А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, Существование обратных отображений и их свойства, *Труды МИАН*, 2010, том 271, 18–28

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2010, т. 271, с. 18–28

УДК 517

Существование обратных отображений и их свойства[1]

©2010 г. А. В. Арутюнов[2,3,4], С. Е. Жуковский[2,5]

Поступило в феврале 2010 г.

Исследуются нелинейные отображения, действующие в банаховых пространствах. Для них при различных предположениях гладкости изучены вопросы накрываемости, метрической регулярности и существования непрерывного правого обратного отображения. Приведены различные условия регулярности, гарантирующие локальную накрываемость, а также существование непрерывного правого обратного отображения.

Пусть даны банаховы пространства X, Y с нормами $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ соответственно. Обозначим через $B_X(x,r)$ замкнутый шар в пространстве X с центром в точке $x\in X$ радиуса $r>0$ и аналогично в пространстве Y. Пусть заданы точка $x_0\in X$ и отображение $F\colon X\to Y$, которое мы предполагаем непрерывным в некоторой окрестности точки x_0. Положим $y_0=F(x_0)$.

Естественный интерес имеет задача: когда отображение F имеет правое обратное отображение φ в некоторой окрестности точки y_0, непрерывное в точке y_0, т.е.

$$\exists\,\delta>0,\ \varphi\colon B_Y(y_0,\delta)\to X\colon \qquad F(\varphi(y))\equiv y,\quad \varphi(y_0)=x_0 \quad \text{и} \quad \varphi(y)\to x_0 \quad \text{при } y\to y_0.$$

При этом важно выделить условия, при которых дополнительно выполняется оценка

$$\|\varphi(y)-x_0\|_X\le\frac{1}{\alpha}\|y-y_0\|_Y \tag{1}$$

или более слабая оценка

$$\|\varphi(y)-x_0\|_X\le\frac{1}{\alpha}\|y-y_0\|_Y^{\beta}.$$

Здесь $\alpha>0$, $0<\beta\le 1$ — некоторые константы.

Вообще говоря, указанный выше правый обратный φ может быть неединственным. Поэтому при изучении правого обратного отображения, как правило, возникают следующие вопросы.

(q1) Можно ли правое обратное отображение φ выбрать непрерывным в некоторой окрестности точки y_0?

В случае, когда правое обратное отображение неединственно, естественно возникает еще один вопрос.

(q2) Когда для любого ξ, близкого к x_0, найдется такое непрерывное в точке $F(\xi)$ правое обратное к F отображение $\varphi_\xi\colon B_X(\xi,\delta)\to X$, что

$$\varphi_\xi(F(\xi))=\xi?$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09-01-00619, 10-01-90002) и гранта Президента РФ (проект МК-119.2009.1).

[2]Российский университет дружбы народов, Москва, Россия.
[3]Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Россия.
[4]E-mail: arutun@orc.ru
[5]E-mail: S-E-Zhuk@yandex.ru

Эта работа в основном посвящена изучению проблемы (q1) и близких к ней вопросов, а также проблемы (q2).

Отметим, что с вопросом (q2) непосредственно связано понятие метрической регулярности. Напомним (см. [1, Definition 1.47]), что отображение F называется *метрически регулярным* в окрестности точки x_0, если

$$\exists\,\mu,\varepsilon,\delta>0\colon\quad \xi\in B_X(x_0,\delta),\quad y\in B_Y(F(\xi),\varepsilon)\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \exists\,x\in X\colon\quad y=F(x)\quad\text{и}\quad \|x-\xi\|_X\le\mu\|y-F(\xi)\|_Y.$$

Очевидно, что если отображение F метрически регулярно, то ответ на вопрос (q2) положительный и, кроме того, отображение φ_ξ для любого ξ, близкого к x, удовлетворяет оценке (1) при $\alpha=\mu^{-1}$.

Еще одним понятием, непосредственно связанным с вопросом (q2), является α-накрываемость. Напомним (см. определение 1.51 в [1], определение 1 в [2]), что отображение F называется локально *α-накрывающим* в окрестности точки x_0, если существует такое $\delta>0$, что

$$B_X(x,r)\subset B_X(x_0,\delta)\quad\Rightarrow\quad B_Y(F(x),\alpha r)\subset F(B_X(x,r)).$$

Если же

$$B_Y(F(x),\alpha r)\subset F(B_X(x,r))\qquad\forall\,x\in X,\quad r>0,$$

то отображение F называется α-накрывающим.

Если отображение F является локально α-накрывающим в окрестности точки x_0, то оно метрически регулярно с константой $\mu=\alpha^{-1}$ (см. [1, Theorem 1.52]) и, следовательно, ответ на вопрос (q2) положительный и выполнена оценка (1).

Начнем с классической теоремы об обратной функции, которая гарантирует существование правого обратного отображения и дает положительный ответ на вопросы (q1) и (q2). Пусть отображение F дифференцируемо в точке x_0. Точка x_0 называется нормальной, если

$$\operatorname{im}\frac{\partial F}{\partial x}(x_0)=Y,$$

где im — образ отображения.

Пусть пространства X, Y конечномерные. Если отображение F строго дифференцируемо в точке x_0 и точка x_0 является нормальной, то согласно классической теореме об обратной функции отображение F имеет правое обратное отображение φ, непрерывное в окрестности точки y_0 и удовлетворяющее оценке (1), и, значит, ответ на вопрос (q1) является положительным. Как известно (см., например, [1, Theorem 1.57]), при данных условиях отображение F метрически регулярно и, значит, ответ на вопрос (q2) тоже положителен, причем выполняется оценка (1) и

$$\|\varphi_\xi(y)-\xi\|_X\le\mu\|y-F(\xi)\|_Y \tag{2}$$

для любых ξ, y, близких к x_0, $F(\xi)$ соответственно.

Эти же утверждения верны и в случае, когда банаховы пространства X, Y бесконечномерны. Это следует, например, из [3]. Допущение бесконечномерности пространства Y существенно усложняет доказательства данных утверждений и требует использования теоремы Майкла.

Мы исследуем вопросы (q1), (q2) в случае, когда точка x_0 анормальна или отображение F имеет пониженную гладкость (не выполняется строгая дифференцируемость в точке x_0). Мы увидим, что в этих случаях вопросы (q1), (q2) могут иметь как отрицательные, так и положительные ответы.

1. ТЕОРЕМЫ ОБ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ОСЛАБЛЕННЫХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯХ ГЛАДКОСТИ

Начнем со следующего известного и простого, но весьма полезного утверждения. Доказательство его можно найти в [4, Lemma 5.8] и в [5, Proposition 2.1.12], однако мы для полноты изложения также приведем его.

Лемма 1. *Пусть $X = Y = \mathbb{R}^n$. Тогда для того, чтобы непрерывное отображение F имело правый обратный оператор φ, непрерывный в некоторой окрестности точки y_0, необходимо и достаточно, чтобы F было инъективно в некоторой окрестности точки x_0, т.е.*

$$\exists\,\varepsilon > 0\colon \quad \forall\, x_1, x_2 \in B_X(x_0,\varepsilon) \qquad x_1 \ne x_2 \quad \Rightarrow \quad F(x_1) \ne F(x_2). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть имеет место (3). Шар $B_X(x_0,\varepsilon)$ компактен. Как известно, непрерывное инъективное отображение компакта на свой образ является гомеоморфизмом (см., например, [6, II.6.2, теорема 7]). Поэтому отображение $F\colon M \to K$, $M = B_X(x_0,\varepsilon)$, $K = F(B_X(x_0,\varepsilon))$, является гомеоморфизмом. Применим теперь теорему Брауэра об инвариантности области (см., например, [7, теорема VI.9]). Она гласит, что если F является гомеоморфизмом между множествами $M \subset \mathbb{R}^n$ и $K \subset \mathbb{R}^n$, то

$$x_0 \in \operatorname{int} M \quad \Rightarrow \quad F(x_0) \in \operatorname{int} K$$

($\operatorname{int} M$ — внутренность множества M). Значит, отображение $\varphi = F^{-1}$ является искомым правым обратным, непрерывным в окрестности точки y_0.

Докажем обратное утверждение. Пусть существуют $\delta > 0$ и непрерывное отображение $\varphi\colon B_Y(y_0,\delta) \to X$, $\varphi(y_0) = x_0$, являющееся правым обратным к F. Отображение φ инъективно, так как если $y_1, y_2 \in B_Y(y_0,\delta)$ и $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$, то $F(\varphi(y_1)) = F(\varphi(y_2))$ и, следовательно, $y_1 = y_2$. Значит, как и выше, отображение $\varphi\colon K \to M$, $K = B_Y(y_0,\delta)$, $M = \varphi(B_Y(y_0,\delta))$, является гомеоморфизмом. Поэтому по теореме Брауэра об инвариантности области $x_0 \in \operatorname{int} M$. Следовательно, сужение $F|_M = \varphi^{-1}$ является гомеоморфизмом и, значит, отображение F инъективно в окрестности точки x_0. $\square$

Замечание. Если $\dim X \ne \dim Y$, то утверждение теоремы, очевидно, не выполняется. Например, отображение $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x_1,x_2) = x_1 + x_2$, имеет непрерывный правый обратный, но неинъективно ни в какой окрестности любой точки.

Теорема 1. *Пусть X, Y — конечномерные евклидовы пространства, отображение F непрерывно в некоторой окрестности точки x_0, дифференцируемо в точке x_0 и точка x_0 является нормальной. Тогда в некоторой окрестности точки y_0 существует правое обратное к F отображение φ, для которого имеет место оценка* (1) *с некоторой константой α.*

Доказательство см., например, в [8, приложение II, следствие 1].

Следующий пример показывает, что в предположениях теоремы 1 ответы на вопросы (q1) и (q2) могут быть отрицательными.

Пример 1 (см. [8, с. 114–115])**.** Рассмотрим функцию $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенную по формуле

$$F(x) = x + x^2 \sin\frac{1}{x} \quad \text{при } x \ne 0, \qquad F(0) = 0.$$

Пусть $x_0 = 0$. Ясно, что функция F непрерывна, дифференцируема в точке x_0, $F'(x_0) = 1$ и, значит, условия теоремы 1 выполнены. Поэтому в некоторой окрестности точки y_0 существует правое обратное к F отображение φ, для которого имеет место оценка (1).

Покажем, что для отображения F ответы на вопросы (q1), (q2) отрицательны. Действительно, рассмотрим последовательность точек $x_k = (2\pi k)^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots$ Очевидно, что

$F'(x_k) = 0$ и $F''(x_k) < 0$ и, значит, в точках x_k функция F имеет строгие локальные максимумы. Поэтому для отображения F ответ на вопрос (q2) отрицательный. Кроме того, F неинъективно ни в какой окрестности x_0. Действительно, возьмем произвольное $\delta > 0$. Для него возьмем $k\colon x_k \in [0, \delta)$. В силу построения x_k существуют такие $s_k \in (0, x_k)$ и $t_k \in (x_k, \delta)$, что $F(s_k) = F(t_k)$. Следовательно, согласно лемме 1 ни в какой окрестности точки y_0 не существует непрерывного правого обратного к F отображения, переводящего y_0 в x_0. Поэтому для отображения F и на вопрос (q1) ответ отрицателен.

Для отображения $F\colon X \to Y$, $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^k$, положим (см. [9, гл. 1, § 5.2])

$$a(F, x_0) = \inf\bigl\{\|x^*\|\colon\ x^* \in X^*,\ y^* \in Y^*,\ x^* \in D^-\langle y^*, F\rangle(x_0),\ \|y^*\| = 1\bigr\},$$

где X^*, Y^* — сопряженные пространства, а символ D^- обозначает нижний обобщенный полудифференциал (см. [9, гл. 1, § 2.1]).

Теорема 2. *Если отображение F обладает свойством α-накрывания в некоторой окрестности точки x_0, то $\alpha \le a(F, x_0)$. Если $\alpha < a(F, x_0)$, то отображение F является локально α-накрывающим в некоторой окрестности точки x_0.*

Доказательство см. в [9, теорема 5.2].

Условие

$$a(F, x_0) > 0$$

в дальнейшем будем называть *условием регулярности Мордуховича* для отображения F в точке x_0. Из приведенной выше теоремы следует, что если $a(F, x_0) > 0$, то ответ на вопрос (q2) является положительным и, кроме того, для любого ξ из некоторой окрестности x_0 выполнена оценка (2). В то же время следующий пример показывает, что даже если в точке x_0 выполнено условие регулярности Мордуховича, то ответ на вопрос (q1) может быть отрицательным.

Пример 2. Определим отображение $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ по формуле

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x)), \qquad F_1(x) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \qquad F_2(x) = \frac{2x_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \qquad \text{при } x \ne 0,$$

$F(0) = 0$, где $x = (x_1, x_2)$. Очевидно, что F непрерывно.

Покажем, что отображение F является 1-накрывающим. Для этого достаточно доказать, что отображение $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, определенное по формуле

$$f(z) = \begin{cases} z^2/|z| & \text{при } z \ne 0,\\ 0 & \text{при } z = 0,\end{cases}$$

является 1-накрывающим, где $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

Для $z \in \mathbb{C}$ обозначим через $\arg(z)$ множество всех аргументов z, через $\mathrm{Arg}(z)$ — главное значение аргумента, $\mathrm{Arg}(z) \in [-\pi, \pi)$. Покажем, что

$$\forall\, z_0, w \in \mathbb{C} \quad \exists\, z \in \mathbb{C}\colon \qquad w = f(z) \quad \text{и} \quad |z - z_0| \le |w - f(z_0)|. \tag{4}$$

Пусть $z_0, w \in \mathbb{C}$ и $z_0 \ne 0$, $w \ne 0$. Очевидно, что множество $\bigl(\arg(w) - \arg(f(z_0))\bigr) \cap [-\pi, \pi)$ содержит ровно один элемент. Обозначим его через θ. Возьмем

$$z = |w| \exp\bigl(i(\mathrm{Arg}(z_0) + \theta/2)\bigr).$$

Тогда $f(z) = w$, поскольку если $\psi \in \arg(f(z_0))$, то $\psi + \theta \in \arg(w)$.

Кроме того, учитывая, что $|z| = |f(z)| = |w|$, $|z_0| = |f(z_0)|$, применяя дважды теорему косинусов, имеем

$$|z - z_0| - |w - f(z_0)| = 2|w| \cdot |z_0| \left(\cos\theta - \cos\frac{\theta}{2} \right) \leq 0,$$

так как $\theta \in [-\pi, \pi)$. Следовательно, выполняется (4).

В случае, когда $z_0 \neq 0$, $w = 0$, точка $z = 0$, очевидно, удовлетворяет (4). Если же $z_0 = 0$, то любое решение z уравнения $f(z) = w$ удовлетворяет (4).

Таким образом, f является 1-накрывающим. Следовательно, и F 1-накрывает. Поэтому по теореме 2 имеем $a(F, 0) > 0$. Однако для этого отображения ответ на вопрос (q1) отрицательный, т.е. ни в какой окрестности нуля не существует непрерывного правого обратного к F. Это следует из леммы 1 и того, что $F(x) = F(-x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}^2$.

Зададимся следующим естественным вопросом. Пусть отображение F локально α-накрывает в окрестности точки x_0. Тогда, очевидно, в некоторой окрестности точки y_0 существует правое обратное к F отображение φ, которое непрерывно в точке y_0. Спрашивается, можно ли φ выбрать непрерывным в окрестности точки y_0? Приведенный выше пример 2 показывает, что, вообще говоря, это не так. Тем не менее если $Y = \mathbb{R}$, то ответ на поставленный вопрос является положительным.

Прежде чем сформулировать следующее утверждение, напомним еще одно определение (см. [1, Definition 1.51]). Отображение F называется *α-накрывающим относительно множеств $U \subset X$ и $V \subset Y$*, если

$$B_X(x, r) \subset U \quad \Rightarrow \quad B_Y(F(x), \alpha r) \cap V \subset F(B_X(x, r)).$$

Лемма 2. *Пусть $Y = \mathbb{R}$, а X — метрическое пространство с метрикой ρ_X такое, что любое замкнутое ограниченное подмножество X компактно. Пусть, кроме того, даны замкнутое множество $V \subset \mathbb{R}$, $y_0 \in V$ и число $R > 0$. Тогда если отображение $F\colon X \to Y$ непрерывно на $B(x_0, R)$ и является α-накрывающим относительно множеств $B_X(x_0, R)$ и V, то существует отображение $\varphi\colon V_\delta \to X$, удовлетворяющее условию Липшица с константой α^{-1}, такое, что*

$$F(\varphi(y)) \equiv y, \qquad \varphi(y_0) = x_0,$$

где $V_\delta = V \cap [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, $\delta = \alpha R$.

Следствие 1. *Положим $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$. Тогда если отображение $F\colon X \to Y$ непрерывно в некоторой окрестности точки x_0 и является локально α-накрывающим в окрестности x_0, то существуют число $\delta > 0$ и отображение $\varphi\colon [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \to X$, удовлетворяющее условию Липшица с константой α^{-1}, такие, что*

$$F(\varphi(y)) \equiv y, \qquad \varphi(y_0) = x_0.$$

Прежде чем доказать лемму 2, проведем следующие построения. Без потери общности далее будем считать, что $y_0 = 0$. Пусть даны числа $\delta > 0$, $L > 0$. Положим $V_\delta = V \cap [-\delta, \delta]$.

Зафиксируем произвольное натуральное n и разобьем отрезок $[-\delta, \delta]$ точками $2^{-n}\delta k$, $-2^n \leq k \leq 2^n$, на равные части. Положим $y_0^n = 0$. Рассмотрим множества $[2^{-n}\delta k, 2^{-n}\delta(k+1)] \cap V_\delta$, $-2^n \leq k \leq 2^n$. Для тех k, для которых эти множества непусты, возьмем их точные нижние грани y_k^n, занумеровав их так, что $y_k^n < y_{k+1}^n\ \forall\, k$. Очевидно, что этих точек не более чем $2 \cdot 2^n + 1$ и они образуют $2^{-n}\delta$-сеть множества V_δ. Обозначим через s_n количество отрицательных точек y_k^n, а через t_n количество положительных. Очевидно (это будет использовано в дальнейшем), что если $n_2 \geq n_1$, то $\{y_k^{n_2} : -s_{n_2} \leq k \leq t_{n_2}\} \subset \{y_k^{n_1} : -s_{n_1} \leq k \leq t_{n_1}\}$. Кроме того,

$$\forall\, y \in V_\delta \quad \exists\, k\colon \qquad y \in [y_k^n, y_k^n + 2^{-n}\delta).$$

Обозначим через M_n множество отображений $\varphi\colon V_\delta \to X$, постоянных на каждом из множеств $[y_k^n, y_{k+1}^n) \cap V_\delta$, $-s_n \le k \le t_n$, и таких, что

$$\rho_X(\varphi(y_k^n), \varphi(y_{k+1}^n)) \le L|y_k^n - y_{k+1}^n|.$$

Через M будем обозначать метрическое пространство всех ограниченных отображений $\psi\colon V_\delta \to \to X$ с метрикой

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{y\in V_\delta} \rho_X(\varphi(y), \psi(y)).$$

Предложение 1. *Пусть в M задана такая ограниченная последовательность $\{\varphi_n\} \subset \subset M$, что $\varphi_n \in M_n$ $\forall\, n$.*

1. *Тогда из $\{\varphi_n\}$ можно выделить подпоследовательность, которая в M сходится к некоторому отображению $\widetilde{\varphi} \in M$, удовлетворяющему условию Липшица с константой L.*

2. *Пусть задано непрерывное отображение $f\colon X \to \mathbb{R}$. Предположим, что $f(\varphi_n(y_k^n)) = y_k^n$ $\forall\, n, \forall\, k\colon -s_n \le k \le t_n$ и $\widetilde{\varphi}$ является предельной точкой последовательности $\{\varphi_n\}$. Тогда $f(\widetilde{\varphi}(y)) = y$ $\forall\, y \in V_\delta$.*

Доказательство. 1. Из определения M_n вытекает, что для произвольных натуральных n, N, отображения $\varphi \in M_n$ и отображения $\psi \in M$, постоянного на каждом из интервалов $[y_k^N, y_{k+1}^N) \cap V_\delta$, $-s_N \le k \le t_N$, имеет место

$$\rho_X\bigl(\varphi(y_k^N), \psi(y_k^N)\bigr) \le \gamma \quad \forall\, k\colon -s_N \le k \le t_N \quad \Rightarrow \quad \rho(\varphi, \psi) \le \gamma + 2^{-N} L\delta. \tag{5}$$

Далее, проводя рассуждения, обычно используемые при доказательстве теоремы Арцела (см., например, [6, гл. 2, §7.7, теорема 7]), покажем, что последовательность $\{\varphi_n\}$ вполне ограничена в M. Действительно, возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем в X конечную $\varepsilon/2$-сеть W множества $\bigcup_{y\in V_\delta} \{\varphi_n(y)\colon n = 1, 2, \dots\}$.

Возьмем натуральное N: $2^{-N}\delta L \le \varepsilon/2$. Рассмотрим множество D всех функций $\psi\colon V_\delta \to W$, постоянных на каждом из множеств $[y_k^N, y_{k+1}^N) \cap V_\delta$, $-s_N \le k \le t_N$. Очевидно, что множество D конечно (так как оно содержит не более чем $m^{2\cdot 2^N}$ элементов, где m — количество элементов множества W). Очевидно, что для любого отображения φ_n найдется $\psi \in D$ такое, что

$$\rho_X\bigl(\psi(y_k^N), \varphi_n(y_k^N)\bigr) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\, k\colon -s_N \le k \le t_N.$$

Далее, из (5) вытекает, что

$$\rho(\psi, \varphi_n) \le \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-N} L\delta \le \varepsilon.$$

Таким образом, множество D является конечной ε-сетью множества $\{\varphi_n\colon n = 1, 2, \dots\}$ в M. Поэтому последовательность $\{\varphi_n\}$ вполне ограничена и, значит, в M она имеет предельную точку $\widetilde{\varphi}$. Из определения пространства M_n несложно вытекает, что отображение $\widetilde{\varphi}$ удовлетворяет условию Липшица с константой L.

Справедливость утверждения 2 следует из того, что множество точек $\{y_k^n\colon n = 1, 2, \dots, -s_n \le k \le t_n\}$ всюду плотно в V_δ и $\varphi_n \rightrightarrows \widetilde{\varphi}$, $n \to \infty$. $\square$

Доказательство леммы 2. Положим $\delta = \alpha R$, $L = \alpha^{-1}$, $x_0 = x_0^n$ $\forall\, n$. Поскольку отображение $F\colon X \to Y$ является α-накрывающим относительно множеств $B_X(x_0, R)$ и V, то, как несложно видеть, для $y \in V$, $x_* \in B_X(x_0, R)$ если

$$\frac{1}{\alpha}|y - F(x_*)| + \rho_X(x_0, x_*) \le R,$$

то
$$\exists\, x \in B_X(x_0, R)\colon \qquad y = F(x) \quad \text{и} \quad \rho_X(x_*, x) \le \frac{1}{\alpha}|F(x_*) - y|.$$
Поэтому, так как отображение F является α-накрывающим относительно множеств $B_X(x_0^n, R)$ и V, имеем
$$\exists\, x_1^n \in X\colon \qquad F(x_1^n) = y_1^n \quad \text{и} \quad \rho_X(x_0^n, x_1^n) \le \frac{1}{\alpha}|y_0^n - y_1^n|,$$
поскольку
$$\frac{1}{\alpha}|y_1^n - y_0^n| + \rho_X(x_0^n, x_0^n) = \frac{1}{\alpha}|y_1^n| \le \frac{\delta}{\alpha} = R.$$
Аналогично
$$\exists\, x_2^n \in X\colon \qquad F(x_2^n) = y_2^n \quad \text{и} \quad \rho_X(x_1^n, x_2^n) \le \frac{1}{\alpha}|y_1^n - y_2^n|,$$
поскольку
$$\frac{1}{\alpha}|y_2^n - y_1^n| + \rho_X(x_1^n, x_0^n) \le \frac{1}{\alpha}\bigl(|y_2^n - y_1^n| + |y_1^n - y_0^n|\bigr) = \frac{1}{\alpha}|y_2^n| \le R.$$
Продолжая эти рассуждения, при любом k, $1 \le k \le t_n$, имеем
$$\frac{1}{\alpha}|y_k^n - y_{k-1}^n| + \rho_X(x_{k-1}^n, x_0^n) \le \frac{1}{\alpha}|y_k^n| \le \frac{\delta}{\alpha} = R$$
и поэтому
$$\exists\, x_k^n \in X\colon \qquad F(x_k^n) = y_k^n \quad \text{и} \quad \rho_X(x_{k-1}^n, x_k^n) \le \frac{1}{\alpha}|y_{k-1}^n - y_k^n|.$$
Аналогично для $k = -1, -2, \dots, -s_n$ построим точки $x_k \in X$:
$$F(x_k^n) = y_k^n \qquad \text{и} \qquad \rho_X(x_{k-1}^n, x_k^n) \le \frac{1}{\alpha}|y_{k-1}^n - y_k^n| \qquad \forall\, k\colon -s_n \le k \le t_n. \tag{6}$$

Определим отображение $\varphi_n\colon V_\delta \to X$ равенством
$$\varphi_n(y) = x_k^n \qquad \forall\, y \in [y_k^n, y_{k+1}^n) \cap V_\delta, \quad -s_n \le k \le t_n.$$
Очевидно, $\varphi_n \in M_n\ \forall\, n$ и последовательность $\{\varphi_n\}$ ограничена в M. Поэтому в силу утверждения 1 предложения 1 последовательность отображений $\{\varphi_n\}$ имеет предельную точку $\varphi\colon V_\delta \to X$, удовлетворяющую условию Липшица с константой L. В силу (6) из утверждения 2 предложения 1 следует, что $F(\varphi(y)) \equiv y$. А так как $\varphi_n(y_0) = x_0\ \forall\, n$, то и $\varphi(y_0) = x_0$. $\square$

Приведем еще один класс условий, дающих положительный ответ на вопросы (q1), (q2).

Теорема 3. *Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^k$, $n \ge k$ и отображение F удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности x_0. Если ранг любой матрицы $A \in \partial_{\mathrm{C}} F(x_0)$ равен k, то F является локально α-накрывающим в некоторой окрестности точки x_0.*

Если же, кроме того, $n = k$, то существуют $\delta > 0$, $\gamma > 0$ и удовлетворяющее условию Липшица отображение $\varphi\colon B_Y(y_0, \delta) \to X$ такие, что
$$F(\varphi(y)) \equiv y, \qquad \varphi(F(x)) = x \quad \forall\, x \in B(x_0, \gamma), \qquad \varphi(y_0) = x_0.$$

Здесь $\partial_{\mathrm{C}} F(x_0)$ обозначает производную Кларка отображения F в точке x_0 (см. [10, определение 2.6.1]). Это утверждение является следствием теоремы Кларка об обратной функции (см. [10, теорема 7.1.1]) и теоремы 2, так как в силу следствия 2.1.3 из [9] из предположений теоремы 3 вытекают предположения теоремы 2. Поэтому если $n = k$, то предположения теоремы 3 достаточны для того, чтобы ответы на оба вопроса (q1) и (q2) были положительны.

Отметим, однако, что в отличие от теоремы 2 теорема 3 дает только достаточные условия для того, чтобы отображение F было α-накрывающим, но не дает необходимых условий. Действительно, рассмотрим отображение $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x_1, x_2) \equiv |x_1| - |x_2|$. Очевидно, оно является 1-накрывающим, однако $0 \in \partial_{\mathrm{C}} F(x_0)$.

2. ТЕОРЕМЫ ОБ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ БЕЗ АПРИОРНЫХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ НОРМАЛЬНОСТИ

Во всех утверждениях предыдущего раздела достаточным условием существования правого обратного отображения в предположении гладкости отображения F было условие нормальности точки x_0, а без предположения гладкости F аналогичное ему условие регулярности Мордуховича. В предположении гладкости отображения F приведем теорему об обратной функции, которая справедлива без априорного предположения нормальности точки x_0 и была доказана в [12].

Пусть X, Y — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ соответственно. Пусть отображение $F\colon X \to Y$ дважды непрерывно дифференцируемо в окрестности точки x_0.

Определение 1 [11]. Пусть дан вектор $h \in X$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0)h = 0, \qquad -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)[h,h] \in \operatorname{im} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0). \tag{7}$$

Отображение F называется 2-*регулярным* в точке x_0 по направлению h, удовлетворяющему (7), если имеет место

$$\operatorname{im} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)\left[h, \ker \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)\right] = Y.$$

Через P обозначим оператор ортогонального проектирования пространства Y на ортогональное дополнение к подпространству $\operatorname{im} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)$.

Теорема 4. *Если отображение F 2-регулярно в точке x_0 по некоторому направлению $h \in X$, то существуют $\delta > 0$, $c > 0$ и непрерывное отображение $\varphi\colon B_Y(y_0,\delta) \to X$ такие, что $F(\varphi(y)) \equiv y$ и*

$$\|\varphi(y) - x_0\|_X \le c\big(\|y - y_0\|_Y + \|P(y_0 - y)\|_Y^{1/2}\big) \qquad \forall\, y \in B_Y(y_0,\delta). \tag{8}$$

Теорема 4 является непосредственным следствием теоремы о неявной функции, доказанной в [12]. Эта теорема, но без утверждения о непрерывности отображения φ была ранее получена в [11].

Приведем другую теорему о существовании правого обратного отображения, справедливую без априорного предположения нормальности точки x_0 и доказанную в [13].

Пусть $Y = \mathbb{R}^k$ и отображение $F\colon X \to Y$ дважды непрерывно дифференцируемо в окрестности точки x_0. Обозначим через $\mathcal{F}_2(x_0)$ конус, состоящий из таких $y^* \in Y^*$, что $y^* \ne 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0)^* y^* = 0$ и существует такое линейное подпространство $\Pi = \Pi(y^*)$ пространства X, что

$$\Pi \subset \ker \frac{\partial F}{\partial x}(x_0), \qquad \operatorname{codim} \Pi \le k, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle y^*, F(x)\rangle\bigg|_{x_0}[\xi,\xi] \ge 0 \quad \forall\, \xi \in \Pi.$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение, codim — коразмерность подпространства.

Теорема 5 [13]. *Предположим, что*

$$\exists\, h \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)\colon \qquad \left\langle y^*, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)[h,h] \right\rangle < 0 \quad \forall\, y^* \in \mathcal{F}_2(x_0). \tag{9}$$

Тогда существуют $\delta > 0$, $c > 0$ *и отображение* $\varphi\colon B_Y(y_0, \delta) \to X$ *такие, что* $F(\varphi(y)) \equiv y$ *и имеет место* (8).

Замечание. Если $\mathcal{F}_2(x_0) = \varnothing$, то считаем условие (9) выполненным автоматически.

Дадим ответы на вопросы (q1), (q2), когда точка x_0 анормальна. Как было показано выше, если выполнены предположения теоремы 4, то ответ на вопрос (q1) положителен и, кроме того, выполнена линейно-корневая оценка (8). Однако, как показывает следующий пример, предположений теоремы 4 недостаточно для того, чтобы ответ на вопрос (q2) был также положительным.

Пример 3. Рассмотрим квадратичное отображение $Q = (q_1, q_2, q_3)$, где q_i — квадратичные формы на $\mathbb{R}^4$, заданные равенствами

$$q_1(x) \equiv x_1^2 + x_2^2 - x_4^2, \qquad q_2(x) \equiv 2x_1x_2 + x_3^2, \qquad q_3(x) \equiv 2x_1x_2 + 2x_3x_4,$$
$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Положим $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Несложно проверить, что отображение Q является 2-регулярным в точке $x_0 = 0$ относительно $\mathbb{R}^4$ по любому направлению $h \neq 0$: $Q(h) = 0$, причем множество таких 2-регулярных направлений непусто (оно состоит из четырех прямых без нуля). Поэтому согласно теореме 4 ответ на вопрос (q1) является положительным.

Положим $e = (0, 0, 1, 0)$ и рассмотрим точки $x_t = te$, $y_t = Q(x_t)$, $t \in \mathbb{R}$. Покажем, что при любом $t \neq 0$ не существует правого обратного к Q непрерывного в точке y_t отображения φ_t такого, что $\varphi_t(y_t) = x_t$. Действительно, выберем произвольное t и рассмотрим задачу

$$q_1(x) \to \min, \qquad q_2(x) = q_2(x_t), \qquad q_3(x) = q_3(x_t).$$

Непосредственно проверяется, что для каждого $t \neq 0$ в точке x_t выполнены принцип Лагранжа и достаточное условие локального минимума второго порядка. Следовательно, точка x_t доставляет локальный минимум в рассматриваемой задаче. Поэтому ни в какой окрестности точки y_t не существует правого обратного к Q непрерывного в точке y_t отображения φ_t такого, что $\varphi_t(y_t) = x_t$. Таким образом, в данном примере в точке x_0 выполнены предположения теоремы 4, однако ответ на вопрос (q2) отрицательный.

Приведенное в примере 3 квадратичное отображение Q 2-регулярно в нуле по любому направлению $h \neq 0$: $Q(h) = 0$. В то же время, как доказано выше, существует такая последовательность точек $\{x_n\}$, что $x_n \to 0$ и отображение Q не является 2-регулярным в каждой из точек x_n ни по какому направлению. Таким образом, для гладкого отображения множество точек, в которых оно является 2-регулярным по любому направлению, может не быть открытым. Это важнейшее отличие условия 2-регулярности по любому направлению в точке от условия нормальности точки, так как множество нормальных точек гладкого отображения открыто.

Отметим, что условие 2-регулярности гладкого отображения в точке по любому направлению встречается во многих вопросах. Например в достаточных условиях второго порядка для анормальных экстремальных задач с ограничениями (см. [14, гл. 1, § 1.14] и [15]), при исследовании множества уровня гладкого отображения в окрестности анормальной точки [16] и т.д.

Приведем теперь пример целого класса гладких отображений, действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, каждое из которых сюръективно, однако ни одно из них не имеет непрерывного правого обратного отображения.

Пример 4. Любое сюръективное квадратичное отображение $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ при $n > 1$ не имеет правого обратного отображения, которое непрерывно в окрестности нуля.

Это утверждение вытекает из леммы 1, поскольку $Q(x) = Q(-x)\ \forall\, x$ для любого квадратичного отображения и, значит, оно не является инъективным ни в какой окрестности нуля.

Чтобы показать содержательность примера 4, надо еще доказать, что для любого $n > 1$ существует сюръективное квадратичное отображение $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Сделаем это.

Действительно, для $n = 2$ таким отображением, очевидно, является отображение

$$Q^2 = (q_1, q_2), \qquad q_1(x) = x_1^2 - x_2^2, \qquad q_2(x) = 2x_1x_2, \qquad x = (x_1, x_2).$$

Для $n = 3$ таким отображением является отображение

$$Q^3 = (q_1, q_2, q_3), \qquad q_1(x) = 2x_1x_3, \qquad q_2(x) = 2x_2x_3, \qquad q_3(x) = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2,$$
$$x = (x_1, x_2, x_3).$$

При этом обратным к Q^3 является отображение, которое каждому вектору $y \in \mathbb{R}^3$ со сферическими координатами (r, φ, θ) ставит в соответствие вектор $x \in \mathbb{R}^3$ со сферическими координатами $(\sqrt{r}, \varphi, \theta/2)$.

Чтобы построить сюръективное квадратичное отображение $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ при $n > 3$, рассмотрим два случая. Пусть вначале n четно и $n = 2k$. Тогда $\mathbb{R}^n$ надо представить в виде декартова произведения k двумерных подпространств $\mathbb{R}^2$, а отображение Q^n определить следующим образом:

$$Q^n(x) = (\underbrace{Q^2(\xi_1), \dots, Q^2(\xi_k)}_{k \text{ раз}}), \qquad x = (\xi_1, \dots, \xi_k), \quad \xi_i \in \mathbb{R}^2, \quad i = \overline{1, k}.$$

Пусть теперь n нечетно и $n = 2k + 1$. Тогда представим $\mathbb{R}^n$ в виде декартова произведения $k-1$ двумерных подпространств $\mathbb{R}^2$ и одного трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$, а отображение Q^n определим следующим образом:

$$Q^n(x) = (\underbrace{Q^2(\xi_1), \dots, Q^2(\xi_{k-1})}_{k-1 \text{ раз}}, Q^3(\xi_k)),$$

где $x = (\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_k)$, $\xi_i \in \mathbb{R}^2$, $i = \overline{1, k-1}$, $\xi_k \in \mathbb{R}^3$. Очевидно, что так определенное отображение Q^n сюръективно. И более того,

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^n \quad \exists x \in \mathbb{R}^n\colon \qquad Q^n(x) = y \quad \text{и} \quad \|x\|_X \le \sqrt{k}\sqrt{\|y\|_Y}$$

(пространства X и Y имеют стандартную евклидову норму).

Таким образом, при любом $n > 1$ существует сюръективное квадратичное отображение $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

В заключение рассмотрим задачу более общую, чем изученная выше. А именно пусть задан выпуклый замкнутый конус $K \subset X$, $x_0 \in K$ и $y_0 = F(x_0)$.

Зададимся вопросом: когда в некоторой окрестности точки y_0 существует правое обратное отображение φ, действующее из этой окрестности y_0 в конус K и непрерывное в точке y_0? Иными словами, когда

$$\exists\, \delta > 0,\ \varphi\colon B_Y(y_0, \delta) \to K\colon \qquad F(\varphi(y)) \equiv y, \quad \varphi(y_0) = x_0 \quad \text{и} \quad \varphi(y) \to x_0 \quad \text{при} \quad y \to y_0?$$

Определим конусы $\mathcal{K}$ и C по формулам

$$\mathcal{K} = K + \operatorname{span}\{x_0\}, \qquad C = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)\mathcal{K},$$

где $\operatorname{span} A$ — линейная оболочка множества A.

Определение 2 [12]**.** Пусть дан вектор $h \in X$:

$$h \in \mathcal{K}, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)h = 0, \qquad -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)[h,h] \in C. \tag{10}$$

Отображение F называется 2-регулярным в точке x_0 относительно конуса K по направлению h, удовлетворяющему (10), если имеет место

$$C + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)\left[h, \mathcal{K} \cap \ker \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)\right] = Y.$$

Теорема 6. *Если отображение F 2-регулярно в точке x_0 относительно конуса K по некоторому направлению h, то существуют $\delta > 0$, $c > 0$ и непрерывное отображение $\varphi\colon B_Y(y_0,\delta) \to K$ такие, что $F(\varphi(y)) \equiv y$ и выполняется* (8).

Теорема 6 обобщает теорему 4 на случай, когда $K \neq X$, и является непосредственным следствием теоремы о неявной функции, доказанной в [12].

Дадим ответы на вопросы (q1), (q2), когда точка x_0 анормальна. Если выполнены предположения теоремы 6, то ответ на вопрос (q1) положителен и, кроме того, выполнена линейно-корневая оценка (8). Однако, как показывает пример 3, предположений теоремы 6 (так же как и предположений теоремы 4) недостаточно для того, чтобы ответ на вопрос (q2) был положительным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mordukhovich B.S.* Variational analysis and generalized differentiation. Berlin: Springer, 2005. V. 1.
2. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Point Theory and Appl. 2009. V. 5, N 1. P. 105–127.
3. *Тихомиров В.М.* Теорема Люстерника о касательном пространстве и некоторые ее модификации // Оптимальное управление: Математические вопросы управления производством. М.: Изд-во МГУ, 1977. Вып. 7. С. 22–30.
4. *Klatte D., Kummer B.* Nonsmooth equations in optimization. Regularity, calculus, methods and applications. Dordrecht: Kluwer, 2002.
5. *Facchinei F., Pang J.-S.* Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. New York: Springer, 2003.
6. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
7. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
8. *Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Принцип максимума Понтрягина. М.: Факториал, 2006.
9. *Мордухович Б.Ш.* Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988.
10. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
11. *Аваков Е.Р.* Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения // Мат. заметки. 1990. Т. 47, № 5. С. 3–13.
12. *Арутюнов А.В.* Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности // ЖВМиМФ. 2006. Т. 46, № 2. С. 205–215.
13. *Арутюнов А.В.* Теорема о неявной функции как реализация принципа Лагранжа. Анормальные точки // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 1. С. 3–26.
14. *Арутюнов А.В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
15. *Арутюнов А.В.* Условия второго порядка в экстремальных задачах с конечномерным образом. 2-нормальные отображения // Изв. РАН. Сер. мат. 1996. Т. 60, № 1. С. 37–62.
16. *Аваков Е.Р., Аграчев А.А., Арутюнов А.В.* Множество уровня гладкого отображения в окрестности особой точки и нули квадратичного отображения // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 8. С. 1091–1104.