

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Бизяев, А. В. Борисов, И. С. Мамаев, Система Гесса–Аппельрота и ее неголономные аналоги, *Труды МИАН*, 2016, том 294, 268–292

DOI: 10.1134/S0371968516030171

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.227.72.204

13 сентября 2024 г., 09:19:32



УДК 517.925+531.381

# Система Гесса–Аппельрота и ее неголономные аналоги<sup>1</sup>

И. А. Бизяев<sup>2,3</sup>, А. В. Борисов<sup>2,4</sup>, И. С. Мамаев<sup>2,5</sup>

Поступило 25 апреля 2016 г.

Рассмотрены неголономная задача Суслова и ее обобщение, предложенное Чаплыгиным. Обсуждается вопрос о наличии инвариантной меры с сингулярной плотностью (имеющей особенности в некоторых точках фазового пространства).

DOI: 10.1134/S0371968516030171

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача Суслова является одной из модельных задач неголономной механики, описывающей движение твердого тела с неподвижной точкой, у которого проекция угловой скорости на фиксированную ось в теле равна нулю (левоинвариантная неголономная связь).

В работах [4, 31, 49, 23, 50, 11] рассматривались вопросы качественного анализа динамики задачи Суслова. В частности, указаны случаи существования инвариантной меры и дополнительных первых интегралов, а также исследован топологический тип интегральных многообразий. Отметим, что в интегрируемых случаях двумерные интегральные многообразия могут отличаться от торов (описываемых теоремой Эйлера–Якоби и встречающихся, например, в задаче Чаплыгина о качении динамически несимметричного шара [31]).

Задача Суслова тесно связана с другой неголономной системой — санями Чаплыгина [14]. Последнюю можно получить из задачи Суслова с помощью ретракции группы  $SO(3)$  к группе  $E(3)$  [33]. Таким образом, задача Суслова является компактной реализацией задачи о санях Чаплыгина. Отметим, что интерес представляет динамика системы Суслова–Чаплыгина на группе  $SO(2, 1)$ , в которой, по-видимому, встречаются компактные и некомпактные траектории.

Уравнения движения в задаче Суслова в поле тяжести представляют собой неголономный аналог уравнений Эйлера–Пуассона, которые в общем случае не обладают гладкой инвариантной мерой, но в зависимости от параметров задачи могут допускать как регулярное, так и хаотическое поведение. Вопросы хаотической динамики и явления реверса в задаче Суслова рассмотрены в работе [4].

В данной работе рассмотрен случай, в котором система уже не интегрируема в квадратурах по теореме Эйлера–Якоби, но ее поведение при этом является регулярным. В этом случае она допускает  $n - 2$  первых интегралов ( $n$  — размерность фазового пространства), с помощью которых задача сводится к исследованию потока на двумерном многообразии.

В п. 2.4 показано, что случай регулярной динамики в задаче Суслова, найденный в [4], изоморфен классической системе Гесса в уравнениях Эйлера–Пуассона. В приложении к работе указаны наиболее известные факты о случае Гесса, а также приведен критический анализ недавних публикаций [39, 40, 2].

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

<sup>2</sup>Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.

<sup>3</sup>E-mail: bizaev\_90@mail.ru

<sup>4</sup>E-mail: borisov@rzd.ru

<sup>5</sup>E-mail: mamaev@rzd.ru

Аналогия между задачей Сулова и случаем Гесса тесно связана с тем фактом, что динамика на инвариантном многообразии носит “диссипативный характер”, т.е. встречаются притягивающие множества (см. [31]). Отметим, что обе задачи сводятся к решению уравнения Риккати (для случая Гесса этот результат был получен П.А. Некрасовым [44], а для задачи Сулова — В.В. Вагнером [50]). Из анализа этого уравнения в задаче Сулова без поля тяжести была получена формула [22] для угла рассеяния. Оказалось, что при наличии дополнительного первого интеграла ось вращения тела меняет направление на обратное. В п. 2.2 мы указываем на естественность этого результата и проводим более подробный анализ задачи рассеяния, который тесно связан с существованием гладких или аналитических интегралов [27].

В работе обсуждается вопрос о наличии инвариантной меры с сингулярной плотностью (т.е. имеющей особенности в некоторых точках фазового пространства, см. также [35, 6]). Такая мера может существенно влиять на динамику системы, обуславливая некоторые особенности асимптотической динамики и связанной с ней задачей рассеяния. В разд. 3 обсуждается также комбинация задачи Сулова и задачи Чаплыгина о качении шара. Приведена динамическая интерпретация этой задачи. В этом случае уже не отделяется замкнутая система уравнений для угловых скоростей, но тем не менее система обладает инвариантной мерой с сингулярной плотностью. Сформулирован открытый вопрос, касающийся динамики этой системы.

В современных работах классический случай Гесса называется системой Гесса–Аппельрота<sup>6</sup>. На самом деле Г. Аппельрот не обнаружил этот случай из-за ошибок в вычислениях. История вопроса подробно изложена в приложении, посвященном анализу случая Гесса.

**Сингулярная мера и инвариантные многообразия.** Покажем, что если динамическая система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

допускает инвариантную меру, гладкую почти всюду, то точки, в которых мера имеет особенности, образуют инвариантные множества системы (см. [35, § 5]).

**Предложение 1.** Пусть система (1.1) обладает (гладкой) инвариантной мерой  $\mu = \rho(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n$ , плотность которой может обращаться в нуль. Тогда подмногообразие

$$\mathcal{M}_0 = \{\mathbf{x} \mid \rho(\mathbf{x}) = 0\}$$

является инвариантным подмногообразием системы.

**Доказательство.** Запишем уравнение Лиувилля для плотности инвариантной меры в виде

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \dot{\rho} = \sum_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i(\mathbf{x}). \quad (1.2)$$

Мы видим, что на подмногообразии  $\mathcal{M}_0$  производная  $\dot{\rho}$  равна нулю, следовательно, оно является инвариантным.  $\square$

Аналогично доказывается

**Предложение 2.** Пусть в системе (1.1) плотность инвариантной меры может обращаться в бесконечность так, что в этих точках функция  $g(x) = 1/\rho(x)$  оказывается гладкой. Тогда подмногообразие

$$\mathcal{M}_s = \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) = 0\},$$

также является инвариантным.

<sup>6</sup>В связи с поисковыми системами в сети интернет и распространенным использованием этого не вполне корректного названия (см., например, недавние работы [39, 40, 19, 20]) мы решили по тексту придерживаться правильного названия — случай Гесса, а в заголовке статьи именовать его случаем Гесса–Аппельрота.

**Доказательство.** Перепишем уравнение Лиувилля (1.2) через функцию  $g(\mathbf{x})$ :

$$\dot{g} - g \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Отсюда получаем заключение предложения.  $\square$

## 2. ЗАДАЧА СУСЛОВА В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

**2.1. Уравнения движения.** Рассмотрим движение твердого тела с неподвижной точкой в присутствии неголономной связи

$$(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}) = 0, \quad (2.1)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость тела и  $\mathbf{e}$  — единичный вектор, неподвижный в теле. Связь (2.1) была предложена Г.К. Сусловым в [48, с. 593] (о ее реализации см. [11]).

Для параметризации конфигурационного пространства выберем матрицу направляющих косинусов  $\mathbf{Q} \in \text{SO}(3)$ , по столбцам которой стоят орты неподвижных осей, спроецированные на оси подвижной системы координат  $Ox_1x_2x_3$ , жестко связанной с телом:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in \text{SO}(3).$$

Уравнения движения в подвижной системе координат в случае потенциальных внешних сил имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \lambda \mathbf{e} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \\ \lambda &= - \frac{(\mathbf{I}^{-1}\mathbf{e}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}})}{(\mathbf{I}^{-1}\mathbf{e}, \mathbf{e})}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega},$$

где  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  и  $U$  — потенциальная энергия внешних сил.

Выберем подвижную систему координат  $Ox_1x_2x_3$ , жестко связанную с твердым телом, таким образом, что  $Ox_3 \parallel \mathbf{e}$ , а оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  направлены так, чтобы одна из компонент тензора инерции тела обращалась в нуль:  $I_{12} = 0$ . При этом уравнение связи (2.1) и тензор инерции  $\mathbf{I}$  твердого тела представляются в виде

$$\omega_3 = 0, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & I_{13} \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Кроме того, будем полагать, что тело движется в поле тяжести. Это приводит к тому, что потенциальная энергия имеет вид

$$U = (\mathbf{b}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \mathbf{b} = -mg\mathbf{r},$$

где  $\mathbf{r}$  — постоянный в теле радиус-вектор центра масс,  $m$  — масса тела,  $g$  — ускорение свободного падения. В этом случае в уравнениях (2.2) отделяется система, описывающая эволюцию  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$ , которая с учетом связи (2.3) представляется в виде

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= -\omega_2(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) + b_3\gamma_2 - b_2\gamma_3, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= \omega_1(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) + b_1\gamma_3 - b_3\gamma_1, \\ \dot{\gamma}_1 &= -\gamma_3\omega_2, \quad \dot{\gamma}_2 = \gamma_3\omega_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Система (2.4) обладает интегралом энергии и геометрическим интегралом:

$$E = \frac{1}{2}(I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2) + (\mathbf{b}, \boldsymbol{\gamma}), \quad F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1. \quad (2.5)$$

В общем случае для интегрируемости системы (2.4) по теореме Эйлера–Якоби не хватает дополнительного интеграла  $F_2$  и гладкой инвариантной меры [31, 7].

Эта система является неголономным аналогом классических уравнений Эйлера–Пуассона, описывающих динамику твердого тела с неподвижной точкой в поле тяжести (см. [13], где также содержится подробная библиография). Как известно (см. [13]), уравнения Эйлера–Пуассона обладают интегралом площадей, стандартной инвариантной мерой и пуассоновой структурой (задаваемой алгеброй  $e(3)$ ). В общем случае эти объекты отсутствуют для системы (2.4), но могут существовать при определенных значениях параметров. Другие примеры неголономных систем с хаотическим поведением приведены в работах [10, 9].

Спецификой системы (2.4) является возможность существования не только инвариантной меры с всюду гладкой положительной плотностью, но и сингулярной меры, плотность которой имеет особенности на некоторых инвариантных многообразиях системы. Укажем сначала для системы (2.4) случаи, когда существуют интеграл площадей, а также регулярная или сингулярная инвариантная мера. Отметим, что в пространстве параметров системы эти случаи, вообще говоря, задают различные области, имеющие непустое пересечение.

1. Случай отсутствия внешнего поля  $\mathbf{b} = 0$  (т.е. уравновешенное твердое тело). Этот случай является обобщением известного случая Эйлера в уравнениях Эйлера–Пуассона. При этом система (2.4) обладает (сингулярной) инвариантной мерой

$$\mu = (I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2)^{-1} d\omega_1 d\omega_2 d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3$$

(см. [11]).

2. Случай, когда вектор  $\mathbf{e}$ , задающий связь (2.1), направлен вдоль главной оси инерции тела, при этом система (2.4) допускает стандартную инвариантную меру

$$\mu = d\omega_1 d\omega_2 d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3$$

(см. [31]).

3. Случай, когда вектор связи  $\mathbf{e}$  перпендикулярен круговому сечению эллипсоида инерции. При этом существует интеграл площадей  $F_2 = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega})$ , а параметры системы (2.4) удовлетворяют соотношениям

$$I_{13} = 0, \quad I_{23}^2 - I_{22}(I_{11} - I_{22}) = 0, \quad b_1 = 0, \quad I_{22}b_2 + I_{23}b_3 = 0$$

(см. [4]). Отметим, что при  $F_2 = 0$  распределение, задаваемое этим интегралом и связью (2.3), является интегрируемым, а сама система — голономной. На это обстоятельство впервые указано в [31].

В общем случае (когда отсутствуют какие-либо тензорные инварианты) система (2.4) демонстрирует поведение, характерное для диссипативных и неголономных систем, при котором встречаются мультистабильность и странные аттракторы [4]. Рассмотрим все три случая более подробно.

**2.2. Случай  $\mathbf{b} = 0$ .** В системе (2.4) отделяются уравнения, описывающие эволюцию угловых скоростей  $\omega_1, \omega_2$ :

$$I_{11}\dot{\omega}_1 = -\omega_2(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2), \quad I_{22}\dot{\omega}_2 = \omega_1(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2). \quad (2.6)$$

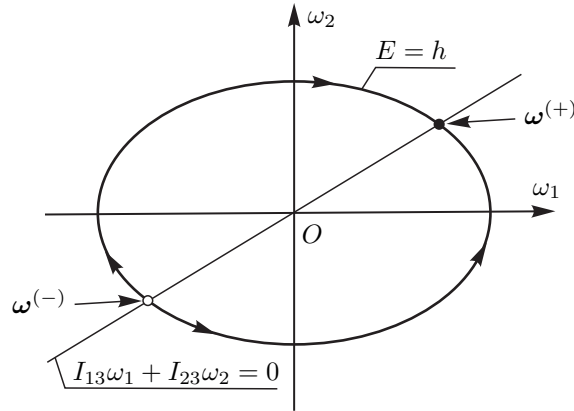


Рис. 1. Характерный фазовый портрет системы ( $I_{13} > 0, I_{23} < 0$ )

Они допускают интеграл энергии

$$E = \frac{1}{2}(I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2).$$

Согласно (2.4) в этом случае на плоскости  $\mathbb{R}^2 = \{(\omega_1, \omega_2)\}$  выделяется прямая

$$I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 = 0,$$

которая заполнена неподвижными точками. Таким образом, в подсистеме (2.6) каждый фиксированный уровень энергии  $E = h$  при  $h \neq 0$  состоит из четырех траекторий — одной устойчивой и одной неустойчивой неподвижных точек и пары дуг эллипса, их соединяющих (рис. 1).

При этом ее общее решение (отличное от неподвижных точек) выражается явно в экспоненциальных функциях времени

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 \frac{\sqrt{I_{11}}I_{22}}{I_{22}I_{13}^2 + I_{11}I_{23}^2} \frac{2\sqrt{I_{22}}I_{13} - \sqrt{I_{11}}I_{23}(e^u - e^{-u})}{e^u + e^{-u}}, \\ \omega_2 &= \omega_0 \frac{I_{11}\sqrt{I_{22}}}{I_{22}I_{13}^2 + I_{11}I_{23}^2} \frac{2\sqrt{I_{11}}I_{23} + \sqrt{I_{22}}I_{13}(e^u - e^{-u})}{e^u + e^{-u}}, \quad u = \omega_0(t - t_0), \end{aligned}$$

где  $\omega_0$  — некоторая постоянная, которая на уровне энергии  $E = h$  удовлетворяет соотношению

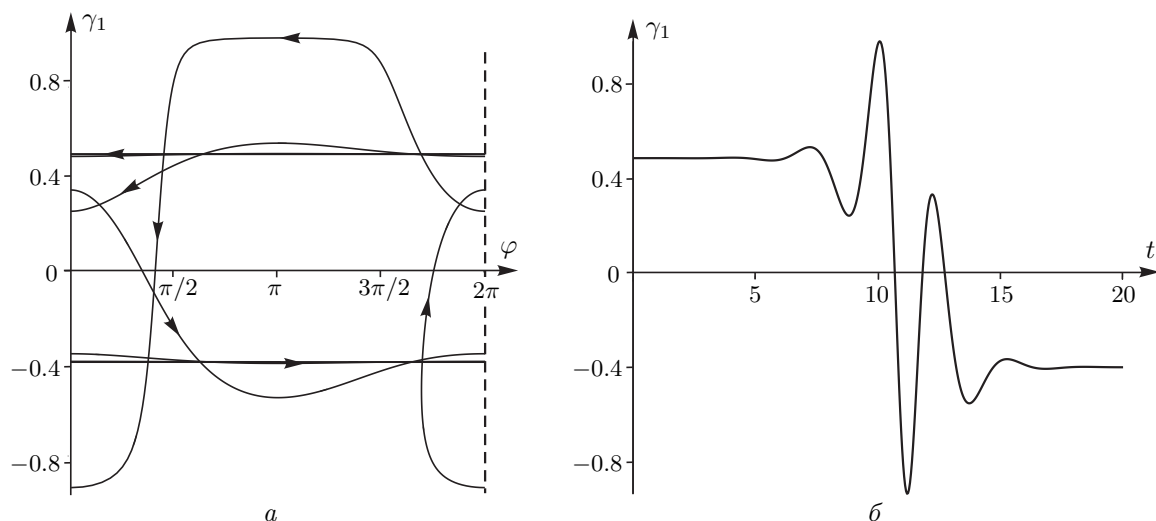
$$\omega_0^2 = \frac{2(I_{22}I_{13}^2 + I_{11}I_{23}^2)}{I_{11}^2 I_{22}^2} h.$$

Неподвижным точкам подсистемы (2.6) в системе (2.4) отвечают предельные циклы (соответственно устойчивый и неустойчивый). Их проекции на сферу Пуассона лежат в плоскостях, перпендикулярных одному и тому же вектору

$$\xi = \left( \frac{I_{23}}{\sqrt{I_{13}^2 + I_{23}^2}}, -\frac{I_{13}}{\sqrt{I_{13}^2 + I_{23}^2}}, 0 \right).$$

Таким образом, на каждом уровне энергии  $E = h$  лежат два семейства периодических решений: одно из них  $S_+$  соответствует устойчивой точке системы (2.4), другое  $S_-$  — неустойчивой, каждое из которых параметризуется величиной

$$\Gamma = (\xi, \gamma) \in (-1, 1).$$



**Рис. 2.** Зависимости  $\gamma_1(\varphi)$  и  $\gamma_1(t)$  для одной траектории при фиксированных моментах инерции  $I_{11} = 2.44$ ,  $I_{22} = 1$ ,  $I_{13} = 0$ ,  $I_{23} = 0.5$  и начальных условиях  $\omega_1(0) = 2$ ,  $\omega_2(0) = 10^{-4}$ ,  $\gamma_1(0) = 0.5$ ,  $\gamma_2(0) = 0.26$ ,  $\gamma_2(0) = 0.83$

Значениям  $\Gamma = \pm 1$  соответствуют неподвижные точки системы (2.4), которые на уровне энергии  $E = h$  задаются соотношениями

$$\omega_1^{(\pm)} = \mp \sqrt{\frac{2h}{I_{11}I_{23}^2 + I_{22}I_{13}^2}} I_{23}, \quad \omega_2^{(\pm)} = \pm \sqrt{\frac{2h}{I_{11}I_{23}^2 + I_{23}I_{13}^2}} I_{13}, \quad \gamma^{(\pm)} = \pm \xi. \quad (2.7)$$

Все остальные траектории системы (2.4) асимптотические (рис. 2): при  $t \rightarrow -\infty$  и  $t \rightarrow +\infty$  они стремятся к одному из периодических решений семейств  $S_-$  и  $S_+$  соответственно (либо к неподвижным точкам  $\Gamma = \pm 1$ ).

В работе [11] найдены случаи, когда система (2.4) (с нулевым потенциалом) допускает еще один первый интеграл, при этом элементы тензора инерции удовлетворяют соотношениям

$$I_{13} = 0, \quad I_{11}I_{22} = I_{22}^2 + k^2 I_{23}^2 \quad (2.8)$$

или

$$I_{23} = 0, \quad I_{11}I_{22} = I_{11}^2 + k^2 I_{13}^2, \quad (2.9)$$

где  $k = 2n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Отметим, что случай (2.9) получается из (2.8) перестановкой индексов  $1 \leftrightarrow 2$ , поэтому мы рассматриваем лишь первую ситуацию.

Дополнительный интеграл оказывается однородным полиномом по  $\omega$ ,  $\gamma$ , имеющим первую степень по  $\gamma$  и степень  $k$  по  $\omega$ . Так, при  $n = 1$  интеграл имеет вид

$$F_2 = (\gamma, \mathbf{I}\omega) = I_{11}\gamma_1\omega_1 + (I_{22}\gamma_2 + I_{23}\gamma_3)\omega_2,$$

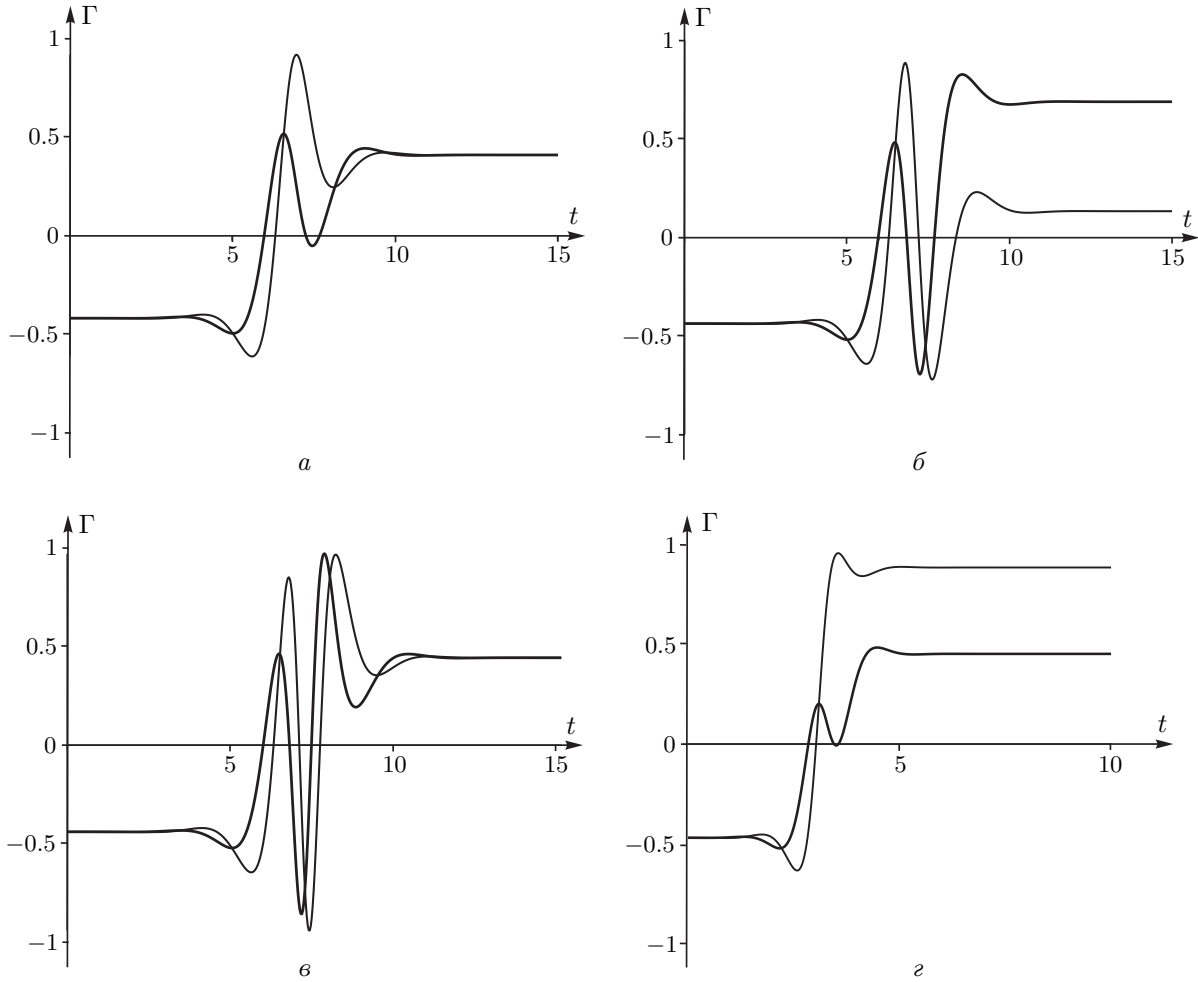
а при  $n = 2$  — вид

$$F_2 = I_{11}^2\omega_1^2((I_{22}^2 + I_{23}^2)\gamma_1\omega_1 + I_{22}(I_{22}\gamma_2 + I_{23}\gamma_3)\omega_2) + I_{22}\omega_2^2(I_{22}(I_{22}^2 + 5I_{23}^2)\gamma_2\omega_2 + (I_{22}^2 - 3I_{23}^2)(I_{11}\gamma_1\omega_1 + I_{23}\gamma_3\omega_2)).$$

При произвольных  $k$  рекуррентная формула для интеграла указана в [11] (см. также [22]).

Пусть соответствующее двумерное интегральное подмногообразие системы в этом случае есть

$$\mathcal{M}_{h,f}^2 = \{(\omega, \gamma) \mid E = h, F_1 = 1, F_2 = f\}.$$



**Рис. 3.** Зависимость  $\Gamma(t) = (\xi, \gamma(t))$  для двух траекторий, запущенных из окрестности одного и того же неустойчивого цикла, с различными начальными фазами. Графики построены при  $I_{11} = 1.64, I_{12} = 0, I_{22} = 1, I_{13} = 0, I_{23} = 0.8, k = 1$  (а);  $I_{11} = 3.56, I_{12} = 0, I_{22} = 1, I_{13} = 0, I_{23} = 0.8, k = 2$  (б);  $I_{11} = 6.76, I_{12} = 0, I_{22} = 1, I_{13} = 0, I_{23} = 0.8, k = 3$  (в);  $I_{11} = 4, I_{12} = 0, I_{22} = 5, I_{13} = 2, I_{23} = 3$  (г) и следующих начальных условиях:  $\omega_1(0) = 2, \omega_2(0) = 10^{-3}, \gamma_1(0) = -0.44, \gamma_2(0) = 0.28, \gamma_3(0) = 0.85$  и  $\omega_1(0) = 2, \omega_2(0) = 10^{-3}, \gamma_1(0) = -0.44, \gamma_2(0) = 0.72, \gamma_3(0) = 0.53$  (а, б, в);  $\omega_1(0) = 3, \omega_2(0) = -2.001, \gamma_1(0) = -0.88, \gamma_2(0) = -0.48, \gamma_3(0) = 0$  и  $\omega_1(0) = 3, \omega_2(0) = -2.001, \gamma_1(0) = -0.49, \gamma_2(0) = 0.26, \gamma_3(0) = 0.88$  (г)

Если мы предположим, что величина  $f$  не равна значениям интеграла  $F_2$  в неподвижных точках (2.7)

$$F_2(\omega^{(+)}, \gamma^{(+)}) = f^+, \quad F_2(\omega^{(-)}, \gamma^{(-)}) = f^-,$$

то ограничение векторного поля системы на  $M_{h,f}^2$  нигде не обращается в нуль. Следовательно,  $M_{h,f}^2$  при  $f \neq f^+$  и  $f \neq f^-$  диффеоморфно двумерному тору (в общем случае всякая его связная компонента диффеоморфна двумерному тору).

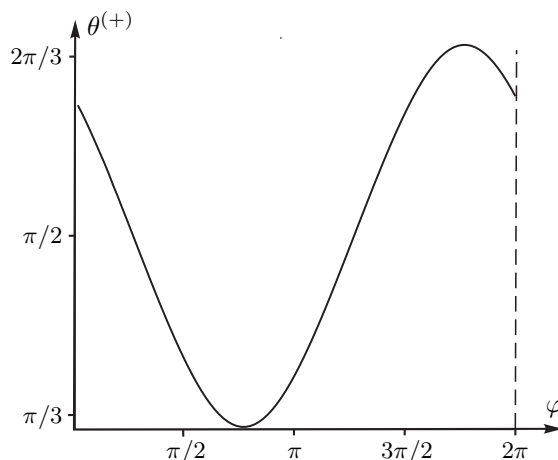
На каждом торе  $M_{h,f}^2$ , в свою очередь, имеются два предельных цикла

$$C_{h,f}^+ = \{(\omega, \gamma) \mid \omega = \omega^{(+)}, \gamma^2 = 1, F_2(\omega^{(+)}, \gamma) = f\},$$

$$C_{h,f}^- = \{(\omega, \gamma) \mid \omega = \omega^{(-)}, \gamma^2 = 1, F_2(\omega^{(-)}, \gamma) = f\},$$

где  $\omega^{(+)}, \omega^{(-)}$  задаются соотношениями (2.7). Все остальные траектории при  $t \rightarrow -\infty$  стремятся к неустойчивому циклу  $C_{h,f}^-$ , а при  $t \rightarrow +\infty$  наматываются на устойчивый  $C_{h,f}^+$ .





**Рис. 4.** Зависимость  $\theta^{(+)}(\varphi)$  при фиксированных  $I_{11} = 3.56$ ,  $I_{22} = 1$ ,  $I_{13} = 0$ ,  $I_{23} = 0.8$  и  $\omega_1(0) = 2$ ,  $\omega_2(0) = 10^{-5}$ ,  $\theta^{(-)} = \pi/2$

Выделим в семействе  $S_-$  некоторый неустойчивый цикл  $\mathcal{C}_*^{(-)}$  и рассмотрим множество траекторий  $\mathcal{M}_*^{(-)}$ , которые стремятся к нему при  $t \rightarrow -\infty$ . В случае существования у системы дополнительного интеграла  $F_2(\omega, \gamma)$  это множество  $\mathcal{M}_*^{(-)}$  обладает следующим естественным свойством.

**Предложение 3.** Если  $\partial F_2 / \partial \gamma \neq 0$ , то все траектории из  $\mathcal{M}_*^{(-)}$  при  $t \rightarrow +\infty$  стремятся к одному и тому же устойчивому циклу  $\mathcal{C}_*^{(+)}$ .

**Доказательство.** Поскольку цикл  $\mathcal{C}_*^{(-)}$  является инвариантным множеством, он лежит на некотором фиксированном уровне интеграла  $F_2(\omega, \gamma) = f_*$ , на этом же уровне лежит и все множество  $\mathcal{M}_*^{(-)}$ .

При  $t \rightarrow +\infty$  имеем  $\omega \rightarrow \omega^{(+)}$ , поэтому все траектории стремятся к кривой

$$\mathcal{C}_*^+ = \{(\omega, \gamma) \mid \omega = \omega^{(+)}, \gamma^2 = 1, F_2(\omega^{(+)}, \gamma) = f_*\}. \quad \square$$

Как показывают численные эксперименты (рис. 3), при невыполнении условий (2.8) различные траектории из множества  $\mathcal{M}_*^{(-)}$  стремятся к различным предельным циклам при  $t \rightarrow +\infty$ , поэтому система (2.4) при  $U = 0$  в общем случае не обладает дополнительным (аналитическим) интегралом.

Если в окрестности одного и того же неустойчивого цикла, заданного на сфере Пуассона углом  $\theta^- = \arccos \Gamma^{(-)}$ , запустить семейство траекторий с различными начальными азимутальными углами (фазами)  $\varphi_0$ , то при  $t \rightarrow +\infty$  получим зависимость углов  $\theta^+(\varphi_0) = \arccos \Gamma^{(+)}$  для тех предельных циклов, к которым стремятся соответствующие траектории (рис. 4).

**2.3. Случай  $I_{13} = I_{23} = 0$ .** Теперь рассмотрим случай, в котором вектор  $\mathbf{e}$  направлен вдоль главной оси тензора инерции, т.е.  $I_{13} = I_{23} = 0$ :

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= b_3\gamma_2 - b_2\gamma_3, & I_{22}\dot{\omega}_2 &= b_1\gamma_3 - b_3\gamma_1, \\ \dot{\gamma}_1 &= -\gamma_3\omega_2, & \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3\omega_1, & \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Как было сказано выше, при этом система (2.4) обладает стандартной инвариантной мерой.

Тем не менее в общем случае система является гамильтоновой только после замены времени.

**Теорема 1.** Система (2.4) представляется в конформно-гамильтоновой форме

$$\dot{x}_i = \gamma_3 \{x_i, E(\mathbf{x})\}, \quad E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2) + b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3,$$

где  $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  и ненулевые скобки Пуассона имеют вид

$$\{\omega_1, \gamma_2\} = -\frac{1}{I_{11}}, \quad \{\omega_2, \gamma_1\} = \frac{1}{I_{22}}, \quad \{\omega_1, \gamma_3\} = \frac{1}{I_{11}} \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, \quad \{\omega_2, \gamma_3\} = -\frac{1}{I_{22}} \frac{\gamma_1}{\gamma_3}. \quad (2.11)$$

Ранг пуассоновой структуры (2.11) равен 4, ее функцией Казимира является геометрический интеграл

$$F_1 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2.$$

Кроме того, как мы видим, данное конформно-гамильтоново представление имеет особенность при  $\gamma_3 = 0$ .

Для системы (2.10) можно выделить два более частных случая. Один из них тривиально интегрируется и был указан Е.И. Харламовой-Забелиной [26], а другой в общем случае допускает хаотическое поведение (см. [31]):

- $b_3 = 0$ , т.е. радиус-вектор центра масс лежит в плоскости, ортогональной вектору связи  $\mathbf{e}$ ;
- $b_1 = b_2 = 0$ , т.е. радиус-вектор центра масс коллинеарен вектору связи.

Рассмотрим их последовательно.

*Случай  $b_3 = 0$ .* В данном случае уравнения (2.10) оказываются инвариантными относительно преобразования

$$\gamma_3 \rightarrow -\gamma_3, \quad t \rightarrow -t.$$

Как следствие получаем следующий естественный результат.

**Предложение 4.** Пусть  $\mathbf{x}(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$  – решение системы (2.10) при  $b_3 = 0$ . Тогда  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = (\omega_1(-t), \omega_2(-t), \gamma_1(-t), \gamma_2(-t), \gamma_3(-t))$  – также решение этой системы.

Это замечание позволяет разделить все траектории системы на три типа:

- траектории, которые никогда не достигают экватора ( $\gamma_3 = 0$ ) на сфере Пуассона (каждой из них соответствует зеркально отраженная траектория  $\gamma_3 \rightarrow -\gamma_3$ , проходимая в обратном направлении);
- траектории, трансверсально пересекающие экватор ( $\gamma_3 = 0$ ), которые вследствие предложения оказываются периодическими;
- неподвижные точки, лежащие на экваторе ( $\gamma_3 = 0$ ).

Отсюда следует, что для анализа поведения траекторий системы достаточно рассмотреть лишь одну половину сферы Пуассона. Выберем для определенности  $\gamma_3 > 0$  и сделаем замену переменных и времени:

$$q_1 = \sqrt{I_{11}}\gamma_2, \quad q_2 = -\sqrt{I_{22}}\gamma_1, \quad p_1 = \sqrt{I_{11}}\omega_1, \quad p_2 = \sqrt{I_{22}}\omega_2, \quad \gamma_3 dt = d\tau.$$

В результате получим интегрируемую каноническую гамильтонову систему с двумя степенями свободы (относительно гамильтонизации неголономных систем см. подробнее [7])

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, & i &= 1, 2, \\ H &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{b_2}{\sqrt{I_{11}}}q_1 + \frac{b_1}{\sqrt{I_{22}}}q_2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

которая определена внутри области

$$\frac{q_1^2}{I_{11}} + \frac{q_2^2}{I_{22}} \leq 1. \quad (2.13)$$

Система (2.12) описывает движение материальной точки на плоскости под действием потенциальной силы, ее траектории представляют собой прямые линии. Вследствие того, что траектория, достигающая границы (2.13), является половиной периодической траектории (вторая половина которой симметрично отражается на полусфере  $\gamma_3 < 0$ ), получаем, что в данном случае все траектории (за исключением неподвижных точек) являются периодическими. Случай квадратичного потенциала рассмотрен в [31].

**Замечание 1.** Эта конструкция очевидным образом обобщается на случай произвольного потенциального поля, потенциал которого  $U$  зависит только от  $\gamma_1, \gamma_2$ . При этом получается натуральная гамильтонова система в области (2.12) с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2), \quad V(q_1, q_2) = U\left(-\frac{q_2}{\sqrt{I_{22}}}, \frac{q_1}{\sqrt{I_{11}}}\right). \quad (2.14)$$

Отсюда, в частности, следует, что интегрируемые потенциалы на плоскости имеют свои интегрируемые аналоги в задаче Суслова. Квадратичные интегралы [45, 49], а также интегралы более высоких степеней на плоскости [24] можно перенести на случай задачи Суслова. Однако при этом их необходимо топологически модифицировать (с учетом прохождения через экватор).

*Случай  $b_1 = b_2 = 0$ .* Система (2.10) также сводится к задаче о движении материальной точки в потенциальном силовом поле [31]. Действительно, зафиксируем сначала энергию  $E = h$  и выразим  $\gamma_3$ :

$$\gamma_3 = \frac{h}{2b_3} - \frac{I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2}{2b_3}.$$

Далее подставим найденное  $\gamma_3$  в уравнения для  $(\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2)$  и выполним замену переменных (замена времени не требуется)

$$p_1 = \gamma_1, \quad p_2 = \gamma_2, \quad q_1 = \frac{I_{22}}{b_3}\omega_2, \quad q_2 = -\frac{I_{11}}{b_3}\omega_1.$$

В итоге получим натуральную систему с двумя степенями свободы с канонической скобкой Пуассона ( $\{p_i, q_k\} = \delta_{ik}$ ) и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{b_3} - \frac{1}{2}\left(\frac{q_1^2}{I_{22}} + \frac{q_2^2}{I_{11}}\right)\right)^2. \quad (2.15)$$

Система (2.15) оказывается интегрируемой [31, 41] только в случае

$$I_{11} = I_{22}.$$

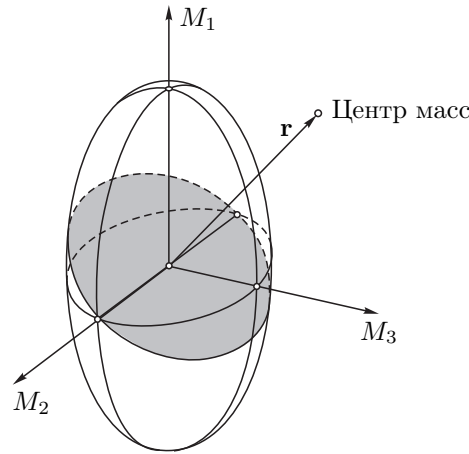
**2.4. Существование интеграла площадей и изоморфизм с классическим случаем Гесса.** В п. 2.1 было показано, что система (2.2) при  $U = 0$  допускает счетное семейство случаев существования дополнительного первого интеграла. Оказывается, что простейший из этих случаев (при  $k = 1$ ) допускает естественное обобщение при наличии поля тяжести. Этот случай изоморфен классическому случаю Гесса, исследование которого изложено в приложении. Напомним геометрический смысл соответствующих ограничений на параметры, предполагая, что все главные моменты инерции различны:

- сделаем преобразование от угловых скоростей к моментам:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega};$$

- рассмотрим в трехмерном пространстве моментов поверхность уровня кинетической энергии — *гирационный эллипсоид*

$$(\mathbf{M}, \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M}) = \text{const};$$



**Рис. 5.** Гиращионный эллипсоид и расположение центра масс для случая Гесса

- проведем пару круговых сечений, проходящих через среднюю ось гиращионного эллипсоида. В случае Гесса центр масс лежит на перпендикуляре к круговому сечению гиращионного эллипсоида (рис. 5).

Перепишем теперь уравнение связи (2.1) в следующем виде:

$$(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a}) = 0, \quad \mathbf{a} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{e}.$$

Можно показать, что если  $Ox_1$  — средняя ось инерции, то условие перпендикулярности вектора  $\mathbf{n}$  круговому сечению соответствующего гиращионного эллипсоида в точности совпадает с условиями существования интеграла при  $U = 0$  и  $k = 1$ :

$$I_{13} = 0, \quad I_{11}I_{22} = I_{22}^2 + I_{23}^2. \tag{2.16}$$

Дополнительно предположим теперь, что центр масс тела также расположен на нормали к тому же круговому сечению в выбранной системе координат. Это эквивалентно условиям

$$b_1 = 0, \quad I_{22}b_2 + I_{23}b_3 = 0. \tag{2.17}$$

Получаем, что система (2.2) при этом также допускает интеграл

$$F = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}).$$

Далее введем безразмерные параметры

$$a = \frac{I_{23}}{I_{22}}, \quad b = -\frac{mgb_3}{\sqrt{I_{22}^2 + I_{23}^2}}$$

и определим новые переменные  $\mathbf{x} = (w_1, w_2, n_1, n_2, n_3)$ :

$$w_1 = \omega_1, \quad w_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad n_1 = \gamma_1, \quad n_2 = \frac{\gamma_2 + a\gamma_3}{\sqrt{1+a^2}}, \quad n_3 = -\frac{a\gamma_2 - \gamma_3}{\sqrt{1+a^2}}. \tag{2.18}$$

Преобразование (2.18) представляет собой поворот системы координат  $Ox_1x_2x_3$  вокруг оси  $Ox_1$  на угол  $\arctg a$ , в результате которого координаты центра масс принимают вид

$$\left( b_1, \frac{I_{22}b_2 + I_{23}b_3}{\sqrt{I_{22}^2 + I_{23}^2}}, \frac{I_{22}b_3 - I_{23}b_2}{\sqrt{I_{22}^2 + I_{23}^2}} \right).$$

Таким образом, в новой системе координат с учетом (2.17) центр масс смещен только вдоль третьей оси.

Уравнения движения (2.4) в новых переменных представляются в виде

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= -aw_2^2 - bn_2, & \dot{w}_2 &= aw_1w_2 + bn_1, \\ \dot{n}_1 &= -(an_2 + n_3)w_2, & \dot{n}_2 &= aw_2n_1 + w_1n_3, & \dot{n}_3 &= n_1w_2 - n_2w_1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

**Замечание 2.** Система (2.19) с точностью до замены параметров совпадает с уравнениями Эйлера–Пуассона на инвариантном соотношении Гесса (см. приложение).

**Замечание 3.** В случае  $b = 0$  система (2.19) обладает частным решением

$$\begin{aligned} w_1 &= \text{const}, & w_2 &= 0, & n_1 &= \cos \theta_0, & n_2 &= \sin(w_1t + \varphi_0) \sin \theta_0, \\ n_3 &= \cos(w_1t + \varphi_0) \sin \theta_0, & \theta_0 &= \text{const}, & \varphi_0 &= \text{const}. \end{aligned}$$

Первые интегралы системы (2.19) представляются в виде

$$E = \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) - bn_3, \quad F_2 = w_1n_1 + w_2n_2, \quad F_1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (2.20)$$

**Замечание 4.** Отметим, что первые интегралы (2.20) являются также интегралами векторного поля  $\mathbf{u}$  (связанного с поворотом вокруг оси симметрии):

$$\mathbf{u} = -w_2 \frac{\partial}{\partial w_1} + w_1 \frac{\partial}{\partial w_2} - n_2 \frac{\partial}{\partial n_1} + n_1 \frac{\partial}{\partial n_2}$$

(см. [15]). Тем не менее  $\mathbf{u}$  не является полем симметрий системы (2.19). Действительно, если обозначить векторное поле системы (2.19) через  $\mathbf{v}$ , то получим

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = aw_1\mathbf{u}.$$

Исследуем подробнее динамику на двумерных интегральных многообразиях

$$\mathcal{M}_{h,f}^2 = \{\mathbf{x} \mid E(\mathbf{x}) = h, F_1(\mathbf{x}) = 1, F_2(\mathbf{x}) = f\}.$$

Для этого параметризуем их с помощью координат  $(n_3, \varphi)$ , где  $\varphi$  — угловая переменная:

$$w_1 = \sqrt{2(h + bn_3)} \sin \varphi, \quad w_2 = \sqrt{2(h + bn_3)} \cos \varphi.$$

Без ограничения общности положим  $b = 1$ . Далее с учетом (2.19) получим уравнения движения в виде

$$\dot{n}_3^2 = 2(h + n_3)(1 - n_3^2) - f^2, \quad \dot{\varphi} = -\frac{f}{2(h + n_3)} - a \cos \varphi \sqrt{2(h + n_3)}. \quad (2.21)$$

Как видим, гироскопическая функция (определяемая уравнением для  $n_3$ ) совпадает с гироскопической функцией для сферического маятника. Таким образом, приходим к известному результату для случая Гесса.

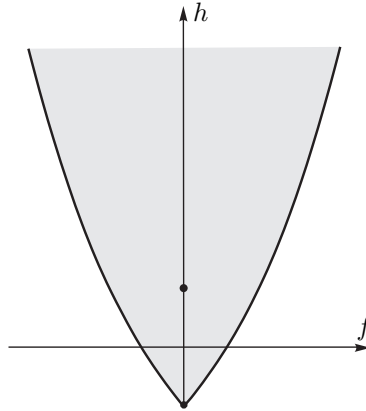
**Предложение 5.** *Интегралы системы (2.19) становятся зависимыми, если их значения находятся*

1) на кривой, задаваемой уравнениями

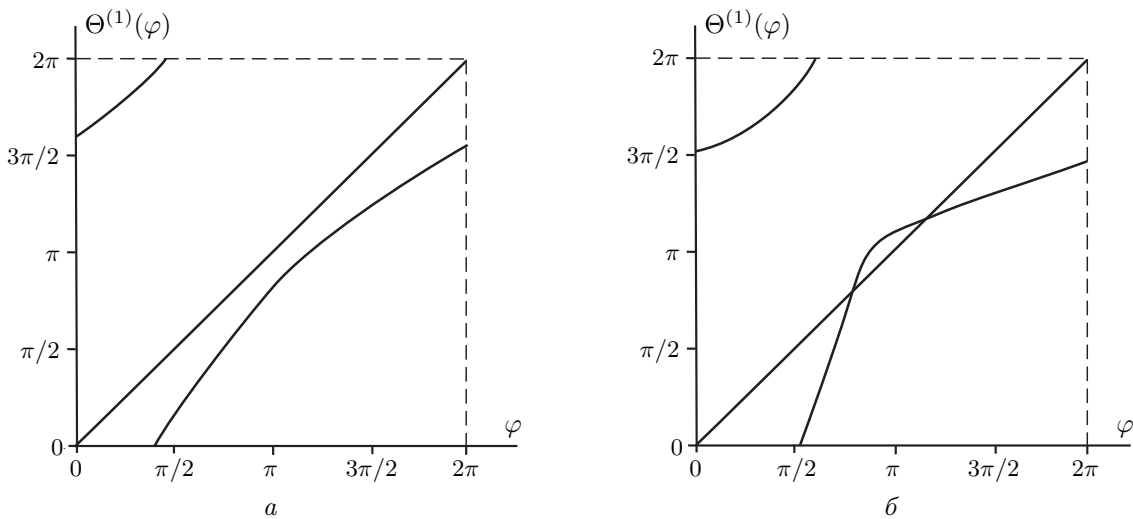
$$h = \frac{(1 - 3n_3^3)}{2n_3}, \quad f = \pm \frac{1 - n_3^2}{\sqrt{n_3}}, \quad n_3 \in (0, 1); \quad (2.22)$$

2) в точках

$$f = 0, \quad h = 1 \quad \text{и} \quad f = 0, \quad h = -1. \quad (2.23)$$



**Рис. 6.** Бифуркационная диаграмма (серым выделена область возможных значений первых интегралов)



**Рис. 7.** Отображение  $\Theta^{(1)}(\varphi)$  и диагональ квадрата для значений  $h = 1, f = 0.5$ : *а* — при  $a = 0.2$ ; *б* — при  $a = 0.5$

Соответствующая бифуркационная диаграмма приведена на рис. 6. Можно показать, что для значений первых интегралов  $h$  и  $f$ , не удовлетворяющих (2.22) и (2.23), поверхность уровня первых интегралов системы (2.19) диффеоморфна двумерному тору  $\mathbb{T}^2$ , векторное поле на котором описывается системой (2.21). В этой системе встречаются предельные циклы, что согласуется с результатами работ [30, 52].

**Замечание 5.** На нулевом уровне интеграла площадей  $f = 0$  в точках (2.23) система (2.21) имеет особенности, поэтому данный случай требует отдельного рассмотрения.

В системе (2.21) имеем  $n_3 \in (n_3^{(1)}, n_3^{(2)})$ , где  $n_3^{(1)}$  и  $n_3^{(2)}$  — решения кубического уравнения  $2(h + n_3)(1 - n_3^2) - f^2 = 0$ . Для того чтобы исследовать векторное поле системы (2.21), рассмотрим на торе  $\mathbb{T}^2$  сечение Пуанкаре плоскостью  $n_3 = n_3^{(1)}$ , которое определяет отображение окружности на себя:

$$\Theta(\varphi): S^1 \rightarrow S^1.$$

На рис. 7 приведены это отображение при различных фиксированных параметрах и диагональ (квадрата); точкам их пересечения соответствуют периодические решения системы (2.21). При параметрах, соответствующих рис. 7, *б*, встречаются два предельных цикла — устойчивый и неустойчивый; далее при уменьшении параметра  $a$  циклы исчезают.

## 3. ШАР ЧАПЛЫГИНА СО СВЯЗЬЮ СУСЛОВА

В работе [11] рассмотрена система, которая эквивалентна задаче о движении шара Чаплыгина с дополнительной связью Суслова (2.1). Кроме того, там же предложена реализация этой системы, позволяющая построить еще одно возможное неголономное обобщение уравнений Эйлера–Пуассона (рис. 8).

В данном случае, как и в реализации Вагнера [50], предполагается, что твердое тело  $\mathcal{B}$  снабжено колесиками (на одной оси) и заключено в неподвижную сферическую оболочку. Условие отсутствия проскальзывания в перпендикулярном плоскости колес направлении приводит к связи Суслова

$$(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}) = 0,$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость тела,  $\mathbf{e}$  — фиксированный в теле вектор, лежащий в плоскости колес перпендикулярно несущей их оси. Ниже мы пользуемся системой координат, связанной с телом, в которой

$$\mathbf{e} = (0, 0, 1).$$

Кроме того, рассматриваемое тело имеет сферическую полость радиуса  $R$ , центр которой  $O$  расположен на прямой, соединяющей колесики. В точке  $P$  полость соприкасается со свободно вращающимся однородным шаром  $\mathcal{S}$ , центр которого неподвижен. В точке контакта  $P$  выполняется условие отсутствия проскальзывания (взаимное прокручивание не запрещено)

$$R\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = R_S\boldsymbol{\omega}_S \times \boldsymbol{\gamma},$$

где  $\boldsymbol{\omega}_S$  — угловая скорость шара,  $\boldsymbol{\gamma}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси, соединяющий центры полости и шара.

Если в данной реализации выбрать неподвижный шар  $\mathcal{S}$  внутри полости таким образом, чтобы вектор, соединяющий его центр с центром полости тела, оказался вертикальным (см. рис. 8), то уравнения движения тела  $\mathcal{B}$  в системе координат, жестко связанной с ним, принимают вид

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{I}} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2)\omega_2 + b_3\gamma_2 - b_2\gamma_3 \\ (I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2)\omega_1 + b_1\gamma_3 - b_3\gamma_1 \end{pmatrix}, & \omega_3 &= 0, \\ \dot{\gamma}_1 &= -\gamma_3\omega_2, & \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3\omega_1, & \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1, & (3.1) \\ \widehat{\mathbf{I}} &= \begin{pmatrix} I_{11} + \mathcal{D}(\gamma_2^2 + \gamma_3^2) & -\mathcal{D}\gamma_1\gamma_2 \\ -\mathcal{D}\gamma_1\gamma_2 & I_{22} + \mathcal{D}(\gamma_1^2 + \gamma_3^2) \end{pmatrix}, & \mathcal{D} &= \frac{R^2}{R_S^2} I_S, \end{aligned}$$

где  $I_S$  — момент инерции шара  $\mathcal{S}$ ,  $I_{ij}$  — компоненты тензора инерции тела относительно точки  $O$ , причем оси системы координат выбраны так, что  $I_{12} = 0$ .

Уравнения (3.1) обладают очевидными интегралами движения — энергией и геометрическим интегралом

$$E = \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{I}}\widehat{\boldsymbol{\omega}}, \widehat{\boldsymbol{\omega}}) + (\mathbf{b}, \boldsymbol{\gamma}), \quad F_1 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (3.2)$$

где  $\widehat{\boldsymbol{\omega}} = (\omega_1, \omega_2)$ . Как и для предыдущей системы (2.4), для интегрируемости системы (3.1) по теореме Эйлера–Якоби не хватает дополнительного интеграла и гладкой инвариантной меры.

*Случай  $\mathbf{b} = 0$ .* Этот простейший случай системы (отсутствие внешнего поля) был рассмотрен в работе [11], где не было замечено существование сингулярной инвариантной меры вида

$$\mu = (I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2)^{-1} d\omega_1 d\omega_2 d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3.$$

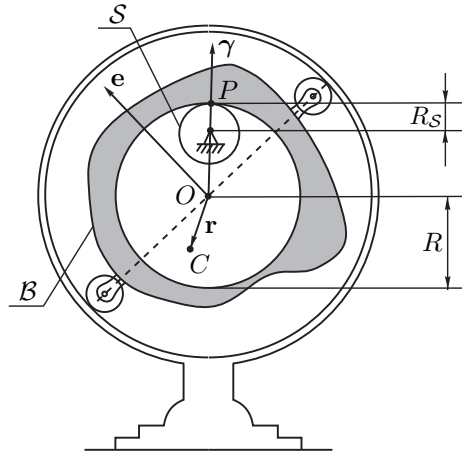


Рис. 8. Реализация системы, описывающей динамику шара Чаплыгина со связью Суслова

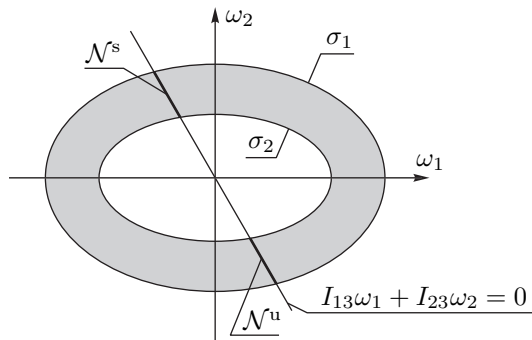


Рис. 9. Область возможных движений при фиксированном значении энергии

При этом интеграл энергии (3.2) можно записать в виде

$$E = \frac{1}{2}((I_{11} + \mathcal{D})\omega_1^2 + (I_{22} + \mathcal{D})\omega_2^2) - \frac{1}{2}\mathcal{D}(\omega, \gamma)^2.$$

Совместный уровень первых интегралов (3.2)

$$\mathcal{M}_h^3 = \{ \hat{\omega}, \gamma \mid E = h, \gamma^2 = 1 \}$$

в общем случае представляет собой трехмерное многообразие, которое проецируется на плоскость угловых скоростей  $(\omega_1, \omega_2)$  внутрь полосы, ограниченной двумя эллипсами (см. рис. 9)

$$\sigma_1: 2h = I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2, \quad \sigma_2: 2h = (I_{11} + mR^2)\omega_1^2 + (I_{22} + mR^2)\omega_2^2.$$

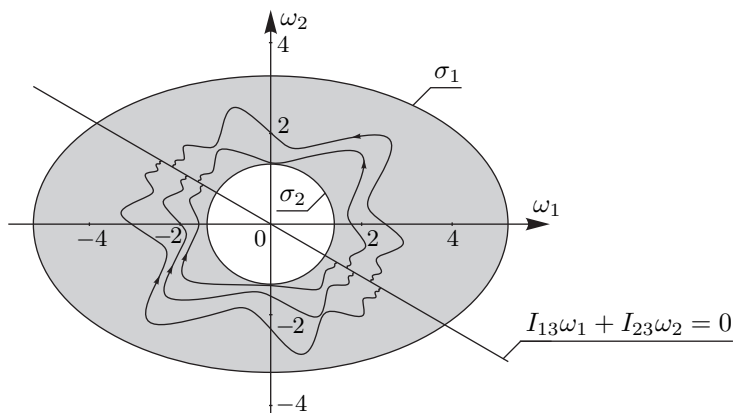
Как было показано в п. 2.2, уравнение

$$I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 = 0$$

задает в фазовом пространстве системы (3.1) инвариантное подмногообразие  $\mathcal{N}$ . При этом вследствие положительной определенности  $\hat{\mathbf{I}}$  угловые скорости  $\omega_1, \omega_2$  на нем остаются постоянными. Как видно из рис. 9, подмногообразие  $\mathcal{N}$  несвязно и состоит из двух связных компонент (каждая из которых диффеоморфна  $S^2$ ):

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^s \cup \mathcal{N}^u,$$





**Рис. 10.** Характерный вид проекций траекторий на плоскость  $(\omega_1, \omega_2)$  при  $I_{11} = 1$ ,  $I_{22} = 1.5$ ,  $I_{13} = 0.7$ ,  $I_{23} = 1.2$ ,  $m = 10$ ,  $R = 1$ ,  $h = 10$

одна из которых  $\mathcal{N}^s$  асимптотически устойчива, а вторая  $\mathcal{N}^u$  асимптотически неустойчива. Как показано в работе [11], справедлив следующий результат.

**Предложение 6.** *Всякая траектория системы (3.1) при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к  $\mathcal{N}^s$ , а при  $t \rightarrow -\infty$  — к  $\mathcal{N}^u$ .*

Характерный вид проекций траекторий системы на плоскость  $(\omega_1, \omega_2)$  приведен на рис. 10.

Инвариантные многообразия  $\mathcal{N}^u$ ,  $\mathcal{N}^s$  заполнены периодическими траекториями, для которых вектор  $\boldsymbol{\omega}$  постоянен, а вектор  $\boldsymbol{\gamma}$  описывает окружности на сфере вокруг оси, задаваемой вектором

$$\boldsymbol{\xi} = \left( \frac{I_{23}}{\sqrt{I_{13}^2 + I_{23}^2}}, -\frac{I_{13}}{\sqrt{I_{13}^2 + I_{23}^2}}, 0 \right).$$

Таким образом, для произвольной траектории системы  $\sigma(t) = (\boldsymbol{\omega}(t), \boldsymbol{\gamma}(t))$  определены пределы

$$\cos \theta_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\xi}), \quad \cos \theta_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} (\boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\xi}),$$

где  $\theta_+$ ,  $\theta_-$  суть некоторые константы.

*Случай  $I_{13} = I_{23} = 0$ .* В этом случае система (2.3) допускает стандартную инвариантную меру

$$\mu = d\omega_1 d\omega_2 d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3.$$

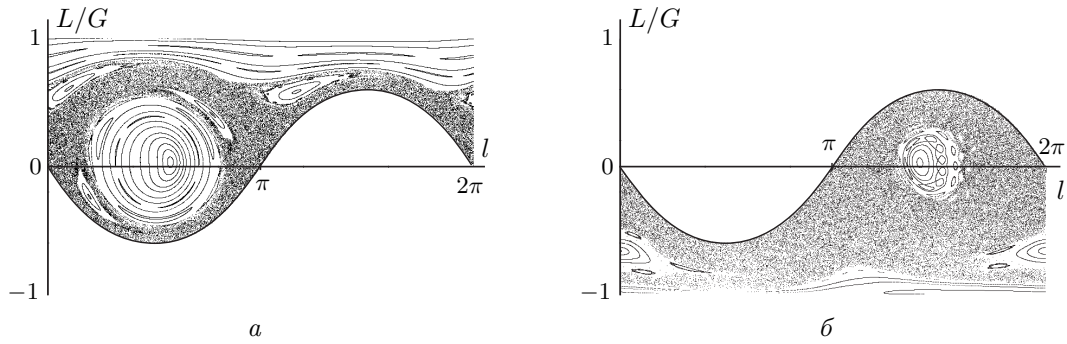
Вопрос о возможном гамильтоновом представлении и интегрируемых случаях остается открытым.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ. СЛУЧАЙ ГЕССА В УРАВНЕНИЯХ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА

Это приложение представляет собой укороченный и доработанный вариант параграфа книги [13]. Однако эта книга имеется лишь на русском языке и ее результаты, к сожалению, мало известны, хотя были бы полезны иностранным исследователям.

Уравнения Эйлера–Пуассона, описывающие движение тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, в гамильтоновой форме имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}. \quad (\text{A.1})$$



**Рис. 11.** Фазовый портрет (сечение плоскостью  $g = \pi/2$ ) в переменных Андуайе–Депри  $(L/G, l)$  для случая Гесса при условиях  $\mathbf{I} = \text{diag}(1, 0.625, 0.375)$ ,  $\mathbf{r} = (3, 0, 4)$ ,  $\mu = 1.995$  для постоянных интегралов  $h = 50$ ,  $f = 5$ . Хорошо видны два стохастических слоя, разделенных сдвоенной сепаратрисой Гесса: точки из одного слоя не проникают в другой. На *б* виден также возникающий при этих условиях *меандровый тор* (см. рис. 12)

Здесь гамильтониан  $H$  представляется в виде

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{AM}) - \mu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}), \tag{A.2}$$

где  $\mathbf{M}$  — вектор кинетического момента в системе координат, связанной с телом,  $\boldsymbol{\gamma}$  — орт вертикали в той же системе,  $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$  — обратный тензор инерции,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор центра масс тела в подвижной системе.

Уравнения (A.1) кроме интеграла энергии  $H$  допускают интеграл площадей и геометрический интеграл вида

$$F_1 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}), \quad F_2 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1.$$

Для интегрируемости системы (A.1) по Лиувиллю необходимо наличие еще одного дополнительного интеграла. Известно лишь несколько частных случаев интегрируемости уравнений (A.1), при которых он существует. Все они реализуются при дополнительных ограничениях на параметры системы и на начальные условия. Это случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Горячева–Чаплыгина (см., например, [13]). В общем случае уравнения (A.1) оказываются неинтегрируемыми.

В случае Гесса свободных параметров столько же (пропадает один параметр из констант интегралов, но появляется дополнительный параметр системы), сколько и в указанных выше случаях, и определено семейство частных решений, задаваемых инвариантным соотношением

$$r_1 M_1 + r_3 M_3 = 0, \tag{A.3}$$

т.е. изолированное инвариантное многообразие в фазовом пространстве.

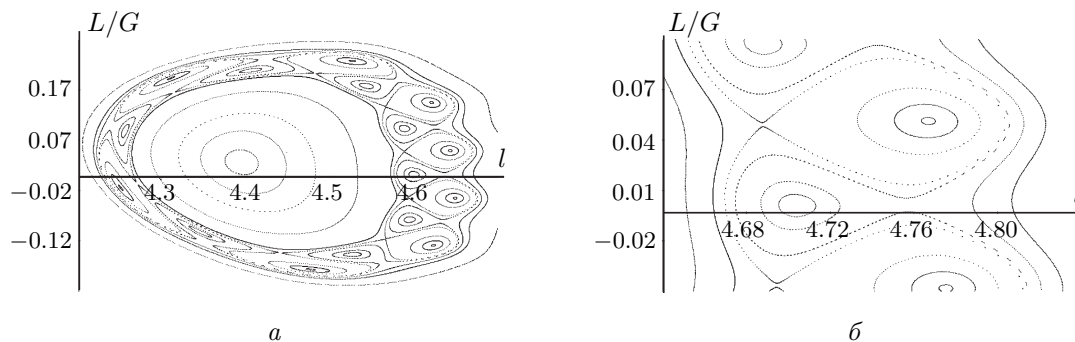
Ограничения на параметры в случае Гесса имеют вид

$$r_1 \sqrt{a_3 - a_2} \pm r_3 \sqrt{a_2 - a_1} = 0, \quad r_2 = 0. \tag{A.4}$$

Их физический смысл совпадает с описанным ранее в задаче Суслова (см. п. 2.4).

Динамика на этом инвариантном многообразии Гесса в общем случае отличается от обычного квазипериодического движения, возникающего при выполнении условий теоремы Лиувилля–Арнольда. Случай Гесса, вообще говоря, не интегрируется на (A.3) в квадратурах, но тем не менее допускает качественное исследование.

**Замечание А.1.** Для построения фазовых портретов в данном приложении используются переменные Андуайе–Депри (см. подробнее [13]).



**Рис. 12.** Меандровые торы, возникающие на фазовом портрете в переменных Андуайе–Депри  $(L/G, l)$  в случае Гесса (параметры см. на рис. 11)

Соотношение Гесса при определенных значениях констант энергии и площадей на фазовом портрете может определять пару сдвоенных сепаратрис (см. рис. 11), разделяющих две хаотические зоны (которые показывают, что общего интеграла при условиях Гесса не существует). Интересно отметить, что в фазовом пространстве для случая Гесса возникает *меандровый тор* (см. рис. 12). Подобный эффект связан с потерей закручивания и встречается в небесномеханической задаче Хилла [46, 47] и плоской ограниченной задаче трех тел [21].

**Предложение А.1.** *Случай Гесса в задаче Суслова (рассмотренный в п. 2.4) эквивалентен случаю Гесса в уравнениях Эйлера–Пуассона.*

**Доказательство.** Укажем замену переменных, с помощью которой уравнения Эйлера–Пуассона в случае Гесса сводятся к (2.19). Для этого явно запишем гамильтониан в системе координат, для которой одна из осей  $(Ox_3)$  совпадает с осью, перпендикулярной круговому сечению гирационного эллипсоида:

$$H = \frac{1}{2} (a'_1(M_1^2 + M_2^2) + a'_3M_3^2 + 2b'M_3M_1) - \mu\gamma_3, \quad \mu = \text{const.} \quad (\text{A.5})$$

Такая система координат уже не является главной. Матрица перехода к новым координатам (из системы главных осей) может быть выражена через компоненты матрицы  $\mathbf{A}$  по формулам

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{a_3-a_2}{a_3-a_1}} & 0 & -\sqrt{\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}} & 0 & \sqrt{\frac{a_3-a_2}{a_3-a_1}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Инвариантное соотношение Гесса (А.3) при этом принимает вид

$$M_3 = 0, \quad (\text{A.7})$$

а уравнения движения представляются в виде

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= b'M_1M_2 - \mu\gamma_2, & \dot{M}_2 &= -bM_1^2 + m\mu\gamma_1, \\ \dot{\gamma}_1 &= -a'_1M_2\gamma_3 + b'M_1\gamma_2, & \dot{\gamma}_2 &= a'_1M_1\gamma_3 - b'M_1\gamma_1, & \dot{\gamma}_3 &= a'_1(M_2\gamma_1 - M_2\gamma_1). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Система (А.8) после замены переменных

$$w_1 = a'_1M_2, \quad w_2 = a'_1M_1, \quad n_1 = -a'_1\gamma_2, \quad n_2 = -a'_1\gamma_1, \quad n_3 = a'_1\gamma_3$$

и параметров

$$\mu = b, \quad \frac{b'}{a_1} = a$$

совпадает с системой (2.19).  $\square$

Опишем движение твердого тела в неподвижной системе координат. Для этого введем переменные  $(\gamma_3, \varphi)$ ,

$$\gamma_1 = \sqrt{1 - \gamma_3^2} \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sqrt{1 - \gamma_3^2} \cos \varphi, \quad (\text{A.9})$$

для которых уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_3 &= \pm \sqrt{2(1 - \gamma_3^2)(h - U_*)}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{f(\gamma_3 - b\sqrt{1 - \gamma_3^2} \sin \varphi)}{1 - \gamma_3^2} \mp b \cos \varphi \sqrt{2(h - U_*)}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

где

$$U_* = \frac{f^2}{2(1 - \gamma_3^2)} - \mu\gamma_3, \quad H = h, \quad F_1 = f.$$

Уравнение для угла прецессии  $\psi$  представляется в виде

$$\dot{\psi} = \frac{f}{1 - \gamma_3^2}. \quad (\text{A.11})$$

Используя квадратуры для  $\gamma_3$  и  $\psi$ , Н.Е. Жуковский описал движение центра масс [51]. Несложно видеть, что он движется по закону сферического маятника. Решение для угла собственного вращения  $\varphi$  не может быть получено в стандартных квадратурах. Обычно, следуя Некрасову [44], его определение сводят к решению уравнения типа Риккати (или линейному уравнению с двоякопериодическими коэффициентами).

Действительно, для комплексной переменной  $z = M_1 + iM_2$  легко получить

$$e^{-i\varphi} = -\frac{\dot{\gamma}_3 + if}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}} \frac{z}{K^2}, \quad K^2 = M_1^2 + M_2^2 = 2(h - \mu\gamma_3),$$

что приводит для  $z$  к нелинейному уравнению первого порядка

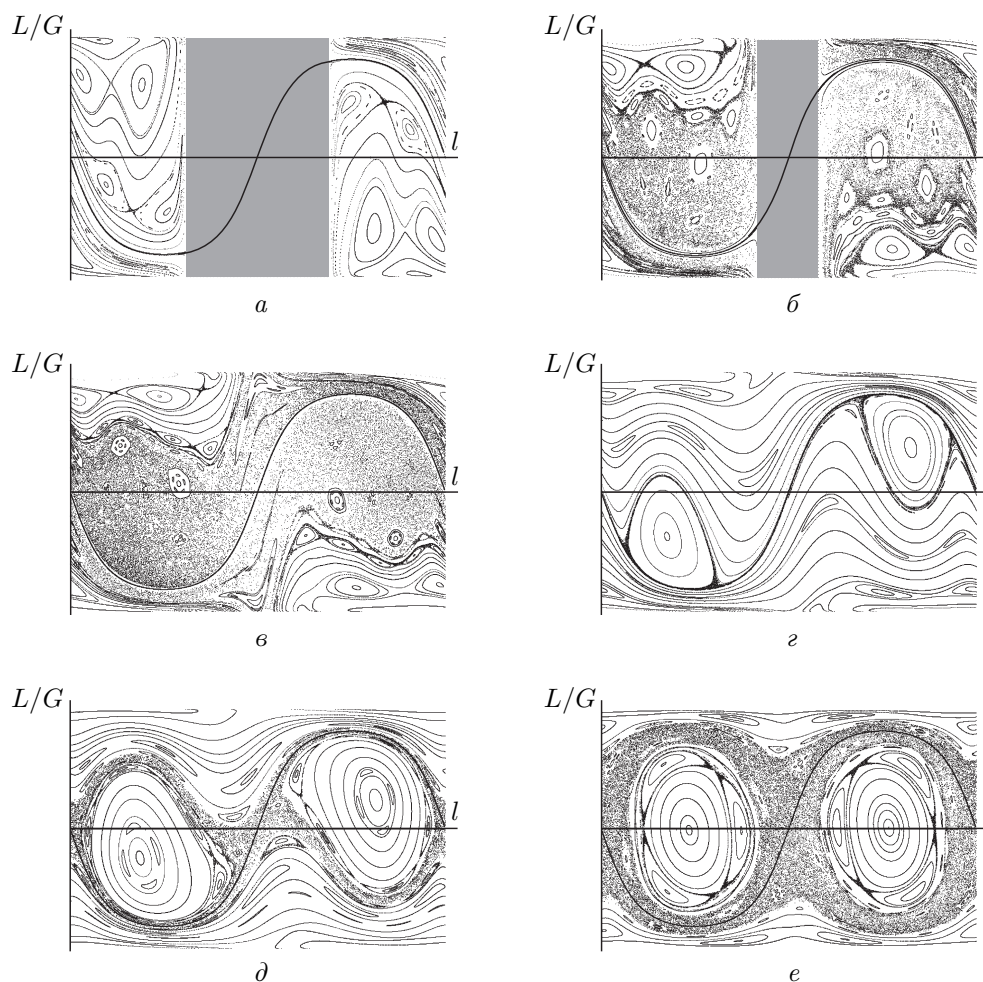
$$\dot{z} + \frac{ia_{13}}{2} z^2 + \mu \frac{\dot{\gamma}_3 + if}{K^2} z + \frac{1}{2} ia_{13} K = 0. \quad (\text{A.12})$$

В случае  $f = 0$  система (A.10) упрощается:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_3 &= \sqrt{2(1 - \gamma_3^2)(h + \mu\gamma_3)}, \\ \dot{\varphi} &= \mp b \cos \varphi \sqrt{2(h + \mu\gamma_3)} \quad (\text{или } \dot{\theta} = -\sqrt{2(h + \mu\gamma_3)}). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Жуковский в [51] показал, что на нулевом уровне интеграла площадей траектория движения средней оси гирационного эллипсоида в каждый момент времени образует постоянный угол  $\theta$  (нутаии) с плоскостью кругового сечения:

$$\sin \theta = \frac{a_2}{\sqrt{a_2(a_1 + a_3) - a_1 a_3}}. \quad (\text{A.14})$$



**Рис. 13.** Фазовый портрет в переменных Андуйе–Депри  $(L/G, l)$  при условиях Гесса и нулевой постоянной площадей для гамильтониана  $H$  (А.16),  $\tilde{\mu} = h_c = 0.707$  и следующих значений  $h$ :  $h = 0.2$  (а),  $0.5$  (б),  $0.6$  (в),  $0.707 = h_c$  (г),  $0.9$  (д),  $5$  (е). Хорошо видно, что тор, соответствующий интегралу Гесса при малых энергиях, расположен в регулярном слое. Серым цветом обозначается физически невозможная область значений переменных

С помощью этого результата можно показать, что при нулевой постоянной площадей средняя ось инерции движется по локсодроме. Вследствие такого характерного движения Жуковский ввел название *локсодромического маятника* (Гесса), указал практические условия осуществления такого движения и предложил механическую модель для его наблюдения [51].

Рассмотрим случай локсодромического маятника ( $f = 0$ ) более подробно (рис. 13). Из соотношений (А.13) находим

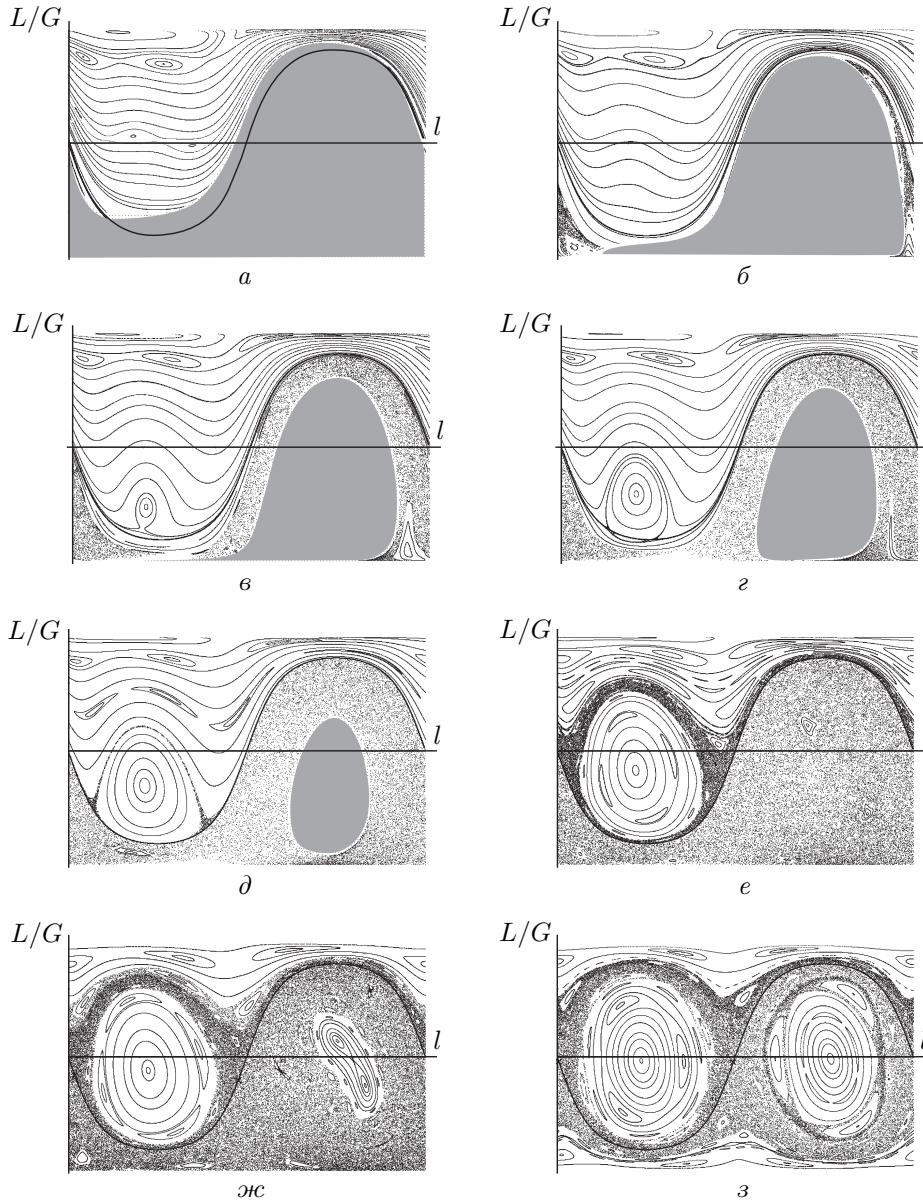
$$\dot{\gamma}_3^2 = 2(h - \tilde{\mu}\gamma_3)(1 - \gamma_3^2), \quad \dot{\psi} = 0, \quad \ln\left(\operatorname{tg} \frac{l}{2}\right) = \pm a_{13}K, \quad (\text{А.15})$$

где  $M_1 = K \sin l$ ,  $M_2 = K \cos l$ ,  $\tilde{\mu} = -\mu$ . Запишем гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \left( M_1^2 + \frac{2}{3} M_2^2 + \frac{1}{2} M_3^2 \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} \gamma_3. \quad (\text{А.16})$$

Выделяются два качественно различных случая (этот результат впервые был указан в книге [13]).





**Рис. 14.** Фазовый портрет в переменных Андуайе–Депри  $(L/G, l)$  при условиях Гесса и ненулевой постоянной площадью  $f = 1$  для гамильтониана  $H$  (A.16) и следующих значений  $h$ :  $h = 0.2$  (а),  $0.4$  (б),  $0.6$  (в),  $0.7$  (г),  $0.9$  (д),  $1.5$  (е),  $2$  (ж),  $5$  (з). Так же как и выше, при больших  $h$  решение Гесса разделяет два стохастических слоя, а при малых  $h$  лежит в регулярном слое

*Случай  $h > \tilde{\mu}$ .* Центр масс вращается по главному кругу (так как  $\psi = \text{const}$ ). При этом средняя ось движется по всей локсодроме. В этом случае на фазовом портрете (рис. 13, д, е), который содержит также хаотические траектории, решение Гесса разделяет два “несмешивающихся” стохастических слоя (см. также рис. 11). Фактически решение Гесса в этом случае нереализуемо, вследствие неустойчивости траектория “сваливается” в тот или другой слой.

При  $h \rightarrow \infty$  (либо  $\tilde{\mu} \rightarrow 0$ ) все сводится к обычному случаю Эйлера, при этом решение Гесса стремится к сепаратрисе перманентного вращения вокруг средней оси [32].

*Случай  $h < \tilde{\mu}$ .* Центр масс совершает плоские колебания по закону физического маятника, а средняя ось движется согласно (A.14) по отрезку локсодромы. Решение при этом периодическое в абсолютном пространстве (одночастотное, как и решение Горячева). На фазовом

портрете (см. рис. 13, *a–в*) соотношение Гесса задает целиком заполненную неподвижными точками инвариантную кривую, которая располагается внутри регулярного слоения.

При  $f \neq 0$  исследование движения существенно сложнее и не может быть выполнено аналитическим образом. На рис. 14 приведена серия фазовых портретов, которые иллюстрируют эффект расхождения стохастических слоев (при уменьшении энергии  $h$ ) вблизи решения Гесса, которое приобретает устойчивость.

При этом динамика абсолютного движения для малых энергий является трехчастотной, при увеличении же энергии движение по одной переменной будет носить асимптотический характер и остаются всего две частоты.

**Замечание А.2.** Как уже указывалось, если рассматривать возмущения задачи Эйлера–Пуансо при условиях Гесса, то оказывается, что пара сепаратрис, исходящих из неустойчивых перманентных вращений, не расщепляется при возмущении [32, 52, 30] (см. рис. 13, *e*, 14, *з*). При этом интеграл (А.3) и определяет особый тор, заполненный джокоасимптотическими траекториями, приближающимися к некоторым неустойчивым периодическим решениям, которые при  $\tilde{\mu} \rightarrow 0$  переходят в перманентные вращения вокруг средней оси. Такое описание динамики приведенной системы не противоречит результату Жуковского о квазипериодическом движении центра масс тела [51], так как система, описывающая движение центра масс, получается редукцией не по углу прецессии, а по углу собственного вращения вокруг оси, перпендикулярной круговому сечению.

**Историко-критический комментарий.** Свой интеграл Гесс получил при поиске сингулярных решений своей формы уравнений Эйлера–Пуассона (1890) [25], в которых с помощью интегралов движения исключены направляющие косинусы. Случай Гесса может быть получен из анализа ветвления общего решения на комплексной плоскости времени. Это решение было пропущено Ковалевской [1] и возникло лишь в работе Аппельрота (1892) [1]. Однако, как пишет сам Аппельрот, в первоначальном варианте этой работы он сам допустил ошибку и также пропустил этот случай, на что ему было указано П. Некрасовым. В своей работе (1892) [43] Некрасов привел и условия Гесса, и интеграл Гесса, сведя интегрирование последнего к уравнению Риккати. Более подробный анализ показывает, что в случае Гесса решение ветвится на комплексной плоскости времени (Аппельрот, Ляпунов). Связь между комплексным ветвлением, расщеплением сепаратрис и интегрируемостью была обнаружена С.Л. Зиглиным — в этом смысле он объяснил загадочное появление данного случая. С точки зрения квазиоднородных систем и показателей Ковалевской случай Гесса обсуждается в недавней работе [34].

Как уже было отмечено, геометрический анализ и моделирование волчка Гесса были предложены Жуковским [51], а развернутый аналитический мемуар, посвященный явному решению, принадлежит Некрасову (1896) [44]. Интеграл Гесса и сведение к уравнению Риккати были независимо переоткрыты Роже Лиувиллем (1895) [37] (заметка которого в “Comptes rendus” была представлена А. Пуанкаре). В следующей статье [38] Лиувиль отмечает, что найденный им случай был ранее описан Гессом (на это ему указал Н.Е. Жуковский), и обсуждает принцип Максвелла, который в задачах механики оказывается неприменимым.

С.А. Чаплыгин в [18] показал, что движение Гесса может быть получено для любого тела при условии, что среди главных центральных моментов инерции нет равных. На связь между инвариантными соотношениями Гесса и парой нерасщепившихся сепаратрис возмущенной задачи Эйлера–Пуансо указал В.В. Козлов [32] (см. также [52]). В уравнениях Кирхгофа аналог случая Гесса был замечен Чаплыгиным [17] (который сразу использовал неглавные оси), а из условия расщепления сепаратрис тождественный случай был получен в [36]. Для задачи о скольжении твердого тела, опирающегося острием на гладкую плоскость, аналог интеграла Гесса был указан Г.В. Колосовым [29] и А.М. Ляпуновым (им этот результат опубликован не был). Для других задач механики аналог интеграла Гесса был указан в работах [12, 5].

В работе [12] проясняется его явное симметричное происхождение для широкого класса обобщенно потенциальных систем. Различные многомерные обобщения случая Гесса обсуждаются в работах [19, 20].

Упомянем еще недавние работы П. Любовецки и Х. Жолондека (2012) [39, 40] и А.В. Беляева (2015) [2]. Отметим, что работа [2] содержит результаты, близкие к [39], однако, судя по всему, автор при формальном упоминании этой работы не попытался разобраться в ней. Работа [2], кроме всего прочего, содержит очень странные асимптотические разложения, смысл которых для динамики совершенно не ясен.

Основные теоремы в [39] и [2] совпадают, но их доказательства, по нашему мнению, содержат пробелы. Остановимся на работе [39]. Не вызывает сомнений существование двух предельных циклов, которые при определенных значениях параметров энергии и интеграла площадей могут слиться. Это обстоятельство отмечено также в обширном мемуаре Некрасова [44], который, кстати сказать, не был осмыслен с современных позиций (см. также [42]). Вывод о том, что при дальнейшем изменении параметров (после бифуркации через единственный цикл на торе) должны появляться торы с квазипериодической динамикой, является необоснованным.

Расчет вещественного числа вращения при помощи комплексных линейных уравнений с двоякопериодическими коэффициентами не является корректным и не позволяет получить зависимость от параметров системы. Выведенный из “доказанной” таким путем теоремы результат о существовании непрерывной (без особенностей) инвариантной меры также некорректен и не подтверждается дальнейшим анализом. Как известно, квазипериодичность движения на торах является следствием существования гладкой инвариантной меры и диофантовых свойств чисел вращения Пуанкаре (что составляет содержание известной теоремы Колмогорова [28]).

Отметим, что в упомянутых работах [39, 2] сделан вывод о расслоении тора на вырожденные периодические траектории при рациональном числе вращения. Как известно, это явление характерно для гамильтоновых систем (с гладкой инвариантной мерой). Однако в случае Гесса у системы отсутствует гладкая инвариантная мера, а, как известно, для систем без инвариантной меры зависимость числа вращения от констант первых интегралов представляет собой канторову лестницу. Для неголономной задачи о качении шара (со смещенным центром масс) этот эффект обнаружен в работах [8, 3]. Другой пример векторного поля на торе (связанный с уравнением Хилла), для которого число вращения в зависимости от параметров системы представляет собой канторову лестницу, указан в работе [16]. Горизонтальные участки канторовой лестницы (отвечающие рациональному числу вращения) соответствуют торами, на которых имеется один или несколько предельных циклов. Поэтому возникает следующая

**Открытая проблема.** Представляет ли собой зависимость числа вращения на торе (соответствующем случаю Гесса уравнений Эйлера–Пуассона) от параметров системы канторову лестницу? Встречаются ли при рациональных значениях числа вращения предельные циклы?

Относительно нормальной гиперболичности в работах [39, 40] содержатся противоречивые утверждения. На самом деле цикл является гиперболическим на инвариантном многообразии Гесса, тогда как на изоэнергетической поверхности нормальной гиперболичности быть не может из-за существования инвариантной меры (индуцируемой стандартной формой объема уравнений Эйлера–Пуассона). При возмущениях (отклонениях от условий Гесса) инвариантная поверхность не сохраняется и расщепление сепаратрис гиперболических точек приводит к образованию стохастического слоя<sup>7</sup>.

**Благодарности.** Авторы благодарят В.В. Козлова, подробно прочитавшего рукопись и сделавшего ряд важных замечаний.

<sup>7</sup>Отметим, что все эти эффекты (как и основные заключения работ [39, 40, 2]) были проиллюстрированы с помощью отображения Пуанкаре в работе [12] (а также книге [13]), на которую авторы упомянутых работ не ссылаются.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппельрот Г.Г.* По поводу §1 мемуара С.В. Ковалевской “Sur le problème de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe” (Acta mathematica. 12. 2) // *Мат. сб.* 1892. Т. 16, №3. С. 483–507.
2. *Беляев А.В.* Об общем решении задачи о движении тяжелого твердого тела в случае Гесса // *Мат. сб.* 2015. Т. 206, №5. С. 5–34.
3. *Бизяев И.А.* О неинтегрируемости и препятствиях к гамильтонизации неголономного волчка Чаплыгина // *ДАН.* 2014. Т. 458, №4. С. 398–401.
4. *Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kazakov A.O.* Dynamics of the Suslov problem in a gravitational field: Reversal and strange attractors // *Regul. Chaotic Dyn.* 2015. V. 20, N 5. P. 605–626.
5. *Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S.* The dynamics of nonholonomic systems consisting of a spherical shell with a moving rigid body inside // *Regul. Chaotic Dyn.* 2014. V. 19, N 2. P. 198–213.
6. *Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S.* Dynamics of the Chaplygin sleigh on a cylinder // *Regul. Chaotic Dyn.* 2016. V. 21, N 1. P. 136–146.
7. *Bolsinov A.V., Borisov A.V., Mamaev I.S.* Hamiltonization of non-holonomic systems in the neighborhood of invariant manifolds // *Regul. Chaotic Dyn.* 2011. V. 16, N 5. P. 443–464.
8. *Bolsinov A.V., Borisov A.V., Mamaev I.S.* Rolling of a ball without spinning on a plane: The absence of an invariant measure in a system with a complete set of integrals // *Regul. Chaotic Dyn.* 2012. V. 17, N 6. P. 571–579.
9. *Borisov A.V., Jalnina A.Yu., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Sedova Ju.V.* Dynamical phenomena occurring due to phase volume compression in nonholonomic model of the rattleback // *Regul. Chaotic Dyn.* 2012. V. 17, N 6. P. 512–532.
10. *Borisov A.V., Kazakov A.O., Sataev I.R.* The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin’s top // *Regul. Chaotic Dyn.* 2014. V. 19, N 6. P. 718–733.
11. *Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S.* Hamiltonicity and integrability of the Suslov problem // *Regul. Chaotic Dyn.* 2011. V. 16, N 1–2. P. 104–116.
12. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Случай Гесса в динамике твердого тела // *ПММ.* 2003. Т. 67, №2. С. 256–265.
13. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2005.
14. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика саней Чаплыгина // *ПММ.* 2009. Т. 73, №2. С. 219–225.
15. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Symmetries and reduction in nonholonomic mechanics // *Regul. Chaotic Dyn.* 2015. V. 20, N 5. P. 553–604.
16. *Broer H., Simó C.* Hill’s equation with quasi-periodic forcing: resonance tongues, instability pockets and global phenomena // *Bol. Soc. Bras. Mat.* 1998. V. 29, N 2. P. 253–293.
17. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья первая // *Тр. отд. физ. наук О-ва любителей естествознания.* 1894. Т. 6, №2. С. 20–42; *Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.* Т. 1. С. 136–193; Статья вторая // *Мат. сб.* 1897. Т. 20, №1. С. 115–170; 1898. Т. 20, №2. С. 173–246; *Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.* Т. 1. С. 194–311.
18. *Чаплыгин С.А.* По поводу локсодромического маятника Гесса // *Тр. отд. физ. наук О-ва любителей естествознания.* 1894. Т. 7, №1. С. 33–34; *Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.* Т. 1. С. 133–135.
19. *Dragović V., Gajić B.* Systems of Hess–Appel’rot type // *Commun. Math. Phys.* 2006. V. 265, N 2. P. 397–435.
20. *Dragović V., Gajić B.* Matrix Lax polynomials, geometry of Prym varieties and systems of Hess–Appel’rot type // *Lett. Math. Phys.* 2006. V. 76, N 2–3. P. 163–186.
21. *Dullin H.R., Worthington J.* The vanishing twist in the restricted three body problem // *Physica D.* 2014. V. 276. P. 12–20.
22. *Fedorov Yu.N., Maciejewski A.J., Przybylska M.* The Poisson equations in the nonholonomic Suslov problem: integrability, meromorphic and hypergeometric solutions // *Nonlinearity.* 2009. V. 22, N 9. P. 2231–2259.
23. *Fernandez O.E., Bloch A.M., Zenkov D.V.* The geometry and integrability of the Suslov problem // *J. Math. Phys.* 2014. V. 55, N 11. Pap. 112704.
24. *Grammaticos B., Dorizzi B., Ramani A.* Hamiltonians with high-order integrals and the “weak-Painlevé” concept // *J. Math. Phys.* 1984. V. 25, N 12. P. 3470–3473.
25. *Hess W.* Ueber die Euler’schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // *Math. Ann.* 1890. Bd. 37, N 2. S. 178–180.
26. *Харламова-Забеллина Е.И.* Быстрое вращение твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии неголономной связи // *Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. Физика. Химия.* 1957. №6. С. 25–34.
27. *Knauf A., Taimanov I.A.* On the integrability of the  $n$ -centre problem // *Math. Ann.* 2005. Bd. 331, N 3. S. 631–649.

28. Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // ДАН. 1953. Т. 93, № 5. С. 763–766.
29. Колосов Г.В. Об одном случае движения тяжелого твердого тела, опирающегося острием на гладкую плоскость // Тр. отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. 1898. Т. 9, № 2. С. 11–12.
30. Козлов В.В. Расщепление сепаратрис возмущенной задачи Эйлера–Пуансо // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 1976. № 6. С. 99–104.
31. Козлов В.В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики. 1985. Т. 8, № 3. С. 85–107.
32. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000.
33. Kozlov V. The phenomenon of reversal in the Euler–Poincaré–Suslov nonholonomic systems // J. Dyn. Control Syst. 2015. doi: 10.1007/s10883-015-9305-4.
34. Козлов В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // ПММ. 2015. Т. 79, № 3. С. 307–316.
35. Козлов В.В. Инвариантные меры гладких динамических систем, обобщенные функции и методы суммирования // Изв. РАН. Сер. мат. 2016. Т. 80, № 2. С. 63–80.
36. Козлов В.В., Онищенко Д.А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // ДАН СССР. 1982. Т. 266, № 6. С. 1298–1300.
37. Liouville R. Sur la rotation des solides // C. r. Acad. sci. 1895. V. 120, N 17. P. 903–906.
38. Liouville R. Sur la rotation des solides et le principe de Maxwell // C. r. Acad. sci. 1896. V. 122, N 19. P. 1050–1051.
39. Lubowiecki P., Żołądek H. The Hess–Appelrot system. I: Invariant torus and its normal hyperbolicity // J. Geom. Mech. 2012. V. 4, N 4. P. 443–467.
40. Lubowiecki P., Żołądek H. The Hess–Appelrot system. II: Perturbation and limit cycles // J. Diff. Eqns. 2012. V. 252, N 2. P. 1701–1722.
41. Maciejewski A.J., Przybylska M. Non-integrability of the Suslov problem // Regul. Chaotic Dyn. 2002. V. 7, N 1. P. 73–80.
42. Молодзевский Б.К., Некрасов П.А. Об условиях существования асимптотических периодических движений в задаче Гесса // Тр. отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. 1893. Т. 6, № 1. С. 43–52.
43. Некрасов П.А. К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Мат. сб. 1892. Т. 16, № 3. С. 508–517.
44. Некрасов П.А. Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Мат. сб. 1896. Т. 18, № 2. С. 161–274.
45. Okuneva G.G. Integrable variants of non-holonomic rigid body problems // Z. angew. Math. Mech. 1998. Bd. 78, N 12. S. 833–840.
46. Simó C. Invariant curves of analytic perturbed nontwist area preserving maps // Regul. Chaotic Dyn. 1998. V. 3, N 3. P. 180–195.
47. Simó C., Stuchi T.J. Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem // Physica D. 2000. V. 140, N 1–2. P. 1–32.
48. Суслев Г.К. Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946.
49. Татаринов Я.В. Разделяющиеся переменные и новые топологические явления в голономных и неголономных системах // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Изд-во МГУ, 1988. Вып. 23. С. 160–174.
50. Вагнер В.В. Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. М.; Л.: ОГИЗ, 1941. Вып. 5. С. 301–327.
51. Жуковский Н.Е. Локсодромический маятник Гесса // Тр. отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. 1893. Т. 5, № 2. С. 37–45; Собр. соч. М.: Гостехиздат, 1948. Т. 1. С. 257–274.
52. Зиглин С.Л. Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Тр. Моск. мат. о-ва. 1980. Т. 41. С. 287–303.