П. А. Жаров, О двухвесовом неравенстве. Обобщение неравенств Харди и Пуанкаре, *Тр. МИАН СССР*, 1992, том 194, 97–110

Труды Математического института РАН
1992, том 194

УДК 517.518.235

П. А. ЖАРОВ

О ДВУХВЕСОВОМ НЕРАВЕНСТВЕ. ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ХАРДИ И ПУАНКАРЕ

1. Введение

Рассматривается следующее неравенство относительно функции $f = f(t)$:

$$\| r_2 \mathcal{P}(f) \|_q \leqslant C \| r_1 f \|_p. \tag{1}$$

Здесь $r_1(t) \neq 0$ п. в. и $r_2(t) \neq 0$ п. в. — фиксированные измеримые весовые функции, определенные на (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$; норма $\| \cdot \|_\infty$ понимается в смысле ess sup. Весовые пространства с нормами $\| r_2 \cdot \|_p$ и $\| r_2 \cdot \|_q$ будут обозначаться L_{p, r_1} и L_{q, r_2} соответственно. Используется обозначение: $p' = p/(p-1)$. Оператор $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\alpha, \varphi, \beta, \psi}$ действует по правилу

$$[\mathcal{P}f](x) = \alpha(x) \int_a^x \varphi(t) f(t)\, dt + \beta(x) \int_x^b \psi(t) f(t)\, dt, \tag{2}$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — фиксированные почти всюду конечные измеримые функции, причем $\alpha(x) \neq 0$ п. в. и $\beta(x) \neq 0$ п. в., $a < x < b$.

Начиная с Харди [1], многими авторами изучались два следующих частных случая (1) (соответствующих $\alpha(x) \equiv 1$, $\varphi(t) \equiv 1$, $\psi(t) \equiv 0$ и $\varphi(t) \equiv 0$, $\beta(x) \equiv 1$, $\psi(t) \equiv 1$):

$$\left\| r_2(t) \int_a^t f(\tau)\, d\tau \right\|_q \leqslant C \| r_1(t) f(t) \|_p, \tag{3}$$

$$\left\| r_2(t) \int_t^b f(t)\, d\tau \right\|_q \leqslant C \| r_1(t) f(t) \|_p. \tag{4}$$

В случаях (3) и (4) для функций $r_1(t)$ и $r_2(t)$ известны условия, необходимые и достаточные для того, чтобы соответствующее неравенство имело место с константой, зависящей от a, b, r_1, r_2, p и q, для всех тех f, для которых правая часть (3) (или (4)) конечна, и получены двусторонние оценки наименьшей константы. При произвольных p и q, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, эти условия имеют следующий вид [2—6].

В случае $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ для выполнения (3) необходимо и достаточно, чтобы

$$A = \sup_{a<x<b} \left(\int_x^b | r_2(t) |^q\, dt \right)^{1/q} \left(\int_a^x | r_1(t) |^{-p'}\, dt \right)^{1/p'} < \infty, \tag{5}$$

при этом

$$A \leqslant C \leqslant C_1(p, q) \cdot A, \tag{6}$$

а для выполнения (4) необходимо и достаточно, чтобы

$$B = \sup_{a<x<b} \left(\int_a^x |r_2(t)|^q \, dt\right)^{1/q} \left(\int_x^b |r_1(t)|^{-p'} \, dt\right)^{1/p'} < \infty, \tag{7}$$

при этом

$$B \leqslant C \leqslant C_2(p, q) \cdot B. \tag{8}$$

В случае $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$ для выполнения (3) необходимо и достаточно, чтобы

$$L = \left\{ -\int_a^b \left(\int_x^b |r_2(t)|^q \, dt\right)^{p/(p-q)} d\left(\int_a^x |r_1(t)|^{-p'} \, dt\right)^{(p-1)q/(p-q)} \right\}^{(p-q)/pq} < \infty, \tag{9}$$

при этом

$$C_3(p, q) \cdot L \leqslant C \leqslant C_4(p, q) \cdot L, \tag{10}$$

а для выполнения (4) необходимо и достаточно, чтобы

$$M = \left\{ \int_a^b \left(\int_a^x |r_2(t)|^q \, dt\right)^{p/(p-q)} d\left(\int_x^b |r_1(t)|^{-p'} \, dt\right)^{(p-1)q/(p-q)} \right\}^{(p-q)/pq} < \infty, \tag{11}$$

при этом

$$C_5(p, q) \cdot M \leqslant C \leqslant C_6(p, q) \cdot M. \tag{12}$$

В качестве констант $C_i(p, q)$, $i = 1, \ldots, 6$, можно взять

$$C_1(p, q) = C_2(p, q) = (1 + p'/q)^{1/p'} (1 + q/p')^{1/q}, \tag{13}$$

$$C_3(p, q) = C_5(p, q) = q^{1/p} ((p - q)/(p - 1))^{1/p'}, \tag{14}$$

$$C_4(p, q) = C_6(p, q) = q^{1/p} p^{1/q'} (p - q)^{(p-q)/pq} (p - 1)^{-1/p'}. \tag{15}$$

Значения для C_1 и C_2 приведены в тексте [6], а $C_3, \ldots, C_6$ можно получить пересчетом соответствующих констант, приведенных в [6].

Условия (5), (9) — это критерий непрерывности оператора $\int_a^x f(t) \, dt$, а (7), (11) — оператора $\int_x^b f(t) \, dt$, действующих из $L_{p, r_1}(a, b)$ в $L_{q, r_2}(a, b)$.

Ниже критерии (5), (7), (9), (11) обобщаются на оператор $\mathcal{P}_{\alpha, \varphi, \beta, \psi}$ (теорема 1), обобщаются условия, при которых справедливо весовое неравенство Харди (теорема 2), обобщается неравенство Пуанкаре (следствие теоремы 2), описываются допустимые весовые пары (r_1, r_2) для случая $\psi(t) \equiv \varphi(t) - 1$, $\alpha(x) \equiv \beta(x) \equiv 1$ (теоремы 3 и 4) и в качестве приложения решается одна задача теории весовых пространств (теорема 5).

Недавно В. Д. Степановым [7—9] получены обобщения критериев (5), (7), (9), (11) на операторы Римана — Лиувилля и на производные высших порядков.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю признательность чл.-корр. РАН Л. Д. Кудрявцеву, проф. О. В. Бесову, проф. В. И. Буренкову, д. ф.-м. н. М. Л. Гольдману и проф. В. Д. Степанову за ценные обсуждения и поддержку.

2. Критерий непрерывности оператора $\mathcal{P}$. Обобщение неравенств Харди и Пуанкаре

Теорема 1. *Если* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, *то для непрерывности оператора* $\mathcal{P}$: $L_{p,r_1}(a, b) \to L_{q,r_2}(a, b)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$
\begin{aligned}
A(\alpha, \varphi) &= \sup_{a<x<b} \left(\int_x^b |\alpha(t) r_2(t)|^q dt\right)^{1/q} \left(\int_a^x \left|\frac{\varphi(t)}{r_1(t)}\right|^{p'} dt\right)^{1/p'} < \infty, \\
B(\beta, \psi) &= \sup_{a<x<b} \left(\int_a^x |\beta(t) r_2(t)|^q dt\right)^{1/q} \left(\int_x^b \left|\frac{\psi(t)}{r_1(t)}\right|^{p'} dt\right)^{1/p'} < \infty,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

при этом для наилучшей константы C *в* (1) *имеет место оценка*

$$
\max(A(\alpha, \varphi), B(\beta, \psi)) \leqslant C \leqslant (A(\alpha, \varphi) + B(\beta, \psi)) \cdot C_1(p, q). \tag{17}
$$

Если $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$, *то для непрерывности оператора* $\mathcal{P}$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$
\begin{aligned}
L(\alpha, \varphi) &= \left\{\int_a^b \left(\int_x^b |\alpha(t) r_2(t)|^q dt\right)^{p/(p-q)} d\left(\int_a^x \left|\frac{\varphi(t)}{r_1(t)}\right|^{p'} dt\right)^{(p-1)q/(p-q)}\right\}^{(p-q)/pq} < \infty, \\
M(\beta, \psi) &= \left\{-\int_a^b \left(\int_a^x |\beta(t) r_2(t)|^q dt\right)^{p/(p-q)} d\left(\int_x^b \left|\frac{\psi(t)}{r_1(t)}\right|^{p'} dt\right)^{(p-1)q/(p-q)}\right\}^{(p-q)/pq} < \infty,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

при этом для наилучшей константы C *в* (1) *имеет место оценка*

$$
\begin{gathered}
\max(C_3(p, q) L(\alpha, \varphi) - C_4(p, q) M(\beta, \psi),\ C_3(p, q) M(\beta, \psi) - \\
- C_4(p, q) L(\alpha, \varphi)) \leqslant C \leqslant C_4(p, q)(L(\alpha, \varphi) + M(\beta, \psi)).
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Замечание. К сожалению, левая часть (19) не дает эффективной оценки снизу константы C, поскольку если

$$
\frac{C_3(p, q)}{C_4(p, q)} M(\beta, \psi) \leqslant L(\alpha, \varphi) \leqslant \frac{C_4(p, q)}{C_3(p, q)} M(\beta, \psi),
$$

то левая часть (19) неположительна.

Для доказательства теоремы 1 понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Если* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, *то для непрерывности оператора* $\mathcal{P}_{\alpha,\varphi,\beta,0}$ *необходимо и достаточно, чтобы* $A(\alpha, \varphi) < \infty$. *При этом для* $\|\mathcal{P}_{\alpha,\varphi,\beta,0}\|$ *имеет место оценка*

$$
A(\alpha, \varphi) \leqslant \|\mathcal{P}_{\alpha,\varphi,\beta,0}\| \leqslant C_1(p, q) A(\alpha, \varphi). \tag{20}
$$

Лемма 2. *Если* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, *то для непрерывности оператора* $\mathcal{P}_{\alpha,0,\beta,\psi}$ *необходимо и достаточно, чтобы* $B(\beta, \psi) < \infty$. *При этом для* $\|\mathcal{P}_{\alpha,0,\beta,\psi}\|$ *имеет место оценка*

$$
B(\beta, \psi) \leqslant \|\mathcal{P}_{\alpha,0,\beta,\psi}\| \leqslant C_2(p, q) B(\beta, \psi). \tag{21}
$$

Лемма 3. *Если* $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$, *то для непрерывности оператора* $\mathcal{P}_{\alpha,\varphi,\beta,0}$ *необходимо и достаточно, чтобы* $L(\alpha, \varphi) < \infty$. *При этом для* $\|\mathcal{P}_{\alpha,\varphi,\beta,0}\|$ *имеет место оценка*

$$
C_3(p, q) L(\alpha, \varphi) \leqslant \|\mathcal{P}_{\alpha,\varphi,\beta,0}\| \leqslant C_4(p, q) L(\alpha, \varphi). \tag{22}
$$

Лемма 4. *Если* $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$, *то для непрерывности оператора* $\mathcal{P}_{\alpha,0,\beta,\psi}$ *необходимо и достаточно, чтобы* $M(\beta, \psi) < \infty$. *При этом для* $\|\mathcal{P}_{\alpha,0,\beta,\psi}\|$ *имеет место оценка*

$$
C_5(p, q) M(\beta, \psi) \leqslant \|\mathcal{P}_{\alpha,0,\beta,\psi}\| \leqslant C_6(p, q) M(\beta, \psi). \tag{23}
$$

Утверждения лемм 1—4 следуют из соответствующих утверждений (5), (7), (9), (11) и оценок (6), (8), (10), (12).

Лемма 5. *Пусть* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ *и* (c, d) — *произвольный подынтервал интервала* (a, b) (*возможно, совпадающий с* (a, b)). *Если оператор* $\mathcal{P}_{\alpha, \varphi, \beta, \psi}$ *непрерывен, то для константы* C *из* (1) *имеют место оценки*:

$$\text{(a)}\quad C \geqslant \sup_{c<x<d} \Big(\int_x^b |\alpha(t) r_2(t)|^q dt \Big)^{1/q} \Big(\int_c^x \Big| \frac{\varphi(t)}{r_1(t)} \Big|^{p'} dt \Big)^{1/p'};$$

$$\text{(b)}\quad C \geqslant \sup_{c<x<d} \Big(\int_a^x |\beta(t) r_2(t)|^q dt \Big)^{/q} \Big(\int_x^d \Big| \frac{\psi(t)}{r_1(t)} \Big|^{p'} dt \Big)^{1/p'}.$$

Доказательство. Докажем (a). При всяком $K = 1, 2, \ldots$ обозначим

$$r_{1,K}(x) = \begin{cases} r_1(x), & x \in \{x \,|\, |r_1(x)| \geqslant |\varphi(x)|/K\}, \\ (|\varphi(x)|/K)\operatorname{sgn}(r_1(x)), & x \in \{x \,|\, |r_1(x)| < |\varphi(x)|/K\}. \end{cases} \tag{24}$$

Для введенных таким образом вспомогательных весовых функций $r_{1,K}(x)$ справедливо поточечное неравенство

$$|r_1(x)| \leqslant |r_{1,K}(x)|, \quad a < x < b, \quad K = 1, 2, \ldots,$$

благодаря которому из неравенства (1) следует при всяком $K = 1, 2, \ldots$ неравенство

$$\| r_2 \mathcal{P}(f) \|_q \leqslant C \| r_{1,K} f \|_p \tag{25}$$

с той же константой C, что и (1). Для доказательства (a) воспользуемся неравенством (25). Рассмотрим четыре случая: 1) $p > 1$, $q < \infty$; 2) $p > 1$, $q = \infty$; 3) $p = 1$, $q < \infty$; 4) $p = 1$, $q = \infty$.

1) $p > 1$, $q < \infty$. Определим семейство функций $f^{(s)}(x)$, $c < s < d$, следующим образом:

$$f^{(s)}(x) = \begin{cases} 0, & a < x \leqslant c, \\ |\varphi(x)/r_{1,K}(x)|^{p'} \varphi^{-1}(x), & c < x < s, \\ 0, & s \leqslant x < b. \end{cases} \tag{26}$$

В силу (26) $\operatorname{supp} f^{(s)} \subseteq [c, s]$, и поэтому в силу (24) для $f^{(s)}$ имеет место оценка

$$\| r_{1,K} f^{(s)} \|_p \leqslant K^{1/(p-1)} (s-c)^{1/p} < \infty, \tag{27}$$

так что правая часть (25) при $f = f^{(s)}$ конечна. Подставляя $f^{(s)}$ в (25), переписанное справа налево, и оценивая снизу получившуюся правую часть, получаем

$$C \Big(\int_c^s \Big| \frac{\varphi(t)}{r_{1,K}(t)} \Big|^{p'} dt \Big)^{1/p} \geqslant \Big(\int_a^b \Big| r_2(x) \Big\{ \alpha(x) \int_a^x \varphi(t) f^{(s)}(t)\, dt +$$
$$+ \beta(x) \int_x^b \psi(t) f^{(s)}(t)\, dt \Big\} \Big|^q dx \Big)^{1/q} \geqslant \Big(\int_s^b \Big| r_2(x) \Big\{ \alpha(x) \int_a^x \varphi(t) f^{(s)}(t)\, dt +$$
$$+ \beta(x) \int_x^b \psi(t) f^{(s)}(t)\, dt \Big\} \Big|^q dx \Big)^{1/q} = \Big(\int_s^b |\alpha(x) r_2(x)|^q dx \Big)^{1/q} \times$$
$$\times \Big| \int_a^s \varphi(t) f^{(s)}(t)\, dt \Big| = \Big(\int_s^b |\alpha(x) r_2(x)|^q dx \Big)^{1/q} \int_c^s \Big| \frac{\varphi(t)}{r_{1,K}(t)} \Big|^{p'} dt. \tag{28}$$

Сокращая начало и конец цепочки (28) на $\left(\int\limits_c^s \left|\frac{\varphi(t)}{r_{1,K}(t)}\right|^{p'} dt\right)^{1/p}$, получаем

$$C \geqslant \left(\int\limits_s^b |\alpha(x) r_2(x)|^q\, dx\right)^{1/q} \left(\int\limits_c^s \left|\frac{\varphi(t)}{r_{1,K}(t)}\right|^{p'} dt\right)^{1/p'}. \tag{29}$$

Переходя в (29) к $\sup\limits_{c<s<d}$ и затем к пределу при $K \to \infty$, получаем (a).

2) $p > 1$, $q = \infty$. Доказательство совпадает с приведенным для случая $p > 1$, $q < \infty$, за исключением выкладки (28), которую заменяет следующая:

$$C\left(\int\limits_c^s \left|\frac{\varphi(x)}{r_{1,K}(x)}\right|^{p'} dx\right)^{1/p} \geqslant \sup_{a<x<b} \left| r_2(x) \left\{\alpha(x) \int\limits_a^x \varphi(t) f^{(s)}(t)\, dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \beta(x) \int\limits_x^b \psi(t) f^{(s)}(t)\, dt\right\}\right| \geqslant \sup_{s<x<b} \left| r_2(x) \left\{\alpha(x) \int\limits_a^x \varphi(t) f^{(s)}(t)\, dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \beta(x) \int\limits_x^b \psi(t) f^{(s)}(t)\, dt\right\}\right| = \sup_{s<x<b} |\alpha(x) r_2(x)| \cdot \left|\int\limits_a^s \varphi(t) f^{(s)}(t)\, dt\right| =$$

$$= \sup_{s<k<b} |\alpha(x) r_2(x)| \int\limits_a^s \left|\frac{\varphi(t)}{r_{1,K}(t)}\right|^{p'} dt.$$

3) $p = 1$, $q < \infty$. Зафиксируем s, $c < s < d$. Пусть функция $\lambda_s(x) \in L_1(c, s)$ такова, что $\|\lambda_s\|_1 = 1$, а в остальном произвольна. Продолжим $\lambda_s(x)$ нулем на (a, b) и подставим в (25), переписанное справа налево, функцию

$$\mu_s(x) = \lambda_s(x)/r_{1,K}(x).$$

Оцениваем снизу получившуюся правую часть:

$$C \geqslant \left(\int\limits_s^b |\alpha(x) r_2(x)|^q\, dx\right)^{1/q} \left|\int\limits_c^s \lambda_s(t) \frac{\varphi(t)}{r_{1,K}(t)}\, dt\right|. \tag{30}$$

Переходя в (30) к супремуму по $\|\lambda_s\|_1 = 1$ и воспользовавшись результатом, обратным неравенству Гёльдера (см., например, [10]), получаем

$$C \geqslant \left(\int\limits_s^b |\alpha(x) r_2(x)|^q\, dx\right)^{1/q} \sup_{c<t<s} \left|\frac{\varphi(t)}{r_{1,K}(t)}\right| \tag{31}$$

Переходя в (31) к $\sup\limits_{c<s<d}$ и затем к пределу при $K \to \infty$, получаем (a).

4) $p = 1$, $q = \infty$. Доказательство аналогично приведенному для случая $p = 1$, $q < \infty$.

Утверждение (b) доказывается аналогичным образом: при $p > 1$ с помощью семейства вспомогательных весовых функций

$$r_{1,K}(x) = \begin{cases} r_1(x), & x \in \{x \mid |r_1(x)| \geqslant |\psi(x)|/K\}, \\ (|\psi(x)|/K)\operatorname{sgn}(r_1(x)), & x \in \{x \mid |r_1(x)| < |\psi(x)|/K\}, \end{cases}$$
$$K = 1, 2, \ldots,$$

и семейства «пробных» функций $f^{(s)}(x)$, $c < x < d$:

$$f^{(s)}(x) = \begin{cases} 0, & a < x \leqslant s, \\ |\psi(x)/r_{1,K}(x)|^{p'} \psi^{-1}(x), & s < x < d, \\ 0, & d \leqslant x < b, \end{cases}$$

а при $p = 1$ с применением результата, обратного неравенству Гёльдера.

Еще две элементарные леммы.

Лемма 6. *Пусть* (c, d) — *произвольный подынтервал интервала* (a, b). *Пусть* φ_Δ *и* ψ_Δ — *сужения, соответственно функций* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$, $x \in (a, b)$, *на интервал* (c, d). *Тогда справедливы неравенства*:

$$\text{(a)} \quad L(\alpha, \varphi_\Delta) \leqslant \Big(\int_c^b |\alpha(t) r_2(t)|^q\, dt\Big)^{1/q} \Big(\int_c^d \Big|\frac{\varphi_\Delta(t)}{r_1(t)}\Big|^{p'} dt\Big)^{1/p'};$$

$$\text{(b)} \quad M(\beta, \psi_\Delta) \leqslant \Big(\int_a^d |\beta(t) r_2(t)|^q\, dt\Big)^{1/q} \Big(\int_c^d \Big|\frac{\psi_\Delta(t)}{r_1(t)}\Big|^{p'} dt\Big)^{1/p'}.$$

Лемма 7. *Пусть* φ_1 *и* ψ_1 — *сужения функций* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$, $x \in (a, b)$, *на интервал* (c, d), $c > a$, *а* φ_2 *и* ψ_2 — *сужения* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *на интервал* (d, e), $e < b$. *Тогда имеют место оценки*:

(a) $L(\alpha, \varphi_1 + \varphi_2) \leqslant 2^{1/q+1/p'} (L(\alpha, \varphi_1) + L(\alpha, \varphi_2))$;

(b) $M(\beta, \psi_1 + \psi_2) \leqslant 2^{1/q+1/p'} (M(\beta, \psi_1) + M(\beta, \psi_2))$.

Следствие. 1) *Если* $L(\alpha, \varphi_1 + \varphi_2) = \infty$, *то* $L(\alpha, \varphi_1) = \infty$ *и/или* $L(\alpha, \varphi_2) = \infty$.

2) *Если* $M(\beta, \psi_1 + \psi_2) = \infty$, *то* $M(\beta, \psi_1) = \infty$ *и/или* $M(\beta, \psi_2) = \infty$.

Доказательство теоремы 1. Достаточность. По неравенству треугольника

$$\|r_2 \mathcal{P}_{\alpha,\varphi,\beta,\psi}(f)\|_q \leqslant \|r_2 \mathcal{P}_{\alpha,\varphi,\beta,0}(f)\|_q + \|r_2 \mathcal{P}_{\alpha,0,\beta,\psi}(f)\|_q. \tag{32}$$

Если $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, то $\mathcal{P}_{\alpha,\varphi,\beta,0}$ непрерывен по лемме 1, $\mathcal{P}_{\alpha,0,\beta,\psi}$ непрерывен по лемме 2 и поэтому $\mathcal{P}_{\alpha,\varphi,\beta,\psi}$ непрерывен. Верхняя оценка (17) наилучшей константы C в (1) следует при этом из (32), (20) и (21). Если $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$, то $\mathcal{P}_{\alpha,\varphi,\beta,0}$ непрерывен по лемме 3, $\mathcal{P}_{\alpha,0,\beta,\psi}$ непрерывен по лемме 4 и поэтому $\mathcal{P}_{\alpha,\varphi,\beta,\psi}$ непрерывен. Верхняя оценка (19) следует при этом из (32), (22) и (23).

Необходимость. Если $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, то необходимость условий (16) следует из леммы 5 при $(c, d) = (a, b)$. Из этой же леммы следует нижняя оценка (17). Рассмотрим случай $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$. Предположим противное: оператор $\mathcal{P}_{\alpha,\varphi,\beta,\psi}$ непрерывен, но условия (18) не выполняются. Если при этом $L(\alpha, \varphi) < \infty$ и $M(\beta, \psi) = \infty$ или же $L(\alpha, \varphi) = \infty$ и $M(\beta, \psi) < \infty$, то в силу соотношения

$$\mathcal{P}_{\alpha,\varphi,\beta,\psi} = \mathcal{P}_{\alpha,\varphi,\beta,0} + \mathcal{P}_{\alpha,0,\beta,\psi}$$

и лемм 3, 4 оператор $\mathcal{P}_{\alpha,\varphi,\beta,\psi}$ является суммой ограниченного и неограниченного операторов и поэтому непрерывным не является. Рассмотрим оставшийся случай: $L(\alpha, \varphi) = \infty$ и $M(\beta, \psi) = \infty$. Построим последовательность вложенных отрезков

$$[c_1, d_1] \supset [c_2, d_2] \supset \ldots$$

следующим образом: положим $[c_1, d_1] = [a, b]$ (если $a = -\infty$ и/или $b = \infty$, то присоединяем бесконечно удаленные точки). Пусть $d \in (c_1, d_1)$ — точка деления отрезка $[c_1, d_1]$. Через $\bar\varphi_1$, $\bar\varphi_2$ обозначим сужения $\varphi(x)$, а через $\bar\psi_1$, $\bar\psi_2$ — сужения $\psi(x)$, $x \in (a, b)$, на интервалы (c_1, d) и (d, d_1). Если хотя бы для одного из $j = 1, 2$ имеет место одно из двух соотношений

$$L(\alpha, \bar\varphi_j) = \infty, \quad M(\beta, \bar\psi_j) < \infty, \tag{33}$$

$$L(\alpha, \bar\varphi_j) < \infty, \quad M(\beta, \bar\psi_j) = \infty, \tag{34}$$

то в качестве отрезка $[c_2, d_2]$ берем тот, для которого выполнено (33) или (34), и процесс построения последовательности на этом заканчивается. Если же ни для какого из двух отрезков $[c_1, d]$ и $[d, d_1]$ не выполнено ни (33), ни (34), то с учетом следствия леммы 7, среди этих двух отрезков найдется такой, что

$$L(\alpha, \bar{\varphi}_j) = \infty, \quad M(\beta, \bar{\psi}_j) = \infty, \quad j = 1 \text{ или } 2.$$

Этот отрезок обозначаем $[c_2, d_2]$ и повторяем для него описанную выше процедуру построения.

Рассмотрим построенную последовательность вложенных отрезков. Через φ_k, ψ_k обозначим сужения $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $x \in (a, b)$, на отрезок $[c_k, d_k]$, $k = 1, 2, \ldots$ Пусть построенная последовательность конечна и $[c_n, d_n]$ — последний ее отрезок. В этом случае оператор $\mathcal{P}_{\alpha, \varphi_n, \beta, \psi_n}$ (который является сужением оператора $\mathcal{P}_{\alpha, \varphi, \beta, \psi}$ на функции с носителями из $[c_n, d_n]$) является неограниченным, поскольку

$$\mathcal{P}_{\alpha,\varphi_n,\beta,\psi_n} = \mathcal{P}_{\alpha,\varphi_n,\beta,0} + \mathcal{P}_{\alpha,0,\beta,\psi_n} \tag{35}$$

и по построению $[c_n, d_n]$ в правой части (35) один и только один оператор неограничен. Следовательно, сам оператор $\mathcal{P}_{\alpha, \varphi, \beta, \psi}$ также неограничен. Если построенная последовательность вложенных отрезков $\{[c_k, d_k]\}_{k=1}^{\infty}$ бесконечна, то, во-первых, можно считать, что существует единственная точка c (конечная или бесконечная) такая, что

$$c = \bigcap_{k \geqslant 1} [c_k, d_k]. \tag{36}$$

Во-вторых, каждый отрезок $[c_k, d_k]$, $k = 1, 2, \ldots$, обладает следующим свойством:

$$\varphi(x) = 0 \text{ п. в. при } x < c_k, \tag{37}$$

$$\psi(x) = 0 \text{ п. в. при } x > d_k. \tag{38}$$

Докажем (37): поскольку $\mathcal{P}_{\alpha, \varphi, \beta, \psi}$ непрерывен, то по лемме 5 имеет место неравенство

$$\infty > C > \Big(\int_{d_k}^{b} |\alpha r_2|^q \, dt\Big)^{1/q} \Big(\int_{c_k}^{d_k} \Big|\frac{\varphi}{r_1}\Big|^{p'} dt\Big)^{1/p'} \tag{39}$$

(здесь C — константа из (1)). Причем в силу того, что $\alpha(x) \neq 0$ п. в. и $\beta(x) \neq 0$ п. в., из (39) следует, что

$$\Big(\int_{c_k}^{d_k} \Big|\frac{\varphi}{r_1}\Big|^{p'} dt\Big)^{1/p'} < \infty. \tag{40}$$

С другой стороны, по построению $[c_k, d_k]$ имеет место

$$L(\alpha, \varphi_k) = \infty$$

и, следовательно, по лемме 6 имеет место

$$\infty = L(\alpha, \varphi_k) \leqslant \Big(\int_{c_k}^{b} |\alpha r_2|^q \, dt\Big)^{1/q} \Big(\int_{c_k}^{d_k} \Big|\frac{\varphi}{r_1}\Big|^{p'} dt\Big)^{1/p'}. \tag{41}$$

Из (39)—(41) следует, что

$$\Big(\int_{c_k}^{d_k} |\alpha r_2|^q \, dt\Big)^{1/q} = \infty.$$

Поэтому для того, чтобы при всех $x \in (a, c_k)$ выполнялось утверждение леммы 5

$$\infty > C > \left(\int\limits_x^b |\alpha r_2|^q\, dt\right)^{1/q} \left(\int\limits_a^x \left|\frac{\varphi}{r_1}\right|^{p'} dt\right)^{1/p'},$$

необходимо, чтобы выполнялось (37). Аналогично доказывается (38).

В силу (37) и (38) точка c, определенная соотношением (36), обладает тем свойством, что

$$\varphi(x) = 0 \text{ п. в. при } x < c, \quad \psi(x) = 0 \text{ п. в. при } x > c.$$

Следовательно, оператор $\mathscr{P}_{\alpha, \varphi, \beta, \psi}$ имеет вид

$$[\mathscr{P}_{\alpha,\varphi,\beta,\psi}(f)](x) = \begin{cases} \alpha(x) \int\limits_c^x \varphi(t) f(t)\, dt, & c \leqslant x < b, \\ \beta(x) \int\limits_x^c \psi(t) f(t)\, dt, & a < x < c. \end{cases} \tag{42}$$

Оценим норму оператора (42) снизу:

$$\infty > \|\mathscr{P}_{\alpha,\varphi,\beta,\psi}\| \sup_{\|r_1 f\|_p = 1} \|r_2 \mathscr{P}_{\alpha,\varphi,\beta,\psi}(f)\|_q \geqslant \frac{1}{2}\Bigl(\sup_{\|r_1 f\|_{L_p(a,c)} = 1} \|r_2 \mathscr{P}_{\alpha,0,\beta,\psi}(f)\|_q +$$
$$+ \sup_{\|r_1 f\|_{L_p(c,b)} = 1} \|r_2 \mathscr{P}_{\alpha,\varphi,\beta,0}(f)\|_q\Bigr) \geqslant \frac{1}{2} C_3(p, q)\,(M(\beta, \psi) + L(\alpha, \varphi)).$$

Получили противоречие с тем, что $M(\beta, \psi) = L(\alpha, \varphi) = \infty$.

Для завершения доказательства теоремы осталось получить нижнюю оценку (19). Поскольку оператор $\mathscr{P}_{\alpha, \varphi, \beta, 0}$ непрерывен, то в силу нижней оценки (22) леммы 3 для любого $\varepsilon > 0$ найдется $f_L^{(\varepsilon)} \in L_{p, r_1}(a, b)$ такая, что

$$\|r_2 \mathscr{P}_{\alpha,\varphi,\beta,0}(f_L^{(\varepsilon)})\|_q > (C_3(p, q) - \varepsilon)\, L(\alpha, \varphi)\, \|r_1 f_L^{(\varepsilon)}\|_p.$$

Подставим функцию

$$g_L^{(\varepsilon)}(x) = f_L^{(\varepsilon)}(x)\, \|r_1 f_L^{(\varepsilon)}\|_p^{-1}$$

в (1), переписанное справа налево, и оценим получившуюся правую часть (при этом воспользуемся верхней оценкой (23) леммы 4):

$$C \geqslant \|r_2 \mathscr{P}_{\alpha,\varphi,\beta,\psi}(g_L^{(\varepsilon)})\|_q \geqslant \|r_2 \mathscr{P}_{\alpha,\varphi,\beta,0}(g_L^{(\varepsilon)})\|_q - \|r_2 \mathscr{P}_{\alpha,0,\beta,\psi}(g_L^{(\varepsilon)})\|_q \geqslant$$
$$\geqslant (C_3(p, q) - \varepsilon)\, L(\alpha, \varphi) - C_4(p, q)\, M(\beta, \psi). \tag{43}$$

Аналогично получаем оценку

$$C \geqslant (C_3(p, q) - \varepsilon)\, M(\beta, \psi) - C_4(p, q)\, L(\alpha, \varphi), \tag{44}$$

и требуемая нижняя оценка (19) следует из (43) и (44) переходом к пределу при $\varepsilon \to +0$. Теорема доказана.

Следствие. *При $1 \leqslant q < p$ для непрерывности оператора $\mathscr{P}_{\alpha, \varphi, \beta, \psi}$: $L_{p, r_1}(a, b) \to L_{q, r_2}(a, b)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$L^*(\alpha, \varphi) = \left(-\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^x \left|\frac{\varphi}{r_1}\right|^{p'} dt\right)^{(p-1)q/(p-q)} d\left(\int\limits_x^b |\alpha r_2|^q\, dt\right)^{p/(p-q)}\right)^{(p-q)/pq} < \infty.$$

$$M^*(\beta, \psi) = \left(\int\limits_a^b \left(\int\limits_x^b \left|\frac{\psi}{r_1}\right|^{p'} dt\right)^{(p-1)q/(p-q)} d\left(\int\limits_a^x |\beta r_2|^q\, dt\right)^{p/(p-q)}\right)^{(p-q)/pq} < \infty.$$

Доказательство следует из того факта, что для непрерывности оператора $\mathscr{P}_{\alpha, \varphi, \beta, \psi}$: $L_{p, r_1} \to L_{q, r_2}$ необходима и достаточна непрерывность оператора $\mathcal{P}_{\psi,\alpha,\varphi,\alpha}$: $L_{q',1/r_2} \to L_{p',1/r_1}$. Это, в свою очередь, следует из тождества

$$\int_a^b [\mathcal{P}_{\alpha,\varphi,\beta,\psi}(f)](x)\, g(x)\, dx = \int_a^b [\mathcal{P}_{\psi,\beta,\varphi,\alpha}(g)](y)\, f(y)\, dy,$$

которое доказывается интегрированием по частям.

Если $\alpha(x) = \beta(x) \equiv 1$ и $\psi(x) \equiv \varphi(x) - 1$, то оператор $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{1,\varphi,1,\varphi-1}$ является оператором взятия первообразной, поскольку $d[\mathcal{P}f](x)/dx \equiv f(x)$.

Положим

$$\Phi(F) = \int_a^b \varphi(t)\, F'(t)\, dt - F(b).$$

Теорема 2 (неравенство Харди). *Пусть $\varphi(t)$ — фиксированная измеримая функция. Тогда для того, чтобы с константой, не зависящей от F, и конечной правой частью выполнялось неравенство*

$$\| r_2 (F + \Phi(F)) \|_q \leqslant C \| r_1 F' \|_p,$$

необходимо и достаточно, чтобы при $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ выполнялось условие $A(1, \varphi) + B(1, \varphi - 1) < \infty$, а при $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$ выполнялось условие $L(1, \varphi) + M(1, \varphi - 1) < \infty$.

Доказательство следует из теоремы 1 и легко проверяемого равенства $\mathcal{P}_{1,\varphi,1,\varphi-1}(F') = F + \Phi(F)$.

Если φ — функция с конечным изменением такая, что $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$, то теорема 2 дает

Следствие (неравенство Пуанкаре). *Пусть $\varphi(t)$ фиксированная функция с конечным изменением такая, что $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$. Тогда для того, чтобы с константой, не зависящей от F, и конечной правой частью выполнялось неравенство*

$$\left\| r_2 \left(F - \int_a^b F(x)\, d\varphi(x) \right) \right\|_q \leqslant C \| r_1 F' \|_p, \tag{45}$$

необходимо и достаточно, чтобы при $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ выполнялось условие $A(1, \varphi) + B(1, \varphi - 1) < \infty$, а при $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$ выполнялось условие $L(1, \varphi) + M(1, \varphi - 1) < \infty$.

3. Описание допустимых весовых пар при $\alpha = \beta \equiv 1$, $\psi \equiv \varphi - 1$. Приложение

В этом разделе считаем $\alpha(x) = \beta(x) \equiv 1$, $\psi(x) \equiv \varphi(x) - 1$. Оператор $\mathcal{P}_{1,\varphi,1,\varphi-1}$ для краткости будем обозначать $\mathcal{P}_\varphi$. Величины $A(1, \varphi)$, $B(1, \varphi - 1)$, $L(1, \varphi)$, $M(1, \varphi - 1)$ будем обозначать соответственно $A(\varphi)$, $B(\varphi - 1)$, $L(\varphi)$, $M(\varphi - 1)$. Как отмечено в предыдущем разделе, $\mathcal{P}_\varphi$ — это оператор взятия первообразной.

Оказывается, что в этом случае весовые пары (r_1, r_2), для которых оператор $\mathcal{P}_\varphi$: $L_{p,r_1} \to L_{q,r_2}$ непрерывен, допускают описание, не привлекающее функцию φ.

Определим вспомогательную функцию $\varphi^*(x)$, $a < x < b$, следующим образом:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & x \in E^+ = \{x \mid \varphi(x) \geqslant 1/2\}, \\ 0, & x \in E^- = \{x \mid \varphi(x) < 1/2\}. \end{cases} \tag{46}$$

Лемма 8. *При всяком $x \in (a, b)$ имеют место неравенства*

$$\int_a^x \left| \frac{\varphi^*(t)}{r_1(t)} \right|^{p'} dt \leqslant 2^{p'} \int_a^x \left| \frac{\varphi(t)}{r_1(t)} \right|^{p'} dt, \tag{47}$$

$$\int_x^b \left| \frac{\varphi^*(t)-1}{r_1(t)} \right|^{p'} dt \leqslant 2^{p'} \int_x^b \left| \frac{\varphi(t)-1}{r_1(t)} \right|^{p'} dt. \tag{48}$$

Доказательство. Получим (47):

$$\int_a^x \left| \frac{\varphi^*(t)}{r_1(t)} \right|^{p'} dt = \int\limits_{E^+\bigcap(a,x)} \left| \frac{1}{r_1(t)} \right|^{p'} dt = 2^{p'} \int\limits_{E^+\bigcap(a,x)} \left| \frac{1}{2r_1(t)} \right|^{p'} dt \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p'} \int\limits_{E^+\bigcap(a,x)} \left| \frac{\varphi(t)}{r_1(t)} \right|^{p'} dt \leqslant 2^{p'} \int_a^x \left| \frac{\varphi(t)}{r_1(t)} \right|^{p'} dt.$$

Аналогично доказывается (48) с учетом соотношения

$$E^- = \{x \mid 1 < 2(1-\varphi(x))\}.$$

Лемма 9. *Если оператор $\mathcal{P}_\varphi$: $L_{p,r_1} \to L_{q,r_2}$ непрерывен, то оператор $\mathcal{P}_{\varphi^*}$: $L_{p,r_1} \to L_{q,r_2}$ также непрерывен,* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.

Доказательство следует из соотношений

$$A(\varphi^*) \leqslant 2A(\varphi), \quad B(\varphi^*-1) \leqslant 2B(\varphi-1),$$

$$L^*(\varphi^*) \leqslant 2L^*(\varphi), \quad M^*(\varphi^*-1) \leqslant 2M^*(\varphi-1),$$

которые легко получить из предыдущей леммы.

Введем следующие определения.

Определение 1. При фиксированных p и q, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, весовая пара (r_1, r_2) называется совместимой относительно функции φ, если оператор $\mathcal{P}_\varphi$: $L_{p,r_1} \to L_{q,r_2}$ непрерывен.

Определение 2. Пусть $\xi \in (a, b)$ — фиксированная точка, $\theta(x)$ — функция Хевисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

и $\bar\theta(x-\xi)$ — сужение $\theta(x-\xi)$ на (a, b). Весовая пара (r_1, r_2) называется ξ-совместимой, если она совместима относительно функции $\bar\theta(x-\xi)$.

Лемма 10. *Если $\| r_2 \|_\varphi < \infty$, то всякая пара (r_1, r_2), совместимая относительно функции φ, является ξ-совместимой, $a < \xi < b$.*

Доказательство. Пусть (r_1, r_2) совместима относительно функции φ. Зафиксируем $\xi \in (a, b)$. По лемме 9 пара (r_1, r_2) совместима относительно функции φ^*. Пусть $p \leqslant q$. Оценим сверху $A(\bar\theta(x-\xi))$:

$$A(\bar\theta(x-\xi)) = \sup_{\xi<x<b} \left(\int_x^b |r_2(t)|^q dt\right)^{1/q} \left(\int_\xi^x |r_1(t)|^{-p'} dt\right)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\xi<x<b} \left(\int_x^b |r_2(t)|^q dt\right)^{1/q} \left(\int_\xi^x \left|\frac{\varphi^*(t)}{r_1(t)}\right|^{p'} dt\right)^{1/p'} + \sup_{\xi<x<b} \left(\int_x^b |r_2(t)|^q dt\right)^{1/q} \times$$

$$\times \left(\int_\xi^x \left|\frac{\varphi^*(t)-1}{r_1(t)}\right|^{p'} dt\right)^{1/p'} \leqslant \sup_{a<x<b} \left(\int_x^b |r_2(t)|^q dt\right)^{1/q} \left(\int_a^x \left|\frac{\varphi^*(t)}{r_1(t)}\right|^{p'} dt\right)^{1/p'} +$$

$$+ \left(\int_\xi^b |r_2(t)|^q dt\right)^{1/q} \left(\int_\xi^b \left|\frac{\varphi^*(t)-1}{r_1(t)}\right|^{p'} dt\right)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant (A(\varphi^*) + B(\varphi^* - 1)\Big(\int_\xi^b |r_2(t)|^q\,dt\Big)^{1/q}\Big(\int_a^\xi |r_2(t)|^q\,dt\Big)^{-1/q} < \infty. \tag{49}$$

Аналогично оценивается $B(\bar\theta(x-\xi)-1)$:

$$B(\bar\theta(x-\xi)-1) \leqslant B(\varphi^*-1) + A(\varphi^*)\Big(\int_a^\xi |r_2|^q\,dt\Big)^{1/q}\Big(\int_\xi^b |r_2|^q\,dt\Big)^{-1/q}. \tag{50}$$

Пусть $q < p$. Оценим сверху $L^*(\bar\theta(x-\xi))$:

$$L^*(\bar\theta(x-\xi)) = \Big(-\int_\xi^b\Big(\int_\xi^x |r_1(t)|^{-p'}\,dt\Big)^{(p-1)q/(p-q)} d\Big(\int_x^b |r_2(t)|^q\,dt\Big)^{p/(p-q)}\Big)^{(p-q)/pq} \leqslant$$

$$\leqslant\Big(-\int_\xi^b\Big(\int_\xi^x\Big|\frac{\varphi^*(t)}{r_1(t)}\Big|^{p'}dt + \int_\xi^x\Big|\frac{\varphi^*(t)-1}{r_1(t)}\Big|^{p'}dt\Big)^{(p-1)q/(p-q)} d\Big(\int_x^b |r_2(t)|^q\,dt\Big)^{p/(p-q)}\Big)^{(p-q)/pq} \leqslant$$

(дважды применяем неравенство треугольника)

$$\leqslant\Big(-\int_\xi^b\Big(\int_\xi^x\Big|\frac{\varphi^*(t)}{r_1(t)}\Big|^{p'}dt\Big)^{(p-1)q/(p-q)} d\Big(\int_x^b |r_2(t)|^q\,dt\Big)^{p/(p-q)}\Big)^{(p-q)/pq} +$$

$$+\Big(-\int_\xi^b\Big(\int_\xi^x\Big|\frac{\varphi^*(t)-1}{r_1(t)}\Big|^{p'}dt\Big)^{(p-1)q/(p-q)} d\Big(\int_x^b |r_2(t)|^q\,dt\Big)^{p/(p-q)}\Big)^{(p-q)/pq} \leqslant$$

$$\leqslant\Big(-\int_a^b\Big(\int_a^x\Big|\frac{\varphi^*(t)}{r_1(t)}\Big|^{p'}dt\Big)^{(p-1)q/(p-q)} d\Big(\int_x^b |r_2(t)|^q\,dt\Big)^{p/(p-q)}\Big)^{(p-q)/pq} +$$

$$+\Big(-\int_\xi^b\Big(\int_\xi^b\Big|\frac{\varphi^*(t)-1}{r_1(t)}\Big|^{p'}dt\Big)^{(p-1)q/(p-q)} d\Big(\int_x^b |r_2(t)|^q\,dt\Big)^{p/(p-q)}\Big)^{(p-q)/pq} \leqslant$$

$$\leqslant L^*(\varphi^*) + \Big(\int_\xi^b\Big|\frac{\varphi^*(t)-1}{r_1(t)}\Big|^{p'}dt\Big)^{1/p'}\Big(\int_\xi^b |r_2(t)|^q\,dt\Big)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant L^*(\varphi^*) + B(\varphi^*-1)\Big(\int_\xi^b |r_2(t)|^q\,dt\Big)^{1/q}\Big(\int_a^\xi |r_2(t)|^q\,dt\Big)^{-1/q} < \infty. \tag{51}$$

Аналогично оценивается $M^*(\bar\theta(x-\xi)-1)$:

$$M^*(\bar\theta(x-\xi)-1) \leqslant M^*(\varphi^*-1) + A(\varphi^*)\Big(\int_a^\xi |r_2|^q\,dt\Big)^{1/q}\Big(\int_\xi^b |r_2|^q\,dt\Big)^{-1/q} < \infty. \tag{52}$$

Лемма доказана.

Лемма 10 оправдывает следующее

Определение 3. При $\| r_2 \|_q < \infty$ ξ-совместимая пара называется обобщенно совместимой.

Теорема 3. *Если* $\| r_2 \|_q < \infty$, *то всякая пара* (r_1, r_2), *совместимая относительно функции* φ, *является обобщенно совместимой.*

Доказательство следует из леммы 10.

Замечание. Пусть $\| r_2 \|_q < \infty$ и весовая пара (r_1, r_2) обобщенно совместима. Имеются функции φ такие, что оператор $\mathcal{P}_\varphi$ не является непрерывным, как показывает следующий пример: пусть $(a, b) = (0, 1)$, $1 < p = q < \infty$, $r_1(x) = x(1-x)$, $r_2(x) \equiv 1$. Подсчет показывает, что оператор $\mathcal{P}_1(f) = \int_0^x f(t)\,dt$ (как и оператор $\int_x^1 f(t)\,dt$) непрерывным не является.

В то же время (r_1, r_2) — обобщенно совместимая пара, так как непрерывным является оператор

$$\mathscr{P}_{\varphi(t)\equiv t}(f) = \int_0^x tf(t)\,dt + \int_x^1 (t-1)f(t)\,dt.$$

В случае $\| r_2 \|_q = \infty$ оказывается, что не для всякой функции φ существуют весовые пары (r_1, r_2), совместимые относительно нее. Имеет место

Теорема 4. *Если $\| r_2 \|_q = \infty$ и пара (r_1, r_2) совместима относительно функции φ, то существует и единственна точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $\varphi(x) = \bar{\theta}(x - \xi)$ п. в.*

Доказательство. Если пара (r_1, r_2) совместима относительно функции φ, то по лемме 9 она совместима и относительно функции φ^*. Следовательно, непрерывен также и оператор

$$\Delta_{\varphi,\varphi^*} = \mathscr{P}_\varphi - \mathscr{P}_{\varphi^*} : L_{p,r_1}(a, b) \to L_{q,r_2}(a, b), \tag{53}$$

порождающий константу, равную

$$[\Delta_{\varphi,\varphi^*}(f)](x) = \int_a^b (\varphi(t) - \varphi^*(t))\,f(t)\,dt.$$

В силу того что $\| r_2 \|_q = \infty$, ненулевые константы не содержатся в $L_{q,r_2}(a, b)$ и поэтому для непрерывности оператора $\Delta_{\varphi,\varphi^*}$ необходимо, чтобы $\varphi(t) = \varphi^*(t)$ п. в. на (a, b). Найдем функцию $\varphi^*(t)$. Для этого положим

$$\xi_a = \sup\left\{\eta \,\middle|\, \int_a^\eta \left|\frac{\varphi^*(t)}{r_1(t)}\right|^{p'} dt = 0\right\}, \tag{54}$$

$$\xi_b = \inf\left\{\eta \,\middle|\, \int_\eta^b \left|\frac{\varphi^*(t) - 1}{r_1(t)}\right|^{p'} dt = 0\right\}. \tag{55}$$

Согласно (54) и (55) $\xi_a \in [a, b]$, $\xi_b \in [a, b]$. Докажем, что $\xi_a = \xi_b$. Если $\xi_a > \xi_b$, то на непустом интервале (ξ_b, ξ_a) имеют место одновременно два соотношения: $\varphi^* = 0$ и $\varphi^* = 1$, что невозможно. Если $\xi_a < \xi_b$, то интервал (ξ_a, ξ_b) непуст и для фиксированного $\xi \in (\xi_a, \xi_b)$, учитывая, что $A(\varphi^*) < \infty$ и $B(\varphi^* - 1) < \infty$, получаем

$$\left(\int_\xi^b |r_2(t)|^q\,dt\right)^{1/q} = \left(\int_\xi^b |r_2(t)|^q\,dt\right)^{1/q} \left(\int_{\xi_a}^\xi \left|\frac{\varphi^*(t)}{r_1(t)}\right|^{p'} dt\right)^{1/p'} \times$$
$$\times \left(\int_{\xi_a}^\xi \left|\frac{\varphi^*(t)}{r_1(t)}\right|^{p'} dt\right)^{-1/p'} \leqslant A(\varphi^*) \left(\int_{\xi_a}^\xi \left|\frac{\varphi^*(t)}{r_2(t)}\right|^{p'} dt\right)^{-1/p'} < \infty. \tag{56}$$

Аналогично

$$\left(\int_a^\xi |r_2(t)|^q\,dt\right)^{1/q} \leqslant B(\varphi^* - 1) \left(\int_\xi^{\xi_b} \left|\frac{\varphi^*(t) - 1}{r_1(t)}\right|^{p'} dt\right)^{-1/p'} < \infty. \tag{57}$$

Из (56) и (57) вытекает, что

$$\left(\int_a^b |r_2(t)|^q\,dt\right)^{1/q} < \infty,$$

а по условию теоремы $\| r_2 \|_q = \infty$. Следовательно, интервал (ξ_a, ξ_b) пуст. Полагая $\xi = \xi_a = \xi_b$, получаем

$$\varphi(x) = \varphi^*(x) = \theta(x - \xi).$$

Следствие. *Если* $\| r_2 \|_p = \infty$ *и справедливо неравенство Пуанкаре* (45), *то* $\varphi(x) = \bar\theta(x - \xi)$ *п. в. для некоторой* $\xi \in [a, b]$.

Замечание. Если (r_1, r_2) совместима относительно некоторой функции φ и $\| r_2 \|_q = \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, то существует одна и только одна точка $\xi \in [a, b]$, обладающая тем свойством, что $\forall \delta > 0$ имеет место

$$\Big(\int\limits_{(a,b)\cap(\xi-\delta,\xi+\delta)} r_2(t) |^q dt \Big)^{1/q} = \infty. \tag{58}$$

При этом если $\xi = -\infty$ или $\xi = \infty$, то берется соответствующая полуокрестность бесконечно удаленной точки; если $q = \infty$, то (58) понимается в смысле ess sup. В самом деле, если точки, удовлетворяющей (58), не существует, то $\| r_2 \|_q < \infty$. Если же, кроме ξ, найдется точка $\eta \neq \xi$ (для определенности пусть $\xi < \eta$), удовлетворяющая (58), то для $f > 0$, $\operatorname{supp} f \Subset (\xi, \eta)$, $f \in L_{p, r_1}(a, b)$, никакая первообразная этой функции не принадлежит $L_{q, r_2}(a, b)$.

В заключение рассмотрим следующую задачу, поставленную Л. Д. Кудрявцевым:

Пусть $F' \in L_{p, r_1}(a, b)$ — обобщенная производная функции $F = F(x)$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы $F \in L_{q, r_2}(a, b)$.

Решение этой задачи дает следующая

Теорема 5. (а) *Если* $\| r_2 \|_q < \infty$, *то для того, чтобы* $F \in L_{q, r_2}(a, b)$, *необходимо и достаточно, чтобы весовая пара* (r_1, r_2) *была обобщенно совместима.*

(b) *Если* $\| r_2 \|_q = \infty$, *то для того, чтобы* $F \in L_{q, r_2}(a, b)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала точка* $\xi \in [a, b]$ *со следующими двумя свойствами:*

(r, r_2) *является* ξ*-совместимой парой;* (59)

$F(\xi) = 0.$ (60)

Доказательство. (а) $\| r_2 \|_q < \infty$. Достаточность. Пусть весовая пара (r_1, r_2) обобщенно совместима, пусть $F' \in L_{p, r_1}(a, b)$ и пусть $\xi \in (a, b)$ — фиксированная точка. Тогда по определению $\mathscr{P}_{\bar\theta(x-\xi)}$ непрерывен и, следовательно, $\mathscr{P}_{\bar\theta(x-\xi)}(F') \in L_{q, r_2}(a, b)$. Рассмотрим тождество

$$F(x) \equiv F(\xi) + [\mathscr{P}_{\bar\theta(x-\xi)}(F')](x), \quad x \in (a, b). \tag{61}$$

В правой его части постоянная $F(\xi)$ конечна в силу непрерывности $F(x)$, и поэтому каждое из слагаемых правой части (61) принадлежит $L_{q, r_2}(a, b)$. Следовательно, $F(x) \in L_{q, r_2}(a, b)$.

Необходимость. Пусть для всякой $F' \in L_{q, r_1}(a, b)$ найдется некоторая первообразная $F \in L_{q, r_2}(a, b)$. Докажем, что (r_1, r_2) — обобщенно совместимая пара. Рассмотрим оператор $\mathscr{P}_{\bar\theta(x-\xi)}$ в тождестве (61). Поскольку $F(x) \in L_{q, r_2}(a, b)$ и константа $F(\xi) \in L_{q, r_2}(a, b)$, то и $\mathscr{P}_{\bar\theta(x-\xi)}(F') \in L_{q, r_2}(a, b)$. Следуя терминологии [11], $\mathscr{P}_{\bar\theta(x-\xi)}$ — это линейный интегральный оператор, действующий из банахова фундаментального пространства (БФП) $L_{p, r_1}(a, b)$ в БФП $L_{q, r_2}(a, b)$ и в силу общих свойств таких операторов [11, с. 394] непрерывен. Следовательно, (r_1, r_2) — обобщенно совместимая пара.

(b) $\| r_2 \|_q = \infty$. Достаточность тривиальна. Необходимость. Пусть каждой $F' \in L_{p, r_1}(a, b)$ сопоставлена некоторая первообразная $F \in L_{q, r_2}(a, b)$. Обозначим через ξ ту точку отрезка $[a, b]$, для которой выполнено (58). Согласно замечанию к теореме 4 ξ существует и единственна. Для так определенной точки ξ выполнено условие (60), так как если $F(\xi) \neq 0$, то, будучи непрерывной, функция $F(x)$ отлична от нуля в некоторой окрестности точки ξ и поэтому не принадлежат $L_{q,r_2}(a, b)$. Выполнение условия (60) эквивалентно наличию интегрального представления

$$F(x) = [\mathscr{P}_{\bar{\theta}(x-\xi)}(F')](x).$$

Оператор $\mathscr{P}_{\bar{\theta}(x-\xi)}$ непрерывен как линейный интегральный оператор, действующий в БФП, и поэтому (r_1, r_2) ξ-совместима, т. е. выполнено (59).

Пусть $\eta \in (a, b)$ — фиксированная точка. Обозначим

$$W^1_{p,r_1}(a, b) = \{f \mid \|f\|_W = |f(\eta)| + \|r_1 f'\|_p < \infty\}.$$

Из теоремы 5 вытекает

Следствие. *Для непрерывности вложения*

$$W^1_{p,r_1}(a, b) \subsetneq L_{q,r_2}(a, b)$$

при $\|r_2\|_q < \infty$ *необходимо и достаточно, чтобы пара* (r_1, r_2) *была обобщенно совместима, а при* $\|r_2\|_q = \infty$ *необходимо и достаточно, чтобы для некоторого* $\xi \in [a, b]$ *пара* (r_1, r_2) *была* ξ*-совместимой.*

Доказательство следует из теоремы 5.

Поступило в апреле 1989 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hardy G.* Notes on some points in the integral calculus (LXIV) // Messenger of Math. 1928. Vol. 57. P. 12—16.
2. *Muckenhoupt B.* Hardy's inequality with weights // Stud. math. 1972. Vol. 44, N 1. P. 31—38.
3. *Bradley J. S.* Hardy inequalities with mixed norms // Canad. Math. Bull. 1978. Vol. 21, N 1. P. 405—408.
4. *Кокилашвили В. М.* О неравенствах Харди в весовых пространствах // Сообщ. АН ГССР. 1979. Т. 96, № 1. С. 37—40.
5. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
6. *Батуев Э. Н., Степанов В. Д.* О весовых неравенствах типа Харди // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 1. С. 13—22.
7. *Степанов В. Д.* Двухвесовые оценки интегралов Римана — Лиувилля: Препр. ВЦ ДВО АН СССР. Владивосток, 1988.
8. *Степанов В. Д.* Двухвесовые оценки интегралов Римана — Лиувилля. 2: Препр. ВЦ ДВО АН СССР. Владивосток, 1988.
9. *Степанов В. Д.* Весовые неравенства типа Харди для производных высших порядков и их приложения // ДАН СССР. 1988. Т. 302. С. 1059—1062.
10. *Буренков В. И.* Функциональные пространства. Пространства L_p. М.: Изд-во УДН, 1987.
11. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.