В. Н. Масленникова, А. В. Глушко, Теоремы о локализации тауберового типа и скорость затухания решения системы гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости, *Тр. МИАН СССР*, 1988, том 181, 156–186

Труды Математического института АН СССР
1988, том 181

УДК 517.9

В. Н. МАСЛЕННИКОВА, А. В. ГЛУШКО

ТЕОРЕМЫ О ЛОКАЛИЗАЦИИ ТАУБЕРОВОГО ТИПА И СКОРОСТЬ ЗАТУХАНИЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

ВВЕДЕНИЕ

В статье изучены асимптотические свойства при большом времени тензора Грина и решения начально-краевой задачи для системы

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - [\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}] - \nu \triangle \mathbf{v} + \nabla p - \nu\beta\nabla \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad (1)$$
$$\alpha^2 \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где $\mathbf{v}(x, t) = \{v_1, v_2, v_3\}$ — поле скоростей, $p(x, t)$ — давление, $x \in R_3^+ = \{x \colon x' = (x_1, x_2) \in R_2,\ x_3 > 0\}$, $t > 0$; ν — динамический коэффициент вязкости; $\beta = (\lambda + \nu)\nu^{-1}$, где λ — второй коэффициент вязкости; α^2 — коэффициент сжимаемости. Система (1) характеризуется наличием векторного произведения (кориолисового члена) $[\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}]$, где $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$.

Впервые математическое исследование решений системы (1) без учета вязкости и сжимаемости было проведено С. Л. Соболевым [1, 2]. Дальнейшее изучение различных свойств решений, в основном при $t \to \infty$, как системы С. Л. Соболева ($\alpha = 0$, $\nu = 0$), так и систем вида (1) при наличии вязкости или сжимаемости было проведено в работах [3—14].

Задача Коши для системы (1) с начальными условиями

$$\mathbf{v}(x, t)\mid_{t=0} = \mathbf{v}^0(x), \quad p(x, t)\mid_{t=0} = p^0(x) \qquad (2)$$

была исследована в работах [15—17].

Важность изучения свойств решений систем вида (1) с наличием кориолисового члена обусловлена их многочисленными применениями, в частности, при исследовании динамики атмосферы и океана [18—20]. Кориолисов член в (1) обуславливает вихревой характер поля скоростей и колеблемость решения (см. [5]).

Настоящая работа посвящена асимптотическому разложению при большом времени (по малому параметру t^{-1}) решения системы (1) в полупространстве $x \in R_3^+$ с граничными условиями

$$v_j\mid_{x_3=0} = v_j^b(x', t), \ \ j = 1, 2; \quad p\mid_{x_3=0} = p^b(x', t); \quad x' \in R_2;\ t > 0 \qquad (3)$$

и с начальными условиями (2).

Трудности, возникающие при исследовании поставленной задачи, состоят в следующем. Естественное использование преобразований Фурье и

Лапласа для построения решения приводит к исследованию свойств λ — корней характеристического уравнения

$$\mathcal{P}\,(is_1,\ is_2,\ \lambda,\ \gamma) = 0; \quad s' = (s_1,\ s_2) \in R_2, \quad \gamma \in C \tag{4}$$

системы (1), которые не вычисляются в приемлемом явном виде, $\mathrm{ord}_\lambda \mathcal{P} = 6$. Здесь $s' = (s_1, s_2)$, λ, γ — двойственные переменные, соответственно, $x' = (x_1, x_2), x_3, t$. После исследования свойств корней уравнения (4) удается доказать лемму о локализации, которая показывает, что порядок убывания при $t \to \infty$ элементов тензора Грина задачи (1)—(3) определяется лишь поведением при $s' = (s_1, s_2) \to 0$ корней $\lambda_j\,(s',\ \gamma)$, с $\operatorname{Re} \lambda_j\,(s',\ \gamma) < 0$, $j = 1, 2, 3$ характеристического уравнения (4). Асимптотика при $t \to \infty$ тензора Грина задачи (1)—(3) определяется поведением при $s' \to 0$ этих корней вблизи контуров на комплексной γ-плоскости, задаваемых корнями характеристического уравнения задачи Коши (1)—(2) ($\mathrm{ord}_\gamma \mathcal{P}\,(is_1,\ is_2,\ is_3,\ \gamma) = 4$), на которых $\lambda_j\,(s', \gamma)$ теряют голоморфность. Таким образом, поведение при $t \to \infty$ тензора Грина задачи (1)—(3) определяется асимптотическим представлением при малых s' корней $\lambda_j\,(s',\ \gamma)$, $j = 1,\ 2,\ 3$ уравнения (4) вблизи также асимптотически заданных контуров $\gamma_k\,(s',\ s_3)$ (s_3 — параметр кривой контура), $k = 1, 2;\ 3,\ 4$, определяемых по характеристическому многочлену задачи Коши.

В последнее время появился ряд важных работ (см. [21—24] и в них другие ссылки) по тауберовым теоремам и квазиасимптотике решений задачи Коши для пассивных систем. В отличие от этих работ, мы изучаем начально-краевую задачу (1)—(3), что требует другого подхода к изучению асимптотики решения при $t \to \infty$. Кроме того, и при изучении задачи Коши (1), (2) (см. [15—17]) наряду с порядком асимптотики решения нашим методом мы получаем асимптотические разложения этого решения, в которых выявляются осцилляционные и другие качественные свойства решений.

В работе [16] доказана теорема, посвященная асимптотике при $t \to \infty$ решения задачи Коши для системы (1), результаты которой нам потребуются в дальнейшем. В сокращенной формулировке эта теорема имеет следующий вид.

Теорема 1. *Пусть для начальных функций* $\mathbf{v}^0\,(x)$, $p^0\,(x)$ *выполняется* условие А. *Вектор-функция* $V^0\,(x) = \{\mathbf{v}^0\,(x),\ p^0\,(x)\}$ *интегрируема в* R_3 *и при* $\varkappa > 3/2$ *существует интеграл*

$$\int\limits_{R_3} \{|\,(1 - \Delta_x)^{\varkappa} \mathrm{V}^0\,(x)\,| + (1 + |\,x\,|)\,\mathrm{V}^0\,(x)\,|\}\,dx < \infty.$$

Тогда справедливо асимптотическое представление при $t \to \infty$ *для решения* $W^\Gamma\,(x,\ t) = \{\mathbf{v}^\Gamma,\ p^\Gamma\}$ *задачи* (1)—(2)

$$W^\Gamma\,(x,\ t) = \{t^{-3/2} 2^{-3/2} (F\,(A,\ B) \cos \omega t + F\,(B,\ -A) \sin \omega t) + t^{-7/4} F_3 + t^{-5/4} F_4\} \times$$
$$\times \int\limits_{R_3} V^0\,(y)\,dy + \int\limits_{R_3} F'\,(x - y,\ t)\,\mathrm{V}^0\,(y)\,dy +$$
$$+ \exp\left(-t\,(2\alpha^2\nu\,(1 + \beta)^{-1}\right) \int\limits_{R_3} F''\left(x - y,\ t,\ \frac{\partial}{\partial y}\right) \mathrm{V}^0\,(y)\,dy,$$

где F, F_3, F_4 — *матрицы с элементами*: $F\,(A,\ B) = \{A\ (\delta_{1,j}\delta_{1,i} + \delta_{2,j}\delta_{2,i}) - B\ (\delta_{1,i}\delta_{2,j} + \delta_{2,i}\delta_{1,j})\}$; $F_3 = \{a_3\delta_{3,i}\delta_{3,j}\}$, $F_4 = \{a_4\delta_{4,i}\delta_{4,j}\}$; $1 \leqslant i,\ j \leqslant 4$; $\delta_{i,j}$ — *символ Кронекера*; a_3, a_4, A, B — *отличные от нуля числа, явно вы-*

писанные в [16] *и определяемые по коэффициентам* $\alpha, \nu, \beta, \omega$. *Элементы матрицы* $F'(x, t) = \{f'_{k,m}(x, t)\}$, $1 \leqslant k, m \leqslant 4$ *непрерывны в* $R_3 \times [0, \infty)$ *по* (x, t) *и*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f'_{k,m}(x, t)}{1+|x|} t^{3/2} = 0; \quad 1 \leqslant k, m \leqslant 2; \ \lim_{t\to\infty} \frac{f'_{3,3}(x, t)}{1+|x|} t^{7/4} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{f'_{4,4}(x, t)}{1+|x|} t^{5/4} = 0; \ |f'_{k,m}(x, t)| \leqslant c_{k,m} t^{-7/4}(1+|x|), (k, m) = (1, 4),$$

$(2, 4)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$; $|f'_{k,m}(x, t)| \leqslant c_{k,m} t^{-2}(1+|x|)$; $(k, m) = (1, 3)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$

равномерно по всем $x \in R_3$. *Элементы* $F''\left(x, t, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \{f^0_{k,m}(x, t)(1-\Delta_x)^2\}$, $1 \leqslant k, m \leqslant 4$; $f^0_{k,m}(x, t)$ — *непрерывны и равномерно по* $t \in [0, \infty)$ *и* $x \in R_3$ *ограничены.*

При помощи преобразований Лапласа $\mathscr{L}_{t\to\gamma}$ и Фурье $\mathscr{F}_{x'\to s'}$ задача (1)—(3) может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A\left(is_1, is_2, \frac{\partial}{\partial x_3}, \gamma\right)\begin{bmatrix}\tilde{v}(s', x_3, \gamma)\\ \tilde{p}(s', x_3, \gamma)\end{bmatrix} = 0, \ 0 < x_3 < \infty \tag{5}$$

при условиях

$$\tilde{v}_j|_{x_3=0} = \tilde{v}^B_j, \ j = 1, 2; \ \tilde{p}|_{x_3=0} = \tilde{p}^B, \tag{6}$$

где использованы обозначения $\tilde{v} = \mathscr{F}_{x'\to s'}\mathscr{L}_{t\to\gamma}[\mathrm{v}]$; $v^B_j = v^b_j - v^\Gamma_j|_{x_3=0}$; $j = 1, 2$; $p^B = p^b - p^\Gamma|_{x_3=0}$; $\{\mathrm{v}^\Gamma, p^\Gamma\}$ — решение задачи (1)—(2) при начальных функциях $lv^0(x)$, $lp^0(x)$ (l — оператор продолжения с R_3^+ на R_3); $A\left(\mathscr{D}_x, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ дифференциальная матрица в левой части (1). Нас интересуют те решения системы (5), которые стремятся к нулю при $x_3 \to +\infty$, поэтому выделим те корни характеристического уравнения (4), для которых $\operatorname{Re}\lambda < 0$. В разделе 1 доказывается, что при всех $s' \in R_2$, $|s'| \neq 0$ и γ: $\operatorname{Re}\gamma = 0$ имеется ровно три различных корня этого уравнения $\lambda_l(s', \gamma)$, $l = 1, 2, 3$, для которых $\operatorname{Re}\lambda_l < 0$. Поэтому решение задачи (5)—(6) может быть записано в виде

$$\mathrm{W}(x, t) = \begin{bmatrix}\mathrm{v}(x, t)\\ p(x, t)\end{bmatrix} = \mathscr{F}^{-1}_{s'\to x'}\mathscr{L}^{-1}_{\gamma\to t}\left[\sum_{l=1}^{3} c_l(s', \gamma) X_l(s', \gamma) e^{\lambda_l x_3}\right], \tag{7}$$

где $X_l \neq 0$ — решение системы $A(is', \lambda_l, \gamma) X_l = 0$; $c_l(s', \gamma)$ определяется с помощью условий (6). Таким образом, после перегруппировки членов получаем $W(x, t) = G(x', x_3, t) * \mathrm{w}^B(x', t)$, где $\mathrm{w}^B = \{v^B_1, v^B_2, p^B\}$; $G = \{G_{j,m}\}$, $j = 1, 2, 3, 4$; $m = 1, 2, 3$;

$$G_{j,m} = \sum_{l=1}^{3} G_{j,m,l}; \ G_{j,m,l} = \mathscr{F}^{-1}_{s'\to x'}\mathscr{L}^{-1}_{\gamma\to t}[\mathscr{K}_{j,m,l}(s', x_3, \gamma)], \tag{8}$$

функции $\mathscr{K}_{j,m,l}$ находятся из (7) и условий (6). В разделах 1, 2 изучаются свойства корней уравнения (4) при дополнительном упрощающем выкладки предположении $\alpha^4\nu^2\omega^2 \geqslant \sigma_0 = \frac{1}{54}(\sqrt{1801} - 37)$; $\beta = 0$. Отметим, что $\beta = 0$ лишь для сокращения текста, результаты, полученные в данной работе, могут быть распространены на случай $\beta > 0$. В разделах 3, 4 устанавливаются асимптотические оценки при $t \to \infty$ функций $G_{j,m,l}(x', x_3, t)$, входящих в элементы тензора Грина $G(x', x_3, t)$, а именно, доказывается

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\beta = 0$ *и* $\alpha^4\nu^2\omega^2 \geqslant \sigma_0$. *Тогда при любых* $x' \in R_2$, $x_3 > 0$ *и при* $t \to \infty$ *справедливы оценки*

$$|G_{j,m,l}(x, t)| \leqslant c(1 + |x'| + x_3^2)(1 + x_3^{-4}\bar{\delta}_{3,l})\, t^{-2} + c(1 + x_3^{-9})\, e^{-\varepsilon_1 t},$$
$$j = 1, 2, 3, 4;\ [m = 1, 2, 3;\ l = 1, 2 \text{ или } m = 1, 2;\ l = 3];$$
$$|G_{j,3,3}(x, t)| \leqslant c_\varepsilon [(1 + |x'| + x_3^2)\, t^{-2} + t^{-2+\varepsilon}],\quad j = 1, 2, 4;$$
$$G_{3,3,3}(x, t) = (1 + O(t^{-1/4+\varepsilon}))\, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{\alpha^3\omega}\,(8\pi^2 t)^{-1}(\nu t)^{-3/4} +$$
$$+ (1 + x_3^{-9})\, O(e^{-\varepsilon_1 t}),$$

где константы $c > 0$ *и* $c_\varepsilon > 0$ *не зависят от* (x, t), ε — *сколь угодно малое положительное число,* $\varepsilon_1 > 0$; $\bar{\delta}_{3,l} = 0$, $l = 3$; $\bar{\delta}_{3,l} = 1$; $l = 1, 2$.

Асимптотика $G_{3,3,3}(x, t)$ *в теореме 2 является точной, причем оценки* $O(t^{-1/4+\varepsilon})$, $O(e^{-\varepsilon_1 t})$ *при* $t \to \infty$ *равномерны по* $x' \in R_2$; $x_3 \geqslant 0$.

Пусть выполнено

У с л о в и е A'. *Вектор-функция* $V^0(x) = \{\mathrm{v}^0(x),\ p^0(x)\} \in L_1(R_3^+)$ *имеет в* R_3^+ *обобщенные (по С. Л. Соболеву) производные до четвертого порядка* $\mathcal{D}^k V^0$, *причем для всех* $|k| \leqslant 3$ $\mathcal{D}^k V^0$ *непрерывны при* $x_3 \geqslant 0$ *и выполняются условия*

$$\left.\frac{\partial^k v_j^0}{\partial x_3^k}\right|_{x_3=0} = 0\quad (k, j) = (0,1),\ (0,2),\ (0,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (1,3),\ (3,3);$$

$$p^0|_{x_3=0} = 0;\quad \left.\frac{\partial^2 p^0}{\partial x_3^2}\right|_{x_3=0} = 0;$$

$$\int_{R_3^+} \{|(1 - \Delta_x)^2 \mathrm{V}^0(x)| + (1 + |x|)\,|\mathrm{V}^0(x)|\}\, dx < \infty.$$

Введем функцию $lV^0(x)$, заданную на всех $x \in R_3$ по правилу $lV^0(x) = V^0(x)$ при $x_3 > 0$; $lv_j(x', x_3) = -v_j(x', -x_3)$, $j = 1, 2$; $lv_3(x', x_3) = v_3(x', -x_3)$; $lp(x', x_3) = -p(x', -x_3)$, $x_3 < 0$, при всех $x' \in R_2$. Если $V^0(x)$ удовлетворяет условию A', то функция $lV^0(x)$ удовлетворяет условию A ($\varkappa = 2$). Построенное по начальным функциям lV^0 решение задачи Коши $\{\mathrm{v}^\Gamma, p^\Gamma\}$ для системы (1) будет удовлетворять условию

$$v_j^\Gamma|_{x_3=0} = 0;\ j = 1, 2;\ p^\Gamma|_{x_3=0} = 0. \tag{9}$$

Выполнение свойства (9) позволяет доказать следующую теорему (см. раздел 5).

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнено условие* A' *и граничные функции* v_j^b, $j = 1, 2$; p^b *в* (3) *равны нулю. Тогда для решения* $\mathrm{W}(x, t) = \{\mathrm{v}, p\}$ *задачи* (1), (2), (3) *справедливо асимптотическое разложение при* $t \to \infty$

$$\mathrm{W}(x, t) = t^{-\frac{7}{4}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a_3 \\ 0 \end{bmatrix} \int_{R_3^+} v_3^0(x)\, dx + \int_{R_3} F'(x - y, t)\, l\mathrm{V}^0(y)\, dy +$$
$$+ \exp(-t\alpha^{-2}\nu^{-1}(1 + \beta)^{-1}) \int_{R_3} F''\left(x - y, t, \frac{\partial}{\partial y}\right) l\mathrm{V}^0(y)\, dy,$$

где число $a_3 > 0$ *и матрицы* F', F'' (*при* $\varkappa = 2$) *определены в теореме* 1.

Далее в разделе 6 на основании теоремы 2 строится асимптотика решения задача (1), (2), (3) при $\mathrm{V}^0(x) \equiv 0$ и граничных функциях $\mathrm{w}^B = \{v_1^B, v_2^B, p^B\}$, удовлетворяющих следующему условию

У с л о в и е B. *Вектор-функция* w^B *имеет носитель, заключенный в полосе* $0 \leqslant t \leqslant N$, $x' \in R_2$ *и существует интеграл*

$$\| \mathrm{w}^B \|_{1,1} = \int\limits_{R_3^+} (1 + |x|) \, |\mathrm{w}^B (x', t)| \, dx' \, dt < \infty.$$

Т е о р е м а 4. *Пусть* $\beta = 0$ *и* $\alpha^4 \nu^2 \omega^2 \geqslant \sigma_0$; $V^0(x) \equiv 0$. *Тогда для решения* $\mathrm{V}(x, t)$ *задачи* (1), (2), (3) *при* $x' \in R_2$, $x_3 > 0$ *и при* $t \to \infty$ *справедливо асимптотическое представление*

$$\mathrm{V}(x, t) = I_3 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{\alpha^3\omega}}{8\pi^2 t (\nu t)^{3/4}} \int\limits_{R_3^+} p^B (y, \tau) \, dy \, d\tau + Q(x, t),$$

где $I_3 = (0, 0, 1, 0)^T$, $Q(x, t) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, *причем*

$$|q_j(x, t)| \leqslant ct^{-2} (1 + |x'| + x_3^2) \| \mathrm{w}^B \|_{1,1} + c_\varepsilon t^{-2+\varepsilon} \| p^B \|_{1,1} + $$
$$+ (1 + x_3^{-9}) e^{-\varepsilon_1 t} (\| \mathrm{w}^B \|_{1,1}) + \| p^B \|_{1,1}); \ \varepsilon_1 > 0,$$

где постоянные $c > 0$ *и* $c_\varepsilon > 0$ *не зависят от* (x, t), ε — *произвольно малое положительное число*; T — *знак транспонирования*.

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ R_3^+

Пусть выполнено условие A'. Тогда, как показано в введении, заменив искомые функции v, p на $\mathrm{v} - \mathrm{v}^\Gamma$, $p - p^\Gamma$, где v^Γ и p^Γ — решение задачи Коши для системы (1) с начальными функциями $l\mathrm{V}^0$, мы сведем задачу (1)—(3) к задаче с однородными начальными условиями

$$\mathrm{v}|_{t=0} = 0, \quad p|_{t=0} = 0 \quad (x \in R_3^+) \tag{1.1}$$

и с краевыми условиями (6). Здесь мы использовали условие (9).

З а м е ч а н и е 1.1. *Если граничные условия* (3) *заменить на*

$$v_j|_{x_3=0} = v_j^b(x', t), \quad j = 1, 2; \quad \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = w(x', t), \tag{1.2}$$

то задача (1), (2), (1, 2) *может быть сведена к задаче* (1)—(3). Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что из последнего уравнения системы (1) находится

$$p(x, t)|_{x_3=0} = p^0(x)|_{x_3=0} + \alpha^{-2} \int\limits_0^t \left(\frac{\partial v^b}{\partial x_1}(x', \tau) + \frac{\partial \mathrm{v}^b}{\partial x_2}(x', \tau) + w(x', \tau) \right) d\tau.$$

Іосле преобразования Фурье $\mathscr{F}_{x' \to s'}$ и преобразования Лапласа $\mathscr{L}_{t \to \gamma}$ задача 1), (1.1), (6) переходит в граничную задачу (5)—(6).

К условиям (6) следует добавить естественное условие

$$\lim_{x_3 \to +\infty} \{\tilde{\mathrm{v}}(s', x_3, \gamma), p(s', x_3, \gamma)\} = 0. \tag{1.3}$$

Характеристическое уравнение системы (5) имеет вид

$$P(s', \lambda, \gamma) = \det A(is_1, is_2, \lambda, \gamma) = 0. \tag{1.4}$$

ри $\beta = 0$ уравнение (1.4) примет вид

$$(\alpha^2\gamma + \nu^{-1})(\gamma + \nu |s'|^2 - \nu\lambda^2)^3 + (-\gamma\nu^{-1})(\gamma + \nu |s'|^2 - \nu\lambda^2)^2 +$$
$$+ \omega^2 (\alpha^2\gamma + \nu^{-1})(\gamma + \nu |s'|^2 - \nu\lambda^2) - \omega^2 (\gamma\nu^{-1} + |s'|^2) = 0. \tag{1.5}$$

Наряду с уравнением (1.4) будем рассматривать уравнение $P(s', y, \gamma) = 0$, которое получается из (1.4) после замены переменной λ на переменную y по формуле

$$y = \nu \mid s' \mid^2 + \gamma - \nu\lambda^2, \tag{1.6}$$

а также уравнение $P(s', \tau, \gamma) = 0$, получающееся из (1.4) после замены $\tau = \lambda^2$. Нам будет удобно наряду с этими уравнениями обозначить отдельно их в случае $\beta = 0$:

$$(\alpha^2\gamma + \nu^{-1})\, y^3 + (-\gamma\nu^{-1})\, y^2 + \omega^2 (\alpha^2\gamma + \nu^{-1}) y - \omega^2(\gamma + \nu \mid s' \mid^2) = 0; \tag{1.7}$$

$$(\alpha^2\gamma + \nu^{-1})(\gamma + \nu \mid s' \mid^2 - \nu\tau)^3 + (-\gamma\nu^{-1})(\gamma + \nu \mid s' \mid^2 - \nu\tau)^2 + \omega^2 (\alpha^2\gamma + \nu^{-1})(\gamma + \nu \mid s' \mid^2 - \nu\tau) - \omega^2 (\gamma\nu^{-1} + \mid s' \mid^2) = 0. \tag{1.8}$$

Если в уравнении (1.4) положить $\lambda = is_3$, $s_3 \in R_1$, то данное равенство перейдет в характеристическое уравнение задачи Коши (1)—(2) ($x \in R_3$).

В работе [16] была доказана

Лемма 1.0 *Для любого $\delta_0 > 0$ найдется такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta_0) > 0$, что при всех $\mid s \mid \geqslant \delta_0$ для любого корня $\gamma(s)$ характеристического уравнения задачи Коши* (1)—(2) *справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re} \gamma(s) \leqslant -\varepsilon_0 \quad (\mid s \mid \geqslant \delta_0).$$

Здесь $s = (s_1, s_2, s_3)$ — переменная, двойственная пространственной переменной $x \in R_3$.

Справедлива следующая лемма, доказательство которой вытекает из леммы 1.0.

Лемма 1.1. *Выберем $\delta_1 \geqslant 0$, $\delta_2 \geqslant 0$ так, чтобы $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} > 0$. Предположим, что на множестве E переменных s', γ*

$$E = \{s', \gamma\colon \mid s' \mid \geqslant \delta;\ -\varepsilon_0(\delta) < \operatorname{Re} \gamma \leqslant 0\}, \tag{1.9}$$

где $\varepsilon_0(\delta)$ определено в лемме 1.0, *существует $\lambda_0 = \lambda_0(s', \gamma)$— корень (непрерывная ветвь) уравнения* (1.4), *для которого $\mid \lambda_0(s', \gamma) \mid \geqslant \delta_2$ при всех (s', γ) из множества E. Если при этом в некоторой точке s_0', γ_0 множества* (1.9) $\operatorname{Re} \lambda_0(s_0', \gamma_0) > 0$ ($\operatorname{Re} \lambda_0(s_0', \gamma_0) < 0$), *то и на всем множестве E*: $\operatorname{Re} \lambda_0(s', \gamma) > 0$ ($\operatorname{Re} \lambda_0(s', \gamma) < 0$).

Следствие 1.1. *Пусть $\mid s' \mid \geqslant \delta > 0$. Тогда ровно три (с учетом кратности) непрерывных ветви λ-корней уравнения* (1.4) $\lambda_j = \lambda_j(\delta', \gamma)$, $j = 1, 2, 3$ *при всех (s', γ) из множества E обладают свойством* $\operatorname{Re} \lambda_j(s', \gamma) < 0$, $j = 1, 2, 3$.

Действительно, при всех (s', γ) из множества E корни уравнения $P(s', \tau, \gamma) = 0$ не могут принадлежать лучу $-\infty < \tau \leqslant 0$. В противном случае после замены $\tau = -s_3^2$ ($s_3 \in R_1$) мы получили бы противоречие с утверждением леммы 1.0. Следовательно, для любого корня τ_j уравнения $P(s', \tau, \gamma) = 0$ при (s', γ) из множества E выполняется условие $\mid \arg \tau_j \mid < \pi$. Положим далее

$$\lambda_j = \sqrt{\mid \tau_j \mid} \exp \left\{ i \left(\frac{1}{2} \arg \tau_j + \pi \right) \right\}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{1.10}$$

В этом случае $\operatorname{Re} \lambda_j = \sqrt{\mid \tau_j \mid} \cos \left(\frac{1}{2} \arg \tau_j + \pi \right) < 0$ при всех (s', γ) из множества E. Утверждение доказано.

Замечание 1.2. *Остальные корни уравнения* (1.4) *можно определить по формуле $\lambda_{j+3} = -\lambda_j$, $j = 1, 2, 3$. Следовательно,* $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, $j = 4, 5, 6$ *при всех (s', γ) из множества E.*

З а м е ч а н и е 1.3. *В формуле* (1.10) $\lambda_j(s', \gamma)$ — *непрерывная (аналитическая по* γ*) функция на множестве всех* (s', γ), *для которых* $\tau_j(s', \gamma)$ — *непрерывная (аналитическая по* γ*) функция и* $\tau \,\overline{\in}\, (-\infty, 0]$. *Для всех таких* (s', γ): $\operatorname{Re} \lambda_j(s', \gamma) < 0$, $j = 1, 2, 3$.

С л е д с т в и е 1.2. *При любых* $s' \in R_2$ *и* $\gamma : \operatorname{Re} \gamma = 0$ *справедливо неравенство* $\operatorname{Re} \lambda_j(s', \gamma) \leqslant 0$, $j = 1, 2, 3$.

Утверждение, сформулированное в следствии, вытекает из следствия 1.1 и непрерывной зависимости $\lambda_j(s', \gamma)$ от $s' \in R_2$.

Рассмотрим вопрос о наличии кратных корней у уравнения (1.7) при $\operatorname{Re} \gamma = 0$. Дискриминант $D^2 = (y_3 - y_1)^2 (y_2 - y_1)^2 (y_3 - y_2)^2$ этого уравнения имеет вид (см. [25]).

$$D^2 = -\omega^2 (\beta^2 \nu\gamma + 1)^{-4} \Phi(s', \gamma),$$

где

$$\Phi(s', \gamma) = 4\omega^4 (\alpha^2\nu\gamma + 1)^4 + 4\gamma^3 (\gamma + \nu \mid s' \mid^2) - \omega^2 (\alpha^2\nu\gamma + 1)^2 \times \\ \times (\gamma^2 + 18 (\gamma + \nu \mid s' \mid^2) \omega^2 - 27 (\gamma + \nu \mid s' \mid^2)). \qquad (1.11)$$

Справедлива следующая

Л е м м а 1.2. *Пусть* $\alpha^4\nu^2\omega^2 \geqslant \sigma_0 = \frac{1}{54}\left(\sqrt{37^2 + 16 \cdot 27} - 37\right)$. *Тогда при всех* $s' \in R_2$ *для любого* γ — *корня уравнения* $\Phi(s', \gamma) = 0$: $\operatorname{Re} \gamma \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существуют $s'_0 \in R_2$ и $\gamma_0 = ix$ $(x \in R_1)$, такие что $\Phi(s'_0, \gamma_0) = 0$. Выделяя вещественную и мнимую части равенства $\Phi(s'_0, \gamma_0) = 0$, получаем систему двух уравнений относительно неизвестных $\mid s' \mid$ и x, которая при $\alpha^4\nu^2\omega^2 \geqslant \sigma_0$ не имеет вещественных решений. Полученное противоречие доказывает лемму.

С л е д с т в и е 1.3. *Пусть* $\alpha^4\nu^2\omega^2 \geqslant \sigma_0$. *Тогда при всех* $s' \in R_2$ *и* γ: $\operatorname{Re} \gamma = 0$ *все* y — *корни уравнения* (1.7) *различны*.

Утверждение вытекает из леммы 1.2 и представления дискриминанта D^2 уравнения (1.7).

З а м е ч а н и е 1.4. При $\beta > 0$ следствие 1.3 верно при всех $\alpha^4\nu^2\omega^2 > 0$. Громоздкое доказательство этого утверждения мы не приводим, поскольку в дальнейшем изучаем лишь случай $\beta = 0$.

С л е д с т в и е 1.4. *Пусть* $\alpha^4\nu^2\omega^2 \geqslant \sigma_0$. *Тогда при всех значениях параметров* (s', γ): $s' \in R_2$, $\operatorname{Re} \gamma = 0$ *кроме* $(0, \pm i\omega)$ *и* $(0, 0)$ *все* λ — *корни уравнения* (1.5) *различны и отличны от нуля*.

Действительно, так как для корней уравнений (1.7) и (1.8) справедливо соотношение

$$\tau_j = \gamma\nu^{-1} + \mid s' \mid^2 - \nu^{-1} y_j, \quad j = 1, 2, 3, \qquad (1.12)$$

то, как вытекает из следствия 1.3, все τ_j, $j = 1, 2, 3$, различны при всех γ: $\operatorname{Re} \gamma = 0$, $s' \in R_2$. Если, кроме того, $\mid s' \mid \neq 0$, то $\tau_j(s', \gamma) \,\overline{\in}\, (-\infty, 0]$, $j = 1, 2, 3$ (см. доказательство следствия 1.1). Это означает, что все корни λ_j, $j = 1, 2, 3$, а следовательно, и все корни уравнения (1.5) отличны от нуля и различны.

Покажем, что при $\mid s' \mid = 0$ уравнение (1.8) при всех γ: $\operatorname{Re} \gamma = 0$ не имеет корней $\tau \in (-\infty, 0]$, за исключением корня $\tau = 0$ при $\gamma = 0$ и $\gamma = \pm i\omega$. Действительно, при $\mid s' \mid = 0$ уравнение $P(s', y, \gamma) = 0$ можно записать в виде

$$(y^2 + \omega^2)((\alpha^2(\beta + 1)\gamma - \nu^{-1}) y - \gamma(\nu^{-1} + \alpha^2\nu\beta\gamma)) = 0,$$

откуда (и из (1.12)) следует наше утверждение.

Вернемся теперь к исследованию разрешимости задачи (5), (6). Справедлива следующая

Л е м м а 1.4 *Пусть* $\alpha^4\nu^2\omega^2 \geqslant \sigma_0$. *Тогда при любых* $s' \in R_2$: $|s'| \neq 0$ *и* γ: $\operatorname{Re}\gamma = 0$ *существует единственное решение задачи* (5), (6), *стремящееся к нулю при* $x_3 \to +\infty$. *Это решение представимо в виде*

$$\widetilde{\mathbf{V}}(s', x_3, \gamma) = \mathscr{K}(s', x_3, \gamma)\,\widetilde{\mathbf{w}}^B, \tag{1.13}$$

где $\widetilde{\mathbf{V}} = (\tilde v_1, \tilde v_2, \tilde v_3, \tilde{\mathbf{p}})$; $\mathscr{K} = \{\mathscr{K}_{j,m}\}$, $1 \leqslant j \leqslant 4$; $1 \leqslant m \leqslant 3$;

$$\widetilde{\mathbf{w}}^B = \{\tilde v_1^B, \tilde v_2^B, \tilde{\mathbf{p}}^B\},\ \text{причем}\ \mathscr{K}_{j,m} = \sum_{l=1}^{3} \mathscr{K}_{j,m,l}(s', x_3, \gamma);$$

$$\mathscr{K}_{1,m,l} = (-1)^l \exp(\lambda_l x_3)\,\omega^{-1}\,|s'|^2 D^{-1}(-is_1 y_l - is_2\omega)\,r_{m,l}; \tag{1.14}$$

$$\mathscr{K}_{2,m,l} = (-1)^t \exp(\lambda_l x_3)\,\omega^{-1}|s'|^2 D^{-1}(-is_2 y_l + is_1\omega)\,r_{m,l}; \tag{1.15}$$

$$\mathscr{K}_{3,m,l} = (-1)^l \exp(\lambda_l x_3)\,\omega^{-1}|s'|^2 D^{-1}\lambda_l y_l^{-1}(y_l^2 + \omega^2)\,r_{m,l}; \tag{1.16}$$

$$\mathscr{K}_{4,m,l} = (-1)^l \exp(\lambda_l x_3)\,\omega^{-1}|s'|^2 D^{-1}(y_l^2 + \omega^2)\,r_{m,l}; \tag{1.17}$$

$$D = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3); \tag{1.18}$$

$$r_{1,l} = (is_2 y_\mu - is_1\omega)(y_\beta^2 + \omega^2) - (is_2 y_\beta - is_1\omega)(y_\mu^2 + \omega^2); \tag{1.19}$$

$$r_{2,l} = -(is_1 y_\mu + is_2\omega)(y_\beta^2 + \omega^2) + (is_1 y_\beta + is_2\omega)(y_\mu^2 + \omega^2); \tag{1.20}$$

$$r_{3,l} = (is_1 y_\mu + is_2\omega)(-is_2 y_\beta + is_1\omega) - (-is_2 y_\mu + is_1\omega)(is_1 y_\beta + is_2\omega). \tag{1.21}$$

Здесь целые μ *и* β *не равны* l *и* $1 \leqslant \mu < \beta \leqslant 3$; $\lambda_l = \lambda_l(s', \gamma)$ — *корни уравнения* (1.5), $l = 1, 2, 3$; $\operatorname{Re}\lambda_l < 0$ *и* $y_l = \nu\,|s'|^2 + \gamma - \nu\lambda_l^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При всех $|s'| > 0$ и γ: $\operatorname{Re}\gamma = 0$ все λ — корни уравнения (1.5) различны и отличны от нуля (см. следствие 1.4), а τ — корни уравнения (1.8) различны и не принадлежат лучу $-\infty < \tau \leqslant 0$. Следовательно, существуют три различных корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ уравнения (1.5), у которых $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, $j = 1, 2, 3$; причем $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$ при $j = 4, 5, 6$. Поэтому, убывающие по модулю при $x_3 \to +\infty$ решения системы уравнений (5) следует разыскивать стандартным образом в виде $\widetilde{\mathbf{V}} = \sum_{l=1}^{3} c_l e^{\lambda_l x_3} X_l$, где $A(is', \lambda_l, \gamma)\,X_l = 0$, а $c_l = c_l(s', \gamma)$ находятся из условий (6). Из изложенного вытекает утверждение леммы.

Лемма доказана.

Л е м м а 1.5. *При* $\alpha^4\nu^2\omega^2 \geqslant \sigma_0$ *корни уравнения четвертой степени* $\Phi(s', \gamma) = 0$ (*см.* (1.11)) *при любых* $s' \in R_2$ *удовлетворяют условию*

$$\operatorname{Re}\gamma_j(s') \leqslant -c_0 < 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{1.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выясним поведение корней уравнения $\Phi(s', \gamma) = 0$ при $|s'| \to \infty$. Используя известную диаграмму Ньютона (см. [26]), мы можем выписать асимптотики при $|s'| \to \infty$ корней уравнения $\Phi(s', \gamma) = 0$:

$$\operatorname{Re}\gamma_j = \frac{|s'|^2 \operatorname{Re}(b_j + o(1))}{|b_j + o(1)|^2},\quad j = 1,2;\quad \operatorname{Re}\gamma_j = \frac{\operatorname{Re}(-\nu\alpha^2 + O(|s'|^{-1}))}{|-\nu\alpha^2 + O(|s'|^{-1})|^2},\quad j = 3, 4, \tag{1.23}$$

здесь $b_j = b_j(\alpha, \nu, \omega) < 0$, $j = 1, 2$. Из этих представлений немедленно вытекает справедливость оценки (1.22) при $|s'| \geqslant N$, где $N > 0$ — достаточно большое число. Справедливость (1.22) при $|s'| \leqslant N$ вытекает о непрерывной зависимости корней $\gamma_j(s')$, $j = 1, 2, 3, 4$ от $s' \in R_2$ и свойства $\operatorname{Re} \gamma_j(s') \neq 0$, $s' \in R_2$, доказанного выше.

Лемма доказана.

С помощью леммы 1.5 выписываем представление решения $V(x, t)$ задачи (1), (1.1), (6) при $\beta = 0$ в виде

$$W(x, t) = \mathcal{F}^{-1}_{s\to x}[\mathcal{L}^{-1}_{t\to\gamma}[\mathcal{K}(s', x_3, \gamma)\,\tilde{w}(s', \gamma)]] = \\ = G(x', x_3, t) * \vec{w}^B(x', t),$$

где элементы $G_{j,m}$ матрицы G находятся по формулам

$$G_{j,m} = \mathcal{F}^{-1}_{\delta'\to x'}[\mathcal{L}^{-1}_{\gamma\to t}[\mathcal{K}_{j,m}(s', x_3, \gamma)]],\ j = 1, 2, 3, 4;\ m = 1, 2, 3.$$

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ R_3^+

Всюду ниже будем считать $\alpha^4\nu^2\omega^2 \geqslant \sigma_0$. Пусть λ_j ($j = 1, 2, 3$) — корни уравнения (1.5), определенные формулами (1.10) по корням τ_j, $j = 1, 2, 3$ уравнения (1.8). Тогда

$$y_j = \gamma + \nu\,|s'|^2 - \nu\lambda_j^2 = \gamma + \nu\,|s'|^2 - \nu\tau_j,\ j = 1, 2, 3, \tag{2.1}$$

корни уравнения (1.7).

Сформулируем ряд лемм, в которых изучаются специальные свойства корней характеристического уравнения исходной задачи, необходимые для доказательства основной теоремы. В связи с большим объемом аналитических выкладок, проводимых при доказательстве этих лемм, мы приводим лишь формулировки полученных результатов. Полные доказательства утверждений лемм см. в [28].

Лемма 2.1. *Пусть в уравнении* (1.7) $\gamma = |\gamma| e^{i\varphi}$, $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2$; $|s'|$ *принадлежит компакту* $S \subset [0, \infty)$. *Тогда при* $|\gamma| \to \infty$ *справедливы асимптотические представления*

$$y_j = (-1)^{j+1} i\omega + O(|\gamma|^{-1}),\ j = 1, 2;\ y_3 = \nu^{-1}\alpha^{-2} + O(|\gamma|^{-1}), \tag{2.2}$$

где оценки $O(|\gamma|^{-1})$ *равномерны по* $\varphi \in [\pi/2; 3\pi/2]$ *и* $|s'| \in S$.

Лемма 2.2 *Пусть* $s' \in R_2$ *и* $\gamma = -\varepsilon + i\rho_0$ ($\varepsilon \geqslant 0$; $-\infty < \rho_0 < \infty$). *Тогда любой корень* $\tau_j = \tau_j(s', \gamma)$ *уравнения* (1.8) *обладает следующими свойствами при* $|\rho_0| + \nu|s'|^2 \to \infty$:

$$|\tau_j| \geqslant (2\nu)^{-1}\sqrt{\rho_0^2 + \nu^2|s'|^4};\quad \arg\tau_j = \theta_j + o(1), \tag{2.3}$$

где $j = 1, 2, 3$; $\theta_j = \theta_j(\psi)$; $\operatorname{tg}\psi = \rho_0\nu^{-1}|s'|^{-2}$; $\psi \in [-\pi/2; \pi/2]$; $|\theta - \pi| \geqslant \delta > 0$; $o(1) \to 0$ *при* $|\rho_0| + \nu|s'|^2 \to \infty$. *Если же при этом* $\psi \to 0$, *то следует дополнительно потребовать, чтобы* $\varepsilon \neq \alpha^{-2}\nu^{-1}$.

Следствие 2.1. *Пусть* $s' \in R_2$, $\gamma = -\varepsilon + i\rho_0$, $\rho_0 \in R_1$, $\varepsilon \geqslant 0$, $\varepsilon \neq \alpha^{-2}\nu^{-1}$. *Тогда при* $|\rho_0| + \nu|s'|^2 > N$ ($N > 0$ — *достаточно велико*) *корни* λ_j ($j = 1, 2, 3$) *уравнения* (1.5), *определенные равенством* (1.10), *удовлетворяют условию*

$$\operatorname{Re}\lambda_j \leqslant -c\sqrt{|\rho_0| + \nu|s'|^2},\quad j = 1, 2, 3, \tag{2.4}$$

где постоянная $c > 0$ *не зависит от* ρ_0 *и* $|s'|$.

Справедливость (2.4) следует из (1.10) и леммы (2.2).

Лемма 2.3. *При всех* $|s'| \in R_2$ *и* γ: $\operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$; $|\gamma + \alpha^{-2}\nu^{-1}| \geqslant \delta > 0$ *для корней* y_j $(j = 1, 2, 3)$ *уравнения* (1.7) *справедливы оценки*

$$|y_j(s', \gamma)| \leqslant c(1 + |s'|^{2/3}),\ j = 1, 2, 3, \tag{2.5}$$

где $c = c(\delta) > 0$ *не зависит от* γ *и* $|s'|$.

Лемма 2.4. *Пусть* $s' \in R_2$, $|s'| \geqslant \delta$ *и* y_j $(j = 1, 2, 3)$ — *корни уравнения* (1.7). *Тогда существуют* $\varepsilon > 0$ *и постоянная* $c(\varepsilon) > 0$, *такие, что при* $-\varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$ *справедливы оценки*

$$|\lambda_j y_j^{-1}| \leqslant c(\delta)\sqrt{1 + |\gamma| + \nu|s'|^2}; \qquad |\lambda_j|^{-1} \leqslant c(\delta). \tag{2.6}$$

Пусть в уравнении (1.7) величина $|\gamma + \nu|s'|^2|$ достаточно мала. Среди корней уравнения (1.7) имеется единственный, как легко видеть, корень, который стремится к нулю при $|\gamma + \nu|s'|^2| \to 0$. Обозначив этот корень через y_3, положим $\tau_3(s', \gamma) = \nu^{-1}\gamma + |s'|^2 - \nu^{-1}y_3(s', \gamma)$. Справедливо следующее

Замечание 2.1. *Полагая* $\tau = 0$, $\xi = |s'|$, *запишем уравнение* (1.8) *в виде*

$$P(\xi, 0, \gamma) = (\gamma + \nu\xi^2)(\alpha^2\gamma(\gamma + \nu\xi^2)^2 + \xi^2(\gamma + \nu\xi^2) + \omega^2\alpha^2\gamma) = 0. \tag{2.7}$$

Пусть $\operatorname{Im}\gamma = 0$, $\operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$. *Поскольку* $P(\xi, 0, \gamma) \to +\infty$ *при* $\gamma \to -\infty$, $P(\xi, 0, \gamma) = 0$ *при* $\gamma = \gamma_{4,0} = -\nu\xi^2$ *и* $P(0, \xi, 0) = \nu^2\xi^2 > 0$ $(\xi > 0)$, *то на полуоси* $-\infty < \gamma < 0$ *лежит по крайней мере еще один корень уравнения* (2.7). *При* $\xi = |s'| \in (0, \delta)$ *таким корнем может быть только*

$$\gamma_{3,0} = -\nu\omega^{-2}\alpha^{-2}|s'|^4 + O(|s'|^6); \tag{2.8}$$

$\gamma_{3,0}$ — *вещественное число и*

$$\operatorname{Im} y_3(s', \gamma_{3,0}) = \operatorname{Im}(\gamma_{3,0} + \nu|s'|^2) = 0 \quad (0 < |s'| < \delta). \tag{2.9}$$

Заметим, что асимптотические разложения при $|s'| \to 0$ *трех других корней уравнения* (2.7) *имеют вид*

$$\gamma_{j,0} = (-1)^{j+1}i\omega - \nu|s'|^2 - (-1)^{j+1}\frac{i}{2\alpha^2\omega} + O(|s'|^4),\ j = 1, 2;\ \gamma_{4,0} = -\nu|s'|^2. \tag{2.10}$$

Лемма 2.5. *Существуют* $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$ *такие, что при* $-\varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$; $0 \leqslant |s'| \leqslant \delta$ *для корней* y_1 *и* y_2 *уравнения* (1.7) *не обращающихся в нуль при* $|s'| + |\gamma| = 0$, *справедливо асимптотическое представление при* $|s'| \to 0$

$$y_j = (-1)^{j+1}i\omega - \frac{1}{2}\nu\omega|s'|^2(\omega + \alpha^2\nu\omega\gamma + (-1)^{j+1}i\gamma)^{-1} + O(|s'|^4), \quad j = 1, 2. \tag{2.11}$$

При этом оценка $O(|s'|^4)$ *равномерна по* γ *на каждом компакте, содержащемся в полосе* $-\varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$.

Замечание 2.2. *Пусть* $0 > \operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — *достаточно малое число. Тогда корень* τ_3 *уравнения* (1.8) *обращается в нуль лишь в точках* $\gamma_{3,0}(|s'|)$ *и* $\gamma_{4,0}(|s'|)$. Действительно, из (2.10) и (2.11) вытекает, что при произвольном $|s'| \in [0, \delta]$: $\nu\tau_j = \gamma_{j,0} + \nu|s'|^2 - y_j(s', \gamma_{j,0}) = O(|s'|^2)$, $j = 1, 2$. Но из лемм 1.5 и 2.1 вытекает, что в полосе $0 > \operatorname{Re}\gamma > -\varepsilon$ модуль разности $|\tau_j - \tau_k| = |y_j - y_k|$, $j \neq k$, $j, k \in \{1, 2, 3\}$, ограничен снизу равномерной по $|s'| \in [0, \delta]$ положительной постоянной. Поэтому $|\tau_3| \neq 0$ при $\gamma = \gamma_{k,0}$, $k = 1, 2$.

С л е д с т в и е 2.2. *В условиях леммы* 2.5 *для корней уравнения* (1.7) *справедливы представления при* $|s'| \to 0$

$$y_j = (-1)^{j+1} i\omega + O(|s'|^2),\ j = 1, 2;\ y_3 = \gamma(\alpha^2\nu\gamma + 1)^{-1} + O(|s'|^2), \quad (2.12)$$

причем оценки $O(|s'|^2)$ *равномерны по всем* γ: $-\varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$.

Л е м м а 2.6. *Существуют* $\delta > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *такие, что при* $0 \leqslant |s'| \leqslant \delta$ *и* $-\varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$ *корни* τ_1 *и* τ_2 *уравнения* (1.8), *построенные по корням* y_1 *и* y_2 *уравнения* (1.7) *при помощи формул* (1.12) *являются аналитическими функциями* γ *в области* $-\varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$. *Если же* $\operatorname{Re}\gamma \geqslant -\frac{\nu}{2}|s'|^2$ *и* $0 \leqslant |s'|^2 \leqslant \delta^2$ *при достаточно малом* $\delta > 0$, *то каждый корень* τ_j, $j = 1, 2$ *удовлетворяет одному из следующих двух условий*;

$$\operatorname{Re}\tau_j(s', \gamma) \geqslant \frac{1}{4}|s'|^2; \quad (-1)^{j+1}\operatorname{Im}\tau_j(s', \gamma) > c_j > 0, \quad (2.13)$$

где постоянная $c_j > 0$ *не зависит от* s' *и* γ.

С л е д с т в и е. 2.3. *В условиях леммы* 2.6 *по формулам* (1.10) *находятся корни* $\lambda_1(s', \gamma)$ *и* $\lambda_2(s', \gamma)$ *уравнения* (1.5), *являющиеся аналитическими функциями* γ *при* $\operatorname{Re}\gamma > -\frac{\nu}{2}|s'|^2$ *при всех* s': $0 \leqslant |s'| \leqslant \delta$. *Для этих корней в указанной области изменения* γ *и* s' *выполняется оценка* $\operatorname{Re}\lambda_j(s', \gamma) < 0$, $j = 1, 2$.

Л е м м а 2.7 *Пусть* $s' \in R_2$, $0 < |s'| < \delta$. *Тогда отношение* $\lambda_3(s', \gamma)\, y_3^{-1}(s', \gamma)$ *в окрестности точки* $\gamma = -\nu|s'|^2$ *представимо в виде*

$$\lambda_3(s', \gamma)\, y_3^{-1}(s', \gamma) = |Q(s', \gamma)|^{1/2} \exp\left\{i\left(\frac{1}{2}\arg Q + \pi\right)\right\}, \quad (2.14)$$

где

$$Q(s', \gamma) = \psi_3(s', \gamma)(\psi_3(s', \gamma) - 1)[\nu(\gamma + \nu|s'|^2)]^{-1}.$$

Функция $\psi_3(s', \gamma)$, *участвующая в представлении корня* $y_3 = (\gamma + \nu|s'|^2)\psi_3^{-1}(s', \gamma)$, *аналитична в окрестности точки* $\gamma = -\nu|s'|^2$ *и имеет в окрестности этой точки асимптотику* $\psi_3(s', \gamma) = 1 + \alpha^2\nu\gamma + O(|\gamma + \nu|s'|^2|)$.

В дальнейшем нам понадобится более точная информация о корне $\tau_3(\lambda_3)$ уравнения (1.8) ((1.5)) при $\gamma \in (-\nu|s'|^2, \gamma_{3,0})$ (см. (2.8)). Справедлива следующая

Л е м м а 2.9. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$ — *достаточно малые числа* ($\nu\delta^2 < \varepsilon$). *Если* $0 < |s'| < \delta$, *то корень* τ_3 *уравнения* (1.8) ($\tau_3|_{\gamma=-\nu|s'|^2} = 0$), *положителен при* $-\varepsilon < \gamma < -\nu|s'|^2$, *отрицателен при* $-\nu|s'|^2 < \gamma < \gamma_{3,0}$ (*см.* (2.8)), *положителен при* $\gamma_{3,0} < \gamma < 0$. *Отсюда*, *в частности*, *вытекает следующее свойство корней* λ_3 *уравнения* (1.5) *и* y_3 *уравнения* (1.7), *соответствующих корню* τ_3 *уравнения* (1.8), *при* $\nu|s'|^2 < z < \varepsilon$:

$$\begin{gathered}\lambda_3 y_3^{-1}|_{\gamma=ze^{-i\pi}} - \lambda_3 y_3^{-1}|_{\gamma=ze^{i\pi}} = 0;\\ \lambda_3 y_3^{-1}\exp(\lambda_3 x_3)|_{\gamma=ze^{-i\pi}} - \lambda_3 y_3^{-1}\exp(\lambda_3 x_3)|_{\gamma=ze^{i\pi}} = 0.\end{gathered} \quad (2.15)$$

Если же $-\gamma_{3,0} < z < \nu|s'|^2$, *то*

$$\lambda_3 y_3^{-1}|_{\gamma=ze^{-i\pi}} - \lambda_3 y_3^{-1}|_{\gamma=ze^{i\pi}} = -2i\sqrt{|Q(s', -z)|}, \quad (2.16)$$

где функция Q *введена в* (2.14).

В заключение этого пункта найдем асимптотику корня y_3 ($y_3 = \gamma + \nu|s'|^2 - \nu\tau_3$) уравнения (1.7). вблизи точки $\gamma = \gamma_{3,0}(|s'|)$.

Лемма 2.10. *Пусть* $0 < |s'| < \delta$ *и* $\delta > 0$ — *достаточно мало. Тогда при* $\gamma \to \gamma_{3,0}$

$$y_3 = \gamma_{3\,0} + \nu\,|s'|^2 + \rho_3(|s'|)(\gamma - \gamma_{3,0}) + O(|\gamma - \gamma_{3,0}|^2), \quad (2.17)$$

где

$$\rho_3 = [1 - \alpha^2\nu(\gamma_{3,0} + \nu\xi^2) + \omega^{-2}(\gamma_{3,0} + \nu\xi^2)^2(1 - \alpha^2(\gamma_{3,0} + \nu\xi^2))][1 + \alpha^2\nu\gamma_{3,0} - (\gamma_{3,0} + \nu\xi^2)\,\omega^{-2}(2\gamma_{3,0} - 3(1 + \alpha^2\nu\gamma_{3,0})(\gamma_{3,0} + \nu\xi^2))]^{-1}. \quad (2.18)$$

Следствие 2.5. *В условиях леммы* 2.10 *для функции* $\psi_3(s', \gamma)$, *введенной в лемме* 2.8, *справедливо асимптотическое представление при* $\gamma \to \gamma_{3,0}$:

$$\psi_3(s', \gamma) = 1 + q(1 - \rho_3(|s'|) + O(q))(\gamma_{3,0} + \nu\,|s'|^2 + \rho_3(|s'|)\,q + O(q^2))^{-1}, \quad (2.19)$$

где функция ρ_3 *определена в* (2.18) *и* $q = \gamma - \gamma_{3,0}$.

3. ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛОВ ИЗ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕНЗОРА ГРИНА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ R_3^+

Решение $W(x, t)$ задачи (5), (6) представлено нами в виде $W(x, t) = G(x, t) * W^B(x', t)$ (см. формулы (8) и (1.13) — (1.21)). Таким образом, необходимо построить асимптотические представления при $t \to \infty$ для функций $G_{j,m,l}(x, t)$, которые при помощи замены переменных

$$\xi = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}; \qquad s_1 = \xi\cos\varphi; \qquad s_2 = \xi\sin\varphi; \qquad \varphi \in [0, 2\pi) \quad (3.1)$$

могут быть представлены в виде

$$G_{j,m,l} = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{i\rho\xi + \gamma t} K_{j,m,l}(\xi, \varphi, x_3, \gamma)\,d\gamma\,d\xi\,d\varphi, \quad (3.2)$$

где $K(\xi, \varphi, x_3, \gamma) = \xi\mathscr{K}(\xi\cos\varphi, \xi\sin\varphi, x_3, \gamma)$, или

$$K_{1,m,l} = \omega^{-1} i\xi(-1)^l e^{\lambda_l x_3}(-y_l\cos\varphi - \omega\sin\varphi)[(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)]^{-1} d_{m,l}; \quad (3.3)$$

$$K_{2,m,l} = \omega^{-1} i\xi(-1)^l e^{\lambda_l x_3}(-y_l\sin\varphi + \omega\cos\varphi)[(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)^{-1} d_{m,l}; \quad (3.4)$$

$$K_{3,m,l} = \omega^{-1}(-1)^{l+1} e^{\lambda_l x_3}(\lambda_l y_l^{-1})(y_l^2 + \omega^2)[(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)]^{-1} d_{m,l}; \quad (3.5)$$

$$K_{4,m,l} = \omega^{-1}(-1)^l e^{\lambda_l x_3}(y_l^2 + \omega^2)[(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)]^{-1} d_{m,l}; \quad (3.6)$$

$$d_{1,l} = (iy_\mu\sin\varphi - i\omega\cos\varphi)(y_\beta^2 + \omega^2) - (iy_\beta\sin\varphi - i\omega\cos\varphi)(y_\mu^2 + \omega^2); \quad (3.7)$$

$$d_{2,l} = -(iy_\mu\cos\varphi + i\omega\sin\varphi)(y_\beta^2 + \omega^2) + (iy_\beta\cos\varphi + i\omega\sin\varphi)(y_\mu^2 + \omega^2); \quad (3.8)$$

$$d_{3,l} = (iy_\mu\cos\varphi + i\omega\sin\varphi)(-iy_\beta\sin\varphi + i\omega\cos\varphi)\,\xi - \xi(iy_\beta\cos\varphi + i\omega\sin\varphi)(-iy_\mu\sin\varphi + i\omega\cos\varphi) \quad (3.9)$$

$(m,\ l = 1, 2, 3;\ 1 \leqslant \mu < \beta \leqslant 3;\ \mu \neq l;\ \beta \neq l)$; $\rho = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi$; y_k и λ_k $(k = 1, 2, 3;\ \operatorname{Re} \lambda_k < 0)$ — корни уравнений (1.7) и (1.5) соответственно.

Представим интегралы (3.2) в виде

$$G_{j,m,l}(x, t) = G^{\delta}_{j,m,l}(x, t) + G^{\infty}_{j,m,l}(x, t), \tag{3.10}$$

где

$$G^{\infty}_{j,m,l} = (2\pi)^{-3}(-i) \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-i\infty}^{i\infty} K_{j,m,l}(\xi, \varphi, x_3, \gamma)\, e^{i\rho\xi+\gamma t}\, d\gamma\, d\xi\, d\varphi; \tag{3.11}$$

$$G^{\delta}_{j,m,l} = (2\pi)^{-3}(-i) \int_0^{2\pi} \int_0^{\delta} \int_{-i\infty}^{i\infty} K_{j,m,l}(\xi, \varphi, x_3, \gamma)\, e^{i\rho\xi+\gamma t}\, d\gamma\, d\xi\, d\varphi. \tag{3.12}$$

Лемма 3.1. *Для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что для интегралов $G^{\infty}_{j,m,l}(x, t)$ при всех $x' \in R_2$, $x_3 > 0$, $t \geqslant 0$ справедливы оценки*

$$|G^{\infty}_{j,m,l}(x, t)| \leqslant c \exp(-\varepsilon t)(1 + x_3^{-9}) \tag{3.13}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от x и t; $j = 1, 2, 3, 4$; $m = 1, 2, 3$.

Доказательство. Из представления дискриминанта уравнения (1.7) (см. (1.11)), леммы 1.5, представления (1.23), леммы 1.5 получаем равномерную по всем $s' \in R_2$ и $-c_0 \leqslant \operatorname{Re} \gamma \leqslant 0$ оценку

$$|(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)| > c(1 + |\gamma|)^{-2}. \tag{3.14}$$

Кроме того, из вида уравнения (1.7) вытекает, что $y_j(s', \gamma) \neq 0$, $j = 1, 2, 3$ при всех $s' \in R_2$ и $\gamma \in \mathbb{C}$: $\operatorname{Re} \gamma > -\nu |s'|^2$. Из равенств (1.6), (1.10) леммы 1.5 и следствия 1.1 легко устанавливаем, что корни y_j уравнения (1.7) и λ_j уравнения (1.5), $j = 1, 2, 3$ при всех (s', γ) : $|s'| \geqslant \delta$; $-c_1 \leqslant \operatorname{Re} \gamma \leqslant 0$; $c_1 = \min \{c_0;\ {}^1/_2\, \nu\delta^2;\ {}^1/_2\, \varepsilon_0(\delta)\}$ являются простыми и представляют аналитические функции в указанной полосе. При этом мы учитываем также, что на множестве $|s'| \geqslant \delta$; $\operatorname{Re} \gamma \geqslant -{}^1/_2\, \varepsilon_0(\delta)$ (см. лемму 1.0) $\tau_j(s', \gamma)$, $j = 1, 2, 3$ — корни уравнения (1.8) не принимают значений, принадлежащих полуоси $(-\infty, 0]$. Воспользуемся далее теоремой Коши для перехода в (3.11) от интегрирования по $\gamma \in (-i\infty, i\infty)$ к интегрированию по $\gamma \in (-\varepsilon - i\infty, -\varepsilon + i\infty)$, $0 < \varepsilon < c_1$. Для этого нам осталось оценить по модулю функции $K_{j,m,l}(\xi, \varphi, x_3, \gamma)$. Имеем

$$|K_{j,m,l}| \leqslant c \exp(x_3 \operatorname{Re} \lambda_l)(1 + |\gamma|)^2 (1 + \xi)^4,\quad j = 1, 2, 4;$$

$$|K_{3,m,l}| \leqslant c \exp(x_3 \operatorname{Re} \lambda_l)\{(1 + |\gamma|)^2 (1 + \xi)^{14/3} + (1 + |\gamma|^3 (1 + \xi)^{11/3}\}, \tag{3.15}$$

где $m,\ l = 1, 2, 3$; $\xi = |s'| \geqslant \delta$; $-\varepsilon \leqslant \operatorname{Re} \gamma \leqslant 0$.

Используя следствие 2.1, оценки (3.15), теорему Коши, с помощью стандартных рассуждений при $x_3 > 0$ устанавливаем следующие представления для интегралов $G^{\infty}_{j,m,l}(x, t)$:

$$G^{\infty}_{j,m,l}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int_0^{2\pi} \int_{\delta}^{\infty} \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} e^{i\rho\xi+\gamma t} K_{j,m,l}(\xi, \varphi, x_3, \gamma)\, d\gamma\, d\xi\, d\varphi. \tag{3.16}$$

После простых оценок находим из (3.16) с помощью (3.15) следующие неравенства (интегрируя при $|\operatorname{Im} \gamma| \geqslant N$ по частям):

$$|G^{\infty}_{j,m,l}(x, t)| \leqslant e^{-\varepsilon t} c(N) \Big[\int_{\delta}^{\infty} \int_{\operatorname{Im}\gamma \in \{(N,\infty)\cup(-\infty,-N)\},\ \operatorname{Re}\gamma = -\varepsilon} e^{-[|\operatorname{Im}\gamma|^{1/2} x_3 + \xi x_3] c} (1 + |\gamma|)^3 (1 + \xi^{14/3})\, |d\gamma|\, d\xi + c'(N) \Big] \leqslant c e^{-\varepsilon t}(1 + x_3^{-9}),$$

где постоянная $c = c(\varepsilon, \delta) \geqslant 0$ не зависит от $x' \in R_2$, $x_3 > 0$, $t \geqslant 0$,

Лемма доказана.

Рассмотрим далее интегралы $G^{\delta}_{j,m,l}(x, t)$ (см. (3.12)) при $l = 1, 2$. Воспользовавшись леммой 2.6 и следствием 2.2, как и при доказательстве леммы 2.1, убеждаемся в том, что функции $K_{j,m,l}(\xi, \varphi, x_3, \gamma)$ при $l = 1, 2$ голоморфны в полосе $-\frac{1}{2}\nu\xi^2 \leqslant \operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$ и что от интегрирования по $\operatorname{Re}\gamma = 0$ в (3.12) можно перейти к интегрированию по $\operatorname{Re}\gamma = -\frac{\nu}{2}\xi^2$. После этого представим интеграл $G^{\delta}_{j,m,l}(x, t)$ в виде суммы $G^{\delta}_{j,m,l} = G^{\delta,1}_{j,m,l} + G^{\delta,2}_{j,m,l}$, где

$$G^{\delta,k}_{j,m,l}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta}\int_{\operatorname{Re}\gamma=-{}^1/_2\nu\xi^2} f_k(\xi, \varphi, x')\, e^{\gamma t} K_{j,m,l}(\xi, \varphi, x_3, \gamma)\, d\gamma\, d\xi\, d\varphi;$$

$$f_1(\xi, \varphi, x') = \exp(i\rho\xi) - 1;\ f_2(\xi, \varphi, x') \equiv 1. \qquad (3.17)$$

Лемма 3.2. *Для интегралов $G^{\delta,1}_{j,m,l}(x, t)$ при $j = 1, 2$; $l = 1, 2$; $m = 1, 2, 3$ для всех $x' \in R_2$, $x_3 > 0$, $t > 0$ справедлива оценка*

$$|G^{\delta,1}_{j,m,l}(x, t)| \leqslant c(1 + |x'|^2)\, t^{-2}(1 + x_3^{-3}) \qquad (3.18)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от x и t.

Доказательство проведем при $j = l = 1$ (при других указанных выше значениях j, l доказательство проводится аналогично). Установим неравенство

$$|(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)| \geqslant c > 0,\ 0 \leqslant \xi \leqslant \delta,\ -\varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\gamma \leqslant 0. \qquad (3.19)$$

По следствию 2.2 имеем

$$y_1 - y_2 = 2i\omega + O(\xi^2);\ \ y_1 - y_3 = i\omega - \gamma(\alpha^2\nu\gamma + 1)^{-1} + O(\xi^2), \qquad (3.20)$$

причем оценки $O(\xi^2)$ равномерны по всем γ: $-\varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$. Можно показать, что если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то существует постоянная $c > 0$ такая, что $|i\omega - \gamma(\alpha^2\nu\gamma + 1)^{-1}| \geqslant c(\varepsilon) > 0$ при всех γ: $-\varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$, откуда вытекает неравенство (3.20). Заметим, что справедливы равенства

$$\int_0^{2\pi}(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi)(\cos\varphi\, y_1 + \omega\sin\varphi)\, d_{m,1}(y_1, y_2, \varphi)\, d\varphi = 0; \qquad (3.21)$$

$$\exp(i\rho\xi) = 1 + i\rho\xi + (i\rho\xi)^2\,\Phi_1(i\rho\xi);\ \ \Phi_1(\tau) = \int_0^1 e^{\tau\sigma}(1 - \sigma)\, d\sigma. \qquad (3.22)$$

Из представлений (3.3) — (3.9), оценок (3.19), (3.20), (2.4) и последних равенств выводим неравенство

$$|G^{\delta,1}_{1,m,1}(x, t)| \leqslant c_2(1 + |x'|^2)\int_0^{\delta}\xi^3 e^{-\frac{1}{2}\nu\xi^2 t}\int_0^{\infty}\exp\left(-c_3\sqrt{\mu + \nu\xi^2}\, x_3\right)\tilde f_m(\mu, \xi)\, d\mu\, d\xi,$$

где $\tilde f_m(\mu, \xi)$ — ограниченные по $\mu \in (0, \infty)$, $\xi \in (0, \delta)$ функции, $t > 0$; $x_3 > 0$, постоянные $c_2 > 0$, $c_3 > 0$ не зависят от ξ, μ, t, x. Простые оценки и вычисления интегралов в правой части последнего неравенства приводят нас к неравенству (3.18).

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Для интегралов* $G^{\delta,2}_{j,m,l}(x_3, t)$ *при* $j = 1, 2$; $m = 1, 2, 3$; $l = 1, 2$ *для* $x_3 > 0$ *и* $t > 0$ *справедлива оценка*

$$| G^{\delta,2}_{j,m,l}(x_3, t) | \leqslant ct^{-2}(x_3 + x_3^{-3}) \tag{3.23}$$

с постоянной $c > 0$, *не зависящей от* x_3 *и* t.

Доказательство (проведем его при $j = l = 1$). Введем обозначения $f_1(\varphi) = -i\omega(-i\sin\varphi + \cos\varphi)$;

$$f_2(\varphi) = -i\omega(-i\cos\varphi + i\sin\varphi);\ f_3(\varphi) \equiv 1;$$

$$\Psi_m(\xi, \gamma) = -i\omega + \gamma(\alpha^2\nu\gamma + 1)^{-1},$$

$m = 1, 2$; $\Psi_3(\xi, \gamma) = \xi\omega$. Тогда интеграл $G^{\delta,2}_{1,m,1}$ можно представить в виде суммы $G^{\delta,2}_{1,m,1}(x_3, t) = \tilde{g}_m(x_3, t) + \tilde{\tilde{g}}_m(x_3, t)$, где

$$\tilde{\tilde{g}}_m(x_3, t) = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta}\int_{\operatorname{Re}\gamma = -\frac{1}{2}\nu\xi^2} e^{\gamma t + \lambda_1 x_3}\frac{i\xi f_m\Psi_m\,d\gamma\,d\xi\,d\varphi}{\omega(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)}, \tag{3.24}$$

а интеграл $\tilde{g}_m(x_3, t)$ может быть записан также, как интеграл $G^{\delta,1}_{1,m,1}(x, t)$. Повторив оценки, проведенные при доказательстве леммы 3.2, находим

$$| \tilde{g}_m(x_3, t) | \leqslant ct^{-2}(1 + x_3^{-3}), \quad x_3 > 0,\ t > 0. \tag{3.25}$$

Переходя к оценке интеграла (3.24), вычислим вначале

$$\mu_m = \int_0^{2\pi} f_m(\varphi)(\cos\varphi y_1 + \omega\sin\varphi)\,d\varphi, \quad m = 1, 2, 3.$$

Здесь $\mu_1 = \omega^2$; $\mu_2 = -i\omega^2$; $\mu_3 = 0$. Таким образом имеем

$$\tilde{\tilde{g}}_m(x_3, t) = \mu_m(2\pi)^{-3}(-i)\int_0^{\delta}\int_{\operatorname{Re}\gamma = -\frac{1}{2}\nu\xi^2}\exp(\gamma t + \lambda_1 x_3)\times$$

$$\times\, i\xi\Psi_m(\xi, \gamma)[\omega(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)]^{-1}\,d\gamma\,d\xi. \tag{3.26}$$

Из представления (3.20) нахоим при $m = 1, 2$

$$\Psi_m(\xi, \gamma)[(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)]^{-1} = (-2i\omega)^{-1} + O(\xi^2), \tag{3.27}$$

причем оценка $O(\xi^2)$ равномерна по γ: $-\varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$. Из представления (3.27) вытекает, что интеграл $\tilde{\tilde{g}}_m(x_3, t)$ представим в виде $\tilde{\tilde{g}}_m(x_3, t) = \tilde{\tilde{g}}'(x_3, t) + \tilde{\tilde{g}}''(x_3, t)$, причем для $\tilde{\tilde{g}}''(x_3, t)$ справедлива оценка вида (3.25), а интеграл $\tilde{\tilde{g}}'_m(x_3, t)$ записывается в виде

$$\tilde{\tilde{g}}(x_3, t) = \frac{\mu_m}{2(2\pi)^3\omega^2}\int_0^{\delta} i\xi\mathcal{J}(\xi, x_3, t)\,d\xi, \tag{3.28}$$

где

$$\mathcal{J}(\xi, x_3, t) = i\int_{\Gamma}\exp(\gamma t + \lambda_1 x_3)\,d\gamma, \tag{3.29}$$

где контур Γ можно взять равным как прямой $\operatorname{Re}\gamma = -\frac{1}{2}\nu\xi^2$, так и $\operatorname{Re}\gamma = 0$; $t > 0$ и $x_3 > 0$. Интегрируя по частям в (3.29) и учитывая, что $\operatorname{Re}\lambda_1\left(-\frac{1}{2}\nu\xi^2 + i\sigma, \xi\right) \to -\infty$ при $|\sigma| \to \infty$ (см. (2.4)), $0 \leqslant \xi \leqslant \delta$, $\sigma =$

$= \operatorname{Im}\gamma$, получим

$$\mathcal{J} = -t^{-1}x_3e^{-\frac{1}{2}\nu\xi^2t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t}i\frac{\partial}{\partial\sigma}\lambda_1\Big(-\frac{1}{2}\nu\xi^2+i\sigma,\,\xi\Big)e^{\lambda_1x_3}\,d\sigma. \tag{3.30}$$

Подставив $\lambda = \lambda_l\Big(-\frac{1}{2}\nu\xi^2+i\sigma,\,\xi\Big)$ в (1.5) и продифференцировав полученное тождество, найдем

$$\frac{\partial\lambda_l}{\partial\gamma} = \frac{1}{2\nu\lambda_l}\left[1+\frac{(y_l^2+\omega^2)(\alpha^2\nu y_l-1)}{3(\alpha^2\nu\gamma+1)y_l^2-2\gamma y_l+\omega^2(\alpha^2\nu\gamma+1)}\right],\quad l=1,\,2,\,3. \tag{3.31}$$

По следствию 2.2 имеем

$$(y_l^2+\omega^2)(\alpha^2\nu y_l-1) = O(\xi^2),\quad l=1,\,2. \tag{3.32}$$

Кроме того, удается доказать, также при помощи следствия 2.2, что при $-\frac{1}{2}\nu\xi^2\leqslant\operatorname{Re}\gamma\leqslant 0$ $(0\leqslant\xi\leqslant\delta,\ 0<\nu/2\delta^2<\varepsilon)$:

$$|\,3(\alpha^2\nu\gamma+1)y_l^2-2\gamma y_l+\omega^2(\alpha^2\nu\gamma+1)\,|\geqslant c,\quad l=1,\,2. \tag{3.33}$$

Оценим далее снизу $|\lambda_l|$, $l=1,2$. Из равенства $\nu\lambda_l^2=\gamma+\nu\xi^2-y_l$ и представления (2.12) вытекает, что при $|\operatorname{Im}\gamma-(-1)^{l+1}\omega|\geqslant 2\geqslant\frac{1}{2}c_2\omega^{-1}$, $c_2 = \frac{1}{4}\frac{\alpha^4\nu^2\omega^2}{(1+\alpha^4\nu^2\omega^2)^{3/2}}$, и при $\operatorname{Re}\gamma=-\frac{1}{2}\nu\xi^2$ выполняется неравенство

$$\nu\,|\lambda_l^2|\geqslant|\operatorname{Im}\gamma-(-1)^{l+1}\omega|+O(\xi^2)=\frac{1}{2\omega}c_2+O(\xi^2), \tag{3.34}$$

причем оценка $O(\xi^2)$ равномерна по γ. Поэтому для указанных значений γ и $0<\xi<\delta$ выполняется неравенство $|\,\lambda_l\,|\geqslant\frac{1}{2}(c_2\omega^{-1}\nu^{-1})^{1/2}$, где правая часть достаточно мала. Если же $|\operatorname{Im}\gamma-(-1)^{l+1}\omega|<\frac{c_2}{2\omega}$, то следует воспользоваться представлением (2.11). После простых оценок тогда получим для $0<\xi<\delta$ (δ — мало): $|\,\nu\lambda_l^2\,|\geqslant c\,\{(1/2\,\nu\xi^2)+|\operatorname{Im}\gamma-(-1)^{l+1}\omega|+O(\xi^4)\}$. Из последнего неравенства и оценки (3.34) находим, что для всех $\gamma:\operatorname{Re}\gamma=-1/2\,\nu\xi^2$ и $0<\xi<\delta$:

$$|\,\lambda_l\,|^{-1}\leqslant c\,(1+|\operatorname{Im}\gamma-(-1)^{l+1}\omega\,|^{-1/2}),\quad l=1,\,2 \tag{3.35}$$

и, следовательно, из (3.31), (3.32), (3.35) вытекает справедливость оценки

$$\left|\frac{\partial\lambda_l}{\partial\gamma}\right|\leqslant c\,(1+\xi^2)\{1+|\operatorname{Im}\gamma+(-1)^l\omega\,|^{-1/2}\},\quad l=1,\,2. \tag{3.36}$$

Применив неравенство (3.36) к оценке (3.29), с помощью следствия 2.1 находим

$$|\,\mathcal{J}\,|\leqslant c\exp\Big(-\frac{\nu}{2}\xi^2t\Big)x_3t^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(\operatorname{Re}\lambda_1x_3)(1+\xi^2)(1+|\sigma+\omega\,|^{-1/2})\,d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant ce^{-\frac{\nu}{2}\xi^2t}(x_3+x_3^{-1})(1+\xi^2)\,t^{-1}.$$

Из последнего неравенства и (3.28) находим

$$|\,\tilde{\tilde{g}}(x_3,\,t)\,|\leqslant|\,\mu_m\,|\,c\,(x_3+x_3^{-1})\,t^{-1}\int\limits_0^{\delta}\xi\,(1+\xi^2)\,e^{-\frac{\nu}{2}\xi^2t}\,d\xi\leqslant\bar{c}t^{-2}(x_3+x_3^{-1}). \tag{3.37}$$

Неравенство (3.37) завершает доказательство леммы.

Из лемм 3.2 и 3.3 вытекает оценка для интеграла (3.12)

$$|G^{\delta}_{j,m,l}(x,\ t)| \leqslant c\,(1+|x'|^2+x_3)\,(1+x_3^{-3})t^{-2} \tag{3.38}$$

при $j=1,\ 2;\ m=1,\ 2,\ 3;\ l=1,\ 2;\ x\in R^+_3,\ t>0$.

Л е м м а 3.4. *Для интегралов $G^{\delta}_{j,m,l}(x,\ t)$ при $j=3,\ 4;\ m=1,2,3;\ l=1,\ 2$ для всех $x'\in R_2,\ x_3>0;\ t>0$ справедлива оценка*

$$|G^{\delta}_{j,m,l}(x',\ x_3,\ t)| \leqslant c\,(1+|x'|)\,t^{-2}\,(1+x_3^{-4}), \tag{3.39}$$

с постоянной $c>0$, не зависящей от $x',\ x_3$ и t.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если воспользоваться очевидным представлением

$$e^{i\rho\xi}=1+i\rho\xi\Phi_0(i\rho\xi),\qquad \Phi_0(\tau)=\int_0^1 e^{\tau\sigma}d\sigma, \tag{3.40}$$

то интеграл (3.12) можно записать в виде $G^{\delta}_{j,m,l}(x,\ t)=\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2$, где

$$\mathcal{I}_j(x_3,\ t)=\frac{1}{(2\pi)^3 i}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta}\int_{\operatorname{Re}\gamma=-\frac{1}{2}\nu\xi^2} f_j(i\rho\xi)\,e^{\gamma t}K_{j,m,l}(\xi,\ \varphi,\ x_3,\ \gamma)\,d\gamma\,d\xi\,d\varphi, \tag{3.41}$$

$$f_1(i\rho\xi)\equiv 1;\qquad f_2(i\rho\xi)=i\rho\xi\Phi_0(i\rho\xi).$$

Интеграл $\mathcal{I}_2$ оценим по модулю. Для этого воспользуемся представлениями (3.3)—(3.9), а также оценками (2.2), (2.4), (2.6), (3.32), (3.19), (3.35) и следствием 2.2. После простых оценок находим

$$|\mathcal{I}_2(x',\ x_3,\ t)|\leqslant c_1|x'|\int_0^{\delta}\xi^3 e^{-\frac{\nu}{2}\xi^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-c_2x_3\sqrt{|\sigma|+\frac{1}{2}\nu\xi^2}\right)\left(1+\right.$$
$$\left.+\sqrt{|\sigma|+\frac{\nu}{2}\xi^2}\right)d\sigma\,d\xi\leqslant c_3|x'|\,t^{-2}(1+x_3^{-4}), \tag{3.42}$$

где положительные постоянные $c_1,\ c_2,\ c_3$ не зависят от $x',\ x_3,\ t$. Переходя к оценке интеграла $\mathcal{I}_1(x_3,\ t)$, заметим, что в подынтегральном выражении от переменной φ зависит только множитель $d_{m,l}(\xi,\ \varphi,\ \gamma)$, причем из формул 3.7)—(3.9) при $m=1,\ 2,\ 3$ и $l=1,\ 2$ вытекает справедливость представления

$$d_{m,l}(\xi,\ \varphi,\ \gamma)=(f_{m,l}(\varphi)+O(\xi))\,(y_2-y_3). \tag{3.43}$$

При этом $f_{3,l}\equiv 0,\ l=1,\ 2;\ \int_0^{2\pi} f_{m,l}(\varphi)\,d\varphi=0\ (m=1,\ 2,\ 3;\ l=1,\ 2)$, что позволяет интеграл $\mathcal{I}_1$ с помощью следствия 2.2 записать в виде

$$\mathcal{I}_1(x_3,\ t)=\frac{1}{(2\pi)^3 i}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t}e^{\lambda_3x_3}F_{m,l}(\xi,\ \varphi,\ \gamma)\,d\sigma\,d\xi\,d\varphi, \tag{3.44}$$

где для функции $F_{m,l}(\xi,\ \varphi,\ \gamma)$ выполняется оценка

$$|F_{m,l}(\xi,\ \varphi,\ \gamma)|\leqslant ce^{-\nu/2\xi^2 t}\left(1+\sqrt{|\sigma|+\frac{1}{2}\nu\xi^2}+|\sigma-(-1)^{l+1}\omega|^{-1/2}\right)\cdot$$
$$\gamma=-\frac{\nu}{2}\xi^2+i\sigma.$$

С помощью последнего неравенства из (3.44) находим, как и при выводе (3.42), что $\mathcal{I}_1(x_3,\ t)=O(t^{-2})$.

Лемма доказана.

4. ОЦЕНКА ТЕНЗОРА ГРИНА ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ R_3^+. АСИМПТОТИКА ПРИ $t \to \infty$

Если проанализировать методику оценки интегралов $G_{j,m,l}^{\infty}(x, t)$, $G_{j,m,1}^{\delta}(x, t)$ и $G_{j,m,2}^{\delta}(x, t)$, использованную в разделе 3, то можно заметить, что ее основой была возможность перехода от интегрирования по прямой $\gamma \in (-i\infty, i\infty)$ к интегрированию по прямой $\operatorname{Re}\gamma = -\varepsilon$ или по прямой $\operatorname{Re}\gamma = -\nu/_2 \mid s' \mid^2 (\mid s' \mid > 0)$. Такая возможность гарантировалась голоморфностью подынтегральной функции в полосе $-\varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$ (или в полосе $-{}^1/_2\nu \mid s' \mid^2 \leqslant \operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$), а также хорошим убыванием этой функции при $\mid \operatorname{Im}\gamma \mid \to \infty$ в указанной полосе. Переходя к рассмотрению интегралов $G_{j\ m,3}^{\delta}(x, t)$, замечаем, что в силу оценки (2.4) убывание подынтегральной функции при $\mid \operatorname{Im}\gamma \mid \to \infty$ в полосе $-\varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$ сохраняется, а ее аналитичность в этой полосе нарушается лишь в некоторой окрестности области, прилежащей к отрицательной вещественной полуоси ($0 \leqslant \mid s' \mid \leqslant \delta$). При этом следует иметь в виду, что функции $y_j(s', \gamma)$, $j = 1, 2, 3$, входящие в подынтегральное выражение, сохраняют аналитичность в полосе $-\varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$ (см. лемму 1.5), а величина $(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)$ не обращается в нуль в этой полосе (см. оценку (3.14)). Поэтому потеря аналитичности подынтегральной функции связана лишь со свойствами $\lambda_3(s', \gamma)$. Более того, поскольку $\lambda_3(s', \gamma)$ определяется с помощью формулы (1.10) по функции $\tau_3(s', \gamma)$, а функция $\tau_3(s', \gamma)$, как и функция $y_3(s', \gamma)$, аналитическая в полосе $-\varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$, то область неаналитичности $\lambda_3(s', \gamma)$ определяется теми значениями s' и γ, для которых $\tau_3(s', \gamma) \leqslant 0$. Для того чтобы найти это множество, положим $\tau_3 = -s_3^2$ ($s_3 \in R_1$) и подставим это значение τ_3 в уравнение (1.8). Теперь легко заметить, что уравнение (1.8) переходит в уравнение

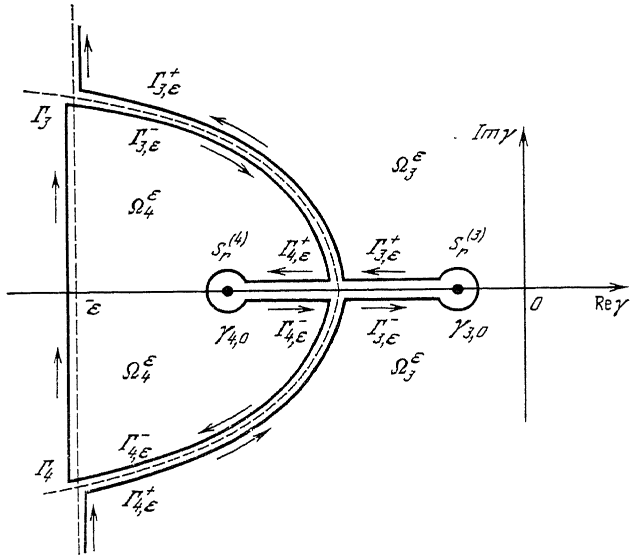
$$P(s, \gamma) = \alpha^2\gamma(\gamma + \nu \mid s \mid^2)^3 + \mid s \mid^2 (\gamma + \nu \mid s \mid^2)^2 + \alpha^2\omega^2(\gamma + \nu \mid s \mid^2) + \omega^2 s_3^2 = 0, \tag{4.1}$$

являющееся характеристическим для задачи Коши (1), (2) при $\beta = 0$. Здесь $s = (s', s_3) \in R_3$, $\gamma \in \boldsymbol{C}$. Ясно, что те значения γ и $s' \in R_2$, для которых существует при некотором $s_3 \in \bar{R}_1^+$ решение уравнения (4.1), будут также значениями γ и s', для которых существует решение $\tau_3 \leqslant 0$ уравнения (1.8). Другими словами, задача сводится к нахождению γ — корней уравнения (4.1) при $s' \in R_2$, $s_3 \in \bar{R}_1^+$. Однако нас будут интересовать не все γ — корни уравнения (4.1), а только те из них, которые стремятся к нулю при $\mid s' \mid + s_3 \to 0$, поскольку корень τ_3 уравнения (1.8) обладает свойством $\tau_3(s', \gamma) \to 0$ при $\mid s' \mid + s_3 \to 0$. В работе [16] эти корни обозначаются γ_3 и γ_4 и для них построены асимптотики при $\mid s' \mid + s_3 \to 0$. Отображение $s_3 \to \gamma_j(\mid s' \mid, s_3)$, где $s_3 \in [0, \delta_3]$, $\delta_3 > 0$; $s' \in R_2$; $j = 3, 4$, определяет в комплексной γ-плоскости линии $\gamma_3 = \gamma_3(\mid s' \mid, s_3)$, $\gamma_4 = \gamma_4(\mid s' \mid, s_3)$. Как видно из замечания 2.1, эти кривые выходят соответственно из точек $\gamma_{3,0} = \gamma_{3,0}(\mid s' \mid, 0) = -\nu\alpha^{-2}\omega^{-2} \mid s' \mid^4 + O(\mid s' \mid^6)$ и $\gamma_{4,0} = \gamma_{4,0}(\mid s' \mid, 0) = -\nu \mid s' \mid^2$. Поскольку в точках $\gamma_{4,0}$ и $\gamma_{3,0}$ величина $\tau_3 = 0$, то, следуя работе [27], указанные точки естественно назвать «точками поворота». Справедлива следующая

Л е м м а 4.1. *При* $0 < \mid s' \mid < \delta$, *где* $\boldsymbol{\delta}$ — *достаточно малое положительное число, существуют* $\gamma^* \in (\gamma_{4,0}, \gamma_{3,0})$, $s_3^* = s_3^*(s') > 0$ *и* $\delta_3(\mid s' \mid) >$

$> s_3^*$ *такие, что при* $0 < s_3 < s_3^*$ *корни* $\gamma_3(|s'|, s_3^*)$, $\gamma_4(|s'|, s_3^*)$ — *вещественные различные; при* $s_3 = s_3^*$: $\gamma_3(|s'|, s_3^*) = \gamma_4(|s'|, s_3^*) = \gamma^*$, *а при* $s_3^* < s_3 < \delta_3$: $\gamma_3(|s'|, s_3)$ *и* $\gamma_4(|s'|, s_3)$ — *комплексные сопряженные числа.*

Доказательство. Так как $\gamma_j(|s'|, 0) = \gamma_{j,0}(|s'|)$ и $\gamma_{j,0}(|s'|)$, $j = 3, 4$ вещественны для $0 < |s'| < \delta$ (см. замечание 2.1), а при $s_3(|s'|^2 + s_3^2)^{-1/2} \geqslant \delta_1$ корни $\gamma_j(|s'|, s_3)$, $j = 3, 4$ комплексные



сопряженные (см. [16]), то из непрерывной зависимости $\gamma_j(|s'|, s_3)$, $j = 3, 4$, от $s_3 \in \bar{R}_1^+$ следует, что существует s_3^*: $0 < s_3^*(|s'|^2 + (s_3^*)^2)^{-1/2} < \delta_1$ такое, что $\gamma_3(|s'|, s_3^*) = \gamma_4(|s'|, s_3^*) = \gamma^*$. Очевидно, что $0 < -\mathrm{Re}\,\gamma^* < \varepsilon$, так как в противном случае точка $\gamma_j(|s'|, s_3)$, $j = 3, 4$, при $s_3 : s_3(|s'|^2 + s_3^2)^{-1/2} \geqslant \delta_1$ не принадлежит полосе $0 < -\mathrm{Re}\,\gamma < \varepsilon$. Основываясь на лемме 1.9, получаем, что $\gamma^* \in (\gamma_{4,0}, \gamma_{3,0}) \subset [-\varepsilon, 0]$. Кривые $\gamma_j = \gamma_j(|s'|, s_3)$, $j = 3, 4$, не имеют других точек самопересечений при малых $|s'| + s_3 \to 0$, поскольку в противном случае нашлись бы значения $0 < s_3^- \leqslant s_3^* < s_3^+$, для которых $\gamma_j(|s'|, s_3^-) = \gamma_j(|s'|, s_3^+)$ при $j = 3$ или $j = 4$. Тогда из уравнения (4.1) получим $0 = P(|s'|, s_3^+, \gamma_j) - P(|s'|, s_3^-, \gamma_j) = [(s_3^+)^2 - (s_3^-)^2]\,[O(\gamma_j) + O(|s'|^2) + O((s_3^\pm)^2) + \alpha^2\omega^2\nu + \omega^2]$, что невозможно в силу малости $|s'|$, $s_3^\pm$ и γ_j при $|s'| + |s_3^\pm| \to 0$.

Лемма доказана.

Обозначим далее интеграл

$$G^\delta_{j,m,3}(x, t, C) = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int_0^{2\pi}\int_0^\delta\int_C e^{i\rho\xi + \gamma t} K_{j,m,3}(\xi, \varphi, x_3, \gamma)\, d\gamma\, d\xi\, d\varphi,$$

где C — некоторая кусочно-гладкая кривая на комплексной γ-плоскости. Через C_ε будем обозначать прямую $\mathrm{Re}\,\gamma = -\varepsilon$ $(\varepsilon \geqslant 0)$. Интеграл (3.12) в этих обозначениях можно записать в виде $G^\delta_{j,m,3}(x', x_3, t) = G^\delta_{j,m,3}(x', x_3, t, C_0)$. Обозначим через Γ_3 (Γ_4) кусочно-непрерывную кривую $\gamma = \gamma_3$ $(\gamma = \gamma_4)$, исходящую из точки $\gamma_{3,0}$ $(\gamma_{4,0})$. Учитывая, что $\lambda_3 = \lambda_3(s', \gamma)$ — аналитическая функция в тех точках полосы $-\varepsilon \leqslant \mathrm{Re}\,\gamma \leqslant 0$, которые не принадлежат $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$, а также учитывая оценку (2.4), обеспечивающую при $x_3 > 0$ быстрое убывание подынтегральной функции в $G^{\delta}_{j,m,3}$ при $|\operatorname{Im}\gamma|\to\infty$ мы можем с помощью теоремы Коши перейти от интегрирования по $\gamma\in C_0$ к интегрированию по контуру Γ_ε, изображенному на рисунке. Контур состоит из отрезков прямой C_ε, отрезков кривых Γ_3 и Γ_4, а также замыкающих их дуг окружностей $S^{(3)}_r$ и $S^{(4)}_r$ ($S^{(j)}_r$ — окружность радиуса $r>0$ с центром в точке $\gamma_{j,0}$, $j=3, 4$). Отметим дополнительно, что по лемме 2.9 $\operatorname{Re}\lambda_3(s',\gamma)<0$ при всех $0\leqslant|s'|\leqslant\delta$ и $\gamma\in\Omega^\varepsilon_3\bigcup\Omega^\varepsilon_4$ (см. рисунок), где области Ω^ε_3 и Ω^ε_4 получаются из области $\{\gamma\colon -\varepsilon<\operatorname{Re}\gamma<0\}$ отбрасыванием кривых Γ_3 и Γ_4 ($\Omega^\varepsilon_3\bigcup\Omega^\varepsilon_4=\{\gamma\colon -\varepsilon<\operatorname{Re}\gamma<0\}\setminus(\Gamma_3\bigcup\Gamma_4)$; Ω^ε_j примыкает к точке $\gamma_{j,0}$, $j=1, 2$). Для того чтобы убедиться в этом, следует лишь воспользоваться определением λ_3 (см. (1.10)) и заметить, что при $|\operatorname{Im}\gamma|\geqslant\frac{1}{2}\omega$; $0<\varepsilon<\varepsilon_0\left(\frac{\omega}{2}\right)$ (см. лемму 1.0) в области: $-\varepsilon\leqslant\operatorname{Re}\gamma\leqslant 0$; $|\operatorname{Im}\gamma|>\frac{\omega}{2}$ величина $\operatorname{Re}\lambda_3$ не может обратиться в нуль, поскольку в противном случае уравнение (4.1) имело бы при $|s|>\frac{1}{2}\omega$ γ — корень, лежащий в полосе $0>\operatorname{Re}\gamma>-\varepsilon>-\varepsilon_0\left(\frac{\omega}{2}\right)$, что противоречит лемме 1.0. Если же $|\operatorname{Im}\gamma|<\frac{\omega}{2}$ и $-\varepsilon<\operatorname{Re}\gamma<0$, то $\operatorname{Re}\lambda_3$ обращается в нуль лишь в точках, принадлежащих $\Gamma_3\bigcup\Gamma_4$ (см. асимптотические представления при $|s|<\delta$ корней многочлена (4.1) в работе [16]), если $0\leqslant|s'|\leqslant\delta$ и $\delta>0$ достаточно мало. Так как $\operatorname{Re}\lambda_3(s',\gamma)<0$ при $|\operatorname{Im}\gamma|>N$ (см. (2.4)) и $\lambda_3(s',\gamma)<0$ при $\gamma\in(-\varepsilon, \gamma_{4,0})$ (см. лемму 2.9), то $\operatorname{Re}\lambda_3(s',\gamma)<0$ при всех $\gamma\in\Omega^\varepsilon_3\bigcup\Omega^\varepsilon_4$ и $0<|s'|<\delta$.

Замечание 4.1. Поскольку $\operatorname{Re}\lambda_3(s',\gamma)<0$ при $\gamma\in\Omega^\varepsilon_3\bigcup\Omega^\varepsilon_4$, то продолжив по непрерывности функцию $\lambda_3(s',\gamma)$ на «левые» и «правые» берега разрезов вдоль кривых Γ_3 и Γ_4, мы можем утверждать, что $\operatorname{Re}\lambda_3(s',\gamma)\leqslant 0$ во всей полосе $-\varepsilon\leqslant\operatorname{Re}\gamma\leqslant 0$.

Лемма 4.2. *При любых* $x'\in R_2$, $x_3\geqslant 0$, $t\geqslant 0$

$$\lim_{r\to 0}G^{\delta}_{j,m,3}(x,t,S^{(3)}_r)=\lim_{r\to 0}G^{\delta}_{j,m,3}(x,t,S^{(1)}_r)=0. \tag{4.2}$$

Доказательство проведем для $S^{(3)}_r$ (для $S^{(4)}_r$ — аналогично). В силу замечания 4.1 $|\exp(\lambda_3x_3)|\leqslant 1$ для $\gamma\in S^{(3)}_r$. Поскольку $\tau_3(s',\gamma)$ — простой, а, следовательно, аналитичный по γ в окрестности точки $\gamma_{3,0}$ корень уравнения (1.8) и $\tau_3(s',\gamma_{3,0})=0$, то τ_3 представим в виде $\tau_3=(\gamma-\gamma_{3,0})\Psi(s',\gamma)$, где $\Psi(s',\gamma)$ — также аналитическая в некоторой окрестности $\gamma=\gamma_{3,0}$ функция, причем $\Psi(s',\gamma_{3,0})\neq 0$. Действительно, в противном случае не только $\tau_3(s',\gamma_{3,0})=0$, но и $\left.\frac{\partial\tau_3}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=\gamma_{3,0}}=0$. Пусть $P(s',\tau,\gamma)$ — многочлен в уравнении (1.8). Тогда при $\tau=\tau_3(\gamma)$ и $\gamma=\gamma_{3,0}$ имеем $\frac{\partial P}{\partial\gamma}(s',\tau_3,\gamma)|_{\gamma=\gamma_{3,0}}=\frac{\partial P}{\partial\tau}(s',\tau_3,\gamma)\left.\frac{\partial\tau}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=\gamma_{3,0}}+\frac{\partial P}{\partial\gamma}(s',\tau_3,\gamma)|_{\gamma=\gamma_{3,0}}=0$ и, следовательно, $\frac{\partial P}{\partial\gamma}(s', 0, \gamma_{3,0})=0$. Последнее равенство невозможно при малых $|s'|$, так как оно фактически имеет вид: $\omega^2\nu^{-1}+O(|s'|^2)=0$. Воспользовавшись теперь представлениями (3.3)—(3.9), (1.10), $\tau_3=(\gamma-\gamma_{3,0})\Psi(s',\gamma)$ ($\Psi(s',\gamma)\neq 0$), а также оценками (3.14) и замечанием 4.1, получаем неравенство $|K_{j,m,3}(|s'|, \varphi, x_3, \gamma)|\leqslant c|\gamma-\gamma_{3,0}|^{-1/2}$ с постоянной $c>0$, не зависящей от $|s'|$, φ, x_3, γ в окрестности точки $\gamma=\gamma_{3,0}$. Отсюда немедленно находим, что $|G^{\delta}_{j,m,3}(x',x_3,t,S^{(3)}_r)|\leqslant\tilde{c}\sqrt{r}$. Переходя к пределу при $r\to 0$, получаем (4.2).

Лемма доказана.

С помощью рассуждений, проведенных в начале этого раздела, а также с помощью леммы 4.2 мы можем выписать представление

$$G^{\delta}_{j,m,3}(x,t)=G^{\delta}_{j,m,3}(x,t,C_\varepsilon)+\sum_{k=3}^{4}[G^{\delta}_{j,m,3}(x,t,\Gamma^{+}_{k,\varepsilon})+G^{\delta}_{j,m,3}(x,t,\Gamma^{-}_{k,\varepsilon})],$$

где через $G^{\delta}_{j,m,3}(x,t,\Gamma^{\pm}_{k,\varepsilon})$ обозначен интеграл по соответствующему «берегу» кривой $\Gamma_{k,\varepsilon}$, $k=3,4$ (см. рисунок). Повторив почти дословно доказательство леммы 3.1, мы приходим к следующему утверждению

Лемма 4.3. *Существуют $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ такие, что при всех $x'\in R_2$; $x_3>0$ и $t\geqslant 0$ выполняется оценка*

$$|G^{\delta}_{j,m,3}(x,t,C_\varepsilon)|\leqslant c(1+x_3^{-9})e^{-\varepsilon t}, \tag{4.3}$$

с постоянной $c>0$, не зависящей от x и t; $j=1,2,3,4$; $m=1,2,3$.

Перейдем далее к рассмотрению интегралов $G^{\delta}_{j,m,3}(x,t,\Gamma^{\pm}_{k,\varepsilon})$. Учитывая лемму 4.1, запишем интеграл $G^{\delta}_{j,m,3}(x,t,\Gamma^{\pm}_{k,\varepsilon})$ в виде

$$G^{\delta}_{j,m,3}(x,t,\Gamma^{\pm}_{k,\varepsilon})=\frac{1}{(2\pi)^3 i}\int\limits_{|s'|\leqslant\delta}\int\limits_{0}^{\delta_3}e^{i(x',s')+\gamma t}\mathscr{K}_{j,m,3}(s',x_3,\gamma)\left|\frac{\partial\gamma}{\partial s_3}\right|_{\gamma=\gamma_k^{\pm}}ds_3\,ds', \tag{4.4}$$

где функции $\mathscr{K}_{j,m,3}$ определяются формулами (1.14)—(1.17), $\gamma=\gamma_k(|s'|, s_3)$ — параметрическое уравнение кривой Γ_k в комплексной γ-плоскости; индекс «$\pm$» в $\gamma_k^{\pm}$ означает, что при вычислении $\mathscr{K}_{j,m,3}$ следует полагать $\lambda_3=e^{\pm i\pi/2}s_3$ $(s_3\geqslant 0)$. Переходя к сферической системе координат, можно показать, что оценка интегралов (4.4) сводится к оценке интегралов

$$G^{\delta}_{j,m,3}(x,t,\Gamma^{\pm}_{k,\varepsilon})=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\delta}e^{i\tilde\rho\lambda+\gamma_k^{\pm}t}\Phi^{k,\pm}_{j,m}\lambda\,d\lambda\,d\theta\,d\varphi, \tag{4.5}$$

где использованы обозначения

$$\Phi^{k,\pm}_{j,m}(\lambda,\theta,\varphi)=\frac{1}{(2\pi)^3 i}\left[e^{-(\pm is_3)x_3}\left|\frac{\partial\gamma}{\partial s_3}\right|K_{j,m,3}(\lambda\sin\theta,\varphi,x_3,\gamma)\right]_{\gamma=\gamma_k^{\pm}}, \tag{4.6}$$

$\tilde\rho=x_1\sin\theta\cos\varphi+x_2\sin\theta\sin\varphi$; $\lambda=\sqrt{|s'|^2+s_3^2}$; функции $K_{j,m,3}$ определены в (3.3)—(3.6). Отметим, что из уравнения (4.1) для любого корня $\gamma=\gamma_k$, $k=3,4$ этого уравнения имеем

$$\left.\frac{\partial\gamma}{\partial s_3}\right|_{\gamma=\gamma_k}=\frac{(-1)^{k+1}2\nu s_3[(\gamma+\nu|s|^2)^2(3\alpha^2\gamma+\nu^{-1})+2|s|^2(\gamma+\nu|s|^2)+\alpha^2\omega^2\gamma+\omega^2\nu^{-1}]}{(\gamma_k-\gamma_1)(\gamma_k-\gamma_2)(\gamma_4-\gamma_3)}. \tag{4.7}$$

Запишем интеграл (4.5) в виде суммы $G^{\delta,1}_{j,m,3}+G^{\delta,2}_{j,m,3}$, где

$$G^{\delta,n}_{j,m,3}(x,t,\Gamma^{\pm}_{k})=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Pi_k(\delta_1)}e^{i\tilde\rho\lambda+\gamma_t^{\pm}t}\Phi^{k,\pm}_{j,m}(\lambda,\theta,\varphi)\lambda\,d\lambda\,d\theta\,d\varphi; \tag{4.8}$$

$$\Pi_1(\delta_1)=\left\{\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];\ \cos\theta>\delta_1\right\};\ \Pi_2(\delta_1)=\left\{\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];\ \cos\theta<\delta_1\right\}.$$

В следующей лемме проводится оценка интегралов $G^{\delta,1}_{j,m,3}$.

Лемма 4.4. *Существуют $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ такие, что при всех $x'\in R_2$, $x_3>0$, $t>0$ выполняются оценки*

$$|G^{\delta,1}_{j,m,3}(x,t,\Gamma^{\pm}_{k,\varepsilon})|\leqslant c(1+|x|)t^{-2} \tag{4.9}$$

с постоянной $c>0$, не зависящей от x; t; $j=1,2,3,4$; $m=1,2,3$: $k=3,4$.

Доказательство. Асимптотические представления корней уравнения (4.1), полученные при $|s| < \delta$ в работе [16], позволяют записать оценки $\Phi^{k,\pm}_{j,m} = O(\lambda^2)$, $j = 1, 2$; $k = 3,4$; $m = 1, 2, 3$, верные при $\cos\theta > \delta_1$, и равенства $\left|\frac{\partial\gamma}{\partial s_3}\right|_{\gamma=\gamma_k^{\pm}} = \alpha^2 + O(\lambda)$, вытекающие из (4.7). Это позволяет при указанных значениях индексов оценить интеграл

$$|G^{\delta,1}_{j,m,3}(x, t, \Gamma^{\pm}_k)| \leqslant c\int\limits_0^{\delta} e^{-\frac{\nu}{4}\lambda^2 t}\lambda^3\, d\lambda = O(t^{-2}). \quad (4.10)$$

При этом мы учли, что $|s'|^2 + s_3^2 \leqslant \delta^2$, где $\delta > 0$ достаточно малое число, и $\cos\theta > \delta_1$; из представления $\gamma_{3,4} = \pm i\alpha^{-1}\cos\theta\lambda - \frac{1}{2}\nu\lambda^2 + O(\lambda^3)$, обращающихся в нуль при $|s| = 0$ корней уравнения (4.1), полученного в [16], вытекает оценка $\operatorname{Re}\gamma_k(|s'|, s_3) = \operatorname{Re}\gamma_k(\lambda, \theta) \leqslant -\frac{\nu}{4}\lambda^2$, $k = 3, 4$. Если же $j = 3$, то из (4.6) имеем

$$\Phi^{k,\pm}_{3,m} = O(\lambda^2);\ \Phi^{k,\pm}_{3,3} = \alpha^2\omega^{-1}(2\pi)^{-3}i\lambda\cos\theta\,(1 + O(\lambda^2));\quad m = 1,2;\ k = 3, 4; \quad (4.11)$$

Первое из представлений в (4.11) позволяет доказать справедливость неравенства (4.9) при $j = 3$ и $m = 1,2$. Для $j = 3$ и $m = 3$ из (4.11) также находим

$$|G^{\delta,1}_{3,3,3}(x, t, \Gamma^{\pm}_k)| = \frac{\alpha^2\omega^{-1}}{(2\pi)^3}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Pi_1}\int\limits_0^{\delta}\lambda^2\sin\theta e^{\gamma_k t}\,d\lambda\, d\theta\, d\varphi + O(t^{-2})(1 + |x|). \quad (4.12)$$

При этом мы учли, что $\exp(i\rho\lambda) = 1 + i\rho\lambda\int\limits_0^1\exp(i\rho\lambda\tau)\,d\tau$. Интеграл в правой части (4.12) был уже оценен в [16]. Учитывая эту оценку, получим (4.9) и в случае $(j, m) = (3.3)$. Совершенно аналогично оценки (4.9) устанавливаются для $m = 1, 2, 3$; $k = 3,4$; $j = 4$.

Лемма доказана.

Переходя к оценке интеграла $G^{\delta,2}_{j,m,3}$, сделаем в указанном интеграле замену переменных интегрирования $\lambda = \rho\sin\sigma$; $\cos\theta = \rho\cos\sigma$; $0 < \rho \leqslant \delta_2 = \sqrt{\delta^2 + \delta_1^2}$; $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$ и рассмотрим интегралы

$$G^{\delta,n}_{j,m,3}(x, t, \Gamma^{\pm}_k) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Pi_n(\delta_3,\delta_4)}\int\limits_0^{\delta_2} e^{i\mu\rho+\gamma_k t}\Phi^{k,\pm}_{j,m}\rho^2\sin\sigma\, d\rho\, d\sigma\, d\varphi; \quad (4.13)$$

$$n = 3, 4;\quad \Pi_3(\delta_3, \delta_4) = \left\{\sigma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];\quad \delta_4 < \sin\sigma < \sqrt{1 - \delta_3^2}\right\};$$

$$\Pi_4(\delta_3, \delta_4) = \left\{\sigma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];\quad 0 < \sin\sigma < \delta_4\right\},$$ где $\delta_3 > 0$, $\delta_4 > 0$ — достаточно малые числа, $\mu = \tilde\mu(x, \rho, \sigma, \varphi) + x_3\cos\sigma\sin\sigma\cdot\rho$; $\tilde\mu = \sqrt{1 - \rho^2\cos^2\sigma}\,(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi)\sin\sigma$.

Справедлива следующая

Лемма 4.5. *Существуют положительные числа ε, δ_2, δ_3, δ_4 такие, что при всех $x' \in R_2$; $x_3 > 0$; $t > 0$ выполняются оценки*

$$|G^{\delta,n}_{j,m,3}(x, t, \Gamma^{\pm}_{k,\varepsilon})| \leqslant ct^{-2},\ j = 1, 2, 3, 4;\ k, n = 3, 4;\ m = 1, 2, 3;\ (m, n) \neq (3,4); \quad (4.14)$$

$$|G^{\delta,4}_{j\,3,3}(x, t, \Gamma^{\pm}_{k,\varepsilon})| \leqslant c_{\varepsilon_1}t^{-2+\varepsilon_1},\ j = 1, 2, 3, 4;\ k = 3,4,$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — *произвольное число и постоянные* $c > 0$ *и* $c_{\varepsilon_1} > 0$ *не зависит от* x *и* t.

Доказательство. При $\delta_4 \leqslant \sin\sigma \leqslant \sqrt{1-\delta_3^2}$ справедлива оценка (см. [16])

$$|(\gamma_k - \gamma_1)(\gamma_k - \gamma_2)(\gamma_3 - \gamma_4)| \geqslant c\rho^2 \,|\sin\sigma - d^*(\rho)|^{1/2}, \quad k = 3,4, \tag{4.15}$$

где $d^*(\rho) = ((4 + O(\rho^2))(4 + \alpha^2\nu^2)^{-1})^{1/2}$; $0 < \rho < \sqrt{\delta^2 + \delta_1^2}$; $\delta_3 \leqslant 1/2$. Из полученных в [16] асимптотических представлений

$$\gamma_{3,4} = \pm \frac{1}{2}\rho^2 \sin^2\sigma((4 + \alpha^2\nu^2)^{-2} - \sin^{-2}\sigma(4\alpha^{-2} + O(\rho^2)) - \frac{\nu}{2}\rho^2\sin^2\sigma + O(\rho^4)$$

вытекает неравенство $|\gamma_k| \leqslant c^*\rho^2$, поэтому $|\Phi_{j,m}^{k,\pm}| \leqslant c\rho\,|\sin\sigma - d^*(\rho)|^{-1/2}$. Учитывая полученное в [16] неравенство

$$\int\limits_{\delta_4}^{\sqrt{1-\delta_3^2}} \frac{1}{2}|z - d^*(\rho)|^{-1/2} dz = \sqrt{|\delta_4 - d^*(\rho)|} + \sqrt{\left|\sqrt{1-\delta_3^2} - d^*(\rho)\right|} \leqslant c(\delta_3, \delta_4)$$

и оценки

$$\operatorname{Re}\gamma_3 \leqslant -\frac{\nu^*}{2}\rho^2\sin^2\sigma + O(\rho^4); \quad \operatorname{Re}\gamma_4 \leqslant -\frac{\nu}{2}\rho^2\sin^2\sigma + O(\rho^4), \quad 0 < \nu^* < \nu,$$

получим следующую оценку для интеграла $G_{j,m,3}^{\delta,3}$:

$$|G_{j,m,3}^{\delta,3}(x, t, \Gamma_{k,\varepsilon}^{\pm})| \leqslant c\int\limits_0^{\delta_2} e^{\operatorname{Re}\gamma_k t}\rho^3\, d\rho \leqslant ct^{-2}; \quad k = 3, 4.$$

Переходя к оценке интегралов $G_{j,m,3}^{\delta,4}$, заметим, что в случае $0 < \sin\sigma < \delta_4$ в тех же работах получены асимптотические представления, позволяющие записать оценку $\left|\frac{\partial\gamma}{\partial s_3}\right|_{\gamma=\gamma_k} \leqslant c$. Так как из следствия 2.2 $y_3|_{\gamma=\gamma_k} = (\gamma_k\alpha^2\nu + 1)^{-1}\gamma_k + O(|s'|^2)$, а из представления $\gamma_{3,4} = \pm\alpha^{-1}i\rho^2\sin\sigma - \nu\rho^2\sin^2\sigma + O(\rho^2\sin^3\sigma)$, $0 \leqslant \sin\sigma \leqslant \delta_4$ (см. [16]) вытекает $\gamma_k = O(\rho^2\sin\sigma)$, то при достаточно малых положительных δ, δ_1, δ_4 имеем $|y_3|_{\gamma=\gamma_k}| \leqslant 2\alpha^{-1}\rho^2\sin\sigma$, $k = 3,4$. Учитывая, что по следствию 2.2 $|(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)| \leqslant \frac{1}{4}\omega^2$, выписываем оценку

$$|\Phi_{1,m}^{k,\pm}| \leqslant |4\omega^{-3}\rho\sin\sigma||\omega\sin\varphi + O(\rho^2\sin\sigma)||O(\rho^q\sin^q\sigma)|,$$

где $q = q(m)$ и $q(1) = q(2) = 2$; $q(3) = 1$. Полученное неравенство показывает, что интегралы $G_{j,m,3}^{\delta,4}(x, t, \Gamma_{k,\varepsilon}^{\pm})$ аналогичны интегралам, рассмотренным в [28] (см. лемму 3, 4 и с. 42—43), поэтому выполнены оценки (4.14) для $j = 1, 2$. Случай $j = 3,4$ изучается аналогично.

Лемма доказана.

Нами получены оценки интегралов $G_{j,m,3}^{\delta}(x, t, \Gamma_{k,\varepsilon}^{\pm})$, однако не по всей кривой $\Gamma_{k,\varepsilon}^{\pm}$, а только по той ее части, которая отделена от «точки поворота» $\gamma_{k,0}$. Для того чтобы завершить оценку интеграла $G_{j,m,3}^{\delta}(x, t, \Gamma_{k,\varepsilon}^{\pm})$, следует построить асимптотику при $t \to \infty$ интегралов указанного вида по некоторым интервалам кривой $\Gamma_{k,\varepsilon}^{\pm}$, примыкающим к точкам поворота $\gamma_{k,0}$ и лежащим на отрицательной вещественной полуоси (см. лемму 4.1). Для этого мы используем другой подход. Обозначим

$$\begin{aligned}\mathscr{G}_{j,m}^{k}(x, t) = \{&G_{j,m,3}^{\delta,2}(x, t, \Gamma_k^-) - G_{j,m,3}^{\delta,3}(x, t, \Gamma_k^-) - G_{j,m,3}^{\delta,4}(x, t, \Gamma_k^-)\} + \\ &+ \{G_{j,m,3}^{\delta,2}(x, t, \Gamma_k^+) - G_{j,m,3}^{\delta,3}(x, t, \Gamma_k^+) - G_{j,m,3}^{\delta,4}(x, t, \Gamma_k^+)\},\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$k = 3,4;\ j = 1, 2, 3, 4;\ m = 1, 2, 3.$$

Эти интегралы могут быть записаны в виде

$$\mathcal{G}^k_{j,\,m}(x,t)=\frac{1}{[(2\pi)^3 i}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\delta}\int\limits_{H_n} e^{i\rho\xi-zt}\mathcal{F}_{j,\,m}(\xi,\varphi,-z)\,g_j(\xi,x_3,-z)\,dz\,d\xi\,d\varphi; \quad (4.17)$$

$H_3=\{z\colon -\gamma_{3,0}\leqslant z\leqslant \nu_3\xi^2\}$; $H_4=\{z\colon \nu_4\xi^2\leqslant z\leqslant \nu\xi^2\}$; $\nu>\nu_4>\nu_3>0$;

$\delta>0$ — достаточно малое число;

$$\mathcal{F}_{1,m}=id_{m,3}(\xi,\varphi,\gamma)\,\xi\,(\cos\varphi y_3+\omega\sin\varphi)\,[\omega(y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_2-y_3)]^{-1}; \quad (4.18)$$

$$\mathcal{F}_{2,m}=-id_{m,3}(\xi,\varphi,\gamma)\,\xi\,(-\sin\varphi y_3+\omega\cos\varphi)\,[\omega(y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_2-y_3)]^{-1}; \quad (4.19)$$

$$\mathcal{F}_{3,m}=-\mathcal{F}_{4,m}=d_{m,3}(\xi,\varphi,\gamma)\,(y_3^2+\omega^2)\,[\omega(y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_2-y_3)]^{-1}; \quad (4.20)$$

$$g_j(\xi,x_3,z)=e^{\lambda_3x_3}\big|_{\gamma=ze^{-i\pi}}-e^{\lambda_3x_3}\big|_{\gamma=ze^{i\pi}};\quad j=1,2,4; \quad (4.21)$$

$$g_3(\xi,x_3,z)=\lambda_3y_3^{-1}e^{\lambda_3x_3}\big|_{\gamma=ze^{-i\pi}}-\lambda_3y_3^{-1}e^{\lambda_3x_3}\big|_{\gamma=ze^{i\pi}}. \quad (4.22)$$

Справедлива следующая

Лемма 4.6. *Существует* $\nu_4\in(0,\infty)$ *такое, что для интеграла* $\mathcal{G}^4_{j,m}(x,t)$ *при* $j=1,2,3,4$; $m=1,2,3$ *и при всех* $x'\in R_2$, $x_3>0$, $t>0$ *справедлива оценка*

$$|\mathcal{G}^4_{j,\,m}(x,t)|\leqslant ct^{-2} \quad (4.23)$$

с постоянной $c>0$, *не зависящей от* x *и* t.

Доказательство. Так как при $z\in[\nu_4\xi^2,\ \nu\xi^2]$ выполнено $\operatorname{Re}\lambda_3(\xi,\gamma)\,|_{\gamma=ze^{\pm i\pi}}=0$, то из (2.14), (2.16) следует

$$|g_j(\xi,x_3,z)|\leqslant 2,\quad j=1,2,4; \quad (4.24)$$

$$|g_3(\xi,x_3,z)|\leqslant 2\sqrt{|\psi_3(\psi_3-1)|}\,(\nu\xi^2-z)^{-1/2};\quad (\nu\xi^2>z>\nu_4\xi^2).$$

При помощи леммы 2.8 оценку $g_3(\xi,x_3,z)$ можно продолжить

$$|g_3(\xi,x_3,z)|\leqslant 2C\xi\,(\nu\xi^2-z)^{-1/2}. \quad (4.25)$$

Учитывая, что при $0<\xi<\delta$: $|d_{3,m}(\xi,\gamma)|\leqslant c\xi$, получаем из (4.18)—(4.22); (4.24), (4.25) оценки

$$|\mathcal{F}_{j,m}(\xi,\varphi,\gamma)|\leqslant c\xi^2,\ j=1,2;\ |\mathcal{F}_{j,m}(\xi,\varphi,\gamma)|\leqslant c\xi,\ j=3,4;\ m=1,2,3. \quad (4.26)$$

Применяя (4.24)—(4.26) для оценки интеграла $\mathcal{G}^4_{j,m}$, находим

$$|\mathcal{G}^4_{j,\,m}(x',x_3,t)|\leqslant c'\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\delta}\xi^3e^{-\nu_4\xi^2t}\,d\xi\,d\varphi\leqslant ct^{-2},$$

что и доказывает (4.23).

Лемма доказана.

При оценке интеграла $\mathcal{G}^3_{j,m}(x,t)$ воспользуемся разложением

$$\exp(\lambda_3x_3)=1+\lambda_3x_3\Phi_0(\lambda_3x_3);\quad \Phi_0(\tau)=\int\limits_0^1\exp(\tau\sigma)\,d\sigma, \quad (4.27)$$

которое позволяет представить этот интеграл в виде

$$\mathcal{G}^3_{j,\,m}=\frac{1}{(2\pi)^2 i}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\delta}e^{i\rho\xi}\,[\mathcal{J}^0_{j,\,m}(\xi,\varphi,x_3,t)+\mathcal{J}^1_{j,\,m}(\xi,\varphi,x_3,t)]\,d\xi\,d\varphi, \quad (4.28)$$

где

$$\mathcal{J}^n_{j,m} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\gamma_{3,0}|}^{\nu_3\xi^2} e^{-zt} \mathcal{F}^n_{j,m}(\xi, \varphi, x_3, -z)\, g^n_j(\xi, \varphi, z)\, dz; \tag{4.29}$$

$$\mathcal{F}^0_{j,m} = \mathcal{F}_{j,m}(\xi, \varphi, \gamma)\, y_3(\xi, \gamma)\, x_3,\ j = 1, 2, 4; \quad \mathcal{F}^0_{3,m} = \mathcal{F}_{3,m}(\xi, \varphi, \gamma); \tag{4.30}$$

$$\mathcal{F}^1_{j,m} = \mathcal{F}_{j,m}(\xi, \varphi, \gamma)\, \tau_3(\xi, \gamma)\, x_3^2,\ j = 1, 2, 4; \quad \mathcal{F}^1_{3,m} =$$
$$= \mathcal{F}_{3,m}(\xi, \varphi, \gamma)\, \tau_3(\xi, \gamma)\, y_3^{-1}(\xi, \gamma)\, x_3; \tag{4.31}$$

$$g^0_j \equiv g_0(\xi, \varphi, z) = \lambda_3 y_3^{-1}\big|_{\gamma = ze^{-i\pi}} - \lambda_3 y_3^{-1}\big|_{\gamma = ze^{i\pi}}; \tag{4.32}$$

$$g^1_j = \Phi_1(\lambda_3 x_3)\big|_{\gamma = ze^{-i\pi}} - \Phi_1(\lambda_3 x_3)\big|_{\gamma = ze^{i\pi}}, \quad j = 1, 2, 4; \tag{4.33}$$

$$\Phi_1(\tau) = \int\limits_0^1 \exp(\tau\sigma)(1 - \sigma)\, d\sigma;$$

$$g^1_3 = \Phi_0(\lambda_3 x_3)\big|_{\gamma = ze^{-i\pi}} - \Phi_0(\lambda_3 x_3)\big|_{\gamma = ze^{i\pi}}. \tag{4.34}$$

Лемма 4.7. *Для интеграла* $\mathcal{J}^1_{j,m}$, $j = 1, 2, 3, 4$; $m = 1, 2, 3$ *при* $t > 0$; $0 \leqslant \xi \leqslant \delta$; $\varphi \in [0, 2\pi]$; $x_3 \geqslant 0$ *справедлива оценка*

$$|\mathcal{J}^1_{j,m}(\xi, \varphi, x_3, t)| \leqslant c(1 + x_3^2)\, \xi^3 t^{-1} \exp(\gamma_{3,0} t), \tag{4.35}$$

где постоянная $c > 0$ *не зависит от* ξ, φ, x_3, t.

Доказательство. Из (4.33), (4.34) при $\gamma \in [-\nu_3\xi^2, \gamma_{3,0}]$, $\xi \in [0, \delta]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ выполняется оценка $|g^1_j(\xi, \varphi, x_3, \gamma)| \leqslant 2$. Кроме того, из леммы 2.8 следует

$$|\tau_3| = \nu^{-1}\,|(\gamma + \nu\xi^2)(1 - \psi_3(\xi, \gamma))\,\psi_3^{-1}(\xi, \gamma)| \leqslant c\xi^4; \tag{4.36}$$
$$|\tau_3 y_3^{-1}| = \nu^{-1}\,|1 - \psi_3(\xi, \gamma)| = \nu^{-1}|\alpha^2\nu\gamma + O(|\gamma + \nu\xi^2|)| \leqslant c\xi^2.$$

Из формул (2.12), (3.7)—(3.9) вытекает

$$|d_{m,3}(\xi, \varphi, \gamma)| \leqslant c\gamma^2;\ m = 1,2;\ |d_{3,3}(\xi, \varphi, \gamma)| \leqslant c\xi. \tag{4.37}$$

Поэтому, учитывая лемму 3.1 и представления (4.33), (4.34), из (4.36), (4.37) получим

$$|\mathcal{J}^1_{j,m}(\xi, \varphi, x_3, t)| \leqslant c\xi^3(1 + x_3^2) \int\limits_{|\gamma_{3,0}|}^{\nu_3\xi^2} e^{-zt}\, dz \leqslant c(1 + x_3^2)\, \xi^3 e^{\gamma_{3,0}t} t^{-1}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.8. *Для интегралов* $\mathcal{J}^0_{j,m}(\xi, \varphi, x_3, t)$, $m = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 4$ *при всех* $t > 0$; $0 < \xi < \delta$; $\varphi \in [0, 2\pi]$, $x_3 \geqslant 0$ *справедлива оценка*

$$|\mathcal{J}^0_{j,m}(\xi, \varphi, x_3, t)| \leqslant c x_3 t^{-\frac{3}{2}} \xi^2 e^{\gamma_{3,0}t} \tag{4.38}$$

с постоянной $c > 0$, *не зависящей от* ξ, φ, x_3, t.

Доказательство. С помощью лемм 2.8, 2.9 находим оценку $|g_0(\xi, \varphi, z)| \leqslant c\xi^{-1}\sqrt{z - |\gamma_{3,0}|}$, причем постоянная $c > 0$ не зависит от z, ξ, φ. Кроме того, из представлений (4.30), (4.31), как и в лемме 4.7, вытекает $|\mathcal{F}^0_{j,m}(\xi, \varphi, x_3, -z)| \leqslant c\xi^3 x_3$, $m = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 4$, причем постоянная $c > 0$ не зависит от z, φ, x_3, ξ. Оценивая при помощи приведенных неравенств подынтегральное представление в $\mathcal{J}^0_{j,m}$, точно так же, как и в предыдущей лемме, получим оценку (4.38).

Лемма доказана.

Перейдем к рассмотрению интегралов $\mathcal{J}^0_{3,m}$, $m = 1, 2, 3$, которые можно записать, используя (4.31), (4.34), (4.18)—(4.22) в виде

$$\mathcal{J}^0_{3,m} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\gamma_{3,0}|}^{\nu_3\xi^2} e^{-zt}\,\frac{d_{m,3}(\xi,\varphi,-z)\,(y_3^2+\omega^2)\sqrt{|Q(\xi,-z)|}\,dz}{\omega\,(y_1-y_2)\,(y_1-y_3)\,(y_2-y_3)}, \qquad (4.39)$$

где функции Q, $d_{m,3}$ ($m = 1, 2, 3$) определены в (2.14), (3.7)—(3.9).

Лемма 4.9. *Для интегралов* $\mathcal{J}^0_{3,m}(\xi, \varphi, t)$ *при* $m = 1,2$; $t > 0$; $0 < \xi < \delta$; $\varphi \in [0, 2\pi]$ *справедливы оценки*

$$|\mathcal{J}^0_{3,m}(\xi,\varphi,t)| \leqslant c\xi t^{-3/2}e^{\gamma_{3,0}t}, \quad m = 1, 2 \qquad (4.40)$$

с постоянной $c > 0$, *не зависящей от* ξ, φ, t.

Доказательство. Воспользовавшись представлениями

$$(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) = \omega^2 + O(\xi^2); \qquad d_{1,3} = (i\omega\nu\cos\varphi\xi^2 + O(\xi^4))(y_2 - y_1);$$
$$d_{2,3} = (i\omega\sin\varphi\xi^2 + O(\xi^4))(y_2 - y_1), \qquad (4.41)$$

вытекающими из (2.11) при $-\nu_3\xi^2 < \gamma < \gamma_{3,0}$, выведем из (4.39) при $0 < \xi < \delta$ неравенство

$$|\mathcal{J}^0_{3,m}| \leqslant c\xi e^{\gamma_{3,0}t}\int\limits_0^{-(\nu_3\xi^2-|\gamma_{3,0}|)} e^{qt}\sqrt{-q}\,\sqrt{\frac{|1-q\chi_3(q,\xi)|\,|\chi_3(q,\xi)|}{\nu^2+\nu\xi^{-2}(\gamma_{3,0}+q)}}\,dq, \qquad (4.42)$$

где $\chi_3 = -q^{-1}(\psi_3(\gamma_{3,0} + q, \xi) - 1)$, а асимптотика функции $\psi_3(\gamma, \xi)$ приведена в (2.19). Поскольку $\psi_3 = (\nu\xi^2 + \gamma_{3,0} + q)\,y_3^{-1}$ и $y_3 = \nu\xi^2 + \gamma_{3,0} + (\rho_3(\xi) + O(q))\,q$ (см. (2.17)), то

$$\chi_3(q,\xi) = \chi_3(0,\xi) - q\xi^{-2}\chi_3'(q,\xi), \qquad (4.43)$$

где

$$\chi_3(0,\xi) = (\rho_3 - 1)\,\xi^{-2}(\nu + \gamma_{3,0}\xi^{-2})^{-1};$$
$$\chi_3'(q,\xi) = \frac{(\rho_3-1)\,\xi^{-2}(\rho_3(\xi)+O(q)) + O(q)\,q^{-1}(\nu+\gamma_{3,0}\xi^{-2})}{(\nu+\gamma_{3,0}\xi^{-2})\,(\nu+\gamma_{3,0}\xi^{-2}+q\xi^{-2}(\rho_3(\xi)+O(q)))}. \qquad (4.44)$$

Из (4.44), (2.17) и (2.18) вытекает, что при $0 < -q < \nu_3\xi^2 - |\gamma_{3,0}|$, $0 < \xi < \delta$ и достаточно малом $\delta > 0$ существуют $c_1 > 0$ и $c_1' > 0$, такие что справедливы оценки

$$|\chi_3(0,\xi)| \leqslant c_1; \qquad |\chi_3'(q,\xi)| \leqslant c_1'. \qquad (4.45)$$

Если учесть, что

$$(\nu + \gamma_{3,0}\xi^{-2} + q\xi^{-2})^{-1} \leqslant (\nu + \gamma_{3,0}\xi^{-2})^{-1} + q\xi^{-2}(\nu + \gamma_{3,0}\xi^{-2})^{-1}(\nu + \gamma_{3,0}\xi^{-2} + q\xi^{-2})^{-1},$$

то из (4.43), (4.45) вытекает представление

$$\frac{|1-q\chi_3(q,\xi)|\,|\chi_3(q,\xi)|}{\nu^2+\nu\xi^{-2}(\gamma_{3,0}+q)} = \frac{|\chi_3(0,\xi)|}{\nu^2+\nu\gamma_{3,0}\xi^{-2}} - q\xi^{-2}|\chi_3''(q,\xi)|, \qquad (4.46)$$

причем для всех $q \in (0, \nu_3\xi^{-2} - |\gamma_{3,0}|)$, $\xi \in (0, \delta)$ верно $|\chi_3''(q,\xi)| \leqslant c_2$. Из последней оценки, (4.46), (4.42) выводим

$$|\mathcal{J}^0_{3,m}| \leqslant c\xi e^{\gamma_{3,0}t}\int\limits_0^{-(\nu_3\xi^2-|\gamma_{3,0}|)} e^{qt}\sqrt{-q}\,dq \leqslant c't^{-3/2}\xi e^{\gamma_{3,0}t}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.10. *Для интеграла $\mathcal{J}^0_{3,3}(\xi, t)$ при $0 < \xi < \delta$ и $t \to \infty$ справедливо асимптотическое представление*

$$\mathcal{J}^0_{3,3}(\xi, t) = (2\pi^2)^{-1} e^{\gamma_{3,0}t} (|\chi_3(0, \xi)| (\nu^2 + \nu\xi^{-2}\gamma_{3,0})^{-1})^{-1/2} \times \times S_0(\gamma_{3,0}, \xi) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) t^{-3/2} + e^{\gamma_{3,0}t} \xi^{2\varepsilon-2} t^{-5/2+\varepsilon} f^{\varepsilon}_{3,3}(\xi, t), \tag{4.47}$$

где $S_0(\gamma, \xi) = (y_3^2 + \omega^2)((y_1(\xi, \gamma) - y_2(\xi, \gamma))(y_2(\xi, \gamma) - y_3(\xi, \gamma)))^{-1}$, *а функция* $f^{\varepsilon}_{3,3}(\xi, t)$ *при каждом* $\varepsilon > 1/2$ *равномерно по* $\xi \in (0, \delta)$ *и* $t > 0$ *ограничена.*

Доказательство. При $m = 3$ интеграл (4.39) можно записать с помощью (3.9) в виде

$$\mathcal{J}^0_{3,3} = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{\gamma_{3,0}t} \int\limits_0^{-(\nu_3\xi^2 - |\gamma_{3,0}|)} e^{qt} \sqrt{-q} \frac{y_3^2 + \omega^2}{(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)} \times \sqrt{\frac{|1 - q\chi_3(q, \xi)| |\chi_3(q, \xi)|}{\nu^2 + \nu\xi^{-2}(\gamma_{3,0} + q)}} dq.$$

Последний интеграл, в свою очередь, представим в виде суммы

$$\mathcal{J}^0_{3,3} = \overset{0}{\mathcal{J}}_1(\xi, t) + \overset{0}{\mathcal{J}}_2(\xi, t), \text{ где}$$

$$\mathcal{J}^0_1(\xi, t) = \frac{e^{\gamma_{3,0}t}}{2\pi^2} \sqrt{\frac{|\chi_3(0, \xi)|}{\nu^2 + \nu\xi^{-2}\gamma_{3,0}}} \int\limits_0^{-(\nu_3\xi^2 - |\gamma_{3,0}|)} e^{qt} \sqrt{-q}\, S_0(\gamma_{3,0} + q, \xi)\, dq; \tag{4.48}$$

$$\overset{0}{\mathcal{J}}_2(\xi, t) = \frac{e^{\gamma_{3,0}t}}{2\pi^2} \int\limits_0^{-(\nu_3\xi^2 - |\gamma_{3,0}|)} e^{qt} \sqrt{-q}\, S_1(q, \xi)\, dq; \tag{4.49}$$

$$S_1(q, \xi) = (y_3^2 + \omega^2)(y_1 - y_3)^{-1}(y_2 - y_3)^{-1} \{|1 - q\chi_3(q, \xi)|^{1/2} |\chi_3(q, \xi)|^{1/2} \times (\nu^2 + \nu\xi^{-2}(\gamma_{3,0} + q))^{-1/2} - |\chi_3(0, \xi)|^{1/2}(\nu^2 + \nu\xi^{-2}\gamma_{3,0})^{-1/2}\}.$$

Рассмотрим интеграл $\overset{0}{\mathcal{J}}_1(\xi, t)$. Аналитичность корней y_j по $\gamma \in [-\nu\xi^2, 0]$ $(0 \leqslant \xi \leqslant \delta)$ позволяет утверждать, что $S_0(\xi, \gamma)$ имеет равномерно ограниченные производные по γ при $\xi \in (0, \delta)$ и $\gamma \in (-\nu\xi^2, 0)$. Поэтому, применяя лемму Ватсона (см. [29]), получаем из (4.48)

$$\overset{0}{\mathcal{J}}_1 = \frac{e^{\gamma_{3,0}t}}{2\pi^2} \sqrt{\frac{|\chi_3(0, \xi)|}{\nu^2 + \nu\xi^{-2}\gamma_{3,0}}} S_0(\gamma_{3,0}, \xi) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) t^{-3/2} + \frac{e^{\gamma_{3,0}t}}{2\pi^2} t^{-5/2} f'(\xi, t), \tag{4.50}$$

где $|f'(\xi, t)| \leqslant c$ $(t > 0;\ \xi \in [0, \delta])$.

Учитывая (4.46), имеем $|S_1(q, \xi)| \leqslant c|q|\xi^{-2}$; $|\chi_3''(q, \xi)| \leqslant c|q|\xi^{-2}$. Из этих неравенств получим

$$|\overset{0}{\mathcal{J}}_2(\xi, t)| \leqslant \frac{ce^{\gamma_{3,0}t}}{\xi^2} \int\limits_0^{-(\nu_3\xi^2 - |\gamma_{3,0}|)} e^{qt}(-q)^{\frac{3}{2}} dq \leqslant ce^{\gamma_{3,0}t} \xi^{-2+2\varepsilon} t^{-\frac{5}{2}+\varepsilon}$$

при любом $\varepsilon > 1/2$. Из последнего неравенства и (4.50) вытекает утверждение леммы.

Доказательство теоремы 2. С помощью лемм 3.1—3.4 и равенства (3.10) немедленно получаем неравенство

$$|G_{j,m,l}(x, t)| \leqslant c[(1 + |x|)(1 + x_3^{-4}) t^{-2} + (1 + x_3^{-9}) e^{-\varepsilon t}], \tag{4.51}$$

справедливое при всех $x' \in R_2$, $x_3 > 0$, $t > 0$ и для $j = 1, 2, 3, 4$; $m = 1, 2, 3$; $l = 1, 2$. Учитывая лемму 3.1 и равенство (3.10) для оценки $G_{j,m,3}$, нам остается оценить $G^{\delta}_{j,m,3}$. Представление (4.4) и лемма 4.3 позволяют свести оценку $G^{\delta}_{j,m,3}$ к оценке выражений $G^{\delta}_{j,m,3}(x,\,t,\,\Gamma^{+}_{k}) + G^{\delta}_{j,m,3}(x,\,t,\,\Gamma^{-}_{k})$, $k = 3, 4$ (здесь и в дальнейшем для упрощения записи индекс «ε» в обозначениях $\Gamma^{\pm}_{k,\varepsilon}$ опускается). Из представления (4.16) имеем

$$G^{\delta}_{j,m,3}(\Gamma^{+}_{k}) + G^{\delta}_{j,m,3}(\Gamma^{-}_{k}) = G^{\delta,1}_{j,m,3}(\Gamma^{+}_{k}) + G^{\delta,1}_{j,m,3}(\Gamma^{-}_{k}) + G^{\delta,3}_{j,m,3}(\Gamma^{+}_{k}) + \\ + G^{\delta,3}_{j,m,3}(\Gamma^{-}_{k}) + G^{\delta,4}_{j,m,3}(\Gamma^{+}_{k}) + G^{\delta,4}_{j,m,3}(\Gamma^{-}_{k}) + \mathscr{G}^{k}_{j,m}(x,\,t). \qquad (4.52)$$

Отсюда при $k = 4$ с помощью лемм 4.3—4.6 находим

$$|G^{\delta}_{j,m,3}(\Gamma^{+}_{4}) + G^{\delta}_{j,m,3}(\Gamma^{-}_{4})| \leqslant c\,[(1 + |x|)\,t^{-2} + (1 + x_3^{-9})\,e^{-\varepsilon t}], \quad m = 1, 2;$$
$$|G^{\delta}_{j,3,3}(\Gamma^{+}_{4}) + G^{\delta}_{j,3,3}(\Gamma^{-}_{4})| \leqslant c\,[(1 + |x|)\,t^{-2} + t^{-2+\varepsilon_1} + (1 + x_3^{-9})\,e^{-\varepsilon t}]; \qquad (4.53)$$
$$\varepsilon,\ \varepsilon_1 > 0.$$

Аналогично, из представления (4.52) при $k = 3$ находим

$$G^{\delta}_{j,m,3}(\Gamma^{+}_{3}) + G^{\delta}_{j,m,3}(\Gamma^{-}_{3}) = \breve{G}^{\delta}_{j,m,3}(\Gamma^{+}_{3}) + \breve{G}^{\delta}_{j,m,3}(\Gamma^{-}_{3}) + \mathscr{G}^{3}_{j,m}(x,\,t), \qquad (4.54)$$

где $\breve{G}^{\delta}_{j,m,3}(\Gamma^{\pm}_{3}) = G^{\delta,1}_{j,m,3}(\Gamma^{\pm}_{3}) + G^{\delta,3}_{j,m,3}(\Gamma^{\pm}_{3}) + G^{\delta,4}_{j,m,3}(\Gamma^{\pm}_{3})$.

Из лемм 4.3—4.5 выводим оценку

$$|\breve{G}^{\delta}_{j,m,3}(\Gamma^{\pm}_{3})| \leqslant c\,[(1 + |x|)\,t^{-2} + t^{-2+\varepsilon_1} + (1 + x_3^{-9})\,e^{-\varepsilon t}]; \quad \varepsilon,\ \varepsilon_1 > 0. \qquad (4.55)$$

Таким образом, нам остается вычислить асимптотику интеграла $\mathscr{G}^{3}_{j,m}(x,\,t)$. Для этого воспользуемся представлением (4.28). Из (2.8) при $0 < \xi < \delta$ легко находим оценку

$$\left|\int_0^{\delta} \xi^{l} \exp(\gamma_{3,0} t)\,d\xi\right| \leqslant ct^{-\frac{l+1}{4}}, \quad l \geqslant 0. \qquad (4.56)$$

Поэтому с помощью неравенства (4.35) получаем оценку

$$\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} e^{i\rho\xi}\mathcal{Y}^{1}_{j,m}(\xi,\,\varphi,\,x_3,\,t)\,d\xi\,d\varphi\right| \leqslant c\,(1 + x_3^2)\,t^{-2}; \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad m = 1, 2, 3. \qquad (4.57)$$

Аналогично из неравенств (4.38), (4.40), (4.56)

$$\left|\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} e^{i\rho\xi}\mathcal{Y}^{0}_{j,m}(\xi,\,\varphi,\,x_3,\,t)\,d\xi\,d\varphi\right| \leqslant cx_3^{l}t^{-2}, \qquad (4.58)$$

причем $l = 1$ при $j = 1, 2, 4$; $m = 1, 2, 3$; $l = 0$ при $j = 3$; $m = 1, 2$. Случай $j = m = 3$ будет рассмотрен отдельно. Представления (4.28), (4.16), оценки (4.57), (4.58), (4.55), позволяют выписать неравенства

$$|G^{\delta}_{j,m,3}(\Gamma^{+}_{3}) + G^{\delta}_{j,m,3}(\Gamma^{-}_{3})| \leqslant c\,((1 + |x'| + x_3^2)\,t^{-2} + t^{-2+\varepsilon_1} + (1 + x_3^{-9})\,e^{-\varepsilon t}), \qquad (4.59)$$

при $j = 1, 2, 4$; $m = 3$; $\varepsilon_1 > 0$;

$$|G^{\delta}_{j,m,3}(\Gamma^{+}_{3}) + G^{\delta}_{j,m,3}(\Gamma^{-}_{3})| \leqslant c\,((1 + |x'| + x_3^2)\,t^{-2} + (1 + x_3^{-9})\,e^{-\varepsilon t}), \qquad (4.60)$$

при $j = 1, 2, 3, 4$; $m = 1, 2$.

Нам остается рассмотреть интеграл

$$\overset{0}{\mathscr{G}}{}^{3}_{3,3}(x,\,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} e^{i\rho\xi}\overset{0}{\mathcal{Y}}_{3,3}(\xi,\,\varphi,\,x_3,\,t)\,d\xi\,d\varphi, \qquad (4.61)$$

который можно записать, воспользовавшись (3.40) и леммой 4.10, в виде $\overset{0}{\mathscr{G}}{}^{3}_{3,3} = \breve{\mathscr{G}}^{3}_{3,3} + \tilde{\mathscr{G}}^{3}_{3,3}$, где

$$\mathscr{G}^3_{3,3}=\frac{1}{2\pi^2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)t^{-3/2}\int\limits_0^\delta e^{\gamma_{3,0}t}\sqrt{|\chi_3(0,\ \xi)|}\,(\nu^2+\nu\xi^{-2}\gamma_{3,0})^{-1/2}S_0(\gamma_{3,0},\ \xi)\,d\xi;$$

$$\tilde{\tilde{\mathscr{G}}}{}^3_{3,3}=\frac{2}{(2\pi)^3}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)t^{-3/2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^\delta i\rho\xi\Phi_0(i\rho\xi)\,e^{\gamma_{3,0}t}\sqrt{|\chi_3(0,\ \xi)|}\,(\nu^2+\nu\xi^{-2}\gamma_{3,0})^{-1/2}\times$$

$$\times S_0(\gamma_{3,0},\ \xi)\,d\xi\,d\varphi+\frac{2}{(2\pi)^3}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^\delta e^{\gamma_{3,0}t}\xi^{-2+2\varepsilon}e^{i\rho\xi}f^\varepsilon_{3,3}(\xi,\ t)\,d\xi\,d\varphi,\ \ \varepsilon>\frac{1}{2}.$$

Оценка интеграла $\tilde{\tilde{\mathscr{G}}}{}^3_{3,3}$ в основном повторяет доказательство неравенств (4.56)—(4.58). С помощью (4.55) и леммы 4.1 находим

$$|\tilde{\tilde{\mathscr{G}}}{}^3_{3,3}(x,\ t)|\leqslant c\,(1+|x'|)\,t^{-2+\varepsilon_1},\ \ \varepsilon_1={}^1/_2\,(\varepsilon-{}^1/_2). \tag{4.62}$$

Асимптотика интеграла $\mathscr{G}^3_{3,3}$ может быть найдена с помощью леммы Ватсона. Учитывая свойства функций $\chi_3(0,\ \xi)$ (см. (4.44)) и $S_0(\gamma_{3,0},\ \xi)$ (см. лемму 4.10), получаем

$$\mathscr{G}^3_{3,3}=(1+O(t^{-1/4}))\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{\nu^{-2}|\chi_3(0,\ 0)|}\ \frac{S(0,\ 0)}{8\pi^2(\nu\alpha^{-2}\omega^{-2}t)^{1/4}\,t^{3/2}}+O(t^{-2}). \tag{4.63}$$

Из (4.54), (4.55), (4.62), (4.63) получаем

$$G^0_{3,\,3,\,3}(\Gamma^+_3)+G^0_{3,\,3,\,3}(\Gamma^-_3)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{\alpha^3\omega}}{8\pi^2t\,(\nu t)^{3/4}}+(1+|x|)\,O(t^{-2})+$$
$$+(1+|x'|)\,O(t^{-2+\varepsilon_1}).$$

С помощью представления (4.4), леммы 4.3 и оценок (4.59), (4.60) и последнего равенства находим требуемую асимптотику для $G^0_{j,\,m,\,3}$, а следовательно, и для $G_{j,\,m,\,3}$.

Теорема доказана.

5. СКОРОСТЬ ЗАТУХАНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В R^+_3 ПРИ ОДНОРОДНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

В работах [16], [29] при изучении асимптотики при решении задачи Коши (1), (2) было построено представление решения этой задачи:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{v}(x,\ t)\\ p(x,\ t)\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{2}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_k(x,\ t)\\ p_k(x,\ t)\end{bmatrix},$$

где

$$\begin{bmatrix}\mathbf{v}_k(x,\ t)\\ p_k(x,\ t)\end{bmatrix}=\mathscr{F}^{-1}_{s\to x}\mathscr{L}^{-1}_{\gamma\to t}\left[\frac{\check{A}(s,\ \gamma)\,\eta_k(|s|)}{P(s,\ \gamma)}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{v}}^0(s)\\ p^0(s)\end{bmatrix}\right],\ \ k=0,\ 1,\ 2;$$

$\eta_0(\tau)+\eta_1(\tau)+\eta_2(\tau)\equiv 1,\ \tau\in R_1;\ \ \eta_j\in C^\infty(R_1),\ \eta_j(\tau)\geqslant 0,\ \ j=0,\ 1,\ 2;$ $\eta_0(\tau)=1$ при $\tau<{}^1/_2\delta$; $\eta_0(\tau)=0$ при $\tau>\delta$; $\eta_2(\tau)=1$ при $\tau>2N$; $\eta_2(\tau)=0$ при $\tau<N$; $0<\delta<N$; $\check{A}(s,\ \gamma)$ — матрица, присоединенная к матрице $A(is,\ \gamma)$, определенной в (5); $\hat{f}(s)=\mathscr{F}_{x\to s}[f(x)]$, $P(s,\ \gamma)$ — $\det A(is,\ \gamma)$. Для исследования поведения при $t\to\infty$ построенного решения были рассмотрены интегральные ядра

$$\mathscr{R}_j(x,\ t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{R_3}e^{i(x,\ s)}\mathscr{L}^{-1}_{\gamma\to t}\left[\frac{\check{A}(is,\ \gamma)}{P(s,\ \gamma)}\right]\frac{\eta_j(|s|)}{(1+|s|)^{\mu_j}}\,ds;$$
$$\mu_0=\mu_1=0;\ \ \mu_3=\varkappa>{}^3/_2.$$

Фундаментальная матрица решений системы (1) представлена в виде

$$\mathscr{E}(x, t) = \mathscr{R}_0(x, t) + \mathscr{R}_1(x, t) + (1 - \Delta_x)^\varkappa \mathscr{R}_2(x, t), \quad \varkappa > 3/2,$$

причем легко установить, что

$$\mathscr{E}_{j,m}(x', x_3, t) = \mathscr{E}_{j,m}(x', -x_3, t); \quad (j, m) \neq (1, 3), (2,3), (3,1), (3,2), (3,4), (4.3); \tag{5.1}$$

$$\mathscr{E}_{j,m}(x', x_3, t) = -\mathscr{E}_{j,m}(x', -x_3, t); \quad (j, m) = (1,3), (2,3), (3,1), (3,2), (3,4), (4,3).$$

Построим продолжения $lV^0 = \{l\mathbf{v}^0, lp^0\}$ начальных данных $V^0(x) = \{\mathbf{v}^0(x), p^0(x)\}$ с R_3^+ на R_3, обладающее свойствами симметрии, сформулированными во введении и рассмотрим в $S'(R_4)$ решение $V(x, t)$ обобщенной задачи Коши (см. [21]) для системы (1), определенное формулой

$$V(x, t) = \mathscr{E}(x, t) * lV^0(x). \tag{5.2}$$

Это решение удовлетворяет (в обобщенном смысле) начальным условиям (2). В частности, при достаточно гладких $\mathbf{v}^0(x)$, $p^0(x)$ при $x_3 > 0$: $\lim\limits_{t\to+0} V(x', x_3, t) = V^0(x', x_3)$ (см. [15]).

Из (5.1) и (5.2) и из свойств симметрии продолжений вытекает, что

$$v_j(x', -x_3, t) = -v_j(x', x_3, t), \; j = 1,2; \tag{5.3}$$
$$v_3(x', -x_3, t) = v_3(x', x_3, t); \quad p(x', -x_3, t) = -p(x', x_3, t).$$

Легко убедиться в том, что при выполнении условия A' вектор-функция lV^0 удовлетворяет условию A ($\varkappa = 2$), а поэтому вектор-функция $V(x, t)$, определенная равенством (5.2), является гладкой функцией $x \in R_3$ при каждом $t > 0$ ([17]). Следовательно, из (5.3) вытекает, что

$$v_1|_{x_3=0} = v_2|_{x_3=0} = p|_{x_3=0} = 0. \tag{5.4}$$

Поскольку для решения (5.2) в теореме 1 уже получены асимптотические формулы при $t \to \infty$, то тем самым построены асимптотические формулы в полупространственной задаче с однородными граничными условиями (5.4). Следует лишь учесть, что

$$\int\limits_{R_3} lv_j^0(x)\,dx = \int\limits_{R_3} lp^0(x)\,dx = 0, \quad j = 1, 2; \quad \int\limits_{R_3} lv_3^0(x)\,dx = 2\int\limits_{R_3^+} v_3^0(x)\,dx.$$

Таким образом, теорема 3 немедленно следует из теоремы 1.

6. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ОДНОРОДНЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

Как показано в разделе 1, при $\mathbf{v}^0 \equiv 0$; $p^0 \equiv 0$ решение $V(x, t) = \{\mathbf{v}(x, t), p(x, t)\}$ задачи (1) — (3) записывается в виде

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}(x, t) \\ p(x, t) \end{Bmatrix} = \int\limits_{R_2}\int\limits_0^t G(x' - y', x_3, t - \tau)\,\mathbf{w}^B(y', \tau)\,d\tau\,dy', \tag{6.1}$$

где $\mathbf{w}^B = \{v_1^B(x, t), v_2^B(x, t), p^B(x, t)\}$.

Доказательство теоремы 4. Из результатов разделов 2—4 вытекает, что функции $G_{j,m}(x', x_3, t)$, $j = 1, 2, 3, 4$; $m = 1, 2, 3$ при $x_3 > 0$, $x' \in R_2$, $t \geqslant 0$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями своих аргументов. По условию $B\ w^B(x', t) = 0$ при $t > N$. Так как при $0 \leqslant \tau \leqslant N$ и $\tau > 2N$: $(t-\tau)^{-\sigma} = t^{-\sigma} + O_N(t^{-\sigma-1})$ и $O((t-\tau)^{-\sigma}) = O_N(t^{-\sigma})$ для $\sigma \geqslant 0$, то из теоремы 2, представления 6.1 и условия B немедленно выводится справедливость теоремы 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3—50.
2. *Соболев С. Л.* О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1960. № 3. С. 20—55.
3. *Масленникова В. Н.* Решение в явном виде задачи Коши для одной системы уравнений с частными производными // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22. С. 135—160.
4. *Масленникова В. Н.* Смешанные задачи для одной системы уравнений с частными производными первого порядка // Там же. С. 271—298.
5. *Масленникова В. Н.* Оценки в L_p и асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для систем Соболева // Тр. МИАН. 1968. Т. 103. С. 117—141.
6. *Масленникова В. Н.* О скорости затухания вихря в вязкой жидкости // Там же. 1973. Т. 126. С. 46—72.
7. *Масленникова В. Н.* О скорости убывания при большом времени решения системы Соболева с учетом вязкости // Мат. сб. 1973. Т. 92(134), № 4(12). С. 590—610.
8. *Масленникова В. Н., Богословский М. Е.* Системы Соболева в случае двух пространственных переменных // ДАН СССР. 1975. Т. 221, № 3. С. 563—566.
9. *Масленникова В. Н., Боговский М. Е.* О системах Соболева с тремя пространственными переменными // Дифференциальные уравнения с частными производными: Тр. семинара Соболева. Новосибирск: Наука, 1976. С. 49—68.
10. *Масленникова В. Н., Боговский М. Е.* Асимптотическое поведение решений краевых задач для системы Соболева в полупространстве и явление погранслоя // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 109—152.
11. *Масленникова В. Н.* Математические исследования по гидромеханике вращающейся жидкости // Тр. Всесоюз. конф. по уравнениям с частными производными. М.: Изд-во МГУ. 1978. С. 153—156.
12. *Масленникова В. Н., Пал Прадип Кумар.* О стабилизации и предельной амплитуде решения задачи Коши для неоднородных систем Соболева // ДАН СССР. 1981. Т. 259, № 6. С. 1297—1302.
13. *Масленникова В. Н.* Явное представление решения задачи Коши и оценки в L_p для одной гиперболической системы // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 3. С. 612—629.
14. *Масленникова В. Н.* Асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для одной гиперболической системы, описывающей движение вращающейся жидкости // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 85—96.
15. *Глушко А. В.* Асимптотика по времени решения задачи Коши для линеаризованной системы уравнений Навье—Стокса // ДАН СССР. 1982. Т. 264, № 4. С. 800—805.
16. *Глушко А. В.* Асимптотика по времени решения задачи Коши для линеаризованной системы уравнений Навье—Стокса с нулевой правой частью // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики: Тр. семинара С. Л. Соболева. Новосибирск: Наука. 1981. № 1. С. 5—33.
17. *Глушко А. В.* О стабилизации движения вращающейся вязкой сжимаемой жидкости: Препр. ИМ СО АН СССР. № 8. Новосибирск. 1982.
18. *Марчук Г. И.* Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1974.
19. Математические модели циркуляции в океане / Под ред. Г. И. Марчука, А. С. Саркисяна. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1980.
20. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
21. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
22. *Дрожжинов Ю. Н.* Многомерные тауберовы теоремы и гладкие пассивные системы: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МИАН СССР. 1982.
23. *Дрожжинов Ю. Н.* Многомерная тауберова теорема для голоморфных функций ограниченного аргумента и квазиасимптотика пассивных систем // Мат. сб. 1982. Т. 117, № 1. С. 44—59.
24. *Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И.* Квазиасимптотика обобщенных функций и тауберовы теоремы в комплексной области // Там же. 1977. Т. 102. С. 372—390.
25. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.
26. *Фукс Б. А., Левин В. И.* Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М.; Л.: ГИТТЛ. 1951.
27. *Федорюк М. В.* Асимптотика решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области // В. Вазов. Асимптотические разложения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
28. *Глушко А. В.* Асимптотические свойства решений начальной и начально-краевой задач динамики вязкой сжимаемой жидкости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: Ун-т дружбы народов. 1982.
29. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977.