С. В. Успенский, Е. Н. Васильева, О поведении на бесконечности решения одной задачи гидродинамики, *Тр. МИАН СССР*, 1990, том 192, 221–230

Труды Математического института АН СССР
1990, том 192

УДК 517.947

С. В. УСПЕНСКИЙ, Е. Н. ВАСИЛЬЕВА

О ПОВЕДЕНИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе исследуется поведение на бесконечности решения задачи Коши:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}=0,\quad t>0,\quad x\in E_3, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(x),\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{t=0}=\varphi_2(x), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x),\qquad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_{t=0}=\varphi_3(x),$$

которая возникает при рассмотрении малых колебаний вращающейся сжимаемой жидкости во всем пространстве [1]. Для уравнений вида (1) хорошо изучены корректные постановки задачи Коши, получены асимптотические разложения [1—4].

В настоящей работе задача Коши (1), (2) исследуется при дополнительном условии на начальные данные, которые предполагаются ортогональными полиномам до некоторого порядка:

$$\int\limits_{E_3} x^\alpha\cdot\varphi_i(x)\,dx=0,\qquad i=0,1,2,3,\quad |\alpha|\leqslant l-1.$$

При этом условии доказывается, что решение задачи Коши (1), (2) стремится на бесконечности к нулю и устанавливаются оценки скорости убывания решения. Построенный в данной работе пример показывает, что решение задачи Коши (1), (2) при отсутствии условий ортогональности начальных данных, вообще говоря, не стремится к нулю при $t\to\infty$. Устанавливается, что рассматриваемые в работе условия ортогональности эквивалентны представимости финитных начальных данных в дивергентной форме. Полученные в работе результаты обобщают аналогичные исследования задачи Коши, проведенные в работах [5—7].

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим задачу Коши (1), (2). Определим класс функций $W^r_{1,p}(G)$: функция $\varphi(x)\in W^r_{1,p}(G)$, если $\varphi(x)\in W^r_1(G)$ и

$$\|\varphi, W^r_{1,p}(G)\|=\sum_{|\alpha|\leqslant r}\|(1+|x|^p)D^\alpha_x\varphi(x), L_1(G)\|<\infty$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_i(x) \in W_{1,5p}^{r_1}(E_3)$, $i=0,1,2,3$, $p \geqslant 2$, $r_1 > 6p$, *причем выполнены условия*

$$\int_{E_2} (x')^s \cdot \varphi_i(x', x_3)\, dx' = 0, \qquad 0 \leqslant |s| \leqslant 2p-1, \qquad i = 0,1,2,3, \tag{3}$$

$$\int_{E_1} (x_3)^k \cdot \varphi_i(x', x_3)\, dx_3 = 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant 2p-1, \qquad i = 0,1,2,3. \tag{4}$$

Тогда для решения задачи Коши (1) — (2) *на любом компакте* $K \subset E_3$ *имеет место оценка*

$$\sup_{x \in K} |u(t,x)| \leqslant C(K)\, t^{1/2-p} \sum_{i=0}^{3} \| \varphi_i, W_{1,5p}^{r_1}(E_3) \|, \qquad t \to \infty,$$

где $C(K)$ — *константа, зависящая от* $\operatorname{diam} K$.

Теорема 2. Пусть $\varphi_i(x) \in W_{1,2}^{r_2}(E_3)$, $i = 0,1,2,3$, $r_2 > 4$ *причем*

$$\int_{E_1} \varphi_i(x', x_3)\, dx_3 = 0, \qquad i = 0,1,2,3. \tag{5}$$

Тогда для решения задачи Коши (1), (2) *на любом компакте* $K \subset E_3$ *выполнена оценка*

$$\sup_{x \in K} |u(t,x)| \leqslant C(K)\, t^{-1/2} \sum_{i=0}^{3} \| \varphi_i, W_{1,2}^{r_2}(E_3) \|, \qquad t \to \infty,$$

где $C(K)$ — *константа, зависящая от* $\operatorname{diam} K$.

Замечание. *Если условие* (5) *не выполнено, то решение задачи Коши* (1), (2), *вообще говоря, не стремится к нулю при* $t \to \infty$. *В качестве примера можно рассмотреть задачу с начальными данными*

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \varphi_4(x) \equiv 0, \quad \varphi_3(x) = \exp(-|x|^2/_2).$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРИ $t \to \infty$ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (1), (2)

Решение задачи Коши (1), (2) может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= (2\pi)^{-3/2} \int_{E_3} \exp(ix\xi) \cos At\, \frac{\hat{\varphi}_0(\xi) B^2 + \hat{\varphi}_2(\xi)}{B^2 - A^2}\, d\xi + \\ &+ (2\pi)^{-3/2} \int_{E_3} \exp(ix\xi) \sin At\, \frac{\hat{\varphi}_1(\xi) B^2 + \hat{\varphi}_3(\xi)}{A(B^2 - A^2)}\, d\xi + \\ &+ (2\pi)^{-3/2} \int_{E_3} \exp(ix\xi) \cos Bt\, \frac{\hat{\varphi}_0(\xi) A^2 + \hat{\varphi}_2(\xi)}{A^2 - B^2}\, d\xi + \\ &+ (2\pi)^{-3/2} \int_{E_3} \exp(ix\xi) \sin Bt\, \frac{\hat{\varphi}_1(\xi) A^2 + \hat{\varphi}_3(\xi)}{B(A^2 - B^2)}\, d\xi = \\ &= u_1(t,x) + u_2(t,x) + u_3(t,x) + u_4(t,x), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-3/2} \int_{E_3} \exp(-iy\xi)\, \varphi(y)\, dy,$$

$$A = \sqrt{\frac{(1+|\xi|^2) + \sqrt{(1+|\xi|^2)^2 - 4\xi_3^2}}{2}},$$

$$B = \sqrt{\frac{(1+|\xi|^2) - \sqrt{(1+|\xi|^2)^2 - 4\xi_3^2}}{2}}, \tag{7}$$

$$A^2 - B^2 = \sqrt{(1+|\xi|^2)^2 - 4\xi_3^2}.$$

В силу того, что $\varphi_i(x) \in W_{1,p}^r(E_3)$, $i = 0, 1, 2, 3$, интегралы, входящие в представление (6), сходятся.

Представим $u_1(t, x)$ в виде суммы

$$u_1(t, x) = u_1^1(t, x) + u_1^2(t, x) = (2\pi)^{-3/2} \int\limits_{E_3} \exp(ix\xi) \cos(At) \frac{B^2}{B^2 - A^2} \hat{\varphi}_0(\xi)\, d\xi + $$
$$+ (2\pi)^{-3/2} \int\limits_{E_3} \exp(ix\xi) \cos(At) \frac{1}{B^2 - A^2} \hat{\varphi}_2(\xi)\, d\xi.$$

Для доказательства теоремы 1 докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $\varphi_0(x) \in W_{1,5p}^{r_1}(E_3)$, где r_1 определено в теореме 1, причем для функции $\varphi_0(x)$ выполнены условия (3), (4). Тогда на любом компакте $K \subset E_3$ выполнена оценка*

$$\sup_{x \in K} |u_1^1(t, x)| \leqslant C(K)\, t^{1/2 - p} \| \varphi_0, W_{1,5p}^{r_1} \|, \qquad t \to \infty, \tag{8}$$

где $C(K)$ — константа, зависящая от $\operatorname{diam} K$.

Доказательство. Интегрируя по частям, имеем

$$u_1^1(t, x) = (2\pi)^{-3/2} \int\limits_{|\xi| > 1} \exp(ix\xi) \frac{B^2}{B^2 - A^2} \cos(At)(-1)^r |\xi|^{-2r} \widehat{\Delta^r \varphi_0}(\xi)\, d\xi + $$
$$+ (2\pi)^{-3/2} \int\limits_{|\xi| \leqslant 1} \exp(ix\xi) \frac{B^2}{B^2 - A^2} \cos(At)\, \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi = \bar{u}_1^1 + \bar{\bar{u}}_1^1,$$
$$2r = r_1.$$

Докажем оценку (8) для первого слагаемого $\bar{u}_1^1(t, x)$. Используя условия (3) и (4), получим

$$\bar{u}_1^1(t, x) = \frac{(-1)^r}{(2\pi)^3} \int\limits_{|\xi| > 1} \exp(ix\xi) \cos(At) \frac{B^2}{B^2 - A^2} |\xi|^{-2r} \times$$
$$\times \int\limits_{E_3} \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \exp(-i\lambda_{2p}\lambda_{2p-1} \ldots \lambda_1 y'\xi' - i\mu_{2p}\mu_{2p-1} \ldots \mu_1 y_3 \xi_3)\, \lambda_{2p-1}\lambda_{2p-2}^2 \ldots \lambda_1^{2p-1} \times$$
$$\times \mu_{2p-1}\mu_{2p-2}^2 \ldots \mu_1^{2p-1}\, d\lambda_{2p} \ldots d\lambda_1\, d\mu_{2p} \ldots d\mu_1 (-iy_3\xi_3)^{2p} (-iy'\xi')^{2p} \Delta^r \varphi_0(y)\, dy\, d\xi.$$

В сферических координатах:

$$\xi_3 = \rho \cos\theta,$$
$$\xi_2 = \rho \sin\theta \sin\varphi,$$
$$\xi_1 = \rho \sin\theta \cos\varphi,$$

интеграл $\bar{u}_1^1(t, x)$ запишется в следующем виде:

$$\bar{u}_1^1(t, x) = \frac{(-1)^r (-i)^{4p}}{(2\pi)^3} \int\limits_1^\infty \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \exp(ix\xi(\rho, \theta, \varphi))\, \rho^{2-2r+4p} \times$$
$$\times \cos At \frac{B^2}{B^2 - A^2} \sin^{2p+1}\theta \cos^{2p}\theta \Big[\int\limits_{E_3} \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \exp(-i\lambda_{2p}\lambda_{2p-1} \ldots \lambda_1 y'\xi'(\rho, \theta, \varphi) -$$
$$- i\mu_{2p}\mu_{2p-1} \ldots \mu_1 y_3 \rho \cos\theta)\, \lambda_{2p-1}\lambda_{2p-2}^2 \ldots \lambda_1^{2p-1} \mu_{2p-1}\mu_{2p-2}^2 \ldots \mu_1^{2p-1}\, d\lambda_{2p} \ldots d\lambda_1\, d\mu_{2p} \ldots$$
$$\ldots d\mu_1 y_3^{2p} (y_1 \cos\varphi + y_2 \sin\varphi)^{2p} \Delta^r \varphi_0(y)\, dy \Big]\, d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$I = \int\limits_0^\pi \exp(ix\xi(\rho, \theta, \varphi)) \cos At \frac{B^2}{B^2 - A^2} \sin^{2p+1}\theta \cos^{2p}\theta \times$$
$$\times \Big[\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \exp(-i\lambda_{2p}\lambda_{2p-1} \ldots \lambda_1 y'\xi'(\rho, \theta, \varphi) - i\mu_{2p}\mu_{2p-1} \ldots \mu_1 y_3 \rho \cos\theta) \times$$
$$\times \lambda_{2p-1}\lambda_{2p-2}^2 \ldots \lambda_1^{2p-1} \mu_{2p-1}\mu_{2p-2}^2 \ldots \mu_1^{2p-1}\, d\lambda_{2p} \ldots d\lambda_1\, d\mu_{2p} \ldots d\mu_1 \Big]$$

и покажем, что для него выполнена оценка при $p \geqslant 1$

$$\sup_{x \in K} |I| \leqslant C(K)\, t^{1/2-p} (\rho^p |y|^p + 1) \rho^p. \tag{9}$$

Тогда из явного выражения $\bar{u}_1^1(t, x)$ в сферических координатах и этой оценки следует (8) для функции $\bar{u}_1^1(t, x)$. Используя тождество

$$\cos(At)\sin\theta\cdot\cos\theta = \frac{A(A^2-B^2)}{t\cdot\rho^2} D_\theta(\sin At), \tag{10}$$

имеем

$$I = -\int_0^\pi t^{-1}\frac{1}{\rho^2}\sin At\cdot D_\theta[\sin^{2p}\theta\cdot\cos^{2p-1}\theta\cdot F(\rho,\theta,\varphi,y)B^2A]\,d\theta,$$

$$F(\rho,\theta,\varphi,y) = \exp(ix\xi(\rho,\theta,\varphi))\int_0^1\ldots\int_0^1 \exp(-i\lambda_{2p}\lambda_{2p-1}\ldots\lambda_1 y'\xi'(\rho,\theta,\varphi) -$$
$$-i\mu_{2p}\mu_{2p-1}\ldots\mu_1 y_3\rho\cos\theta)\,\lambda_{2p-1}\lambda_{2p-2}^2\ldots\lambda_1^{2p-1}\mu_{2p-1}\mu_{2p-2}^2\ldots\mu_1^{2p-1}\,d\lambda_{2p}\ldots d\lambda_1 \times$$
$$\times\, d\mu_{2p}\ldots d\mu_1,$$

$$D_\theta[\sin^{2p}\theta\cdot\cos^{2p-1}\theta\cdot F(\rho,\theta,\varphi,y)\cdot B^2A] = ((2p\sin^{2p-1}\theta\cdot\cos^{2p}\theta +$$
$$+(2p-1)(-1)\sin^{2p+1}\theta\cdot\cos^{2p-2}\theta)FB^2A + \sin^{2p}\theta\cdot\cos^{2p-1}\theta\times$$
$$\times(D_\theta F\cdot B^2A + D_\theta(B^2A)\cdot F).$$

Используя тождество

$$-\sin(At)\sin\theta\cdot\cos\theta = \frac{A(A^2-B^2)}{t\cdot\rho^2}D_\theta(\cos At), \tag{11}$$

получим

$$I = -\int_0^\pi t^{-2}\frac{1}{\rho^4}\cos(At)\cdot D_\theta\{[2p\sin^{2p-1}\theta\cdot\cos^{2p}\theta - (2p-1)\sin^{2p+1}\theta\cdot\cos^{2p-2}\theta)\times$$
$$\times F\cdot B^2A + \sin^{2p}\theta\cdot\cos^{2p-1}\theta(D_\theta F\cdot B^2A + D_\theta(B^2A)\cdot F]\,A(A^2-B^2)\}\,d\theta.$$

Пользуясь тождествами (10), (11) и интегрируя по частям $(p-1)$ раз $(p > 1)$, получим

$$I = \int_0^\pi t^{-(p-1)}\frac{1}{\rho^{2(p-1)}}\cos\theta\cdot R(At)\times$$
$$\times\sum_{\alpha,\beta}P_{\alpha,\beta}(\cos\theta,\sin\theta)\cdot(\sin\theta)^\beta\cdot D_\theta^\alpha F\cdot\Phi_{\alpha,\beta}(B^2A, A(A^2-B^2))\,d\theta,$$

где $0 \leqslant \alpha+\beta \leqslant p-1$; $P_{\alpha,\beta}$ — полином от $\cos\theta$, $\sin\theta$;

$$R(At) = \begin{cases}\cos At, & (p-1) \text{ — четное,}\\ \sin At, & (p-1) \text{ — нечетное;}\end{cases}$$

$\Phi_{\alpha,\beta}(B^2A, A(A^2-B^2))$ — полином от B^2A и $A(A^2-B^2)$ и их производных по D_θ порядка не больше, чем β.

Разобьем интеграл I на сумму трех интегралов

$$I = \int_0^{1/\sqrt{t}} + \int_{1/\sqrt{t}}^{\pi-1/\sqrt{t}} + \int_{\pi-1/\sqrt{t}}^{\pi} t^{-(p-1)}\frac{1}{\rho^{2(p-1)}}\cos\theta\,R(At)\sum_{\alpha,\beta}P_{\alpha,\beta}(\sin\theta)^\beta D_\theta^\alpha F\cdot\Phi_{\alpha,\beta}\,d\theta,$$

$$I = \sum_{i=1}^3 I_i.$$

Имеет место следующая оценка:

$$|I_1| + |I_3| \leqslant Gt^{-1/2-(p-1)}((|x|+|y|)^{p-1}\rho^{p-1}+1)\rho^p.$$

Это неравенство является следствием следующих соотношений:

$$|\cos\theta\cdot R(At)\cdot P_{\alpha,\beta}(\cos\theta,\sin\theta)| \leqslant C,$$

$$|D_\theta^\alpha F| \leqslant C((|x|+|y|)^{p-1}\rho^{p-1}+1),$$

$$D_\theta A = \frac{1}{A}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{A^2-B^2},$$

$$D_\theta B = \frac{-\rho^2\cos\theta\cdot\sin\theta}{B(A^2-B^2)},$$

$$|(\sin\theta)^\beta\cdot\Phi_{\alpha,\beta}(B^2A,\ A(A^2-B^2))| \leqslant C\rho^{3p-3}.$$

Последнее получено с учетом того факта, что

$$\left|\frac{\sin\theta}{\sqrt{(1+\rho^2)^2-4\rho^2\cos^2\theta}}\right| = \left|\frac{\sin\theta}{\sqrt{(1-\rho^2)^2+4\rho^2\sin^2\theta}}\right| \leqslant \left|\frac{\sin\theta}{\sqrt{4\rho^2\sin^2\theta}}\right| = \frac{C}{\rho}.$$

Покажем, что для I_2 справедлива оценка (9). Обозначим

$$\mathfrak{M}(\theta,\rho) = \sum_{\alpha,\beta} P_{\alpha,\beta}(\cos\theta,\sin\theta)(\sin\theta)^\beta\cdot D_\theta^\alpha F\cdot\Phi_{\alpha,\beta}(B^2A,\ A(A^2-B^2)).$$

Используя тождества (10), (11) и считая для определенности $(p-1)$ нечетным, будем иметь

$$I_2 = t^{-p}\frac{1}{\rho^{2p}}\frac{\sin At}{\sin\theta}\mathfrak{M}(\theta,\rho)A(A^2-B^2)\Big|_{1/\sqrt{t}}^{\pi-1/\sqrt{t}} -$$

$$-\int_{1/\sqrt{t}}^{\pi-1/\sqrt{t}} t^{-p}\frac{1}{\rho^{2p}}\sin(At)\Big[D_\theta\mathfrak{M}(\theta,\rho)\frac{A(A^2-B^2)}{\sin\theta} - \mathfrak{M}(\theta,\rho)\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\times$$

$$\times A(A^2-B^2) + \mathfrak{M}(\theta,\rho)\frac{1}{\sin\theta}D_\theta(A(A^2-B^2))\Big]d\theta = \sum_{i=1}^{4} I_2^i.$$

В силу того, что при большом t выполнено неравенство

$$|\sin\theta| \geqslant \frac{1}{2\sqrt{t}},\qquad \theta\in\left[\frac{1}{\sqrt{t}},\ \pi-\frac{1}{\sqrt{t}}\right],$$

имеет место оценка

$$|I_2^1| + |I_2^2| + |I_2^4| \leqslant Ct^{1/2-p}((|x|+|y|)^p\rho^p+1)\rho^p.$$

Представим интеграл I_2^3 в следующем виде:

$$I_2^3 = \int_{1/\sqrt{t}}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi-\delta} + \int_{\pi-\delta}^{\pi-1/\sqrt{t}} t^{-p}\frac{1}{\rho^{2p}}\sin At\cdot\mathfrak{M}(\theta,\rho)\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\cdot A(A^2-B^2)\,d\theta = \sum_{i=1}^{3} I_2^{3,i},$$

где $\delta > 0$ достаточно малое фиксированное число такое, что

$$|\sin\theta| > \theta/2,\qquad \theta\in[1/\sqrt{t},\ \delta].$$

Отсюда получаем

$$|I_2^{3,1}| \leqslant C((|x|+|y|)^p\rho^p+1)\rho^p(\sqrt{t}-\delta^{-1})t^{-p}.$$

Аналогично имеем

$$|I_2^{3,3}| \leqslant C((|x|+|y|)^p\rho^p+1)\rho^p(\sqrt{t}-\delta^{-1})t^{-p}.$$

Поскольку имеет место оценка

$$|I_2^{3,2}| \leqslant C((|x|+|y|)^p\rho^p+1)\rho^p\frac{1}{\sin^2\delta}t^{-p},$$

то из вышеизложенного следует (9).

Как было уже отмечено, из (9) непосредственно следует оценка (8) для функции $\bar{u}_1^1(t,x)$.

В случае $\rho < 1$, проводя аналогичные оценки, получим

$$\sup_{x\in K}|I| < C(K)t^{1/2-p}(\rho^p|y|^p+1)\rho^{-2p}. \tag{12}$$

Используя неравенство (12) получим оценку (8) и для функции $\overline{\overline{u}}_1^1$. Таким образом, лемма 1 доказана.

Оценки для функций u_1^2, u_2 проводятся аналогично. Для того чтобы рассмотреть случай функций u_3, u_4, докажем следующие оценки:

$$\frac{1}{B} < \frac{\sqrt{2}}{|\cos\theta|}, \quad \rho \geqslant 1,$$
$$\frac{1}{B} < \frac{\sqrt{2}}{\rho|\cos\theta|}, \quad \rho < 1. \tag{13}$$

Обозначим

$$1 + \rho^2 - \sqrt{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2\cos^2\theta} = A(\theta).$$

Очевидно $A(\pi/2) = 0$.

Имеем

$$A(\theta) - A\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{\partial A}{\partial\theta} d\theta =$$
$$= \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{\frac{1}{2} 4\rho^2 2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2\cos^2\theta}} d\theta = 4\rho^2 \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2\cos^2\theta}} d\theta >$$
$$> 4\rho^2 \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\rho^2)} d\theta =$$
$$= \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \int_{\theta}^{\pi/2} 2\sin 2\theta \, d\theta = \frac{\rho^2}{1+\rho^2}\left(-\cos 2\theta \,\Big|_{\theta}^{\pi/2}\right) =$$
$$= \frac{\rho^2}{1+\rho^2}(1+\cos 2\theta) = \frac{\rho^2}{1+\rho^2} 2\cos^2\theta.$$

Отсюда

$$B = \sqrt{\frac{1+\rho^2 - \sqrt{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2\cos^2\theta}}{2}} > \sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}\cos^2\theta} = |\cos\theta| \cdot \sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}.$$

Таким образом, получим оценки (13).

Используя (13) и проводя для функций u_3, u_4 вычисления как выше для функции u_1, получим для u_3, u_4 неравенства вида (8).

Доказательство теоремы 1 непосредственно следует из оценок для функций u_1, u_2, u_3, u_4.

Для доказательства теоремы 2 рассмотрим лемму 2.

Л е м м а 2. *Пусть* $\varphi_i(x) \in W_{1,2}^{r_2}(E_3)$, *где* $r_2 > 4$ *и выполняется условие* (5) *из теоремы* 2. *Тогда на любом компакте* $K \in E_3$ *имеет место оценка*

$$\sup_{x\in K} |u_1(t,x)| \leqslant C(K)\, t^{-1/2} \sum_{i=0}^{3} \|\varphi_i, W_{1,2}^{r_2}(E_3)\|, \quad t \to \infty.$$

Лемма 2 доказывается аналогично лемме 1.

3. ПОСТРОЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ, РЕШЕНИЕ КОТОРОЙ НЕ СТАБИЛИЗИРУЕТСЯ К 0

Рассмотрим задачу Коши (1), (2) с начальными данными

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \varphi_4(x) \equiv 0,$$
$$\varphi_3(x) = \exp(-|x|^2/2).$$

Очевидно, решение задачи в этом случае можно записать в виде

$$u(t, x) = (2\pi)^{-3/2} \int\limits_{E_3} \exp(ix\xi) \sin(At) \frac{1}{A(B^2 - A^2)} \exp(-|\xi|^2/2)\, d\xi +$$

$$+ (2\pi)^{-3/2} \int\limits_{E_3} \exp(ix\xi) \sin(Bt) \frac{1}{B(A^2 - B^2)} \exp(-|\xi|^2/2)\, d\xi.$$

Докажем, что $u(t, x)$ не стремится к нулю на любом компакте. Предположим, что $u(t, 0)$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Переходя к сферическим координатам

$$\xi_3 = \rho \cos\theta,$$

$$\xi_2 = \rho \sin\theta \sin\varphi,$$

$$\xi_3 = \rho \sin\theta \cos\varphi,$$

получим

$$u(t, 0) = (2\pi)^{-3/2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\sin At}{A(B^2 - A^2)} \exp(-\rho^2|2) \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta +$$

$$+ (2\pi)^{-3/2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\sin Bt}{B(A^2 - B^2)} \exp(-\rho^2|2) \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \bar{I}^1 + \bar{I}^2.$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$I^1 = \int\limits_0^\pi \frac{\sin At}{A(B^2 - A^2)} \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{t}}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{t}}}^{\pi} \frac{\sin At}{A(B^2 - A^2)} \sin\theta\, d\theta = \sum_{i=1}^{3} I_i^1.$$

Покажем, что

$$|I^1| \leqslant C(\rho) t^{-1/2}. \tag{14}$$

Используя тождество (11), получим

$$I_1^1 = \frac{1}{t\rho^2} \left(-\cos(At) \frac{1}{\cos\theta} \Big|_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} \cos(At) \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta \right),$$

$$I_3^1 = \frac{1}{t\rho^2} \left(-\cos(At) \frac{1}{\cos\theta} \Big|_{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{t}}}^{\pi} + \int\limits_{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{t}}}^{\pi} \cos(At) \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta \right).$$

Тогда сумма абсолютных значений $|I_1^1| + |I_3^1|$ оценивается следующим образом:

$$|I_1^1| + |I_3^1| \leqslant \frac{2}{t\rho^2} \left(\cos A_0 t - \cos(\bar{A}t) \frac{1}{\sin(1/\sqrt{t})} + \frac{1}{\sin(1/\sqrt{t})} - 2 \right),$$

где

$$A_0 = A|_{\theta=0}, \qquad A = \sqrt{\frac{(1+\rho^2) + \sqrt{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2 \cos^2\theta}}{2}},$$

$$\bar{A}(\theta_1) = A|_{\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_1}, \qquad \bar{A}(\theta_1) = \sqrt{\frac{(1+\rho^2) + \sqrt{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2 \sin^2\theta_1}}{2}},$$

$$\theta_1 = 1/\sqrt{t}.$$

Поскольку при большом t выполнено неравенство

$$|\sin\theta| > 1/2\sqrt{t}, \qquad \theta \in [1/\sqrt{t}, \pi - 1/\sqrt{t}],$$

то имеет место оценка

$$1/\sin(1/\sqrt{t}) \leqslant 2\sqrt{t}.$$

Из последнего соотношения вытекает, что

$$|I_1^1| + |I_3^1| \leqslant Ct^{-1/2}/\rho^2. \tag{15}$$

Рассмотрим интеграл I_2^1:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{t}}} \frac{\sin At}{A(B^2-A^2)} \sin\theta\, d\theta = \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \frac{\sin \bar{A}t}{\bar{A}(\bar{B}^2-\bar{A}^2)} \cos\theta\, d\theta.$$

Ввиду того, что

$$\left|\frac{\cos\theta}{\bar{B}^2-\bar{A}^2}\right| = \left|\frac{\cos\theta}{\sqrt{(1+\rho^2)^2-4\rho^2\sin^2\theta}}\right| = \left|\frac{\cos\theta}{\sqrt{(1-\rho^2)^2+4\rho^2\cos^2\theta}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\cos\theta}{\sqrt{4\rho^2\cos^2\theta}}\right| = \frac{C}{\rho}$$

и принимая во внимание ограниченность по θ величины $\left|\frac{\sin \bar{A}t}{\bar{A}}\right|$, имеет место следующее неравенство:

$$|I_2^1| \leqslant C(\rho)t^{-1/2}. \tag{16}$$

Далее рассмотрим интеграл

$$I^2 = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin Bt}{B(A^2-B^2)} \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{t}}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\pi} \frac{\sin Bt}{B(A^2-B^2)} \sin\theta\, d\theta = \sum_{i=1}^{3} I_i^2.$$

Используя тождество

$$\frac{\sin Bt}{B(A^2-B^2)} \sin\theta = -\frac{1}{t\rho^2} \frac{1}{\cos\theta} D_\theta(\cos Bt),$$

получим

$$|I_1^2| + |I_3^2| \leqslant Ct^{-1/2}/\rho^2. \tag{17}$$

Интеграл I_2^2 можно представить в следующем виде:

$$I_2^2 = \int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}} \frac{\sin \bar{B}t}{\bar{B}(\bar{A}^2-\bar{B}^2)} \cos\theta\, d\theta, \qquad \bar{B} = B\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}}.$$

Покажем, что при $t \to \infty$ выполнена оценка

$$K = \int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}} \left| \frac{\sin \bar{B}t}{\bar{B}} \frac{\cos\theta}{\bar{A}^2-\bar{B}^2} - \frac{\sin\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\,\theta t}{\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\,\theta} \frac{1}{1+\rho^2} \right| d\theta \leqslant Ct^{-1/4}. \tag{18}$$

Действительно,

$$K \leqslant \int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}} \left| \frac{\sin \bar{B}t}{\bar{B}} \frac{\cos\theta}{\bar{A}^2-\bar{B}^2} - \frac{\sin \bar{B}t}{\bar{B}} \frac{1}{1+\rho^2} \right| d\theta +$$

$$+ \int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}} \left| \frac{\sin \bar{B}t}{\bar{B}} \frac{1}{1+\rho^2} - \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\,\theta t\right)}{\bar{B}} \frac{1}{1+\rho^2} \right| d\theta +$$

$$+ \int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}} \left| \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\,\theta t\right)}{\bar{B}} \frac{1}{1+\rho^2} - \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\,\theta t\right)}{\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\,\theta} \frac{1}{1+\rho^2} \right| d\theta = \sum_{i=1}^{3} K_i.$$

Оценим каждый из интегралов K_i по отдельности. Ввиду того, что

$$\frac{\cos\theta}{\bar{A}^2-\bar{B}^2}=\frac{1}{1+\rho^2}-\frac{(1-\rho^2)^2}{(1+\rho^2)^3}\frac{\theta^2}{2}+o(\theta^2),$$

$$\bar{B}=\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}\theta^2+C(\rho)\,\theta^4+o(\theta^4)}\,.$$

Для K_1 получаем следующую оценку:

$$K_1=\int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}}\left|\frac{\sin\bar{E}t}{\bar{B}}\left[\frac{\cos\theta}{\bar{A}^2-\bar{B}^2}-\frac{1}{1+\rho^2}\right]\right|d\theta\leqslant C\int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}}\left|\frac{\sin\bar{E}t}{\bar{B}}(1-\rho^2)^2\theta^2\right|d\theta\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}}\left|\frac{\sin(\bar{E}t)(1-\rho^2)^2\theta}{\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}}\right|d\theta\leqslant C(\rho)\int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}}|\theta|\,d\theta\leqslant C(\rho)\,t^{-1}.$$

В случае интеграла K_2 имеет место следующая цепочка неравенств:

$$K_2=\frac{1}{1+\rho^2}\int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}}\left|\frac{\sin\bar{E}t}{\bar{B}}-\frac{\sin\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\,\theta t}{\bar{B}}\right|d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{1+\rho^2}\int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}}\frac{t\left|\bar{B}-\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\,\theta\right|}{|\bar{B}|}\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{1+\rho^2}\int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}}\frac{t\,|\theta|}{|\bar{B}|}\left|\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}+C(\rho)\,\theta^2+o(\theta^2)}-\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\right|d\theta=$$

$$=\frac{1}{1+\rho^2}\int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}}t\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}+C(\rho)\,\theta^2+o(\theta^2)}}\frac{|C(\rho)\,\theta^2+o(\theta^2)|\,d\theta}{\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}+C(\rho)\,\theta^2+o(\theta^2)}+\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}}\leqslant$$

$$\leqslant C_1(\rho)\int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}}t\,|C(\rho)\,\theta^2+o(\theta^2)|\,d\theta\leqslant C_2(\rho)\int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}}t\theta^2\,d\theta\leqslant C_3(\rho)\,t^{-1/2}.$$

Интеграл K_3 оценим следующим образом:

$$K_3=\frac{1}{1+\rho^2}\int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}}\left|\frac{\sin\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\,\theta t}{\bar{B}}-\frac{\sin\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\,\theta t}{\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\,\theta}\right|d\theta=$$

$$=\frac{1}{1+\rho^2}\int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}}\left|\sin\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\,\theta t\right|\left|\frac{1}{\bar{B}}-\frac{1}{\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\,\theta}\right|d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{1+\rho^2}\int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}}\left|\frac{\bar{B}-\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\,\theta}{\bar{B}\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\,\theta}\right|d\theta=$$

$$=\frac{1}{1+\rho^2}\int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}}\left|\frac{\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}+C(\rho)\,\theta^2+o(\theta^2)}-\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}}{\bar{B}\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}}\right|d\theta=$$

$$=\frac{1}{1+\rho^2}\int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}}\frac{|C(\rho)\,\theta^2+o(\theta^2)|}{\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\,|\theta|\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}+C(\rho)\,\theta^2+o(\theta^2)}}\times$$

$$\times\frac{1\,d\theta}{\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}+\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}+C(\rho)\,\theta^2+o(\theta^2)}}\leqslant C_1(\rho)\int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}}|\theta|\,d\theta\leqslant C_2(\rho)\,t^{-1}.$$

В силу нашего предположения из явного вида $u(t, 0)$ и оценок (15)—(18) получаем

$$\int\limits_{-1/\sqrt{t}}^{1/\sqrt{t}} \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\theta t\right)}{\theta} d\theta = \int\limits_{-\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\sqrt{t}}^{\sqrt{\frac{\rho^2}{1+\rho^2}}\sqrt{t}} \frac{\sin\lambda}{\lambda} \to 0 \quad \text{при } t \to \infty.$$

Однако, как известно, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\lambda}{\lambda} = 1$. Полученное противоречие показывает, что $u(t, 0)$ не стремится к нулю при $t \to \infty$.

4. О ПРЕДСТАВИМОСТИ ФИНИТНЫХ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ В ДИВЕРГЕНТНОЙ ФОРМЕ

Теорема (С. Л. Соболев [8, с. 82]). *Для того чтобы суммируемая и финитная в области Ω функция $\varphi \in W_1^l$ была представима в виде*

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha|=l} D^\alpha F_\alpha(x), \tag{19}$$

где $F_\alpha(x) \in W_1^l$ суммируемы и финитны в Ω, необходимо и достаточно, чтобы φ была ортогональна полиномам степени $< l$, т. е.

$$\int\limits_\Omega x^\alpha \varphi(x)\, dx = 0, \quad |\alpha| \leqslant l - 1.$$

Согласно утверждению теоремы Соболева, получим, что для финитных начальных данных φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 рассматриваемые в теореме 1 условия ортогональности (3), (4) эквивалентны представимости этих начальных данных в дивергентной форме (19):

$$\varphi_i(x) = \sum_{|\alpha|=2p} D^\alpha F_\alpha^i(x), \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

где функции $F_\alpha^i(x)$ — финитны и принадлежат пространствам $W_1^{2p}(E_3)$.

Замечание. Рассмотренные теоремы 1 и 2 обобщаются на n-мерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Масленникова В. Н.* Решение в явном виде задачи Коши для одной системы уравнений с частными производными // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22, № 1. С. 135—160.
2. *Масленникова В. Н.* Смешанные задачи для одной системы уравнений с частными производными первого порядка // Там же. № 2. С. 271—298.
3. *Глушко А. В.* Асимптотика по времени решения задачи Коши для линеаризованной системы уравнений Навье—Стокса с нулевой правой частью // Тр. семинара С. Л. Соболева. 1981. № 1. С. 5—33.
4. *Петунин И. М.* Асимптотическое разложение при большом времени решения задачи Коши для линеаризованной системы гидродинамики вращающейся несжимаемой жидкости // Там же. № 2. С. 54—77.
5. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.
6. *Успенский С. В., Демиденко Г. В.* О поведении на бесконечности решений одной задачи С. Л. Соболева // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 5. С. 199—210.
7. *Успенский С. В., Демиденко Г. В.* О поведении при $t \to \infty$ решений некоторых задач гидродинамики // ДАН СССР. 1985. Т. 280, № 5. С. 1972—1974.
8. *Соболев С. Л.* Избранные вопросы функциональных пространств и обобщенные функции. М.: Наука, 1988.
9. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М.: Наука, 1986.