Б. О. Волков, Лапласианы Леви и инстантоны, *Труды МИАН*, 2015, том 290, 226–238

DOI: 10.1134/S037196851503019X

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2015, т. 290, с. 226–238

УДК 517.98

Лапласианы Леви и инстантоны[1]

Б. О. Волков[2]

Поступило 15 марта 2015 г.

С помощью лапласианов Леви описываются дуальные и антидуальные решения уравнений Янга–Миллса. Для этого вводится класс лапласианов Леви, параметризованных выбором кривой в группе SO(4). Для определения таких лапласианов используются два подхода: лапласиан Леви можно определить как интегральный функционал, заданный кривой в SO(4) и специальным видом второй производной, или лапласиан Леви можно определить как среднее Чезаро вторых производных вдоль векторов из ортонормированного базиса, построенного с помощью такой кривой. Доказано, что при некоторых условиях на кривую, порождающую лапласиан Леви, связность в тривиальном векторном расслоении, базой которого служит $\mathbb{R}^4$, является инстантоном (или антиинстантоном) тогда и только тогда, когда порожденный связностью параллельный перенос является гармоническим для такого лапласиана Леви.

DOI: 10.1134/S037196851503019X

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье обсуждается связь между лапласианами Леви и инстантонами.

Полем Леви было предложено несколько определений лапласиана (оператора Лапласа–Леви), действующего на функционалы, определенные на пространстве $L_2[0,1]$ (см. [9]). Одно из них (определение лапласиана Леви с помощью специального вида второй производной) заключается в следующем. Если функционал f на $L_2[0,1]$ таков, что для всех $x,u,v\in L_2(0,1)$ верно равенство

$$f''(x)(u,v)=\int_0^1\int_0^1 K_{\mathrm{V}}(x)(t,s)u(t)v(s)\,dt\,ds+\int_0^1 K_{\mathrm{L}}(x)(t)u(t)v(t)\,dt, \tag{1.1}$$

где $K_{\mathrm{V}}(x)\in L_2([0,1]\times[0,1])$ и $K_{\mathrm{L}}(x)\in L_\infty[0,1]$, то значение лапласиана Леви на функционале f определяется формулой

$$\Delta_{\mathrm{L}}f(x)=\int_0^1 K_{\mathrm{L}}(x)(t)\,dt.$$

По-другому лапласиан Леви можно определить следующим образом. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в $L_2(0,1)$, тогда значение лапласиана Леви Δ_{L} на функционале f определяется формулой

$$\Delta_{\mathrm{L}}f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f''(x)(e_k,e_k),$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

[2]Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.
E-mail: borisvolkov1986@gmail.com

если правая часть существует для всех $x \in L_2(0,1)$. Ортонормированные базисы, для которых эти два определения совпадают на всех функционалах, вторая производная которых имеет вид (1.1), образуют специальный класс слабо равномерно плотных базисов.

Пусть A — связность в тривиальном векторном расслоении с базой $\mathbb{R}^4$, слоем C^N и структурной группой $G \subseteq \mathrm{U}(N)$ (т.е. A — это 1-форма, определенная на $\mathbb{R}^4$ и принимающая значения в алгебре Ли группы G). Соответствующая связности A кривизна F определяется формулой $F = dA + A \wedge A$, где d — оператор внешнего дифференцирования. Уравнения Янга–Миллса — это уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала действия

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}(F(x) \wedge *F(x)), \tag{1.2}$$

где $*$ — оператор Ходжа. Это уравнения на связность, имеющие вид

$$D_A^* F = 0,$$

где D_A — ковариантное дифференцирование, порожденное A ($D_A^* = -{*}D_A{*}$). Связность A является инстантоном или антиинстантоном, если соответственно $F = *F$ или $F = -*F$ и при этом интеграл (1.2) конечен. Из тождеств Бьянки $D_A F = 0$ следует, что инстантоны и антиинстантоны — решения уравнений Янга–Миллса.

Интерес к лапласиану Леви сильно вырос после того, как в [1, 2] Л. Аккарди, П. Джибилиско и И.В. Волович (см. также [6]) доказали теорему о связи между лапласианом Леви и уравнениями Янга–Миллса. В этих работах был введен аналог первого определения лапласиана Леви, заданный более сложным видом второй производной, чем (1.1). Этот аналог также называется лапласианом Леви. Было показано, что связность в тривиальном векторном расслоении, базой которого является евклидово пространство, есть решение уравнений Янга–Миллса тогда и только тогда, когда порожденный связностью параллельный перенос является гармоническим для такого лапласиана. Случай нетривиального векторного расслоения над компактным римановым многообразием и лапласиана Леви, определенного с помощью специального вида второй производной, был рассмотрен в [8]. Кроме того, в последней работе был рассмотрен случай стохастического параллельного переноса. В [11] теорема о связи между лапласианом Леви и калибровочными полями была доказана для случая многообразия и лапласиана Леви, определенного как среднее Чезаро вторых производных (см. также [5]). Существует также множество работ, посвященных лапласианам Леви и их обобщениям в так называемом белошумном анализе (см. библиографию в [3, 12, 13]).

В статье на основе канонического вида второй производной из статьи [2] вводится класс лапласианов, параметризованных кривыми в группе $\mathrm{SO}(4)$. Если кривая постоянная, то порожденный ею лапласиан совпадет с лапласианом Леви из [2]. В статье доказывается, что связность в тривиальном векторном расслоении, базой которого служит $\mathbb{R}^4$, является инстантоном (или антиинстантоном) тогда и только тогда, когда порожденный связностью параллельный перенос является гармоническим для лапласиана Леви, порожденного кривой в $\mathrm{SO}(4)$, при выполнении некоторых условий на кривую. Кроме того, доказывается, что такие лапласианы можно представить как лапласианы Леви в пространстве функций на оснащенном гильбертовом пространстве (см., например, [4]), определенные как средние Чезаро вторых производных по направлению векторов из некоторых ортонормированных базисов.

2. ЛАПЛАСИАНЫ ЛЕВИ

Пусть $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^4$. Пусть $\mathcal{P}$ — пространство абсолютно непрерывных кривых в $\mathbb{R}^4$ с началом в точке 0, параметризованных отрезком $[0,1]$ ($\mathcal{P} = \{\gamma \in \mathrm{AC}([0,1], \mathbb{R}^4) \colon \gamma(0) = 0\}$). Мы считаем, что $\mathcal{P}$ наделено нормой $\|\gamma\| = \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\|_{\mathbb{R}^4}\, dt$.

Обозначим символом $M_N(\mathbb{C})$ пространство комплексных $(N\times N)$-матриц. Для билинейной формы K на $\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4$, принимающей значения в $M_N(\mathbb{C})$, ведем обозначение $K_{\mu\nu}u^\mu v^\nu = K\langle u,v\rangle$. Символ $\mathbf{K}$ означает, что мы рассматриваем K как матрицу 4×4, элементами которой являются матрицы из $M_N(\mathbb{C})$, определенную так:

$$\mathbf{K}_{\mu\nu} = K\langle p_\mu, p_\nu\rangle.$$

Обозначим через Ω пространство дважды дифференцируемых по Фреше функций из $\mathcal{P}$ в $M_N(\mathbb{C})$, для вторых производных которых в каждой точке $\gamma\in\mathcal{P}$ выполняется соотношение

$$f''(\gamma)(u,v) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 K^{\mathrm{V}}_{\mu\nu}(\gamma)(t,s)u^\mu(t)v^\nu(s)\,dt\,ds + \int\limits_0^1 K^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}(\gamma)(t)u^\mu(t)v^\nu(t)\,dt + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 K^{\mathrm{S}}_{\mu\nu}(\gamma)(t)\big(\dot u^\mu(t)v^\nu(t)+\dot v^\mu(t)u^\nu(t)\big)\,dt, \tag{2.1}$$

где $u,v\in\mathcal{P}$ такие, что $0=u(1)=v(1)$, $K^{\mathrm{V}}_{\mu\nu}\in L_1([0,1]\times[0,1],M_N(\mathbb{C}))$, $K^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}\in L_1([0,1],M_N(\mathbb{C}))$, $K^{\mathrm{S}}_{\mu\nu}\in L_\infty([0,1],M_N(\mathbb{C}))$, $K^{\mathrm{L}}_{\mu\nu}$ — симметричный, а $K^{\mathrm{S}}_{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор:

$$K^{\mathrm{L}}_{\mu\nu} = K^{\mathrm{L}}_{\nu\mu}, \qquad K^{\mathrm{S}}_{\mu\nu} = -K^{\mathrm{S}}_{\nu\mu}.$$

Определение 1. *Лапласиан Леви* Δ_{L} — это линейное отображение из Ω в пространство всех $M_N(\mathbb{C})$-значных функций на $\mathcal{P}$, определенное формулой

$$\Delta_{\mathrm{L}} f(\gamma) = \sum_{\mu=1}^4\int\limits_0^1 K^{\mathrm{L}}_{\mu\mu}(\gamma)(t)\,dt = \int\limits_0^1 \mathrm{tr}(\mathbf{K}^{\mathrm{L}}(\gamma)(t))\,dt.$$

Замечание 1. Первое слагаемое в (2.1) — это часть Вольтерры, второе слагаемое — часть Леви, третье — сингулярная часть. В [2] лапласиан Леви определялся так же, как в определении 1, но при этом вместо пространства $\mathcal{P}$ рассматривалось пространство $C^1([0,1],\mathbb{R}^4)$.

Пусть $T\in C^1([0,1],\mathrm{SO}(4))$. Положим $p_\mu(t)=T(t)p_\mu$, $\mu\in\{1,2,3,4\}$.

Определение 2. *Областью определения* $\mathrm{dom}\,\Delta^T_{\mathrm{L}}$ лапласиана Леви Δ^T_{L}, порожденного кривой $T\in C^1([0,1],\mathrm{SO}(4))$, является пространство дважды дифференцируемых по Фреше функций из $\mathcal{P}$ в $M_N(\mathbb{C})$, для вторых производных которых в каждой точке $\gamma\in\mathcal{P}$ выполняется соотношение

$$f''(\gamma)(u,v) = \sum_{\mu=1}^4\sum_{\nu=1}^4\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K^{\mathrm{V},T}_{\mu\nu}(\gamma)(t,s)(u(t),p_\mu(t))_{\mathbb{R}^4}(v(s),p_\nu(s))_{\mathbb{R}^4}\,dt\,ds + \\ + \sum_{\mu=1}^4\sum_{\nu=1}^4\int\limits_0^1 K^{\mathrm{L},T}_{\mu\nu}(\gamma)(t)(u(t),p_\mu(t))_{\mathbb{R}^4}(v(t),p_\nu(t))_{\mathbb{R}^4}\,dt + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^4\sum_{\nu=1}^4\int\limits_0^1 K^{\mathrm{S},T}_{\mu\nu}(\gamma)(t)\times \\ \times\left(\left(\frac{d}{dt}(u(t),p_\mu(t))_{\mathbb{R}^4}\right)(v(t),p_\nu(t))_{\mathbb{R}^4} + \left(\frac{d}{dt}(v(t),p_\mu(t))_{\mathbb{R}^4}\right)(u(t),p_\nu(t))_{\mathbb{R}^4}\right)dt,$$

где функции $u,v\in\mathcal{P}$ таковы, что $0=u(1)=v(1)$, $K^{\mathrm{V},T}_{\mu\nu}\in L_1([0,1]\times[0,1],M_N(\mathbb{C}))$, $K^{\mathrm{L},T}_{\mu\nu}\in$ $\in L_1([0,1],M_N(\mathbb{C}))$, $K^{\mathrm{S},T}_{\mu\nu}\in L_\infty([0,1],M_N(\mathbb{C}))$, $K^{\mathrm{L},T}_{\mu\nu}=K^{\mathrm{L},T}_{\nu\mu}$, $K^{\mathrm{S},T}_{\mu\nu}=-K^{\mathrm{S},T}_{\nu\mu}$.

Лапласиан Леви Δ_{L}^T, *порожденный кривой* T, — это линейное отображение из $\operatorname{dom}\Delta_{\mathrm{L}}^T$ в пространство всех $M_N(\mathbb{C})$-значных функций на $\mathcal{P}$, определенное формулой

$$\Delta_{\mathrm{L}}^T f(\gamma)=\sum_{\mu=1}^{4}\int\limits_0^1 K_{\mu\mu}^{\mathrm{L},T}(\gamma)(t)\,dt.$$

Предложение 1. *Пространства* $\operatorname{dom}\Delta_{\mathrm{L}}^T$ *и* Ω *совпадают. Верны равенства*

$$K_{\mu\nu}^{\mathrm{V},T}(\gamma)(t,s)=K^{\mathrm{V}}(\gamma)(t,s)\langle p_\mu(t),p_\nu(s)\rangle,$$

$$K_{\mu\nu}^{\mathrm{S},T}(\gamma)(t)=K^{\mathrm{S}}(\gamma)(t)\langle p_\mu(t),p_\nu(t)\rangle,$$

$$K_{\mu\nu}^{\mathrm{L},T}(\gamma)(t)=K^{\mathrm{L}}(\gamma)(t)\langle p_\mu(t),p_\nu(t)\rangle+\frac{1}{2}\big(K^{\mathrm{S}}(\gamma)(t)\langle\dot p_\mu(t),p_\nu(t)\rangle+K^{\mathrm{S}}(\gamma)(t)\langle\dot p_\nu(t),p_\mu(t)\rangle\big).$$

Доказательство. Действительно, утверждение предложения легко следует из равенств

$$(u(t),p_\mu(t))_{\mathbb{R}^4}=\sum_{\nu=1}^{4}u^\nu(t)(p_\mu(t),p_\nu)_{\mathbb{R}^4},$$

$$\frac{d}{dt}(u(t),p_\mu(t))_{\mathbb{R}^4}=(\dot u(t),p_\mu(t))_{\mathbb{R}^4}+(u(t),\dot p_\mu(t))_{\mathbb{R}^4}=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{4}\dot u^\nu(t)(p_\mu(t),p_\nu)_{\mathbb{R}^4}+\sum_{\nu=1}^{4}u^\nu(t)(\dot p_\mu(t),p_\nu)_{\mathbb{R}^4}.\quad\square$$

Следующее определение в силу предложения 1 эквивалентно определению 2.

Определение 3. *Лапласиан Леви* Δ_{L}^T, *порожденный кривой* T, — это линейное отображение из Ω в пространство всех $M_N(\mathbb{C})$-значных функций на $\mathcal{P}$, определенное формулой

$$\Delta_{\mathrm{L}}^T f(\gamma)=\Delta_{\mathrm{L}}f(\gamma)+\sum_{\mu=1}^{4}\int\limits_0^1 K^{\mathrm{S}}(\gamma)(t)\langle\dot p_\mu(t),p_\mu(t)\rangle\,dt.$$

Предложение 2. *Выполняется равенство*

$$\Delta_{\mathrm{L}}^T f(\gamma)=\Delta_{\mathrm{L}}f(\gamma)-\int\limits_0^1\operatorname{tr}\big(\dot T(t)T^{-1}(t)\mathbf{K}^{\mathrm{S}}(\gamma)(t)\big)\,dt.$$

Доказательство. Если $T\in C^1([0,1],\mathrm{SO}(4))$, то $\dot T(t)T^{-1}(t)\in\mathfrak{so}(4)$ для всех $t\in[0,1]$. Тогда для любой билинейной формы K на $\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4$, принимающей значения в $M_N(\mathbb{C})$, выполняется цепочка равенств

$$\sum_{\mu=1}^{4}K\langle\dot p_\mu(t),p_\mu(t)\rangle=\operatorname{tr}(\dot T^T(t)\mathbf{K}T(t))=\operatorname{tr}(T(t)\dot T^T(t)\mathbf{K})=$$
$$=\operatorname{tr}\big((\dot T(t)T^{-1}(t))^T\mathbf{K}\big)=-\operatorname{tr}(\dot T(t)T^{-1}(t)\mathbf{K}).\quad\square$$

Пример 1. Пусть $z_1\in C^2(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})$. Рассмотрим функционал Z_1 на $\mathcal{P}$, определенный формулой $Z_1(\gamma)=\int_0^1 z_1(\gamma(t))\,dt$. Для любой $T\in C^1([0,1],\mathrm{SO}(4))$ выполняется равенство

$$\Delta_{\mathrm{L}}^T Z_1(\gamma)=\int\limits_0^1\Delta z_1(\gamma(t))\,dt.$$

Пример 2. Пусть $a_\mu(x)\,dx^\mu$ — действительнозначная C^2-гладкая 1-форма на $\mathbb{R}^4$. Пусть $g(x)=\sum_{\mu<\nu} g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu\wedge dx^\nu$, где $g_{\mu\nu}=\partial_\mu a_\nu-\partial_\nu a_\mu$. Рассмотрим функционал Z на $\mathcal{P}$, определенный формулой

$$Z(\gamma)=\int_0^1 a_\mu(\gamma(t))\dot\gamma^\mu(t)\,dt.$$

Можно показать, что для любой $T\in C^1([0,1],\mathrm{SO}(4))$ выполняется равенство

$$\Delta_{\mathrm{L}}^T Z(\gamma)=\int_0^1\sum_{\mu=1}^4\partial_\mu g_{\mu\nu}(\gamma(t))\dot\gamma^\nu(t)\,dt-\int_0^1\mathrm{tr}\bigl(\dot T(t)T^{-1}(t)g(\gamma(t))\bigr)\,dt.$$

Этот факт доказывается аналогично теореме 2, которая приведена ниже.

3. ЛАПЛАСИАНЫ ЛЕВИ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ С ПОМОЩЬЮ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ БАЗИСОВ

Пусть E — вещественное локально выпуклое пространство, непрерывно вложенное в вещественное сепарабельное гильбертово пространство H так, что образ E при вложении плотен в H. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H, состоящий из элементов пространства E.

Определение 4. *Лапласианом Леви* $\Delta_{\mathrm{L}}^{\{e_n\}}$, *порожденным ортонормированным базисом* $\{e_n\}$, называется линейное отображение из $\mathrm{dom}\,\Delta_{\mathrm{L}}^{\{e_n\}}$ в пространство $M_N(\mathbb{C})$-значных функций на E, определенное формулой

$$\Delta_{\mathrm{L}}^{\{e_n\}}f(\gamma)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{d^2}{d\alpha^2}\bigg|_{\alpha=0}f(\gamma+\alpha e_k),\tag{3.1}$$

где $\mathrm{dom}\,\Delta_{\mathrm{L}}^{\{e_n\}}$ — пространство $M_N(\mathbb{C})$-значных функций на E, для которых правая часть (3.1) существует для всех $\gamma\in E$.

Пусть $E=\mathcal{P}$, $H=L_2([0,1],\mathbb{R}^4)$. Выберем в $L_2([0,1],\mathbb{R}^4)$ ортонормированный базис $e_n(t)=p_{a_n}(t)h_{b_n}(t)$, где $h_n(t)=\sqrt{2}\sin n\pi t$, $a_n=n-4\lfloor(n-1)/4\rfloor$ и $b_n=\lfloor(n+3)/4\rfloor$.

Теорема 1. *Если* $f\in\mathrm{dom}\,\Delta_{\mathrm{L}}^T$, *то*

$$4\Delta_{\mathrm{L}}^{\{e_n\}}f=\Delta_{\mathrm{L}}^T f.$$

Доказательство. Выполняется равенство

$$\begin{aligned}f''(\gamma)(e_n,e_n)&=\int_0^1\int_0^1 K^{\mathrm{V}}(\gamma)(t,s)\langle p_{a_n}(t)h_{b_n}(t),p_{a_n}(s)h_{b_n}(s)\rangle\,dt\,ds+\\&+\int_0^1 K^{\mathrm{L}}(\gamma)(t)\langle p_{a_n}(t)h_{b_n}(t),p_{a_n}(t)h_{b_n}(t)\rangle\,dt+\int_0^1 K^{\mathrm{S}}(\gamma)(t)\langle \dot p_{a_n}(t)h_{b_n}(t),p_{a_n}(t)h_{b_n}(t)\rangle\,dt+\\&+\int_0^1 K^{\mathrm{S}}(\gamma)(t)\langle p_{a_n}(t)\dot h_{b_n}(t),p_{a_n}(t)h_{b_n}(t)\rangle\,dt.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Так как K^{S} — антисимметричный тензор, последнее слагаемое в (3.2) исчезает. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n h_k(s)h_k(t)=\begin{cases}1, & \text{если } t=s, \text{ причем } (t,s)\ne(0,0) \text{ и } (t,s)\ne(1,1),\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}$$

и для всех $n\in\mathbb{N}$, $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h_k(t)h_k(s)\right|\le 2,$$

по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1\int_0^1 K^{\mathrm{V}}(\gamma)(t,s)\langle p_{a_k}(t),p_{a_k}(s)\rangle h_{b_k}(t)h_{b_k}(s)\,dt\,ds+\right.$$

$$\left.+\int_0^1 K^{\mathrm{L}}(\gamma)(t)\langle p_{a_k}(t),p_{a_k}(t)\rangle h_{b_k}^2(t)\,dt+\int_0^1 K^{\mathrm{S}}(\gamma)(t)\langle \dot p_{a_k}(t)),p_{a_k}(t)\rangle h_{b_k}^2(t)\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{\mu=1}^{4}\left(\int_0^1 K^{\mathrm{L}}(\gamma)(t)\langle p_\mu(t),p_\mu(t)\rangle\,dt+\int_0^1 K^{\mathrm{S}}(\gamma)(t)\langle \dot p_\mu(t),p_\mu(t)\rangle\,dt\right).\qquad(3.3)$$

Отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

4. ИНСТАНТОНЫ И УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА–ЛЕВИ

Ниже связность в тривиальном векторном расслоении с базой $\mathbb{R}^4$, слоем $\mathbb{C}^N$ и структурной группой $\mathrm{U}(N)$ задана на $\mathbb{R}^4$ как $\mathfrak{u}(N)$-значная C^∞-гладкая 1-форма $A(x)=A_\mu(x)\,dx^\mu$, определенная на $\mathbb{R}^4$. Связность задает оператор ковариантного дифференцирования. Если $\phi\in C^1(\mathbb{R}^4,\mathfrak{u}(N))$, то ковариантная производная ϕ по направлению p_μ определяется формулой $\nabla_\mu\phi=\partial_\mu\phi+[A_\mu,\phi]$. Соответствующая связности кривизна — это 2-форма $F(x)=\sum_{\mu<\nu}F_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu\wedge dx^\nu$, где $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+[A_\mu,A_\nu]$. Для каждой связности выполняются тождества Бьянки

$$\nabla_\lambda F_{\mu\nu}+\nabla_\nu F_{\lambda\mu}+\nabla_\mu F_{\nu\lambda}=0.$$

Введем обозначения $F_+=(F+{*F})/2$ и $F_-=(F-{*F})/2$ $(({*F})_{\mu\nu}=\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}/2$, где $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ — полностью антисимметричный единичный тензор).

Уравнения Янга–Миллса

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu}=0$$

являются уравнениями Эйлера–Лагранжа для функционала действия Янга–Миллса:

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x))\,dx=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4}\bigl(\|F_+(x)\|^2+\|F_-(x)\|^2\bigr)\,dx.\qquad(4.1)$$

(Если $B\in\mathfrak{u}(N)$, то $\|B\|=\sqrt{-\,\mathrm{tr}(B,B)}$. Если $B(x)=\sum_{\mu<\nu}B_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu\wedge dx^\nu$ есть $\mathfrak{u}(N)$-значная 2-форма на $\mathbb{R}^4$, то $\|B(x)\|=\sqrt{\sum_{\mu=1}^4\sum_{\nu=1}^4\|B_{\mu\nu}(x)\|^2}$.)

Из того что связность A является решением уравнений $F={*F}$ или $F=-{*F}$, следует, что связность A является решением уравнений Янга–Миллса. Решение A уравнения $F={*F}$ или $F=-{*F}$ называется соответственно *дуальным* или *антидуальным решением* уравнений Янга–Миллса. Если при этом интеграл (4.1) конечен, то A называется соответственно инстантоном или антиинстантоном (см., например, [10]).

Для кривой $\gamma \in \mathcal{P}$ оператор $U_{t,s}(\gamma)$, где $0 \le s \le t \le 1$, определяется как решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U_{t,s}(\gamma) = -A_\mu(\gamma(t))\dot\gamma^\mu(t)U_{t,s}(\gamma), \\ \dfrac{d}{ds}U_{t,s}(\gamma) = U_{t,s}(\gamma)A_\mu(\gamma(s))\dot\gamma^\mu(s), \\ U_{t,s}(\gamma)|_{t=s} = I_N. \end{cases} \tag{4.2}$$

Решение этой системы выражается в виде ряда

$$U_{t,s}(\gamma) = I_N + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta^k_{s,t}} d\tau_1 \dots d\tau_k \big(-A_\mu(\gamma(\tau_k))\dot\gamma^\mu(\tau_k)\big) \dots \big(-A_\mu(\gamma(\tau_1))\dot\gamma^\mu(\tau_1)\big),$$

где $\Delta^k_{s,t} := \{(\tau_1, \dots, \tau_k) \in \mathbb{R}^k \colon s \le \tau_1 \le \dots \le \tau_k \le t\}$. Оператор $U_{1,0}(\gamma)$ есть параллельный перенос вдоль γ.

Параллельный перенос обладает следующими свойствами:

1) если $0 \le s \le r \le t \le 1$, то $U_{t,r}(\gamma)U_{r,s}(\gamma) = U_{t,s}(\gamma)$;
2) параллельный перенос не зависит от параметризации. Пусть $\sigma\colon [0,1] \to [0,1]$ — неубывающая кусочно C^1-гладкая функция такая, что $\sigma(0) = 0$ и $\sigma(1) = 1$. Пусть $\gamma \in \mathcal{P}$. Тогда $\gamma \circ \sigma \in \mathcal{P}$ и выполняется равенство $U_{\sigma(t),\sigma(s)}(\gamma) = U_{t,s}(\gamma \circ \sigma)$.

Теорема 2. *Для функции $\mathcal{P} \ni \gamma \mapsto U_{1,0}(\gamma)$ (параллельного переноса вдоль кривых из $\mathcal{P}$) выполняется равенство*

$$\Delta^T_{\mathrm{L}} U_{1,0}(\gamma) = -\int_0^1 U_{1,t}(\gamma)\nabla^\mu F_{\mu\lambda}(\gamma(t))\dot\gamma^\lambda(t)U_{t,0}(\gamma)\,dt + \\ + \int_0^1 U_{1,t}(\gamma)\left(\sum_{\mu=1}^{4} F(\gamma(t))\langle \dot p_\mu(t), p_\mu(t)\rangle\right)U_{t,0}(\gamma)\,dt.$$

Доказательство. Функция $\mathcal{P} \ni \gamma \to U_{1,0}(\gamma)$ бесконечно дифференцируема по Фреше (см. [7]). Выполняется равенство

$$U'_{t,s}(\gamma)(u) = -\int_s^t U_{t,r}(\gamma)F_{\mu\nu}(\gamma(r))u^\mu(r)\dot\gamma^\nu(r)U_{r,s}(\gamma)\,dr - \\ - A_\mu(\gamma(t))u^\mu(t)U_{t,s}(\gamma) + U_{t,s}(\gamma)A_\mu(\gamma(s))u^\mu(s). \tag{4.3}$$

Пусть $u, v \in \mathcal{P}$ такие, что $u(1) = v(1) = 0$. Тогда, учитывая (4.3), получаем

$$U''_{1,0}(\gamma)(u,v) = \int_0^1 \left(\int_t^1 U_{1,r}(\gamma)F_{\mu\nu}(\gamma(r))v^\mu(r)\dot\gamma^\nu(r)U_{r,t}(\gamma)\,dr - U_{1,t}(\gamma)A_\mu(\gamma(t))v^\mu(t)\right) \times \\ \times F_{\mu\nu}(\gamma(t))u^\mu(t)\dot\gamma^\nu(t)U_{t,0}(\gamma)\,dt - \\ - \int_0^1 U_{1,r}(\gamma)\partial_\lambda F_{\mu\nu}(\gamma(r))v^\lambda(r)u^\mu(r)\dot\gamma^\nu(r)U_{r,0}(\gamma)\,dr -$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^1 U_{1,r}(\gamma)F_{\mu\nu}(\gamma(r))u^\mu(r)\dot v^\nu(r)U_{r,0}(\gamma)\,dr+\\
&+\int_0^1 U_{1,t}(\gamma)F_{\mu\nu}(\gamma(t))u^\mu(t)\dot\gamma^\nu(t)\times\\
&\times\left(\int_0^t U_{t,r}(\gamma)F_{\mu\nu}(\gamma(r))v^\mu(r)\dot\gamma^\nu(r)U_{r,0}(\gamma)\,dr+A_\mu(\gamma(t))v^\mu(t)U_{t,0}(\gamma)\right)dt.
\end{aligned}
$$

С помощью интегрирования по частям и тождеств Бьянки (повторяя те же рассуждения, что и в [2]) получаем, что $U_{1,0}\in\Omega$, причем

$$
K^{\mathrm V}_{\mu\nu}(\gamma)(t,s)=\begin{cases} U_{1,t}(\gamma)F_{\mu\lambda}(\gamma(t))\dot\gamma^\lambda(t)U_{t,s}(\gamma)F_{\nu\kappa}(\gamma(s))\dot\gamma^\kappa(s)U_{s,0}(\gamma), & \text{если}\ \ t\ge s,\\ U_{1,s}(\gamma)F_{\nu\kappa}(\gamma(s))\dot\gamma^\kappa(s)U_{s,t}(\gamma)F_{\mu\lambda}(\gamma(t))\dot\gamma^\lambda(t)U_{t,0}(\gamma), & \text{если}\ \ t< s,\end{cases} \tag{4.4}
$$

$$
K^{\mathrm L}_{\mu\nu}(\gamma)(t)=\frac12 U_{1,t}(\gamma)\bigl(-\nabla_\mu F_{\nu\lambda}(\gamma(t))\dot\gamma^\lambda(t)-\nabla_\nu F_{\mu\lambda}(\gamma(t))\dot\gamma^\lambda(t)\bigr)U_{t,0}(\gamma),
$$

$$
K^{\mathrm S}_{\mu\nu}(\gamma)(t)=U_{1,t}(\gamma)F_{\mu\nu}(\gamma(t))U_{t,0}(\gamma).
$$

Отсюда легко следует утверждение теоремы. $\square$

Предложение 3. *Если для связности A интеграл (4.1) конечен, то параллельный перенос $U_{1,0}$ является решением уравнения Лапласа–Леви для лапласиана Леви, порожденного кривой $T\in C^1([0,1],\mathrm{SO}(4))$,*

$$
\Delta^T_{\mathrm L}U_{1,0}=0
$$

тогда и только тогда, когда связность A является решением уравнений Янга–Миллса

$$
\nabla^\mu F_{\mu\nu}=0
$$

и для каждого $t\in[0,1]$ и $x\in\mathbb R^4$ выполняется

$$
-\operatorname{tr}\bigl(\dot T(t)T^{-1}(t)\mathbf F(x)\bigr)=\sum_{\mu=1}^4 F(x)\langle\dot p_\mu(t),p_\mu(t)\rangle=0.
$$

Доказательство. Докажем нетривиальную часть утверждения. Если $\gamma\in C^1([0,1],\mathbb R^4)$ такова, что $\gamma(0)=0$, пусть кривая $\gamma^r\in\mathcal P$ определена как

$$
\gamma^r(t)=\begin{cases}\gamma(t), & \text{если}\ \ t\le r,\\ \gamma(r), & \text{если}\ \ t>r.\end{cases}
$$

Введем функцию $g\in C^1([0,1],M_N(\mathbb C))$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
g(r)=U_{1,r}(\gamma)(\Delta^T_{\mathrm L}U_{1,0}(\gamma^r))=&\int_0^r U_{1,t}(\gamma)\bigl(-\nabla^\mu F_{\mu\lambda}(\gamma(t))\dot\gamma^\lambda(t)\bigr)U_{t,0}(\gamma)\,dt+\\
&+\int_0^r U_{1,t}(\gamma)\left(\sum_{\mu=1}^4 F(\gamma(t))\langle\dot p_\mu(t),p_\mu(t)\rangle\right)U_{t,0}(\gamma)\,dt+\\
&+U_{1,r}(\gamma)\int_r^1\left(\sum_{\mu=1}^4 F(\gamma(r))\langle\dot p_\mu(t),p_\mu(t)\rangle\right)dt\,U_{r,0}(\gamma).
\end{aligned}
$$

Тогда

$$g'(r) = U_{1,r}(\gamma)\big(-\nabla^{\mu} F_{\mu\lambda}(\gamma(r))\dot{\gamma}^{\lambda}(r)\big)U_{r,0}(\gamma) + \\ + U_{1,r}(\gamma)\int\limits_r^1 \left(\sum_{\mu=1}^{4} \nabla_{\dot{\gamma}(r)} F(\gamma(r))\langle \dot{p}_{\mu}(t), p_{\mu}(t)\rangle\right) dt\, U_{r,0}(\gamma).$$

Если $\Delta_{\mathrm{L}}^{T} U_{1,0} = 0$, то $g \equiv 0$. Тогда $g'(1) = -\nabla^{\mu} F_{\mu\lambda}(\gamma(1))\dot{\gamma}^{\lambda}(1)U_{1,0}(\gamma) = 0$. Так как оператор $U_{1,0}(\gamma)$ обратим, для всех $\gamma \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ таких, что $\gamma(0) = 0$, выполняется равенство

$$-\nabla^{\mu} F_{\mu\lambda}(\gamma(1))\dot{\gamma}^{\lambda}(1) = 0.$$

Подбирая подходящие кривые γ, мы получаем, что связность A является решением уравнений Янга–Миллса.

Докажем теперь, что для каждого $t \in [0,1]$ и $x \in \mathbb{R}^4$ выполняется равенство

$$\sum_{\mu=1}^{4} F(x)\langle \dot{p}_{\mu}(t), p_{\mu}(t)\rangle = 0.$$

Пусть кривая $\gamma_y \in C^1([0,1],\mathbb{R}^4)$ соединяет точки 0 и y, т.е. $\gamma_y(0) = 0$ и $\gamma_y(1) = y$. Пусть $0 < r_1 < r_2 \le 1$. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ введем кривые $\gamma_{i,\varepsilon} \in \mathcal{P}$, $i = 1,2$, следующим образом:

$$\gamma_{i,\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \;\; 0 \le t \le r_i - \varepsilon, \\ \gamma_y\left(\dfrac{t - r_i + \varepsilon}{\varepsilon}\right), & \text{если} \;\; r_i - \varepsilon < t \le r_i, \\ y, & \text{если} \;\; r_i < t \le 1. \end{cases}$$

Будем обозначать $\sum_{\mu=1}^{4} F(x)\langle \dot{p}_{\mu}(t), p_{\mu}(t)\rangle$ символом $F(x,t)$. Из свойств параллельного переноса следует, что

$$\Delta_{\mathrm{L}}^{T} U(\gamma_{i,\varepsilon}) = \int\limits_{r_i}^{1} F(y,t)\,dt\, U_{1,0}(\gamma_y) + \int\limits_{r_i-\varepsilon}^{r_i} U_{1,(t-r_i+\varepsilon)/\varepsilon}(\gamma_y) F\left(\gamma_y\left(\frac{t - r_i + \varepsilon}{\varepsilon}\right), t\right) U_{(t-r_i+\varepsilon)/\varepsilon,0}(\gamma_y)\,dt + \\ + U_{1,0}(\gamma_y)\int\limits_{0}^{r_i-\varepsilon} F(0,t)\,dt = 0.$$

Обозначим через $\|\cdot\|_N$ операторную норму на $M_N(\mathbb{C})$. Так как функция $\mathbb{R}^4 \times [0,1] \ni (x,r) \to$ $\to F(x,r)$ непрерывна по совокупности аргументов, существует константа $C > 0$ такая, что

$$\sup_{(t,r)\in[0,1]\times[0,1]} \|F(\gamma_y(t), r)\|_N \le C.$$

Так как $\|U_{t,s}(\gamma)\|_N = 1$, выполняются оценки

$$\left\| \int\limits_{r_i-\varepsilon}^{r_i} U_{1,(t-r_i+\varepsilon)/\varepsilon}(\gamma_y) F\left(\gamma_y\left(\frac{t - r_i + \varepsilon}{\varepsilon}\right), t\right) U_{\frac{t-r_i+\varepsilon}{\varepsilon},0}(\gamma_y)\,dt \right\|_N \le C\varepsilon,$$

$$\left\| U_{1,0}(\gamma_y) \int\limits_{r_i-\varepsilon}^{r_i} F(0,t)\,dt \right\|_N \le C\varepsilon.$$

Отсюда следует, что для $i=1,2$ выполняется оценка

$$\left\| \int\limits_{r_i}^{1} F(y,t)\,dt\,U_{1,0}(\gamma_y) + U_{1,0}(\gamma_y)\int\limits_{0}^{r_i} F(0,t)\,dt - \Delta_{\mathrm{L}}^{T} U_{1,0}(\gamma_{i,\varepsilon}) \right\|_N \le$$

$$\le \left\| U_{1,0}(\gamma_y)\int\limits_{r_i-\varepsilon}^{r_i} F(0,t)\,dt - \int\limits_{r_i-\varepsilon}^{r_i} U_{1,(t-r_i+\varepsilon)/\varepsilon}(\gamma_y) F\biggl(\gamma_y\Bigl(\frac{t-r_i+\varepsilon}{\varepsilon}\Bigr),t\biggr) U_{(t-r_i+\varepsilon)/\varepsilon,0}(\gamma_y)\,dt \right\|_N \le$$

$$\le 2C\varepsilon.$$

Тогда

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta_{\mathrm{L}}^{T} U_{1,0}(\gamma_{i,\varepsilon}) = \int\limits_{r_i}^{1} F(y,t)\,dt\,U_{1,0}(\gamma_y) + U_{1,0}(\gamma_y)\int\limits_{0}^{r_i} F(0,t)\,dt.$$

Тогда для всех $0<r_1<r_2\le 1$ верно равенство

$$U_{1,0}^{-1}(\gamma_y)\int\limits_{r_1}^{r_2} F(y,t)\,dt\,U_{1,0}(\gamma_y) = \int\limits_{r_1}^{r_2} F(0,t)\,dt.$$

Дифференцируя последнее равенство по r_2, получаем, что выполняется равенство

$$U_{1,0}^{-1}(\gamma_y)F(y,t)U_{1,0}(\gamma_y)=F(0,t) \tag{4.5}$$

для всех $t\in(0,1]$. В силу непрерывности $F(\cdot,\cdot)$ равенство (4.5) выполняется для $t\in[0,1]$.

Из равенства (4.5) следует, что $\|F(y,t)\|=\|F(0,t)\|$ для всех $y\in\mathbb{R}^4$ и $t\in[0,1]$. Из конечности интеграла (4.1) вытекает, что существует последовательность $\{x_n\}$ точек в $\mathbb{R}^4$, для которой выполняется $\lim_{n\to\infty}F_{\mu\nu}(x_n)=0$ для всех $\mu,\nu\in\{1,2,3,4\}$. Тогда $\lim_{n\to\infty}\|F(x_n,t)\|=0$. Значит, $F(x,t)=0$ для всех $x\in\mathbb{R}^4$ и $t\in[0,1]$. $\square$

Группы S^3_{L} и S^3_{R} — нормальные подгруппы группы $\mathrm{SO}(4)$, состоящие из вещественных матриц, имеющих соответственно вид

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d\\ b & a & -d & c\\ c & d & a & -b\\ d & -c & b & a\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d\\ b & a & d & -c\\ c & -d & a & b\\ d & c & -b & a\end{pmatrix},$$

где $a^2+b^2+c^2+d^2=1$.

Алгебры Ли $\mathrm{Lie}(S^3_{\mathrm{L}})$ и $\mathrm{Lie}(S^3_{\mathrm{R}})$ групп S^3_{L} и S^3_{R} состоят из вещественных матриц, имеющих соответственно вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -b & -c & -d\\ b & 0 & -d & c\\ c & d & 0 & -b\\ d & -c & b & 0\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & -b & -c & -d\\ b & 0 & d & -c\\ c & -d & 0 & b\\ d & c & -b & 0\end{pmatrix}.$$

Алгебры $\mathrm{Lie}(S^3_{\mathrm{L}})$ и $\mathrm{Lie}(S^3_{\mathrm{R}})$ ортогональны в $\mathfrak{so}(4)$ (относительно скалярного произведения, заданного формулой $(V_1,V_2)_{\mathfrak{so}(4)}=-\operatorname{tr}(V_1V_2)$, где $V_1,V_2\in\mathfrak{so}(4)$), причем $\mathfrak{so}(4)=\mathrm{Lie}(S^3_{\mathrm{L}})\oplus\oplus\,\mathrm{Lie}(S^3_{\mathrm{R}})$. Символами P_{L} и P_{R} обозначим ортогональную проекцию в $\mathfrak{so}(4)$ на $\mathrm{Lie}(S^3_{\mathrm{L}})$ и $\mathrm{Lie}(S^3_{\mathrm{R}})$ соответственно.

Введем обозначения

$$\begin{pmatrix} 0 & -b_{\mathrm{L}}(t) & -c_{\mathrm{L}}(t) & -d_{\mathrm{L}}(t) \\ b_{\mathrm{L}}(t) & 0 & -d_{\mathrm{L}}(t) & c_{\mathrm{L}}(t) \\ c_{\mathrm{L}}(t) & d_{\mathrm{L}}(t) & 0 & -b_{\mathrm{L}}(t) \\ d_{\mathrm{L}}(t) & -c_{\mathrm{L}}(t) & b_{\mathrm{L}}(t) & 0 \end{pmatrix} = P_{\mathrm{L}}(\dot{T}(t)T^{-1}(t)), \tag{4.6}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -b_{\mathrm{R}}(t) & -c_{\mathrm{R}}(t) & -d_{\mathrm{R}}(t) \\ b_{\mathrm{R}}(t) & 0 & d_{\mathrm{R}}(t) & -c_{\mathrm{R}}(t) \\ c_{\mathrm{R}}(t) & -d_{\mathrm{R}}(t) & 0 & b_{\mathrm{R}}(t) \\ d_{\mathrm{R}}(t) & c_{\mathrm{R}}(t) & -b_{\mathrm{R}}(t) & 0 \end{pmatrix} = P_{\mathrm{R}}(\dot{T}(t)T^{-1}(t)). \tag{4.7}$$

В силу (4.6) и (4.7) мы получаем

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\big(\dot{T}(t)T^{-1}(t)\mathbf{F}(x)\big) = \\ &\quad = 2b_{\mathrm{L}}(t)(F_{12}(x)+F_{34}(x)) + 2c_{\mathrm{L}}(t)(F_{13}(x)-F_{24}(x)) + 2d_{\mathrm{L}}(t)(F_{14}(x)-F_{32}(x)) + \\ &\quad + 2b_{\mathrm{R}}(t)(F_{12}(x)-F_{34}(x)) + 2c_{\mathrm{R}}(t)(F_{13}(x)+F_{24}(x)) + 2d_{\mathrm{R}}(t)(F_{14}(x)+F_{32}(x)), \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\mathrm{tr}\big(P_{\mathrm{L}}(\dot{T}(t)T^{-1}(t))\mathbf{F}_-(x)\big) = \mathrm{tr}\big(P_{\mathrm{R}}(\dot{T}(t)T^{-1}(t))\mathbf{F}_+(x)\big) = 0,$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\big(P_{\mathrm{L}}(\dot{T}(t)T^{-1}(t))\mathbf{F}_+(x)\big) = \\ &\quad = 2b_{\mathrm{L}}(t)(F_{12}(x)+F_{34}(x)) + 2c_{\mathrm{L}}(t)(F_{13}(x)-F_{24}(x)) + 2d_{\mathrm{L}}(t)(F_{14}(x)-F_{32}(x)), \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\big(P_{\mathrm{R}}(\dot{T}(t)T^{-1}(t))\mathbf{F}_-(x)\big) = \\ &\quad = 2b_{\mathrm{R}}(t)(F_{12}(x)-F_{34}(x)) + 2c_{\mathrm{R}}(t)(F_{13}(x)+F_{24}(x)) + 2d_{\mathrm{R}}(t)(F_{14}(x)+F_{32}(x)). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Так мы получили

Предложение 4. *Выполняется равенство*

$$\mathrm{tr}\big(P_{\mathrm{L}}(\dot{T}(t)T^{-1}(t))\mathbf{F}_+(x)\big) + \mathrm{tr}\big(P_{\mathrm{R}}(\dot{T}(t)T^{-1}(t))\mathbf{F}_-(x)\big) = \mathrm{tr}\big(\dot{T}(t)T^{-1}(t)\mathbf{F}(x)\big)$$

для всех $t \in [0,1]$ *и* $x \in \mathbb{R}^4$.

Замечание 2. $F(x)$ — это элемент $\mathfrak{u}(N) \otimes \mathfrak{so}(4)$, а $F_-(x)$ и $F_+(x)$ — проекции $F(x)$ на $\mathfrak{u}(N) \otimes \mathrm{Lie}(S^3_{\mathrm{L}})$ и $\mathfrak{u}(N) \otimes \mathrm{Lie}(S^3_{\mathrm{R}})$ соответственно.

Предложение 5. *Если функция* T *принимает значения в группе* S^3_{R} *(группе* S^3_{L}*) и выполняется уравнение* $F = *F$ *(уравнение* $F = -*F$*), то соответствующий связности параллельный перенос* $U_{1,0}$ *является решением уравнения Лапласа–Леви для лапласиана Леви* Δ^T_{L}:

$$\Delta^T_{\mathrm{L}} U_{1,0} = 0.$$

Доказательство. Если функция T принимает значения в группе S^3_{R} и выполняется уравнение $F = *F$, то в силу предложения 4 для каждого $t \in [0,1]$ и $x \in \mathbb{R}^4$ имеем

$$\mathrm{tr}(\dot{T}(t)T^{-1}(t)\mathbf{F}(x)) = 0.$$

Кроме того, связность A является решением уравнений Янга–Миллса, а значит, в силу теоремы 2 верно утверждение предложения. $\square$

Теорема 3. *Пусть значение функционала действия Янга–Миллса* (4.1) *на связности* A *конечно. Если* $T \in C^1([0,1], S^3_{\mathrm{L}})$, *причем*

$$\dim \operatorname{span}\{\dot{T}(t)T^{-1}(t)\}_{t\in[0,1]} \geq 2,$$

то следующие два утверждения равносильны:

1) *связность A на $\mathbb{R}^4$ является антиинстантоном*;

2) *параллельный перенос $U_{1,0}$ является решением уравнения Лапласа для лапласиана Δ_{L}^T*:

$$\Delta_{\mathrm{L}}^T U_{1,0} = 0.$$

Доказательство. Пусть $\Delta_{\mathrm{L}}^T U_{1,0} = 0$. Если

$$\dim \operatorname{span}\{\dot{T}(t)T^{-1}(t)\}_{t\in[0,1]} \geq 2,$$

то из предложения 3 и равенства (4.9) следует, что существуют такие ортогональные векторы $(b_i, c_i, d_i) \in \mathbb{R}^3$, $i \in \{1,2\}$, что

$$b_i(F_{12}(x) + F_{34}(x)) + c_i(F_{13}(x) - F_{24}(x)) + d_i(F_{14}(x) - F_{32}(x)) = 0 \qquad (4.11)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^4$. С помощью вращения можно совершить переход к новой декартовой системе координат $(x) \to (x')$ в $\mathbb{R}^4$ так, что в новой системе координат выражения (4.11) примут вид

$$\begin{cases} F_{12}(x') + F_{34}(x') = 0, \\ F_{13}(x') - F_{24}(x') = 0. \end{cases} \qquad (4.12)$$

Обозначим новую систему координат (x') снова через (x).

В силу предложения 3 из тождества $\Delta_{\mathrm{L}}^T U_{1,0} = 0$ следует, что A является решением уравнений Янга–Миллса. Покажем, что из уравнений Янга–Миллса, тождеств Бьянки и равенств (4.12) вытекает, что

$$\nabla_\lambda (F_+)_{\mu\nu} = 0. \qquad (4.13)$$

Действительно, из равенств (4.12) сразу следует, что $\nabla_\lambda(F_{12} + F_{34}) = 0$ и $\nabla_\lambda(F_{13} - F_{24}) = 0$ для $\lambda \in \{1,2,3,4\}$. Докажем, что $\nabla_1(F_{14}(x) - F_{32}) = 0$. Из уравнений Янга–Миллса и тождеств Бьянки следует, что

$$0 = \nabla_1 F_{14} + \nabla_2 F_{24} + \nabla_3 F_{34} = \nabla_1 F_{32} + \nabla_2 F_{13} + \nabla_3 F_{21}.$$

Тогда

$$\nabla_1(F_{14}(x) - F_{32}) = \nabla_2(F_{13} - F_{24}) + \nabla_3(F_{21} - F_{34}) = 0.$$

Аналогично доказывается, что $\nabla_\lambda(F_{14}(x) - F_{32}) = 0$ для $\lambda \in \{2,3,4\}$.

Для любой $y \in \mathbb{R}^4$ возьмем кривую $\gamma_y \in C^1([0,1], \mathbb{R}^4)$ такую, что $\gamma_y(0) = 0$, $\gamma_y(1) = y$. Введем функцию $h(t) = U_{t,0}^{-1}(\gamma_y) F_+(\gamma_y(t)) U_{t,0}(\gamma_y)$. Так как $\nabla_\lambda(F_+)_{\mu\nu} = 0$, для всех $t \in [0,1]$ выполняется равенство

$$\dot{h}(t) = U_{t,0}^{-1}(\gamma_y) \nabla_{\dot{\gamma}_y(t)} F_+(\gamma_y(t)) U_{t,0}(\gamma_y) = 0.$$

Тогда $h(0) = F_+(0) = U_{1,0}^{-1}(\gamma_y) F_+(y) U_{1,0}(\gamma_y) = h(1)$. Отсюда следует, что $\|F_+(0)\| = \|F_+(y)\|$ для всех $y \in \mathbb{R}^4$. В силу конечности интеграла (4.1) существует последовательность $\{x_n\}$ точек в $\mathbb{R}^4$, для которой выполняется равенство $\lim_{n\to\infty}\|F_+(x_n)\| = 0$. Тогда $F_+ \equiv 0$ и связность A — антиинстантон. $\square$

Пример 3. Условие конечности значения функционала действия Янга–Миллса на связности в теореме 3 существенно. Пусть A — антиинстантон, функция T принимает значения в группе S_{L}^3. Ведем связность A' следующим образом. Пусть $A'_1 = A_1 + ib_1 I_N x_2 + ic_1 I_N x_3 + id_1 I_N x_4$, где $b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}$ таковы, что

$$\int_0^1 \big(b_1 b_{\mathrm{L}}(t) + c_1 c_{\mathrm{L}}(t) + d_1 d_{\mathrm{L}}(t)\big)\, dt = 0,$$

и пусть $A'_\mu = A_\mu$ для $\mu \in \{2,3,4\}$. Тогда порожденный связностью A' параллельный перенос есть гармонический функционал для лапласиана Δ_{L}^T, но A' не является антидуальным решением уравнений Янга–Миллса при $b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 \neq 0$.

Замечание 3. Будем использовать обозначения примера 2. Пусть $\int_{\mathbb{R}^4} g_{\mu\nu}(x) g^{\mu\nu}(x)\,dx < \infty$. Если $T \in C^1([0,1], S^3_{\mathrm{L}})$, причем

$$\dim \operatorname{span}\{\dot T(t) T^{-1}(t)\}_{t\in[0,1]} \geq 2,$$

то следующие два утверждения равносильны:

1) $g = -{*g}$;

2) функционал Z является решением уравнения Лапласа для лапласиана Леви Δ_{L}^T:

$$\Delta_{\mathrm{L}}^T Z = 0.$$

Замечание 4. Пусть $\{h_n\}$ — слабо равномерно плотный базис в $L_2([0,1],\mathbb{R})$ такой, что $h_n \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ и $h_n(0) = h_n(1) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Выберем в $H = L_2([0,1],\mathbb{R}^4)$ ортонормированный базис $g_n(t) = p_{a_n}(t) h_{b_n}(t)$. Пусть $\Delta_{\mathrm{L}}^{\{g_n\}}$ — лапласиан Леви, порожденный базисом $\{g_n\}$, действующий на функции, определенные на $E = C^1([0,1],\mathbb{R}^4)$. В условии теоремы 3 можно заменить параллельный перенос вдоль кривых из $\mathcal{P}$ на параллельный перенос вдоль кривых из $C^1([0,1],\mathbb{R}^4)$ и лапласиан Леви Δ_{L}^T на $\Delta_{\mathrm{L}}^{\{g_n\}}$.

Благодарности. Автор благодарит И.В. Воловича и О.Г. Смолянова за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Accardi L., Gibilisco P., Volovich I.V.* The Lévy Laplacian and the Yang–Mills equations // Rend. Lincei. Sci. Fis. Nat. 1993. V. 4, N 3. P. 201–206.
2. *Accardi L., Gibilisco P., Volovich I.V.* Yang–Mills gauge fields as harmonic functions for the Lévy Laplacian // Russ. J. Math. Phys. 1994. V. 2, N 2. P. 235–250.
3. *Accardi L., Ji U.C., Saitô K.* The exotic (higher order Lévy) Laplacians generate the Markov processes given by distribution derivatives of white noise // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2013. V. 16, N 3. Pap. 1350020.
4. *Аккарди Л., Смолянов О.Г.* Операторы Лапласа–Леви в пространствах функций на оснащенных гильбертовых пространствах // Мат. заметки. 2002. Т. 72, №1. С. 145–150.
5. *Аккарди Л., Смолянов О.Г.* Формулы Фейнмана для эволюционных уравнений с лапласианом Леви на бесконечномерных многообразиях // ДАН. 2006. Т. 407, №5. С. 583–588.
6. *Арефьева И.Я., Волович И.В.* Функциональные высшие законы сохранения в калибровочных теориях // Обобщенные функции и их применения в математической физике: Тр. Междунар. конф., Москва, 1980. М.: ВЦ АН СССР, 1981. С. 43–49.
7. *Gross L.* A Poincarè lemma for connection forms // J. Funct. Anal. 1985. V. 63. P. 1–46.
8. *Léandre R., Volovich I.V.* The Stochastic Lévy Laplacian and Yang–Mills equation on manifolds // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2001. V. 4, N 2. P. 161–172.
9. *Lévy P.* Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Paris: Gautier-Villars, 1951. Рус. пер.: *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. М.: Наука, 1967.
10. *Сергеев А.Г.* Гармонические отображения. М.: МИАН, 2008. (Лекц. курсы НОЦ; Т. 10).
11. *Volkov B.O.* Lévy-Laplacian and the gauge fields // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2012. V. 15, N 4. Pap. 1250027.
12. *Volkov B.O.* Quantum probability and Lévy Laplacians // Russ. J. Math. Phys. 2013. V. 20, N 2. P. 254–256.
13. *Volkov B.O.* Hierarchy of Lévy-Laplacians and quantum stochastic processes // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2013. V. 16, N 4. Pap. 1350027.