma,ij} \to F_{\sigma,ij}$ и $p_{\sigma,kl}\colon \widetilde{F}_{\sigma,kl} \to F_{\sigma,kl}$ (см. [7, Corollary 9.17]).

Следствие 9.10. *Точка $[L] \in X_n$ является особой тогда и только тогда, когда множество $p_n^{-1}([L])$ не является точкой.*

Доказательство. Точка $[L] \in W_\sigma/T^n$ является особой тогда и только тогда, когда проекция $p_{\sigma,ij}\colon \widetilde{F}_{\sigma,ij} \to F_\sigma$ не является гомеоморфизмом. Поэтому доказательство следует из формулы $p_n^{-1}([L]) = \{(\widehat{\mu}([L]), p_{\sigma,ij}^{-1}(\pi_{\sigma,\mathbb{C}}([L])))\}$. $\square$

Замечание 9.11. Проекции $\pi\colon G_{n,2} \to X_n$ и $p_n\colon U_n \to X_n$ определяют произведение $\mathcal{E}_n = U_n \times_{X_n} G_{n,2}$, где $\mathcal{E}_n \subset U_n \times G_{n,2}$ и

$$\mathcal{E}_n = \bigl\{((x,f),z) \in U_n \times G_{n,2}\colon\ p_n(x,f) = \pi(z)\bigr\}.$$

Так как $\widehat{\mu}(\pi(z)) = \mu(z) = x$, то пространство $\mathcal{E}_n$ можно описать как подпространство гладкого многообразия $\mathcal{F}_n \times G_{n,2}$, а именно

$$\mathcal{E}_n = \bigl\{(f,z) \in \mathcal{F}_n \times G_{n,2}\colon\ p_n(\mu(z),f) = \pi(z)\bigr\}.$$

Тор T^n действует на вторых сомножителях произведений $U_n \times G_{n,2}$ и $\mathcal{F}_n \times G_{n,2}$. Так как проекции μ и π являются T^n-инвариантными, то образы пространства $\mathcal{E}_n$ в этих двух пространствах также являются T^n-инвариантными, и поэтому пространство орбит $\mathcal{E}_n/T^n$ совпадает с пространством U_n.

Замечание 9.12. Универсальное пространство параметров $\mathcal{F}_n$ по построению является гладким замкнутым многообразием. Гиперсимплекс $\Delta_{n,2}$ можно рассматривать как пространство орбит действия алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ на торическом многообразии, которое является замыканием в $G_{n,2}$ орбиты любой точки главного страта $W_n \in G_{n,2}$. В книге Фултона [12, Sect. 4.1] для пространства орбит канонического действия алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^m$ на любом проективном торическом многообразии описано построение атласа аффинных карт, который задает на этом пространстве орбит структуру гладкого многообразия с *особыми* углами. Пространство орбит неособого проективного торического многообразия при этом получает известную структуру многообразия с углами. В случае гиперсимплекса $\Delta_{n,2}$ атлас Фултона нетрудно представить в явном виде. Таким образом, на пространстве U_n мы получаем структуру многообразия с особыми углами, согласованную с проекцией, разрешающей особенности пространства орбит $G_{n,2}/T^n$.

Благодарности. Авторы благодарят Тараса Евгеньевича Панова за полезные обсуждения результатов этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Atiyah M.F.* Convexity and commuting Hamiltonians // Bull. London Math. Soc. 1982. V. 14. P. 1–15.
2. *Айзенберг А.А.* Торические действия сложности 1 и их локальные свойства // Тр. МИАН. 2018. Т. 302. С. 23–40.
3. *Ayzenberg A.* Torus action on quaternionic projective plane and related spaces // Arnold Math. J. 2021. V. 7, N 2. P. 243–266; arXiv: 1903.03460 [math.AT].
4. *Ayzenberg A., Cherepanov V.* Torus actions of complexity one in non-general position // Osaka J. Math. 2021. V. 58, N 4. P. 839–853; arXiv: 1905.04761 [math.AT].
5. *Buchstaber V.M., Panov T.E.* Toric topology. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2015. (Math. Surv. Monogr.; V. 204).
6. *Buchstaber V.M., Terzić S.* Topology and geometry of the canonical action of T^4 on the complex Grassmannian $G_{4,2}$ and the complex projective space $\mathbb{C}P^5$ // Moscow Math. J. 2016. V. 16, N 2. P. 237–273.
7. *Buchstaber V.M., Terzić S.* Toric topology of the complex Grassmann manifolds // Moscow Math. J. 2019. V. 19, N 3. P. 397–463.
8. *Бухштабер В.М., Терзич С.* Основания $(2n,k)$-многообразий // Мат. сб. 2019. Т. 210, №4. С. 41–86.
9. *Buchstaber V.M., Terzić S.* The orbit spaces $G_{n,2}/T^n$ and the Chow quotients $G_{n,2}/\!/(\mathbb{C}^*)^n$ of the Grassmann manifolds $G_{n,2}$: E-print, 2021. arXiv: 2104.08858 [math.AG].
10. *Buchstaber V.M., Terzić S.* Compact torus action on the complex Grassmann manifolds // Toric topology and polyhedral products. New York: Springer. (Fields Inst. Commun.) (to appear).
11. *Chow W.-L.* On the geometry of algebraic homogeneous spaces // Ann. Math. Ser. 2. 1949. V. 50. P. 32–67.
12. *Fulton W.* Introduction to toric varieties. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993. (Ann. Math. Stud.; V. 131).
13. *Gelfand I.M., Goresky R.M., MacPherson R.D., Serganova V.V.* Combinatorial geometries, convex polyhedra, and Schubert cells // Adv. Math. 1987. V. 63, N 3. P. 301–316.
14. *Gelfand I.M., MacPherson R.D.* Geometry in Grassmannians and a generalization of the dilogarithm // Adv. Math. 1982. V. 44, N 3. P. 279–312.
15. *Гельфанд И.М., Серганова В.В.* Комбинаторные геометрии и страты тора на однородных компактных многообразиях // УМН. 1987. Т. 42, №2. С. 107–134.
16. *Goresky M., MacPherson R.* On the topology of algebraic torus actions // Algebraic groups: Proc. Symp., Utrecht, 1986. Berlin: Springer, 1987. P. 73–90. (Lect. Notes Math.; V. 1271).
17. *Kapranov M.M.* Chow quotients of Grassmannians. I // I. M. Gelfand seminar. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. Pt. 2. P. 29–110. (Adv. Sov. Math.; V. 16, Pt. 2).
18. *Karshon Y., Tolman S.* Classification of Hamiltonian torus actions with two-dimensional quotients // Geom. Topol. 2014. V. 18, N 2. P. 669–716.
19. *Karshon Y., Tolman S.* Topology of complexity one quotients // Pac. J. Math. 2020. V. 308, N 2. P. 332–346.
20. *Keel S.* Intersection theory of moduli space of stable n-pointed curves of genus zero // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 330, N 2. P. 545–574.
21. *Keel S., Tevelev J.* Geometry of Chow quotients of Grassmannians // Duke Math. J. 2006. V. 134, N 2. P. 259–311.
22. *Kirwan F.C.* Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1984. (Math. Notes; V. 31).

23. *Klemyatin N.* Universal spaces of parameters for complex Grassmann manifolds $G_{q+1,2}$: E-print, 2019. arXiv: 1905.03047 [math.AT].
24. *Knudsen F.F.* The projectivity of the moduli space of stable curves. II: The stacks $M_{g,n}$ // Math. Scand. 1983. V. 52, N 2. P. 161–199.
25. *Lee E., Masuda M.* Generic torus orbit closures in Schubert varieties // J. Comb. Theory. Ser. A. 2020. V. 170. Pap. 105143.
26. *Lee E., Masuda M., Park S.* Torus orbit closures in flag varieties and retractions on Weyl groups // Int. J. Math. 2022. V. 33, N 4. Pap. 2250028; arXiv: 1908.08310 [math.CO].
27. *Li L.* Wonderful compactification of an arrangement of subvarieties // Mich. Math. J. 2009. V. 58, N 2. P. 535–563.
28. *McDuff D., Salamon D.* J-holomorphic curves and symplectic topology. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2004. (AMS Colloq. Publ.; V. 52).
29. *Нодзи М., Огивара К.* Гладкие замыкания орбит тора в грассманианах // Тр. МИАН. 2019. Т. 305. С. 271–282.
30. *Smale S.* Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four // Ann. Math. Ser. 2. 1961. V. 74. P. 391–406.
31. *Süß H.* Toric topology of the Grassmannian of planes in $\mathbb{C}^5$ and the del Pezzo surface of degree 5 // Moscow Math. J. 2021. V. 21, N 3. P. 639–652.
32. *Timashev D.* Torus actions of complexity one // Toric topology: Int. Conf., Osaka, 2006. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008. P. 349–364. (Contemp. Math.; V. 460).