В. И. Буренков, М. Л. Гольдман, Вычисление нормы положительного оператора на конусе монотонных функций, *Тр. МИАН*, 1995, том 210, 65–89

Труды Математического института РАН
1995, том 210

УДК 517.518

В.И. Буренков, М.Л. Гольдман

Вычисление нормы положительного оператора на конусе монотонных функций[1]

1. Формулировка результатов

Пусть $J = (a,b)$, где $-\infty \le a < b \le \infty$; $S(J;\beta)$ — линейное пространство всех вещественнозначных измеримых и почти всюду (кратко: п.в.) конечных по неотрицательной борелевской мере β функций на J; $L_{p,\beta}$ — подпространство всех функций $f \in S(J;\beta)$, для которых

$$\|f\|_{p,\beta} := \left(\int_a^b |f|^p \, d\beta\right)^{1/p} < \infty, \qquad 0 < p < \infty. \tag{1.1}$$

Для $\Delta \subset J$ обозначим через χ_Δ характеристическую функцию множества Δ; таким образом,

$$\chi_\Delta(u) = 1, \quad u \in \Delta; \qquad \chi_\Delta(u) = 0, \quad u \in J \setminus \Delta. \tag{1.2}$$

Пусть далее $\mathfrak{M}$ — измеримое пространство, на σ-алгебре измеримых множеств которого задана неотрицательная мера γ. Рассмотрим квазибанахово пространство $X \subset S(\mathfrak{M};\gamma)$ с квазинормой $\|\cdot\|_X$. Напомним, что для квазинормы неравенство треугольника имеет вид

$$\|f+g\|_X \le C(\|f\|_X + \|g\|_X) \qquad \forall f,g \in X, \tag{1.3}$$

где $C = C_X \ge 1$ — постоянная. При $C = 1$ получаем нормированное (банахово) пространство X.

Квазибанахово пространство $X \subset S(\mathfrak{M};\gamma)$ называется идеальным, если

$$\{f \in S(\mathfrak{M};\gamma),\ g \in X,\ |f| \le |g| \text{ п.в.}\} \Rightarrow \{f \in X;\ \|f\|_X \le \|g\|_X\}.$$

Всюду в этой работе $\sum_k \ldots$ означает $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \ldots$, где $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$. Идеальное пространство X назовем l_q-выпуклым ($0 < q \le \infty$), если

$$\left\|\left(\sum_k |x_k|^q\right)^{1/q}\right\|_X \le \left(\sum_k \|x_k\|_X^q\right)^{1/q} \tag{1.4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-01-00255), а также международной ассоциации INTAS (проект 94–881).

(т.е. сходимость ряда в правой части (1.4) влечет сходимость в X ряда в левой части (1.4) и справедливость неравенства).

Отметим, что любое нормированное идеальное пространство l_1-выпукло; из l_q-выпуклости при $0 < q < 1$ вытекает неравенство треугольника (1.3) с постоянной $C = 2^{1/q} - 1$, поскольку

$$\|f+g\|_X \leq \| \, |f| + |g| \, \|_X \leq \|(|f|^q + |g|^q)^{1/q}\|_X \leq$$

$$\leq (\|f\|_X^q + \|g\|_X^q)^{1/q} \leq 2^{1/q-1}(\|f\|_X + \|g\|_X).$$

Пространство $X = L_{s,\gamma}(\mathfrak{M})$ будет l_q-выпуклым при любом $q \in (0, s]$. Пусть $\mathcal{D} \subset L_{p,\beta}$ — некоторый конус неотрицательных функций, т.е.

$$\{f, g \in \mathcal{D};\ \alpha_1, \alpha_2 \geq 0\} \Rightarrow \{\alpha_1 f + \alpha_2 g \in \mathcal{D}\}.$$

Оператор $T:\ \mathcal{D} \to X$ назовем l_r-выпуклым $(0 < r < \infty)$, если для любых $f_k \in \mathcal{D}$, $k \in \mathbb{Z}$, таких, что $\left(\sum_k f_k^r\right)^{1/r} \in \mathcal{D}$,

$$T\left[\left(\sum_k f_k^r\right)^{1/r}\right] \leq \left(\sum_k |Tf_k|^r\right)^{1/r} \tag{1.5}$$

почти всюду на $\mathfrak{M}$ и для любых $f \in \mathcal{D}$, $\alpha \geq 0$

$$T[\alpha f] = \alpha T[f].$$

Отметим, что l_1-выпуклость оператора T совпадает с его счетной сублинейностью:

$$T\left(\sum_k f_k\right) \leq \sum_k Tf_k.$$

Оператор T назовем положительным, если

$$\{f, g \in \mathcal{D};\ 0 \leq f \leq g \text{ п.в. по мере } \beta\} \Rightarrow \{0 \leq Tf \leq Tg \text{ п.в. по мере } \gamma\}.$$

Пример l_r-выпуклого положительного оператора $(0 < r < \infty)$ дает оператор T вида $T[f] = (L[f^r])^{1/r}$, где L — счетно сублинейный положительный оператор, более того, эта формула устанавливает соответствие между l_r-выпуклыми и счетно сублинейными операторами. Для $H \subset \mathcal{D}$ обозначим

$$\|T\|_H := \sup_{h \in H,\, h \neq 0} \left[\frac{\|T[h]\|_H}{\|h\|_{L_{p,\beta}}}\right].$$

Мы будем рассматривать операторы на следующих конусах невозрастающих неотрицательных функций:

$$G := \{g \in L_{p,\beta}\ :\ g \geq 0;\ g \downarrow\}, \qquad \dot{G} = \{g \in G :\ \lim_{u \to b-0} g(u) = 0\}. \tag{1.6}$$

Обозначим

$$G_0 = \{\chi_{(a,t)} : a < t \le b\}, \qquad \dot G_0 = \{\chi_{(a,t)} : a < t < b\}. \tag{1.7}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* $0 < p \le q \le r < \infty$; $X \subset S(\mathfrak{M};\gamma)$ — *идеальное* l_q-*выпуклое пространство,* $T : \dot G \to X$ — l_r-*выпуклый положительный оператор. Тогда*

$$\|T\|_{\dot G} = \|T\|_{\dot G_0}. \tag{1.8}$$

З а м е ч а н и е 1. Формула (1.8) позволяет вычислить $\|T\|_{\dot G}$, поскольку

$$\|T\|_{\dot G_0} = \sup_{a<t<b}\left[\|F(\cdot,t)\|_X\left(\int_a^t d\beta\right)^{-1/p}\right], \tag{1.9}$$

где для $a < t \le b$, $x \in \mathfrak{M}$ мы обозначим

$$F(x,t) = T[\chi_{(a,t)}](x). \tag{1.10}$$

Ниже будет приведен ряд примеров вычисления нормы оператора по этим формулам.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 1 при $q = 1$ применима, в частности, для любого нормированного идеального пространства X, поскольку оно является l_1-выпуклым. При $p \le q \le r = 1$ в рассмотрение включаются любые счетно сублинейные положительные операторы, поскольку они l_1-выпуклы.

Перейдем к рассмотрению операторов на конусе G. Если

$$\beta(J) := \int_a^b d\beta = \infty, \tag{1.11}$$

то $G = \dot G$, поскольку

$$\{0 \le g \downarrow;\ \lim_{u\to b-0} g(u) > 0\} \Rightarrow g \notin L_{p,\beta}. \tag{1.12}$$

Множество $\dot G$ уже рассмотрено в теореме 1. Пусть теперь

$$\beta(J) = \int_a^b d\beta < \infty. \tag{1.13}$$

В этом случае $G_0 \subset G$ (поскольку $\chi_J \in L_{p,\beta}$).

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *с заменой* $\dot G$ *на* G *и условие* (1.13). *Тогда*

$$\|T\|_G = \|T\|_{G_0}. \tag{1.14}$$

З а м е ч а н и е 3. Согласно (1.7)

$$\|T\|_{G_0} = \sup_{a<t\le b}\left[\|F(\cdot,t)\|_X\left(\int_a^t d\beta\right)^{-1/p}\right]. \tag{1.15}$$

З а м е ч а н и е 4. Из (1.13) следует, что $\chi_J \in G$, и поэтому $F(\cdot,b) = T[\chi_J] \in X$ и, в частности, $F(x,b) < \infty$ для п.в. $x \in \mathfrak{M}$. Далее, в силу положительности оператора T

$$a < t < \tau < b \Rightarrow \chi_{(a,t)} \le \chi_{(a,\tau)} \le \chi_J \Rightarrow F(x,t) \le F(x,\tau) \le F(x,b).$$

Следовательно, $F(x,t)$ возрастает с ростом t и существует предел

$$F_0(x,b) := \lim_{t\to b-0} F(x,t) \le F(x,b). \tag{1.16}$$

Во многих случаях справедливо равенство

$$F_0(x,b) = F(x,b) \text{ п.в. на } \mathfrak{M}, \tag{1.17}$$

из которого согласно (1.9) и (1.15) следует, что $\|T\|_{G_0} = \|T\|_{\dot{G}_0}$. Например, условие (1.17) выполнено для любого линейного ограниченного оператора T, если только $\int_t^b d\beta \to 0$ $(t \to b-0)$, поскольку тогда

$$\|F(\cdot,b) - F(\cdot,t)\|_X = \|T[\chi_J - \chi_{(a,t)}]\|_X \le$$

$$\le \|T\|\,\|\chi_J - \chi_{(a,t)}\|_{p,\beta} = \|T\|\left(\int_t^b d\beta\right)^{1/p} \to 0 \qquad (t \to b-0), \tag{1.18}$$

что и дает (1.17). Условие (1.17) выполнено и для максимального оператора (см. ниже пример 3). Однако, например, для (незамкнутого) линейного положительного оператора T_0 такого, что

$$T_0[g](x) = g(b)\chi_J(x), \qquad g \in G, \qquad \mathfrak{M} = J,$$

видим, что условие (1.17) нарушено и

$$\|T_0\|_{\dot{G}_0} = 0, \qquad \|T_0\|_{G_0} = \frac{\|\chi_J\|_X}{\|\chi_J\|_{p,\beta}} > 0. \tag{1.19}$$

Аналогичные результаты справедливы на конусах функций, обладающих монотонностью по отношению к заданной непрерывной положительной функции φ:

$$G(p,\beta,\varphi) = \{f \in L_{p,\beta} :\ f \ge 0,\ (f/\varphi)\downarrow\}; \tag{1.20}$$

$$\dot{G}(p,\beta,\varphi) = \{f \in G(p,\beta,\varphi) :\ \lim_{u\to b-0}[f(u)/\varphi(u)] = 0\}. \tag{1.21}$$

В этих обозначениях $G = G(p, \beta, 1)$, $\dot{G} = \dot{G}(p, \beta, 1)$ (см. (1.6)).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *с заменой* $\dot{G}$ *на* $\dot{G}(p, \beta, \varphi)$. *Тогда*

$$\|T\|_{\dot{G}(p,\beta,\varphi)} = \sup_{a<t<b} \left[\|T[\varphi\chi_{(a,t)}]\|_X \left(\int_a^t \varphi^p \, d\beta \right)^{-1/p} \right]. \tag{1.22}$$

Если условие

$$\int_a^b \varphi^p \, d\beta < \infty \tag{1.23}$$

нарушено, то $G(p, \beta, \varphi) = \dot{G}(p, \beta, \varphi)$; если же оно выполнено, то справедливо следующее обобщение теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *с заменой* $\dot{G}$ *на* $G(p, \beta, \varphi)$ *и условие* (1.23). *Тогда*

$$\|T\|_{G(p,\beta,\varphi)} = \sup_{a<t\le b} \left[\|T[\varphi\chi_{(a,t)}]\|_X \left(\int_a^t \varphi^p \, d\beta \right)^{-1/p} \right].$$

Подобные результаты справедливы и на конусах неубывающих функций. Мы сразу приведем их в общей формулировке, когда условия неубывания задаются по отношению к положительной непрерывной функции φ, т.е. на конусах

$$H(p, \beta, \varphi) = \{ f \in L_{p,\beta} : \ (f/\varphi) \uparrow; \ f \neq 0 \},$$

$$\dot{H}(p, \beta, \varphi) = \{ f \in H(p, \beta, \varphi) : \lim_{u \to a+0} [f(u)/\varphi(u)] = 0 \}.$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *с заменой* $\dot{G}$ *на* $\dot{H}(p, \beta, \varphi)$. *Тогда*

$$\|T\|_{\dot{H}(p,\beta,\varphi)} = \sup_{a<t<b} \left[\|T[\varphi\chi_{(t,b)}]\|_X \left(\int_t^b \varphi^p \, d\beta \right)^{-1/p} \right]. \tag{1.24}$$

При нарушении условия (1.23) $H(p, \beta, \varphi) = \dot{H}(p, \beta, \varphi)$, если же это условие выполнено, то имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *с заменой* $\dot{G}$ *на* $H(p, \beta, \varphi)$ *и условие* (1.23). *Тогда*

$$\|T\|_{H(p,\beta,\varphi)} = \sup_{a\le t<b} \left[\|T[\varphi\chi_{(t,b)}]\|_X \left(\int_t^b \varphi^p \, d\beta \right)^{-1/p} \right]. \tag{1.25}$$

Замечания 2, 4 имеют очевидные аналоги и на конусах $G(p, \beta, \varphi)$, $\dot{G}(p, \beta, \varphi)$, $H(p, \beta, \varphi)$, $\dot{H}(p, \beta, \varphi)$.

З а м е ч а н и е 5. Приведенным здесь результатам предшествовали работы ряда авторов, изучавших критерии ограниченности различных операторов на конусах неотрицательных монотонных функций. Отметим работы М. Ариньо, Б. Макенхаупта [1], К. Нойгебауера [2], Е. Сойера [3], В.Д. Степанова [4], М.Л. Гольдмана [5], Е.И. Бережного [6]. Наиболее близко к теме данной работы подходят исследования Й. Берга [7], В.И. Буренкова [8, 9], Л. Перссона [10], а также совместные исследования Й. Берга, В.И. Буренкова, Л. Перссона [11, 12], Е.А. Мясникова, Л. Перссона, В.Д. Степанова [13], Ш. Лая [14], связанные с получением неравенств с точными постоянными. В работах [7–12] рассмотрены операторы Харди, а в [13, 14] — линейные интегральные операторы с неотрицательными ядрами.

2. Одно вспомогательное утверждение

Л е м м а 1. *Пусть* a_k, $b_k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$; $a_k \uparrow A$, $b_k \downarrow B$; $C = AB$ (*мы полагаем, что* $\infty \cdot 0 = 0$). *Тогда если* $C < \infty$, *то при* $0 < q < r$

$$\left\{C^r + \sum_k a_k^r (b_k^r - b_{k+1}^r)\right\}^{1/r} \leq \left\{C^q + \sum_k a_k^q (b_k^q - b_{k+1}^q)\right\}^{1/q}. \tag{2.1}$$

Кроме того, неравенство (2.1) *остается справедливым при замене числа* C *на любое число* $D \geq C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Сначала докажем интегральный аналог неравенства (2.1) при $B = 0$ (т.е. $C = 0$ в (2.1)) и $r = 1$. Пусть функции $a = a(x)$, $b = b(x)$ и $b'(x)$ непрерывны на R_+; $a(x) \geq 0$, $b(x) \geq 0$, $a(x) \uparrow$, $b(x) \downarrow 0$. Тогда

$$I := \int_0^\infty a(x)\, d(-b(x)) \leq \left[\int_0^\infty a(x)^q\, d(-b(x)^q)\right]^{1/q}, \qquad 0 < q < 1. \tag{2.2}$$

Имеем

$$I = \frac{1}{q}\int_0^\infty a(x) b(x)^{1-q}\, d(-b(x)^q) = \frac{1}{q}\int_0^\infty [a(x)b(x)]^{1-q} a(x)^q\, d(-b(x)^q). \tag{2.3}$$

Но $a(t) \uparrow$, $b(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} b(t) = 0$ и поэтому

$$\int_x^\infty a(t)^q\, d(-b(t)^q) \geq a(x)^q \int_x^\infty d(-b(t)^q) = [a(x)b(x)]^q.$$

Отсюда и из (2.3) вытекает, что

$$I \leq \frac{1}{q}\int_0^\infty \left[\int_x^\infty a(t)^q\, d(-b(t)^q)\right]^{1/q-1} a(x)^q\, d(-b(x)^q) = \int_0^\infty d\left[-\left(\int_x^\infty a(t)^q\, d(-b(t)^q)\right)^{1/q}\right] =$$

$$= -\left(\int_x^\infty a(t)^q \, d(-b(t)^q)\right)^{1/q}\Bigg|_{x=0}^{\infty} = \left(\int_0^\infty a(t)^q \, d(-b(t)^q)\right)^{1/q},$$

что и дает (2.2).

2. Пусть теперь $0 \le a_k \uparrow$; $0 \le b_k \downarrow 0$. Выберем функцию $b = b(x) \in C^1(R_+)$ так, чтобы в $b(2^k) = b_k$, $k \in \mathbb{Z}$, а функции $a_n = a_n(x) \in C(R_+)$, $n \in \mathbb{N}$, так, чтобы

$$a_n(x) = \begin{cases} a_k & \text{при } 2^k \le x \le 2^{k+1} - \dfrac{2^{k-1}}{n}, \\ \text{линейная} & \text{при } 2^{k+1} - \dfrac{2^{k-1}}{n} \le x \le 2^{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тогда согласно (2.2)

$$I_n := \int_0^\infty a_n(x) \, d(-b(x)) \le J_n := \left[\int_0^\infty a_n(x)^q \, d(-b(x)^q)\right]^{1/q}. \tag{2.4}$$

Но $a_n(x) \downarrow a(x) = a_k$, $2^k \le x < 2^{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$, и, следовательно, по теореме Леви при $n \to \infty$

$$I_n \to \int_0^\infty a(x) \, d(-b(x)) = \sum_k \int_{2^k}^{2^{k+1}} a(x) \, d(-b(x)) = \sum_k a_k(b_k - b_{k+1}),$$

$$J_n \to \left[\int_0^\infty a(x)^q \, d(-b(x)^q)\right]^{1/q} = \left[\sum_k a_k^q(b_k^q - b_{k+1}^q)\right]^{1/q}.$$

Поэтому, переходя в (2.4) к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство (2.1) при $r = 1$, $0 < q < 1$, $B = 0$ (т.е. $C = 0$).

3. Пусть теперь $A < \infty$, $B > 0$. Положим для $N \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{b}_k = b_k, \quad k \le N; \qquad \tilde{b}_k = 0, \quad k \ge N + 1.$$

Тогда $\tilde{b}_k \downarrow 0$ и по доказанному выше

$$\sum_k a_k(\tilde{b}_k - \tilde{b}_{k+1}) \le \left\{\sum_k a_k^q(\tilde{b}_k^q - \tilde{b}_{k+1}^q)\right\}^{1/q},$$

т.е.

$$\sum_{k \le N-1} a_k(b_k - b_{k+1}) + a_N b_N \le \left\{\sum_{k \le N-1} a_k^q(b_k^q - b_{k+1}^q) + a_N^q b_N^q\right\}^{1/q}. \tag{2.5}$$

Но $\lim_{N\to\infty} a_N b_N = AB = C$. Переходя в (2.5) к пределу при $N \to \infty$, получим (2.1) при $r = 1$, $0 < q < 1$.

4. Пусть $C < \infty$. Покажем, что в (2.1) можно заменить C на $D \geq C$. При $u, v \in R_+$, $0 < q < 1$ рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \varphi_{u,v}(x) = \frac{(u+x)^q}{v^q + x^q}.$$

Для нее справедлива импликация

$$\{x_0 > 0,\ \varphi(x_0) \leq 1\} \Rightarrow \{\varphi(x) \leq 1\ \forall x \geq x_0\}. \tag{2.6}$$

Действительно, если $u \leq v$, то $\varphi(x) \leq 1\ \forall x \in R_+$ и доказывать нечего. Если $u > v$, то

$$\varphi'(x) = q(u+x)^{q-1}(v^q + x^q)^{-2}[v^q - ux^{q-1}],$$

т.е. $\varphi'(x) < 0$, $0 < x < x_1 = u^{1/(1-q)}v^{-q/(1-q)}$; $\varphi'(x) > 0$ при $x > x_1$. Итак, функция φ убывает от значения $\varphi(0) = u^q v^{-q} > 1$ до минимального значения $\varphi(x_1)$, а затем возрастает до значения $\varphi(+\infty) = 1$. Отсюда видим, что если x_0 таково, что $\varphi(x_0) \leq 1$, то при $x \geq x_0$ также $\varphi(x) \leq 1$. Импликация (2.6) доказана.

Теперь обозначим

$$x_0 = C, \qquad u = \sum_k a_k(b_k - b_{k+1}), \qquad v = \left[\sum_k a_k^q(b_k^q - b_{k+1}^q)\right]^{1/q}.$$

Тогда неравенство (2.1) примет вид $\varphi(x_0) \leq 1$. Согласно (2.6) тогда $\varphi(D) \leq 1$ $\forall D \geq C = x_0$. Это и означает, что (2.1) при $r = 1$, $0 < q < 1$ остается справедливым при замене C на $D \geq C$. В общем случае, когда $0 < q < r$, имеем $0 < q/r < 1$, и если $\tilde{a}_k \uparrow \tilde{A}$, $\tilde{b}_k \downarrow \tilde{B}$; $\tilde{C} = \tilde{A}\tilde{B}$, то для любого $\tilde{D} \geq \tilde{C}$ (по уже доказанному выше)

$$\tilde{D} + \sum_k \tilde{a}_k(\tilde{b}_k - \tilde{b}_{k+1}) \leq \left\{\tilde{D}^{q/r} + \sum_k \tilde{a}_k^{q/r}(\tilde{b}_k^{q/r} - \tilde{b}_{k+1}^{q/r})\right\}^{r/q}.$$

Положив здесь $\tilde{a}_k = a_k^r$, $\tilde{b}_k = b_k^r$, видим, что $\tilde{A} = A^r$, $\tilde{B} = B^r$, $\tilde{C} = C^r$, и для любого $D \geq C$ имеем $\tilde{D} := D^r \geq C^r = \tilde{C}$.

Итак, при любом $D \geq C$

$$D^r + \sum_k a_k^r(b_k^r - b_{k+1}^r) \leq \left\{D^q + \sum_k a_k^q(b_k^q - b_{k+1}^q)\right\}^{r/q}.$$

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 6. Некоторые частные аналоги этих неравенств можно найти в книге Г.Г. Харди, Дж.Е. Литтлвуда, Г. Полиа [15], в работах В.И. Буренкова [8, 9] (дискретный вариант) и в книге В.Г. Мазьи [16] (гл. 1, интегральный вариант).

3. Доказательства теорем 1 и 2

Мы проведем доказательство теоремы 2, а затем отметим, какие упрощения возникают в нем в условиях теоремы 1, т.е. на конусе $\dot{G}$. Пусть $a < t_k < t_{k+1} < b$, $k \in \mathbb{Z}$, причем

$$\lim_{k\to-\infty} t_k = a, \qquad \lim_{k\to+\infty} t_k = b.$$

Для функции $g \in G$ рассмотрим ее "ступенчатую мажоранту"

$$\tilde{g}(u) = \sum_k g(t_k)\chi_{[t_k,t_{k+1})}(u). \tag{3.1}$$

Отметим, что при любом $s > 0$

$$\tilde{g}(u) = \left\{\sum_k g(t_k)^s \chi^s_{[t_k,t_{k+1})}(u)\right\}^{1/s}, \tag{3.2}$$

поскольку в силу дизъюнктности слагаемых в (3.1) при каждом $u \in (a,b)$ лишь одно слагаемое отлично от нуля, так что

$$\tilde{g}(u)^s = \sum_k g(t_k)^s \chi^s_{[t_k,t_{k+1})}(u) = \sum_k g(t_k)^s \chi_{[t_k,t_{k+1})}(u).$$

Обозначим

$$B := \lim_{u\to b-0} g(u), \qquad 0 \le c_k(s) := [g(t_{k-1})^s - g(t_k)^s]^{1/s}. \tag{3.3}$$

Тогда при любом $u \in (a,b)$ $\forall\, s > 0$

$$\tilde{g}(u) = \left\{\sum_k c^s_k(s)\chi^s_{(a,t_k)}(u) + B^s\chi^s_{(a,b)}(u)\right\}^{1/s}. \tag{3.4}$$

Равенство (3.4) следует из (3.2) с помощью преобразования Абеля, записанного в виде

$$\sum_{k=M}^{N} e_k(d_{k+1} - d_k) = \sum_{k=M}^{N} (e_k - e_{k+1})d_{k+1} + e_{N+1}d_{N+1} - e_M d_M, \tag{3.5}$$

если положить в нем

$$e_k = g(t_k)^s, \qquad d_k = \chi^s_{(a,t_k)}(u) = \chi_{(a,t_k)}(u)$$

и учесть, что

$$\lim_{N\to\infty} e_{N+1}d_{N+1} = \lim_{N\to\infty} g(t_{N+1})^s\chi^s_{(a,t_{N+1})}(u) = B^s\chi^s_{(a,b)}(u),$$

$$\lim_{M\to-\infty} e_M d_M = \lim_{M\to-\infty} g(t_M)^s\chi^s_{(a,t_M)}(u) = 0.$$

Таким образом, переходя в (3.5) к пределу при $M \to -\infty$, $N \to +\infty$, получим

$$\sum_k e_k(d_{k+1} - d_k) = \sum_k (e_k - e_{k+1})d_{k+1} + B^s \chi^s_{(a,b)}(u),$$

что совпадает с (3.4). Далее, $0 \le g \le \tilde{g}$ и в силу положительности и l_r-выпуклости оператора T (мы считаем теперь, что $s = r$ в формулах (3.3) и (3.4)) получаем

$$0 \le T[g](x) \le T[\tilde{g}](x) \le \left\{ \sum_k c_k^r(r) F(x, t_k)^r + B^r F(x, b)^r \right\}^{1/r}. \tag{3.6}$$

Мы использовали здесь равенства (3.4), (1.10) и неравенство (1.5). Теперь при $0 < q < r$ применим лемму 1, положив в ней $0 \le a_k := F(x, t_k) \uparrow$, $0 \le b_k := g(t_{k-1}) \downarrow$, причем

$$A = \lim_{k \to +\infty} a_k = F_0(x, b), \qquad B = \lim_{k \to +\infty} b_k;$$

$$C = BF_0(x, b), \qquad D = BF(x, b) \ge C.$$

Тогда из (3.6) следует, что (учесть, что $c_k^r(r) = b_k^r - b_{k+1}^r$)

$$0 \le T[g](x) \le \left\{ \sum_k [g(t_{k-1})^q - g(t_k)^q] F(x, t_k)^q + B^q F(x, b)^q \right\}^{1/q}. \tag{3.7}$$

При $r = q$ (3.7) просто совпадает с (3.6). Отсюда и из l_q-выпуклости пространства X получим

$$\|T[g]\|_X \le \left\{ \sum_k [g(t_{k-1})^q - g(t_k)^q] \|F(\cdot, t_k)\|_X^q + B^q \|F(\cdot, b)\|_X^q \right\}^{1/q}.$$

Теперь вспомним формулу (1.15) и придем к неравенству

$$\|T[g]\|_X \le \|T\|_{G_0} \left\{ \sum_k [g(t_{k-1})^q - g(t_k)^q] \left(\int_a^{t_k} d\beta \right)^{q/p} + B^q \left(\int_a^b d\beta \right)^{q/p} \right\}^{1/q}. \tag{3.8}$$

Снова применим лемму 1, взяв в ней q вместо r и p вместо q $(0 < p < q)$ и положив теперь

$$0 \le a_k := \left(\int_a^{t_k} d\beta \right)^{1/p} \uparrow, \qquad 0 \le b_k := g(t_{k-1}) \downarrow,$$

причем

$$A = \lim_{k \to +\infty} a_k \le \left(\int_a^b d\beta \right)^{1/p}, \qquad B = \lim_{k \to +\infty} b_k, \qquad D = B \left(\int_a^b d\beta \right)^{1/p} \ge C = AB.$$

Неравенство (2.1) дает в этих обозначениях

$$\|T[g]\|_X \leq \|T\|_{G_0}\left\{\sum_k [g(t_{k-1})^p - g(t_k)^p] \int_a^{t_k} d\beta + B^p \int_a^b d\beta\right\}^{1/p}. \qquad (3.9)$$

Обратимся теперь к формулам (3.3), (3.4), положив в них $s = p$. Проинтегрировав (3.4), получим

$$\int_a^b \tilde{g}^p \, d\beta = \sum_k c_k^p(p) \int_a^{t_k} d\beta + B^p \int_a^b d\beta, \qquad (3.10)$$

что вместе с (3.9) дает неравенство

$$\|T[g]\|_X \leq \|T\|_{G_0} \cdot \|\tilde{g}\|_{p,\beta} \qquad \forall g \in G. \qquad (3.11)$$

Теперь при каждом $n = 1, 2, 3, \ldots$ строим последовательности $\{t_k(n)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ так, чтобы соответствующие функции $\tilde{g}_n(u)$ вида (3.1) при $t_k = t_k(n)$ образовывали невозрастающую последовательность, сходящуюся всюду к данной функции $g \in G$. Тогда по теореме Леви

$$\lim_{n \to \infty} \|\tilde{g}_n\|_{p,\beta} = \|g\|_{p,\beta}$$

и в неравенстве (3.11) (с $\tilde{g}_n$ вместо $\tilde{g}$) можно будет перейти к пределу при $n \to \infty$. Это дает

$$\|T[g]\|_X \leq \|T\|_{G_0} \cdot \|g\|_{p,\beta} \qquad \forall g \in G, \qquad (3.12)$$

т.е. $\|T\|_G \leq \|T\|_{G_0}$. Обратное неравенство следует из включения $G_0 \subset G$. Мы получим равенство (1.14). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Оно проводится по той же схеме со следующими упрощениями. Для функции $g \in \dot{G}$ в равенстве (3.4) и в неравенстве (3.6) второе слагаемое справа отсутствует, поскольку сейчас $B = 0$. Соответственно лемма 1 применяется в более простом варианте, когда $B = C = 0$ и в формулах (3.7)–(3.10) также отсутствуют вторые слагаемые в их правых частях. Это позволяет в (3.8) заменить $\|T\|_{G_0}$ на $\|T\|_{\dot{G}_0}$. В итоге получим (3.11) и (3.12) с заменой G_0 на $\dot{G}_0$.

Замечание 7. Можно избежать повторного применения леммы 1 после получения неравенства (3.8). Для этого запишем формулу (3.4) при $s = q$ и вычислим $L_{p,\beta}$-квазинорму:

$$\|\tilde{g}\|_{p,\beta} = \left\| \left\{ \sum_k c_k^q(q)\chi_{(a,t_k)} + B^q \chi_{(a,b)} \right\}^{1/q} \right\|_{p,\beta} =$$

$$= \left\| \left\{ \sum_k c_k^q(q)\chi_{(a,t_k)} + B^q \chi_{(a,b)} \right\} \right\|_{p/q,\beta}^{1/q}.$$

Теперь учтем, что $p \le q$ и в $L_{p/q,\beta}$ справедливо обратное неравенство Минковского (см., например, [17, с. 71] и [18, с. 33])

$$\left\| \sum_k f_k \right\|_{p/q,\beta} \ge \sum_k \|f_k\|_{p/q,\beta}; \qquad f_k \ge 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Применив его, получим

$$\|\tilde{g}\|_{p,\beta} \ge \left\{ \sum_k c_k^q(q) \|\chi_{(a,t_k)}\|_{p/q,\beta} + B^q \|\chi_{(a,b)}\|_{p/q,\beta} \right\}^{1/q}.$$

Отсюда и из (3.8) следует неравенство (3.11) (учесть обозначения (3.3) при $s = q$). Завершается доказательство теоремы 2 так же, как и выше.

Замечание 8. Если ограничиться случаем $q = r$, в частности случаем нормированного идеального пространства X и счетно сублинейного оператора T (тогда $q = r = 1$), то также можно избежать применения леммы 1 и при выводе неравенства (3.8) (мы отметили это после формулы (3.7)). В этой ситуации доказательство теоремы 2 становится элементарным.

4. Доказательства теорем 3–6

Доказательство теоремы 3. Формально она более общая, чем теорема 1, но легко к ней сводится. Действительно,

$$f \in \dot{G}(p, \beta, \varphi) \Leftrightarrow g = \frac{f}{\varphi} \in \dot{G}(p, \beta_\varphi, 1), \tag{4.1}$$

где

$$d\beta_\varphi(u) = \varphi(u)^p d\beta(u); \tag{4.2}$$

при этом

$$\|f\|_{p,\beta} = \|g\|_{p,\beta_\varphi}. \tag{4.3}$$

По оператору T определяем l_r-выпуклый положительный оператор T_φ, действующий по формуле

$$T_\varphi[g] = T[\varphi g].$$

Тогда

$$\|T\|_{\dot{G}(p,\beta,\varphi)} = \sup_{f \in \dot{G}(p,\beta,\varphi)} \left[\frac{\|T[f]\|_X}{\|f\|_{p,\beta}} \right] = \sup_{g \in \dot{G}(p,\beta_\varphi,1)} \left[\frac{\|T_\varphi[g]\|_X}{\|g\|_{p,\beta_\varphi}} \right] = \|T_\varphi\|_{\dot{G}(p,\beta_\varphi,1)}.$$

Теперь применим теорему 1 к оператору T_φ на конусе $\dot{G} = \dot{G}(p, \beta_\varphi, 1)$. Формулы (1.9), (1.10) с $d\beta_\varphi$ вместо $d\beta$ дают

$$\|T_\varphi\|_{\dot{G}(p,\beta_\varphi,1)} = \sup_{a<t<b} \left[\|T_\varphi[\chi_{(a,t)}]\|_X \left(\int_a^t d\beta_\varphi \right)^{-1/p} \right],$$

что и приводит к формуле (1.22). Теорема 3 доказана.

Теорема 4 получается из теоремы 2 точно таким же рассуждением.

Теоремы 5 и 6 можно доказать с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые использованы при доказательстве теорем 1–4. Мы, однако, укажем другой способ доказательства, связанный с переходом от возрастающих функций к убывающим и применением уже доказанных теорем.

Доказательство теоремы 5 получим сведением ее к теореме 3.

Пусть λ — непрерывная строго убывающая функция на (a,b), причем $\lambda(a)=b$, $\lambda(b)=a$; λ^{-1} — обратная к ней функция. Для множеств E, $F\subset(a,b)$ обозначим

$$\lambda(E)=\{\lambda(u):\ u\in E\},\qquad \lambda^{-1}(F)=\{\lambda^{-1}(u):\ u\in F\}. \tag{4.4}$$

Введем меру $\beta\circ\lambda$ на (a,b): множество $E\subset(a,b)$ считаем $\beta\circ\lambda$-измеримым, если $\lambda(E)$ — β-измеримо, при этом $(\beta\circ\lambda)(E):=\beta(\lambda(E))$. Тогда $\beta\circ\lambda$ — неотрицательная борелевская мера на (a,b), причем если $g=h\circ\lambda$ (т.е. $h=g\circ\lambda^{-1}$), то функция h (по мере β) равноизмерима с g (по мере $\beta\circ\lambda$). Действительно,

$$E_g(\alpha)=\{u:\ g(u)<\alpha\}=\{u:\ h(\lambda(u))<\alpha\}=\{\lambda^{-1}(v):\ h(v)<\alpha\}=\lambda^{-1}(E_h(\alpha)).$$

Отсюда

$$E_h(\alpha)=\lambda(E_g(\alpha))\Rightarrow\beta(E_h(\alpha))=(\beta\circ\lambda)(E_g(\alpha)).$$

Итак, $h\in L_{p,\beta}\Leftrightarrow g=h\circ\lambda\in L_{p,\beta\circ\lambda}$ и для любого $E\subseteq(a,b)$

$$\int\limits_E|h\circ\lambda|^p\,d(\beta\circ\lambda)=\int\limits_{\lambda(E)}|h|^p\,d\beta, \tag{4.5}$$

в частности (поскольку $\lambda((a,b))=(a,b)$) ,

$$||h||_{p,\beta}=||h\circ\lambda||_{p,\beta\circ\lambda},\qquad ||g||_{p,\beta\circ\lambda}=||g\circ\lambda^{-1}||_{p,\beta}. \tag{4.6}$$

Далее, в силу убывания $\lambda(u)$

$$h\in\dot H(p,\beta,\varphi)\Leftrightarrow g=h\circ\lambda\in\dot G(p,\beta\circ\lambda,\varphi\circ\lambda). \tag{4.7}$$

Наконец, для l_r-выпуклого положительного оператора $T:\ \dot H(p,\beta,\varphi)\to X$ определим оператор $T_\lambda:\ \dot G(p,\beta\circ\lambda,\varphi\circ\lambda)\to X$, действующий по формуле

$$T_\lambda[g]:=T[g\circ\lambda^{-1}]\Leftrightarrow T_\lambda[h\circ\lambda]:=T[h]. \tag{4.8}$$

В (4.8) $g\in\dot G(p,\beta\circ\lambda,\varphi\circ\lambda)$, $h=g\circ\lambda^{-1}\in\dot H(p,\beta,\varphi)$. Легко видеть, что оператор T_λ также l_r-выпуклый и положительный.

Из (4.7) и (4.6) следует, что

$$||T||_{\dot H(p,\beta,\varphi)}=\sup_{h\in\dot H(p,\beta,\varphi)}\left[\frac{||T[h]||_X}{||h||_{p,\beta}}\right]=\sup_{g\in\dot G(p,\beta\circ\lambda,\varphi\circ\lambda)}\left[\frac{||T_\lambda[g]||_X}{||g||_{p,\beta\circ\lambda}}\right]=||T_\lambda||_{\dot G(p,\beta\circ\lambda,\varphi\circ\lambda)}.$$

Применим теперь теорему 3, согласно которой

$$\|T_\lambda\|_{\dot G(p,\beta\circ\lambda,\varphi\circ\lambda)} = \sup_{a<t<b}\left[\|T_\lambda[(\varphi\circ\lambda)\chi_{(a,t)}]\|_X\left(\int_a^t(\varphi\circ\lambda)^p\,d(\beta\circ\lambda)\right)^{-1/p}\right].$$

Нетрудно видеть, что ввиду (4.7)

$$T_\lambda[(\varphi\circ\lambda)\chi_{(a,t)}] = T[\varphi(\chi_{(a,t)}\circ\lambda^{-1})] = T[\varphi\chi_{(\lambda(t),b)}],$$

кроме того, согласно (4.5)

$$\int_a^t(\varphi\circ\lambda)^p\,d(\beta\circ\lambda) = \int_{\lambda(t)}^b\varphi^p\,d\beta.$$

Итак,

$$\|T\|_{\dot H(p,\beta,\varphi)} = \sup_{a<t<b}\left[\|T[\varphi\chi_{(\lambda(t),b)}]\|_X\left(\int_{\lambda(t)}^b\varphi^p\,d\beta\right)^{-1/p}\right].$$

Эта формула совпадает с формулой (1.24), поскольку $\lambda(t)$ пробегает весь интервал (a,b), когда t пробегает этот интервал. Теорема 5 доказана. Доказательство теоремы 6 совершенно аналогично.

5. Примеры вычисления норм операторов

5.1. Интегральный оператор с неотрицательным ядром K, в частности, оператор типа Харди. Пусть $K = K(x,u)$ — неотрицательная измеримая функция переменных $x\in\mathfrak{M}$, $u\in(a,b)$; $r>0$; функция $f=f(u)$ измерима на (a,b),

$$T_r[f](x) = \left(\int_a^b K(x,u)|f(u)|^r\,du\right)^{1/r}. \tag{5.1}$$

Это l_r-выпуклый положительный оператор. Отметим, что при $r=1$ его сужение на множество неотрицательных функций совпадает с сужением на это множество линейного интегрального оператора

$$T[f](x) = \int_a^b K(x,u)f(u)\,du. \tag{5.2}$$

Для вычисления нормы оператора T_r на конусах G, $\dot G$, $G(p,\beta,\varphi)$, $\dot G(p,\beta,\varphi)$; H, $\dot H$, $H(p,\beta,\varphi)$, $\dot H(p,\beta,\varphi)$ применим формулы, полученные в теоремах 1–6. Если считать $a=0$, $b=\infty$, $\mathfrak{M}=R_+$, $r=1$, $X=L_{s,\gamma}$, где $0<p\le\min\{s,1\}$, и положить

$d\beta(u) = v(u)du$; $d\gamma(u) = w(u)du$, где v, w — неотрицательные локально интегрируемые функции, то мы получаем результаты работ [13, 14] об оценках для оператора T с точными постоянными и, в частности, результаты для операторов Харди, установленные ранее в [7, 8, 9, 11, 12].

В качестве конкретизации оператора T_r (5.1) рассмотрим оператор типа Харди

$$\mathcal{H}[f](x) = \xi(x)\left(\int_a^x \zeta(u)^r f(u)^r \, du\right)^{1/r}, \qquad f \geq 0. \tag{5.3}$$

Здесь ξ, ζ — положительные непрерывные функции на (a, b); $x \in \mathfrak{M} = (a, b)$. Имеем согласно (1.10) при $x, t \in (a, b)$

$$F(x,t) = \mathcal{H}[\chi_{(a,t)}](x) = \xi(x)\begin{cases} \left(\int_a^x \zeta^r \, du\right)^{1/r}, & x \leq t, \\ \left(\int_a^t \zeta^r \, du\right)^{1/r}, & x > t. \end{cases} \tag{5.4}$$

Введем также функцию

$$\Phi(x,t) = \mathcal{H}[\chi_{(t,b)}](x) = \begin{cases} 0, & x \leq t, \\ \xi(x)\left(\int_t^x \zeta^r \, du\right)^{1/r}, & x > t. \end{cases} \tag{5.5}$$

Выполнено равенство (1.17), и для l_q-выпуклого идеального пространства X при $0 < p \leq q \leq r$ имеем согласно (1.9)

$$\|\mathcal{H}\|_G = \|\mathcal{H}\|_{\dot{G}} = \sup_{a<t<b}\left[\|F(\cdot,t)\|_X \left(\int_a^t d\beta\right)^{-1/p}\right]. \tag{5.6}$$

Аналогично согласно (1.24)

$$\|\mathcal{H}\|_H = \|\mathcal{H}\|_{\dot{H}} = \sup_{a<t<b}\left[\|\Phi(\cdot,t)\|_X \left(\int_t^b d\beta\right)^{-1/p}\right]. \tag{5.7}$$

Здесь F, Φ имеют вид (5.4), (5.5). Пусть, например, $a = 0$,

$$\xi(x) = x^{-\rho}, \quad \zeta(u) = 1, \quad X = L_{s,\gamma}(0, b), \quad 0 < p \leq q := \min\{s, r\} \tag{5.8}$$

(напомним, что пространство $X = L_{s,\gamma}$ является l_q-выпуклым при любом $q \in (0, s]$). Тогда согласно (5.4), (5.5) при $x, t \in (0, b)$

$$F(x,t) = x^{-\rho+1/r}, \quad x \leq t; \qquad F(x,t) = x^{-\rho}t^{1/r}, \quad x > t; \tag{5.9}$$

$$\Phi(x,t)=0,\quad x\le t;\qquad \Phi(x,t)=x^{-\rho}(x-t)^{1/r},\quad x>t; \tag{5.10}$$

$$\|F(\cdot,t)\|_X=\left\{\int_0^t x^{s(1/r-\rho)}\,d\gamma+t^{s/r}\int_t^b x^{-\rho s}\,d\gamma\right\}^{1/s}; \tag{5.11}$$

$$\|\Phi(\cdot,t)\|_X=\left\{\int_t^b x^{-s\rho}(x-t)^{s/r}\,d\gamma\right\}^{1/s}. \tag{5.12}$$

Еще конкретизируем эти формулы в случае мер β и γ вида

$$d\beta(u)=u^{\alpha p}du,\qquad d\gamma(x)=x^{\sigma s}dx,\qquad u,x\in(a,b), \tag{5.13}$$

где α, $\sigma\in R$.

A. *Рассмотрим случай полупрямой* $(0,\infty)$, *положив* $a=0$, $b=\infty$ *в формулах* (5.6)–(5.13). *Вычислим* $\|\mathcal{H}\|_G=\|\mathcal{H}\|_{\dot G}$.

1. Если $\alpha\le -1/p$, то $\int_0^t d\beta=\infty\ \forall t>0$ и $G=\dot G=\{0\}$, т.е.

$$\|\mathcal{H}\|_G=\|\mathcal{H}\|_{\dot G}=0. \tag{5.14}$$

2. Если $\alpha>-1/p$, $\sigma\ge\rho-1/s$ или $\sigma\le\rho-1/s-1/r$, то

$$\|F(\cdot,t)\|_X=\infty\Rightarrow\|\mathcal{H}\|_G=\|\mathcal{H}\|_{\dot G}=\infty \tag{5.15}$$

(см. (5.11) при $b=\infty$).

3. Остался случай $\alpha>-1/p$, $\rho-1/s-1/r<\sigma<\rho-1/s$.

Обозначим

$$\lambda:=\alpha+\frac{1}{p},\qquad \mu:=\sigma-\rho+\frac{1}{s}+\frac{1}{r}, \tag{5.16}$$

и видим, что $\lambda>0$, $0<\mu<1/r$.

Из (5.11) при $b=\infty$ получаем

$$\|F(\cdot,t)\|_X=\left\{\frac{1}{\mu s}+\frac{1}{(\mu-1/r)s}\right\}^{1/s}t^{\mu},$$

$$\left(\int_0^t d\beta\right)^{1/p}=t^{\lambda}(\lambda p)^{-1/p}.$$

Подставив эти выражения в (5.6) ($a=0$, $b=\infty$), видим, что при $\lambda>0$, $0<\mu<1/r$

$$\|\mathcal{H}\|_G=\|\mathcal{H}\|_{\dot G}<\infty\Leftrightarrow\lambda=\mu$$

и при выполнении условия $\lambda=\mu$ (см. еще (5.16))

$$\|\mathcal{H}\|_G=\|\mathcal{H}\|_{\dot G}=(\lambda p)^{1/p}\left\{\frac{1}{\lambda s}+\frac{1}{(\lambda-1/r)s}\right\}^{1/s}.$$

Б. *Рассмотрим случай отрезка* $(0,1)$, *положив* $a=0$, $b=1$ *в формулах* (5.6)–(5.13).

1. При $\alpha \le -1/p$ вывод (5.14) остается в силе.

2. Если $\alpha > -1/p$, $\sigma \le \rho - 1/s - 1/r$, то вывод (5.15) остается в силе.

3. Пусть теперь $\alpha > -1/p$, $\sigma > \rho - 1/s - 1/r$. Используем обозначения (5.16), но теперь остаются лишь ограничения: $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

Из (5.11) при $b=1$ получаем

$$\|F(\cdot,t)\|_X = \left\{\frac{t^{\mu s}}{\mu s} + \frac{t^{s/r}(1-t^{(\mu-1/r)s})}{(\mu-1/r)s}\right\}^{1/s}, \qquad \mu \ne \frac{1}{r}; \tag{5.17}$$

$$\|F(\cdot,t)\|_X = \left\{\frac{t^{\mu s}}{\mu s} + t^{\mu s}\ln\frac{1}{t}\right\}^{1/s}, \qquad \mu = \frac{1}{r}. \tag{5.18}$$

При $\lambda > 0$, $\mu = 1/r > 0$ получаем из (5.6), (5.18) ($a=0$, $b=1$), что

$$\|\mathcal{H}\|_G = \|\mathcal{H}\|_{\dot G} = (\lambda p)^{1/p} \sup_{0<t<1} \left[t^{\mu-\lambda}\left\{\frac{1}{\mu s} + \ln\frac{1}{t}\right\}^{1/s}\right], \tag{5.19}$$

т.е.

$$\|\mathcal{H}\|_G = \|\mathcal{H}\|_{\dot G} = \infty, \qquad \lambda \ge \mu = \frac{1}{r}. \tag{5.20}$$

При $0 < \lambda < \mu = 1/r$ из (5.19) следует, что

$$\|\mathcal{H}\|_G = \|\mathcal{H}\|_{\dot G} = (\lambda p)^{1/p}[\sup_{0<t<1} \varphi(t)]^{1/s},$$

где

$$\varphi(t) = t^{s(\mu-\lambda)}\left(\frac{1}{\mu s} + \ln\frac{1}{t}\right).$$

Максимальное значение функции φ на $(0,1)$ равно

$$\varphi(t_0) = e^{-\lambda/\mu}\frac{1}{s(\mu-\lambda)}, \text{ где } t_0 = \exp\left[-\frac{\lambda}{s\mu(\mu-\lambda)}\right].$$

Итак, при $0 < \lambda < \mu = 1/r$

$$\|\mathcal{H}\|_G = \|\mathcal{H}\|_{\dot G} = (\lambda p)^{1/p}(s(\mu-\lambda))^{-1/s}\exp\left(-\frac{\lambda}{\mu s}\right); \tag{5.21}$$

при $\lambda \ge \mu = 1/r$ см. (5.20).

Теперь считаем, что $0 < \mu \ne 1/r$, $\lambda > 0$. Согласно (5.17), (5.6)

$$\|F(\cdot,t)\|_X = \left\{\frac{1}{(\mu-1/r)s}\left[t^{s/r} - \frac{t^{s\mu}}{\mu r}\right]\right\}^{1/s},$$

$$\|\mathcal{H}\|_G = \|\mathcal{H}\|_{\dot G} = (\lambda p)^{1/p} \sup_{0<t<1} \left\{\frac{1}{(\mu-1/r)s}\left[t^{s(1/r-\lambda)} - \frac{t^{s(\mu-\lambda)}}{\mu r}\right]\right\}^{1/s}.$$

Отсюда видим, что

$$\|\mathcal{H}\|_G = \|\mathcal{H}\|_{\dot G} = \infty \text{ при } \lambda > \min\left\{\mu, \frac{1}{r}\right\},$$

$$\|\mathcal{H}\|_G = \|\mathcal{H}\|_{\dot G} = \frac{(\lambda p)^{1/p}}{s^{1/s}}[\sup_{0<t<1} \psi(t)]^{1/s}, \qquad 0 < \lambda \le \min\left\{\mu, \frac{1}{r}\right\}, \tag{5.22}$$

где

$$\psi(t) = \frac{1}{\mu - 1/r}\left[t^{s(1/r-\lambda)} - \frac{t^{s(\mu-\lambda)}}{\mu r}\right].$$

В рамках соотношений (5.22) возможны следующие случаи:

1) $\lambda = \mu < 1/r$, тогда

$$\sup_{0<t<1} \psi(t) = \psi(0) = \frac{1}{\mu(1-r\mu)} \Rightarrow \|\mathcal{H}\|_G = (\lambda p)^{1/p}[\mu s(1-r\mu)]^{-1/s};$$

2) $\lambda = 1/r < \mu$, тогда

$$\sup_{0<t<1} \psi(t) = \psi(0) = \frac{1}{\mu - 1/r} \Rightarrow \|\mathcal{H}\|_G = (\lambda p)^{1/p}[s(\mu - 1/r)]^{-1/s};$$

3) $0 < \lambda < \min\{\mu, 1/r\}$, тогда

$$\sup_{0<t<1} \psi(t) = \psi(t_0) = \frac{1}{\mu - 1/r}\left[t_0^{s(1/r-\lambda)} - \frac{t_0^{s(\mu-\lambda)}}{\mu r}\right], \qquad t_0 = \left(\frac{1-\lambda/\mu}{1-\lambda r}\right)^{\frac{r}{s(1-r\mu)}},$$

и соответственно

$$\|\mathcal{H}\|_G = \|\mathcal{H}\|_{\dot G} = (\lambda p)^{1/p}\psi(t_0)^{1/s}.$$

B. *Вычислим теперь* $\|\mathcal{H}\|_H = \|\mathcal{H}\|_{\dot H}$ *на полупрямой* $(0,\infty)$, *положив* $a = 0$, $b = \infty$ *в формулах* (5.6)–(5.13).

1. Если $\alpha \ge -1/p$, то $\int_t^\infty d\beta = \infty\ \forall t \ge 0$ и $H = \dot H = \{0\}$, т.е.

$$\|\mathcal{H}\|_H = \|\mathcal{H}\|_{\dot H} = 0.$$

2. Если $\alpha < -1/p$, $\sigma \ge \rho - 1/s - 1/r$, то (см. (5.12) при $b = \infty$)

$$\|\Phi(\cdot,t)\|_X = \infty \Rightarrow \|\mathcal{H}\|_H = \|\mathcal{H}\|_{\dot H} = \infty.$$

3. Пусть теперь $\alpha < -1/p$, $\sigma < \rho - 1/s - 1/r$, т.е. $\lambda < 0$, $\mu < 0$ в обозначениях (5.16). Тогда в силу (5.12), (5.13), (5.7) получаем

$$\|\mathcal{H}\|_H = \|\mathcal{H}\|_{\dot H} = |\lambda p|^{1/p} \sup_{0<t<\infty}\left[t^{-\lambda}\left(\int_t^\infty x^{(\sigma-\rho)s}(x-t)^{s/r}\,dx\right)^{1/s}\right] =$$

$$= |\lambda p|^{1/p}\left(\int_0^1 u^{-\mu s-1}(1-u)^{s/r}\,du\right)^{1/s} \sup_{0<t<\infty} t^{\mu-\lambda}.$$

Отсюда ясно, что

$$\|\mathcal{H}\|_H = \|\mathcal{H}\|_{\dot H} < \infty \Leftrightarrow \mu = \lambda < 0$$

и при выполнении этого условия

$$\|\mathcal{H}\|_H = |\lambda p|^{1/p} B\Big(-\mu s, \frac{s}{r}+1\Big)^{1/s},$$

где $B(\alpha,\beta)$ — известная бэта-функция Эйлера, т.е.

$$B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du, \qquad \alpha,\beta > 0.$$

Г. *Вычислим* $\|\mathcal{H}\|_H = \|\mathcal{H}\|_{\dot H}$ *на отрезке* $(0,1)$, *положив* $a=0$, $b=1$ *в формулах* (5.6)–(5.13).

Имеем

$$\|\Phi(\cdot,t)\|_X = \Big\{\int\limits_t^1 x^{s(\sigma-\rho)}(x-t)^{s/r}\,dx\Big\}^{1/s} = t^{\mu}\Big\{\int\limits_1^{1/t} u^{s(\sigma-\rho)}(u-1)^{s/r}\,du\Big\}^{1/s};$$

$$\Big(\int\limits_t^1 d\beta\Big)^{1/p} = \begin{cases} \ln\Big(\dfrac{1}{t}\Big)^{1/p}, & \alpha+\frac{1}{p}=0,\\ \Big[\dfrac{1-t^{\alpha p+1}}{\alpha p+1}\Big]^{1/p}, & \alpha+\frac{1}{p}\neq 0.\end{cases}$$

Таким образом, в силу (5.7) при $\alpha + 1/p = 0$

$$\|\mathcal{H}\|_H = \sup_{0<t<1}\Big[t^{\mu}\Big(\ln\frac{1}{t}\Big)^{-1/p}\Big\{\int\limits_1^{1/t} u^{s(\sigma-\rho)}(u-1)^{s/r}\,du\Big\}^{1/s}\Big],$$

а при $\alpha + 1/p \neq 0$

$$\|\mathcal{H}\|_H = \sup_{0<t<1}\Big[t^{\mu}\Big[\frac{1-t^{\alpha p+1}}{\alpha p+1}\Big]^{-1/p}\Big\{\int\limits_1^{1/t} u^{s(\sigma-\rho)}(u-1)^{s/r}\,du\Big\}^{1/s}\Big].$$

Из этих формул видим, в частности, что

$$\|\mathcal{H}\|_H < \infty \Leftrightarrow \frac{1}{p} \le \frac{1}{s} + \frac{1}{r}.$$

Перейдем к примерам, не укладывающимся в схему п. 5.1.

5.2. Тождественный оператор $T = I$ (при $a = 0$). Это линейный положительный оператор, для него $F(x,t) = \chi_{(0,t)}(x)$, $x \in \mathfrak{M} = (0,b)$ и по теоремам 1, 2 (при $0 < p \le q \le r = 1$)

$$\|I\|_G = \|I\|_{\dot G} = \sup_{0<t<b}\Big[\frac{\psi_X(t)}{\psi_{L_{p,\beta}}(t)}\Big],$$

где

$$\psi_X(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_X, \qquad \psi_{L_{p,\beta}}(t) = \left(\int\limits_0^t d\beta\right)^{1/p}$$

— фундаментальные функции пространств X и $L_{p,\beta}$. По существу, здесь подсчитана норма оператора вложения $I: G \hookrightarrow X$.

Далее, по теоремам 3–6

$$\|I\|_{G(p,\beta,\varphi)} = \|I\|_{\dot G(p,\beta,\varphi)} = \sup_{0<t<b}\left[\|\varphi\chi_{(0,t)}\|_X \left(\int\limits_0^t \varphi^p\, d\beta\right)^{-1/p}\right],$$

$$\|I\|_{H(p,\beta,\varphi)} = \|I\|_{\dot H(p,\beta,\varphi)} = \sup_{0<t<b}\left[\|\varphi\chi_{(t,b)}\|_X \left(\int\limits_t^b \varphi^p\, d\beta\right)^{-1/p}\right].$$

5.3. Максимальный оператор Харди–Литтлвуда. Пусть $r > 0$, $a = 0$, $b = \infty$. Рассмотрим оператор

$$M[f](x) = \sup_{h\in(0,x)}\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} |f(u)|^r\, du\right)^{1/r}, \qquad f \in L_r^{\mathrm{loc}}(R_+).$$

Это положительный l_r-выпуклый оператор (счетно сублинейный, если $r = 1$). Он определен на функциях из G и H, и для него

$$F(x,t) = 1, \quad 0 < x < t; \qquad F(x,t) = \left(\frac{t}{2x}\right)^{1/r}, \quad x \ge t \tag{5.23}$$

(см. (1.10)). Обозначим еще

$$\Phi(x,t) = M[\chi_{(t,\infty)}](x), \qquad x,t \in R_+.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\Phi(x,t) = 0, \quad 0 < x < \frac{t}{2}; \qquad \Phi(x,t) = 1, \quad x > t; \\ &\Phi(x,t) = \left(1 - \frac{t}{2x}\right)^{1/r}, \qquad \frac{t}{2} \le x \le t. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Отметим, что для этого оператора

$$F_0(x,\infty) = F(x,\infty), \qquad \Phi_0(x,0) = \Phi(x,0),$$

следовательно, по теоремам 1–6

$$\|M\|_G = \|M\|_{\dot G} = \sup_{0<t<\infty}\left[\|F(\cdot,t)\|_X \left(\int\limits_0^t d\beta\right)^{-1/p}\right],$$

$$\|M\|_H = \|M\|_{\dot H} = \sup_{0<t<\infty} \left[\|\Phi(\cdot,t)\|_X \left(\int_t^\infty d\beta \right)^{-1/p} \right],$$

где F и Φ имеют вид (5.23), (5.24). В частности, при $X = L_{s,\gamma}$, $0 < p \le q := \min\{s, r\}$ получаем

$$\|F(\cdot,t)\|_X = \left\{ \int_0^t d\gamma + \left(\frac{t}{2}\right)^{s/r} \int_t^\infty x^{-s/r}\, d\gamma \right\}^{1/s},$$

$$\|\Phi(\cdot,t)\|_X = \left\{ \int_{t/2}^t \left(1 - \frac{t}{2x}\right)^{s/r} d\gamma + \int_t^\infty d\gamma \right\}^{1/s}.$$

Конкретизируем эти результаты в случае мер β и γ вида (5.13). Аналогично п. 5.1.А получаем следующие выводы.

1. Если $\alpha \le -1/p$, то $\|M\|_G = \|M\|_{\dot G} = 0$.
2. Если $\alpha > -1/p$, $\sigma \ge 1/r - 1/s$ или $\sigma \le -1/s$, то

$$\|F(\cdot,t)\|_X = \infty \Rightarrow \|M\|_G = \|M\|_{\dot G} = \infty.$$

3. Пусть $\alpha > -1/p$, $-1/s < \sigma < 1/r - 1/s$. Тогда

$$\|M\|_G = \|M\|_{\dot G} < \infty \Leftrightarrow 0 < \sigma + \frac{1}{s} = \alpha + \frac{1}{p} < \frac{1}{r}$$

и при выполнении этого условия

$$\|M\|_G = \|M\|_{\dot G} = \left\{ \frac{1}{\sigma s + 1} + \frac{1}{2^{s/r}(s/r - \sigma s - 1)} \right\}^{1/s} (\alpha p + 1)^{1/p}.$$

Проведем вычисления для $\|M\|_H$.

1. Если $\alpha \ge -1/p$, то $\|M\|_H = 0$.
2. Если $\alpha < -1/p$, $\sigma \ge -1/s$, то $\|M\|_H = \infty$.
3. Пусть теперь $\alpha < -1/p$, $\sigma < -1/s$. Тогда при $\alpha + 1/p = \sigma + 1/s < 0$

$$\|M\|_H = |\alpha p + 1|^{1/p} \left\{ \int_{1/2}^1 \left(1 - \frac{1}{2v}\right)^{s/r} v^{\sigma s}\, dv + \frac{1}{|\sigma s + 1|} \right\}^{1/s},$$

а при нарушении равенства $\alpha + 1/p = \sigma + 1/s$ получим, что $\|M\|_H = \infty$.

Другие варианты максимального оператора Харди–Литтлвуда на R_+:

$$M_1[f](x) = \sup_{\xi \in (0,x)} \left(\frac{1}{\xi} \int_{x-\xi}^x |f(u)|^r\, du \right)^{1/r},$$

$$M_2[f](x) = \sup_{\xi > 0} \left(\frac{1}{\xi} \int_x^{x+\xi} |f(u)|^r\, du \right)^{1/r}.$$

Это положительные l_r-выпуклые операторы (счетно сублинейные при $r = 1$). Их сужения на G и H приводят к операторам, уже рассмотренным выше:

$$M_1[g](x) = \left(\frac{1}{x}\int\limits_0^x g(u)^r\,du\right)^{1/r} = \mathcal{H}[g](x), \qquad g \in G$$

(см. п. 5.1.А при $\sigma = 1$);

$$M_2[g](x) = I[g](x), \quad g \in G; \qquad M_1[h](x) = I[h](x), \quad x \in H$$

(см. п. 5.2);

$$M_2[h](x) = \lim_{\xi\to\infty}\left(\frac{1}{x}\int\limits_x^{x+\xi} h(u)^r\,du\right)^{1/r} = h(+\infty), \qquad h \in H.$$

Для последнего оператора при $r = 1$ видим, что $\Phi(x,t) = 1$, $x,t \in R_+$, так что $\|\Phi(\cdot,t)\|_X = \|\chi_{(0,\infty)}\|_X$ не зависит от t и

$$\|M_2\|_H = \|M_2\|_{\dot H} = \sup_{0<t<\infty}\left[\|\Phi(\cdot,t)\|_X\left(\int\limits_0^t d\beta\right)^{-1/p}\right] = \infty,$$

если только для меры β выполнено условие

$$\int\limits_0^t d\beta \to 0 \qquad (t \to +0)$$

(исключающее наличие δ-меры в нуле).

5.4. Максимальный оператор на отрезке (0,1). Рассмотрим максимальный оператор п. 5.3 на отрезке $(0,1)$, где этот оператор принимает вид

$$M[f](x) = \sup_{0<h\le\min\{x,1-x\}}\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h}|f(u)|^r\,du\right)^{1/r}, \qquad r > 0.$$

Функция $F(x,t)$ (1.10) (при $a = 0$) записывается для оператора M следующим образом:

$$F(x,t) = 1, \quad 0 < x < t; \qquad F(x,t) = 0, \quad \frac{1+t}{2} \le x < 1;$$

$$F(x,t) = \left[\frac{1+t}{2} - x\right]^{-1/r}(1-x)^{-1/r}, \qquad \max\left\{t, \frac{1}{2}\right\} \le x \le \frac{1+t}{2};$$

и если $0 < t < 1/2$, то еще

$$F(x,t) = \left(\frac{t}{2x}\right)^{1/r}, \qquad t \le x \le \frac{1}{2}.$$

Таким образом, при $X = L_{s,\gamma}$, $s > 0$, $0 < t < 1/2$

$$\|F(\cdot,t)\|_X = \left\{ \int\limits_0^t d\gamma + \left(\frac{t}{2}\right)^{s/r} \int\limits_t^{1/2} x^{-s/r}\, d\gamma + \int\limits_{1/2}^{(1+t)/2} \left[\frac{(1+t)/2 - x}{1-x}\right]^{s/r} d\gamma \right\}^{1/s}, \quad (5.25)$$

а при $1/2 \le t < 1$

$$\|F(\cdot,t)\|_X = \left\{ \int\limits_0^t d\gamma + \int\limits_t^{(1+t)/2} \left[\frac{(1+t)/2 - x}{1-x}\right]^{s/r} d\gamma \right\}^{1/s}. \quad (5.26)$$

Итак, если $0 < p \le q := \min\{s, r\}$, то по теоремам 1, 2 (см. еще замечание 4) для вычисления $\|M\|_G$ можно использовать формулу (1.9) при $a = 0$, $b = 1$, где $\|F(\cdot,t)\|_X$ имеет вид (5.25), (5.26). Конкретизируем эти формулы в случае мер (5.13).

1. Если $\alpha \le -1/p$, то $\|M\|_G = 0$ (см. аналог в (5.14)).

2. Если $\alpha > -1/p$, $\sigma \le -1/s$, то $\|M\|_G = \infty$ (см. аналог в (5.15)).

3. Пусть теперь $\alpha > -1/p$, $\sigma > -1/s$. Из формул (1.9), (5.25) и (5.26) в случае $a = 0$, $b = 1$ и для мер (5.13) получаем формулу для вычисления нормы оператора

$$\|M\|_G = \max\{\|M\|_G^{(0)}, \|M\|_G^{(1)}\},$$

где при $i = 0, 1$

$$\|M\|_G^{(i)} = (\alpha p + 1)^{1/p} \sup_{i/2 < t < (i+1)/2} [t^{\sigma + 1/s - (\alpha + 1/p)} \Psi_i(t)].$$

Здесь при $\sigma + 1/s \ne 1/r$

$$\Psi_0(t)^s = \frac{1}{\sigma s + 1} + 2^{-s/r} \frac{1 - (2t)^{s/r - \sigma s - 1}}{s/r - \sigma s - 1} + t^{-\sigma s - 1} \int\limits_{1/2}^{(1+t)/2} \left[\frac{(1+t)/2 - x}{1-x}\right]^{s/r} x^{\sigma s}\, dx,$$

а при $\sigma + 1/s = 1/r$

$$\Psi_0(t)^s = \frac{1}{\sigma s + 1} + 2^{-s/r} \ln\frac{1}{2t} + t^{-s/r} \int\limits_{1/2}^{(1+t)/2} \left[\frac{(1+t)/2 - x}{1-x}\right]^{s/r} x^{\sigma s}\, dx,$$

$$\Psi_1(t)^s = \frac{1}{\sigma s + 1} + t^{-(\sigma s + 1)} \int\limits_t^{(1+t)/2} \left[\frac{(1+t)/2 - x}{1-x}\right]^{s/r} x^{\sigma s}\, dx.$$

Отметим, что $\Psi_1(t) = O(1)$, $t \in (1/2, 1)$, а при $0 < t < 1/2$

$$\Psi_0(t) \asymp \begin{cases} t^{1/r - \sigma - 1/s}, & 1/r < \sigma + 1/s, \\ 1 + \ln\frac{1}{2t}, & 1/r = \sigma + 1/s, \\ 1, & 1/r > \sigma + 1/s. \end{cases}$$

Таким образом, из приведенных формул следует, что

$$\|M\|_G < \infty \Leftrightarrow \begin{cases} \text{а)} & \alpha + 1/p \le 0, \\ \text{б)} & 0 < \alpha + 1/p \le \min\{1/r, \sigma + 1/s\}, \qquad 1/r \ne \sigma + 1/s, \\ \text{в)} & 0 < \alpha + 1/p < 1/r, \qquad 1/r = \sigma + 1/s. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 9. Нетрудно проследить, что все проведенные рассуждения остаются в силе, если вместо конусов в пространстве $L_{p,\beta}$ рассмотреть соответствующие конусы в любом l_p-вогнутом идеальном пространстве $Y \subset S(J, \beta)$, т.е. таком, что

$$\left(\sum_k \|y_k\|_Y^p\right)^{1/p} \le \left\|\left(\sum_k |y_k|^p\right)^{1/p}\right\|_Y.$$

При такой замене теорема 1, например, примет следующий вид.

Т е о р е м а 1'. *Пусть* $0 < p \le q \le r < \infty$, $Y \subset S(J, \beta)$ — *идеальное* l_p-*вогнутое пространство,* $X \subset S(\mathfrak{M}, \gamma)$ — *идеальное* l_q-*выпуклое пространство,* $T: \dot{G} \to X$ — l_r-*выпуклый положительный оператор. Тогда*

$$\|T\|_{\dot{G}} = \|T\|_{\dot{G}_0}.$$

Поступило в апреле 1994 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arino M., Muckenhoupt B.* Maximal functions on classical Lorents spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions //Trans. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 320. P. 727–735.
2. *Neugebauer C.J.* Weighted norm inequalities for operators of monotone functions //Publ. Math. 1991. Vol. 35. P. 429–447.
3. *Sawyer E.T.* Boundedness of classical operators on classical Lorents spaces //Stud. math. 1990. Vol. 96. P. 145–158.
4. *Stepanov V.D.* The weighted Hardy's inequality for nonincreasing functions //Trans. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 338. P. 173–186.
5. *Gol'dman M.L.* On integral inequalities on the set of functions with some of functions with some properties of monotonicity //Teubner-texte zur Math. 1993. Bd. 133. S. 274–279.
6. *Бережной Е.И.* Точные оценки операторов на конусах в идеальных пространствах //Тр. МИРАН. 1993. Т. 204. С. 3–34.
7. *Bergh J.* Hardy's inequality — A complement //Math. Ztschr. 1989. Bd. 202. S. 147–149.
8. *Буренков В.И.* Функциональные пространства. Основные интегральные неравенства, связанные с пространствами L_p. М.: Изд. УДН, 1989.
9. *Буренков В.И.* О наилучших константах в неравенстве Харди при $0 < p < 1$ для монотонных функций //Тр. МИРАН. 1992. Т. 194. С. 58–62.
10. *Persson L.E.* Generalizations of some classical inequalities and their applications //Teubner-texte zur Math. 1990. Bd. 119. S. 127–148.
11. *Bergh J., Burenkov V.I., Persson L.E.* Best constants in reversed Hardy's inequalities for quasimonotonous functions: Dept. Math. Chalmers Univ. Technol. N 1991–33/ISSN 0347–2809.
12. *Bergh J., Burenkov V.I., Persson L.E.* Best constants in reversed Hardy's inequalities for quasimonotonous functions //Acta sci. math. (Szeged). 1994. Vol. 59. P. 221–239.

13. *Myasnikov E.A., Persson L.E., Stepanov V.D.* On the best constants in certain integral inequalities for monotone functions: Dept. Math. McMaster Univ. Prepr.,1993.

14. *Lai Sh.* Weighted norm inequalities for general operators on monotone functions //Trans. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 340. P. 811–836.

15. *Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

16. *Мазья В.Г.* Пространства Соболева. Л.: Изд. ЛГУ, 1985. 416 с.

17. *Буренков В.И.* Функциональные пространства. Пространства L_p. М.: Изд. УДН, 1987.

18. *Буренков В.И., Гольдман М.Л.* Методические рекомендации к изучению курса "Функциональные пространства". М.: Изд. УДН, 1989.