А. С. Кондратьев, И. В. Храмцов, О конечных четырепримарных группах, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2011, том 17, номер 4, 142–159

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ЧЕТЫРЕПРИМАРНЫХ ГРУППАХ[1]

А. С. Кондратьев, И. В. Храмцов

Описаны главные факторы коммутантов конечных групп, граф простых чисел которых несвязен и имеет точно четыре вершины. Как следствие определены конечные простые группы, распознаваемые по графу простых чисел с точно четырьмя вершинами.

Ключевые слова: конечная группа, четырепримарная группа, граф простых чисел, распознавание по графу простых чисел.

A. S. Kondrat'ev, I. V. Khramtsov. On finite tetraprimary groups.

Chief factors of commutants of finite groups whose prime graph is disconnected and has exactly four vertices are described. As a corollary, finite simple groups recognizable by prime graph with exactly four vertices are determined.

Keywords: finite group, tetraprimary group, prime graph, recognition by prime graph

Введение

В теории конечных групп интерес многих исследователей вызывают различные проблемы распознаваемости — характеризации группы по некоторому набору ее параметров с точностью до изоморфизма. Примерами такого рода проблем являются проблемы распознаваемости конечных групп по спектру или по графу простых чисел.

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество простых делителей порядка группы G, а через $\omega(G)$ — *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G, в котором множество вершин есть $\pi(G)$ и две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s(G)\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$.

Группа G называется *распознаваемой* (*по спектру*), если любая конечная группа H с условием $\omega(H) = \omega(G)$ изоморфна G. С уже устоявшимся направлением исследований распознаваемости конечных групп по спектру (см. обзор В. Д. Мазурова [9]) тесно связано новое перспективное направление исследований распознаваемости конечных групп по графу простых чисел. Группа G называется *распознаваемой по графу простых чисел*, если для любой конечной группы H равенство $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ графов влечет изоморфизм $H \cong G$ групп. Здесь под равенством графов $\Gamma(H)$ и $\Gamma(G)$ понимается совпадение их множеств вершин и множеств ребер соответственно. Ясно, что из распознаваемости конечной группы по графу простых чисел следует ее распознаваемость по спектру.

Изучение распознаваемости конечных групп по графу простых чисел имеет совсем недолгую историю. В 2003 г. в работе М. Хаги [20] были даны первые примеры конечных групп, распознаваемых по графу простых чисел, а именно некоторые спорадические простые группы, и также получено некоторое описание (но не полная классификация) конечных групп G

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), программы Отделения математических наук РАН (проект 09-Т-1-1004) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 09-С-1-1007) и НАН Беларуси (проект 09-С-1-1009).

таких, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$, где S — спорадическая простая группа. В дальнейшем в работах [3; 10; 11; 27–30] была установлена распознаваемость по графу простых чисел групп $G_2(7)$, ${}^2G_2(q)$ и $L_2(q)$ для некоторых q.

Недавно было завершено доказательство распознаваемости всех конечных простых групп по своим порядку и спектру (см. [1]). Кажется весьма правдоподобной гипотеза, что конечные простые группы распознаваемы даже по своему порядку и графу простых чисел. Для многих конечных простых групп эта гипотеза подтверждена.

Возникает также интересная более общая задача: *описать все конечные группы, графы простых чисел которых изоморфны графу с заданным свойством.*

Прежде всего привлекает внимание более подробное изучение класса конечных групп с несвязным графом простых чисел. Это мотивировано следующим. Указанный класс широко обобщает класс конечных групп Фробениуса, что сразу видно из известной структурной теоремы Грюнберга — Кегеля о конечных группах с несвязным графом простых чисел (см. лемму 1.1). Роль же групп Фробениуса в теории конечных групп совершенно исключительна.

Заметим также, что класс конечных групп с несвязным графом простых чисел совпадает с классом конечных групп, имеющих изолированную подгруппу (т. е. собственную подгруппу, содержащую централизатор каждого своего неединичного элемента), который изучался многими авторами (см., например, [13]).

Конечные простые группы с несвязным графом простых чисел описаны в работах Уильямса [41] и А. С. Кондратьева [4]. Они составляют довольно узкий подкласс всех конечных простых групп, однако включают многие "малые" в различных смыслах группы, часто возникающие в исследованиях. Например, все конечные простые группы исключительного лиева типа, кроме групп $E_7(q)$ при $q > 3$, а также простые группы из известного "Атласа конечных групп" [15], кроме группы A_{10}, имеют несвязный граф простых чисел.

При изучении класса конечных групп с несвязным графом простых чисел возникают весьма нетривиальные проблемы, связанные с модулярными представлениями конечных простых групп. Рассмотрим одну такую проблему.

Пусть G — конечная группа с несвязным графом простых чисел, не изоморфная ни группе Фробениуса, ни двойной группе Фробениуса. Тогда по теореме Грюнберга — Кегеля группа $\overline{G} := G/F(G)$ почти проста и известна ввиду результатов [4; 32; 41]. Предположим, что $F(G) \neq 1$. Каждой связной компоненте $\pi_i(G)$ графа $\Gamma(G)$ для $i > 1$ соответствует нильпотентная изолированная $\pi_i(G)$-холлова подгруппа $X_i(G)$ группы G. Любой неединичный элемент из $X_i(G)$ $(i > 1)$ действует без неподвижных точек (свободно) на $F(G)$. Пусть K и L — два соседних члена главного ряда группы G $(K < L)$, содержащиеся в $F(G)$. Тогда (главный) фактор $V = L/K$ является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p (мы будем называть его *p-главным фактором* группы G), и его можно рассматривать как неприводимый $GF(p)\overline{G}$-модуль (так как $C_{G/K}(V) = F(G)/K$), причем каждый неединичный элемент из $X_i(G)$ $(i > 1)$ действует без неподвижных точек на V. Поэтому задача изучения строения группы G во многом сводится к имеющей самостоятельный интерес проблеме *описания неприводимых $GF(p)\overline{G}$-модулей, на которые некоторый элемент простого порядка $r \neq p$ из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек.* Некоторые частные результаты по этой проблеме можно найти в [18;19;22;23;33–35;44]. В общем случае эта важная проблема далека от решения.

Если таблица неприводимых p-модулярных брауэровых характеров цоколя группы $\overline{G}$ известна, то для решения этой проблемы можно применить лемму 1.5, сформулированную ниже.

Авторы исследуют конечные группы, граф простых чисел которых несвязен и имеет небольшое число вершин. Ранее в работе авторов [5] были исследованы конечные группы, граф простых чисел которых несвязен и имеет не более трех вершин.

Основным результатом данной работы является описание главных факторов коммутантов конечных групп G, граф простых чисел которых имеет точно четыре вершины (в этом случае группа G называется *четырепримарной*) и несвязен. В некоторых случаях все возможности для таких главных факторов определить не удалось, однако доказано существование хотя бы одной возможности.

Доказаны следующие теоремы, в формулировках которых используются обозначения и терминология из разд. 1. Каждый из пунктов этих теорем реализуется.

Теорема 1. *Пусть G — конечная четырепримарная группа с несвязным графом простых чисел и $\overline{G} = G/F(G)$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений*:

(1) *G — группа Фробениуса*;

(2) *G — 2-фробениусова группа, т. е. в G существуют такие подгруппы A, B и C, что $G = ABC$, A и AB — нормальные подгруппы в G, AB и BC — группы Фробениуса с ядрами A и B и дополнениями B и C соответственно*;

(3) *$\overline{G}$ — почти простая трипримарная группа*;

(4) *$\overline{G} \cong L_2(2^m)$, где $m \geq 5$, $2^m - 1$ и $(2^m + 1)/3$ — простые числа*;

(5) *$\overline{G} \cong L_2(3^m)$ или $PGL_2(3^m)$, где m и $(3^m - 1)/2$ — нечетные простые числа, а $(3^m + 1)/4$ равно либо простому числу, либо 11^2 (при $m = 5$)*;

(6) *$\overline{G} \cong L_2(r)$ или $PGL_2(r)$, где r — простое число, $17 \neq r \geq 11$, $r^2 - 1 = 2^a 3^b s^c$, $s > 3$ — простое число, $a, b \in \mathbb{N}$ и c равно либо 1, либо 2 при $r \in \{97, 577\}$*;

(7) *$\overline{G} \cong A_7$, S_7, A_8, S_8, A_9, $L_2(16)$, $L_2(16){:}\,2$, $Aut(L_2(16))$, $L_2(25)$, $L_2(25){:}\,2$, $L_2(27){:}\,3$, $L_2(49)$, $L_2(49){:}\,2_1$, $L_2(49){:}\,2_3$, $L_2(81)$, $L_2(81){:}\,2$, $L_2(81){:}\,4$, $L_3(4)$, $L_3(4){:}\,2_1$, $L_3(4){:}\,2_3$, $L_3(5)$, $Aut(L_3(5))$, $L_3(7)$, $L_3(7){:}\,2$, $L_3(8)$, $L_3(8){:}\,2$, $L_3(8){:}\,3$, $Aut(L_3(8))$, $L_4(3)$, $L_4(3){:}\,2_2$, $L_4(3){:}\,2_3$, $U_3(4)$, $U_3(4){:}\,2$, $Aut(U_3(4))$, $U_3(5)$, $U_3(5){:}\,2$, $U_3(7)$, $Aut(U_3(7))$, $U_3(8)$, $U_3(8){:}\,2$, $U_3(8){:}\,3_1$, $U_3(8){:}\,3_3$, $U_3(8){:}\,6$, $U_3(9)$, $U_3(9){:}\,2$, $Aut(U_3(9))$, $U_4(3)$, $U_4(3){:}\,2_2$, $U_4(3){:}\,2_3$, $U_5(2)$, $Aut(U_5(2))$, $S_4(4)$, $S_4(4){:}\,2$, $Aut(S_4(4))$, $S_4(5)$, $S_4(7)$, $S_4(9)$, $S_4(9){:}\,2_1$, $S_4(9){:}\,2_3$, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, $G_2(3)$, $Aut(G_2(3))$, ${}^3D_4(2)$, $Aut({}^3D_4(2))$, $Sz(8)$, $Sz(32)$, $Aut(Sz(32))$, ${}^2F_4(2)'$, ${}^2F_4(2)$, M_{11}, M_{12}, $Aut(M_{12})$, J_2.*

З а м е ч а н и е. Все простые четырепримарные группы, кроме группы A_{10}, имеют несвязный граф простых чисел. В. Ши записал в “Коуровскую тетрадь” [6] вопрос 13.65: *конечно или бесконечно число конечных простых четырепримарных групп?* Как отмечено в [26, замечание 3.6], имеются некоторые основания для существования только конечного числа групп в пп. (4) и (5) теоремы 1. Однако вопрос Ши до сих пор открыт.

Теорема 2. *Пусть G — конечная четырепримарная группа с несвязным графом $\Gamma(G)$ и $\overline{G} := G/F(G)$ — почти простая трипримарная группа. Тогда $\pi(F(G))$ содержит простое число p, не принадлежащее $\pi(\overline{G})$, такое, что $\pi_1(G) = \{2, 3, p\}$, $\pi_2(G) = \pi_2(\overline{G}) = \{r\} \subseteq \{5, 7, 13, 17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *$r = 5$, $\overline{G} \cong A_5$ или S_5, подгруппа $O_p(G)$ абелева, все p-главные факторы группы G как $\overline{G}$-модули изоморфны 4-мерному неприводимому $GF(p)\overline{G}$-модулю, $G/O_p(G)$ — группа из пп. (3) или (5i) теоремы из [5]*;

(2) *$r = 7$, $\overline{G} \cong L_2(7)$ или $PGL_2(7)$, каждый p-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 3-мерному неприводимому $GF(p^2)L_2(7)$-модулю или 6-мерному абсолютно неприводимому $GF(p)L_2(7)$-модулю и $G/O_p(G)$ — группа из п. (5v) теоремы из [5]*;

(3) *$r = 7$, $\overline{G} \cong U_3(3)$ или $G_2(2)$, каждый p-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен 6-мерному абсолютно неприводимому $GF(p^m)\overline{G}$-модулю, где $m = 2$, если $\overline{G} \cong G_2(2)$ и $p \equiv -1 \pmod 3$, и $m = 1$ в противном случае, $G/O_p(G)$ — группа из п. (5vi) теоремы из [5]*;

(4) *$r = 13$, $\overline{G} \cong L_3(3)$ или $Aut(L_3(3))$, каждый p-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен 12-мерному абсолютно неприводимому $GF(p^m)\overline{G}$-модулю, где $m = 2$, если $\overline{G} \cong Aut(L_3(3))$ и $p \not\equiv 1 \pmod{12}$, и $m = 1$ в противном случае, $G/O_p(G)$ — группа из п. (5vii) теоремы из [5]*;

(5) *$r = 17$, $\overline{G} \cong L_2(17)$ или $PGL_2(17)$, каждый p-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен при $p \not\equiv \pm 1 \pmod 9$ одному из четырех 16-мерных абсолютно неприводимых*

$GF(p)\overline{G}$-модулей, а при $p \equiv \pm 1 \pmod 9$ — 16-мерному абсолютно неприводимому $GF(p)\overline{G}$-модулю или 16-мерному абсолютно неприводимому $GF(p^3)\overline{G}$-модулю, $G/O_p(G)$ — группа из п. (5viii) теоремы из [5].

Теорема 3. *Пусть G — конечная четырепримарная группа и $\pi_1(G) = \{2\}$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$G = O(G) \leftthreetimes S$ — группа Фробениуса, где $O(G)$ — трипримарная абелева группа, S — силовская 2-подгруппа в G, изоморфная циклической группе или (обобщенной) группе кватернионов;*

(2) *G — группа Фробениуса с ядром $O_2(G)$;*

(3) *$G = A \leftthreetimes (B \leftthreetimes C)$ — 2-фробениусова группа, где $A = O_2(G)$, B — циклическая трипримарная группа нечетного порядка и C — циклическая 2-группа.*

(4) *$G \cong L_2(r)$, где r — простое число Ферма или Мерсенна, $r > 17$ и $|\pi(r^2-1)| = 3$;*

(5) *$G \cong L_3(4)$;*

(6) *$\overline{G} := G/O_2(G) \cong L_2(2^m)$, где либо $m = 4$, либо m, $2^m - 1$, $(2^m+1)/3$ — простые числа, большие 3; если $O_2(G) \neq 1$, то $O_2(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка 2^{2m} в G, каждая из которых как $\overline{G}$-модуль изоморфна естественному 2-мерному $GF(2^m)SL_2(2^m)$-модулю;*

(7) *$\overline{G} := G/O_2(G) \cong Sz(2^n)$, где $n \in \{3, 5\}$; если $O_2(G) \neq 1$, то $O_2(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка 2^{4n} в G, каждая из которых как $\overline{G}$-модуль изоморфна естественному 4-мерному $GF(2^n)Sz(2^n)$-модулю.*

Теорема 4. *Пусть G — конечная четырепримарная группа с несвязным графом $\Gamma(G)$, $\overline{G} := G/F(G)$ — почти простая четырепримарная группа и $3 \notin \pi_1(G) \neq \{2\}$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) *G изоморфна одной из групп $L_2(81)$, $L_2(81){:}\,2_2$, $L_2(81){:}\,2_3$, $L_2(3^m)$, $PGL_2(3^m)$ или $L_2(p)$, где m — нечетное простое число, $|\pi(3^{2m}-1)| = 3$, p — простое число, $17 < p \neq 2^k \pm 1$ для любых натуральных чисел k, $p \not\equiv \pm 1 \pmod{12}$ и $|\pi(p^2-1)| = 3$;*

(2) *$\overline{G} \cong Sz(8)$, $F(G) = O_2(G) \neq 1$, $\pi_1(G) = \{2, 5, 7\}$ и каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен 4-мерному или 16-мерному неприводимому $GF(8)\overline{G}$-модулю, причем вторая возможность всегда появляется;*

(3) *$\overline{G} \cong Sz(32)$ или $Aut(Sz(32))$, $F(G) = O_2(G)$ ($O_2(G) \neq 1$ при $G \cong Sz(32)$), $\{2, 5\} \subseteq \pi_1(G)$ и каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен либо 4-мерному, либо одному из двух 16-мерных, либо одному из двух 64-мерных неприводимых $GF(32)Sz(32)$-модулей.*

Теорема 5. *Пусть G — конечная четырепримарная группа, $\overline{G} := G/F(G)$ — почти простая четырепримарная группа, $3 \in \pi_1(G)$ и $5 \in \pi(G) \setminus \pi_1(G)$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) *G изоморфна одной из групп M_{11}, $L_2(11)$, $L_3(4){:}\,2_1$, $L_3(4){:}\,2_2$, $U_4(3)$, $L_2(25)$, $L_2(25){:}\,2_1$, $L_2(25){:}\,2_3$ или $S_4(7)$;*

(2) *$\overline{G} \cong L_2(49), L_2(49){:}\,2_2$ или $L_2(49){:}\,2_3$, $F(G)$ — абелева 7-группа, 7-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль может быть изоморфен 4-мерному неприводимому $GF(7)L_2(49)$-модулю;*

(3) *$\overline{G} \cong A_7$ и $F(G)$ — элементарная абелева 2-группа и каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен одному из двух квазиэквивалентных 4-мерных неприводимых $GF(2)A_7$-модулей.*

Теорема 6. *Пусть G — конечная четырепримарная группа с несвязным графом $\Gamma(G)$, $\overline{G} := G/F(G)$ — почти простая четырепримарная группа из п. (7) заключения теоремы 1, $\pi_1(G) = \{2, 3, 5\}$ и $\pi_2(G) = \{p\}$. Тогда $p \in \{7, 11, 13, 17, 31, 41, 73\}$ и выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) *$p = 7$, $G \cong U_3(5)$, $U_3(5){:}\,2$, A_9, $U_4(3)$, $U_4(3){:}\,2_2$, $U_4(3){:}\,2_3$ или $O_8^+(2)$;*

(2) $p = 7$, $\overline{G} \cong A_7$ *или* S_7, $F(G) \neq 1$ *при* $\overline{G} \cong A_7$, *каждый* r*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен* 6*-мерному неприводимому* $GF(r)\overline{G}$*-модулю для* $r \in \{2, 3, 5\}$;

(3) $p = 7$, $\overline{G} \cong A_8$ *или* S_8, $F(G) = O_2(G) \neq 1$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен* 6*-мерному неприводимому* $GF(2)\overline{G}$*-модулю*;

(4) $p = 7$, $\overline{G} \cong L_3(4), L_3(4){:}\,2_1$ *или* $L_3(4){:}\,2_3$, $F(G) = O_2(G) \neq 1$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен одному из двух квазиэквивалентных* 9*-мерных абсолютно неприводимых* $GF(2)L_3(4)$*-модулей*;

(5) $p = 7$, $\overline{G} \cong J_2$, $F(G) = O_2(G)$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен* 6*-мерному неприводимому* $GF(4)J_2$*-модулю*;

(6) $p = 7$, $\overline{G} \cong S_6(2)$, $F(G) = O_2(G)$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен* 6*-мерному неприводимому* $GF(2)S_6(2)$*-модулю*;

(7) $p = 11$, $\overline{G} \cong M_{11}$, $F(G) \neq 1$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен* 10*-мерному неприводимому* $GF(2)M_{11}$*-модулю, каждый* 3*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен одному из двух* 5*-мерных или трех* 10*-мерных неприводимых* $GF(3)M_{11}$*-модулей, каждый* 5*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен* 10*-мерному неприводимому* $GF(5)M_{11}$*-модулю или* 10*-мерному неприводимому* $GF(25)M_{11}$*-модулю*;

(8) $p = 11$, $\overline{G} \cong M_{12}$ *или* $Aut(M_{12})$, $F(G) = O_2(G) \times O_3(G)$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 10*-мерному неприводимому* $GF(2)M_{12}$*-модулю, каждый* 3*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен либо одному из двух квазиэквивалентных* 10*-мерных, либо одному из двух квазиэквивалентных* 15*-мерных неприводимых* $GF(3)M_{12}$*-модулей*;

(9) $p = 11$, $\overline{G} \cong U_5(2)$ *или* $Aut(U_5(2))$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 5*-мерному или* 10*-мерному неприводимому* $GF(4)U_5(2)$*-модулю, каждый* 3*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 10*-мерному неприводимому* $GF(3)U_5(2)$*-модулю, каждый* 5*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 10*-мерному неприводимому* $GF(5)U_5(2)$*-модулю*;

(10) $p = 13$, $G \cong {}^2F_4(2)'$ *или* ${}^2F_4(2)$;

(11) $p = 13$, $\overline{G} \cong L_2(25)$ (*при* $F(G) \neq 1$), $L_2(25){:}\,2_2$ *или* $L_2(25){:}\,2_3$ (*при* $F(G) \neq 1$), $F(G) = O_2(G) \times O_5(G)$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен одному из двух квазиэквивалентных* 12*-мерных абсолютно неприводимых* $GF(2)L_2(25)$*-модулей, каждый* 5*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 4*-мерному или* 16*-мерному неприводимому* $GF(5)L_2(25)$*-модулю или* 8*-мерному неприводимому* $GF(25)L_2(25)$*-модулю*;

(12) $p = 13$, $\overline{G} \cong U_3(4)$, $U_3(4){:}\,2$ *или* $U_3(4){:}\,4$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 3*-мерному или* 9*-мерному неприводимому* $GF(16)U_3(4)$*-модулю, каждый* 3*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 12*-мерному неприводимому* $GF(3)U_3(4)$*-модулю, каждый* 5*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 12*-мерному неприводимому* $GF(5)U_3(4)$*-модулю*;

(13) $p = 13$, $\overline{G} \cong S_4(5)$, $F(G) = O_2(G)$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен* 12*-мерному неприводимому* $GF(4)\overline{G}$*-модулю*;

(14) $p = 13$, $\overline{G} \cong L_4(3)$, $L_4(3){:}\,2_2$ *или* $L_4(3){:}\,2_3$, $F(G) = O_3(G)$, *каждый* 3*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 6*-мерному неприводимому* $GF(3)L_4(3)$*-модулю*;

(15) $p = 17$, $\overline{G} \cong L_2(16)$ (*при* $F(G) \neq 1$), $L_2(16){:}\,2$ *или* $L_2(16){:}\,4$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 2*-мерному или* 4*-мерному неприводимому* $GF(16)L_2(16)$*-модулю,* 4*-мерному неприводимому* $GF(4)L_2(16)$*-модулю или* 16*-мерному неприводимому* $GF(2)L_2(16)$*-модулю, каждый* 3*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 16*-мерному неприводимому* $GF(3)L_2(16)$*-модулю, каждый* 5*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 16*-мерному неприводимому* $GF(5)L_2(16)$*-модулю*;

(16) $p = 31$, $\overline{G} \cong L_3(5)$ *или* $L_3(5){:}\,2$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 30*-мерному неприводимому* $GF(2)L_3(5)$*-модулю, каждый* 3*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 30*-мерному неприводимому* $GF(3)L_3(5)$*-модулю, каждый*

5-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен неприводимому $GF(5)L_3(5)$-модулю, принадлежащему парам квазиэквивалентных модулей размерностей 3, 6, 15 (две пары), 18, 39 или 60;

(17) $p = 73$, $\overline{G} \cong U_3(9)$, $U_3(9){:}\,2$ или $U_3(9){:}\,4$, каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 72-мерному неприводимому $GF(2)\overline{G}'$-модулю, каждый 3-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен неприводимому $GF(81)\overline{G}'$-модулю размерности 3, 6, 9, 15, 18 (два модуля), 21, 36, 42, 45 (два модуля), 90 или 105, каждый 5-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 72-мерному неприводимому $GF(5)\overline{G}$-модулю;

(18) $p = 41$, $\overline{G} \cong L_2(81)$, $L_2(81){:}\,2_1$, $L_2(81){:}\,2_3$, $L_2(81){:}\,4_1$ или $L_2(81){:}\,4_2$, $F(G) = O_2(G) \times O_3(G)$, $F(G) \neq 1$ при $\overline{G} \cong L_2(81)$, $L_2(81){:}\,2_3$ или $L_2(81){:}\,4_2$, каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен одному из двух квазиэквивалентных 40-мерных неприводимых $GF(2)L_2(81)$-модулей, 3-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль может быть изоморфен 4-мерному $GF(9)L_2(81)$-модулю;

(19) $p = 41$, $\overline{G} \cong S_4(9)$, $S_4(9){:}\,2_1$ или $S_4(9){:}\,2_3$, $F(G) = O_2(G) \times O_3(G)$, 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль может быть изоморфен 40-мерному неприводимому $GF(4)S_4(9)$-модулю.

Теорема 7. *Пусть G — конечная четырепримарная группа, $\overline{G} := G/F(G)$ — конечная четырепримарная почти простая группа с несвязным графом $\Gamma(G)$ из п. (7) заключения теоремы 1, $\{2,3\} \subseteq \pi_1(G)$ и $5 \notin \pi(G)$. Тогда либо $\pi_1(G) = \{2,3\}$, $\pi_2(G) = \{7\}$, $\pi_3(G) = \{13\}$ и $G \cong G_2(3)$, либо $\pi_1(G) = \{2,3,7\}$, $\pi_2(G) = \{p\} \subseteq \{13,19,43,73\}$ и выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $p = 13$, $\overline{G} \cong L_2(27){:}\,3$, $F(G) = O_3(G)$, каждый 3-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен 12-мерному или 36-мерному неприводимому $GF(3)L_2(27)$-модулю;

(2) $p = 13$, $G \cong G_2(3){:}\,2$;

(3) $p = 13$, $\overline{G} \cong {}^3D_4(2)$ или ${}^3D_4(2){:}\,3$, $F(G) = O_2(G)$, каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 8-мерному неприводимому $GF(8)^3D_4(2)$-модулю;

(4) $p = 19$, $G \cong L_3(7)$ или $L_3(7){:}\,2$;

(5) $p = 19$, $\overline{G} \cong U_3(8), U_3(8){:}\,2, U_3(8){:}\,3_1$ или $U_3(8){:}\,3_3$, $F(G) = O_2(G)$, каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен либо 9-мерному неприводимому $GF(64)U_3(8)$-модулю, либо 27-мерному неприводимому $GF(4)U_3(8)$-модулю;

(6) $p = 43$, $\overline{G} \cong U_3(7)$ или $U_3(7){:}\,2$, каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 42-мерному неприводимому $GF(2)U_3(7)$-модулю, каждый 3-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 42-мерному неприводимому $GF(3)U_3(7)$-модулю, каждый 7-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен неприводимому $GF(49)U_3(7)$-модулю размерности 3, 6, 15 (два модуля), 21, 24, 33, 36, 42, 75 или 105;

(7) $p = 73$, $\overline{G} \cong L_3(8)$, $L_3(8){:}\,2$, $L_3(8){:}\,3$ или $L_3(8){:}\,6$, каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен либо одному из двух квазиэквивалентных 3-мерных неприводимых $GF(8)L_3(8)$-модулей, либо одному из четырех 9-мерных неприводимых $GF(8)L_3(8)$-модулей (разбитых на две $Aut(\overline{G}')$-орбиты), либо одному из четырех 24-мерных неприводимых $GF(8)L_3(8)$-модулей (разбитых на две $Aut(\overline{G}')$-орбиты), либо одному из двух квазиэквивалентных 27-мерных неприводимых $GF(2)L_3(8)$-модулей, либо одному из двух квазиэквивалентных 27-мерных неприводимых $GF(8)L_3(8)$-модулей, либо одному из четырех 72-мерных неприводимых $GF(8)L_3(8)$-модулей (разбитых на две $Aut(\overline{G}')$-орбиты), каждый 3-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 72-мерному неприводимому $GF(3)L_3(8)$-модулю, каждый 7-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 72-мерному неприводимому $GF(7)L_3(8)$-модулю.

Теорема 8. *Пусть G — конечная четырепримарная группа с несвязным графом $\Gamma(G)$, $\overline{G} := G/F(G)$ — конечная четырепримарная почти простая группа из пп. (4)–(6) заключения теоремы 1 и $\{2,3\} \subseteq \pi_1(G)$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $\overline{G} \cong L_2(2^m)$, *где* m, $u := 2^m - 1$ *и* $t := (2^m+1)/3$ *— простые числа, большие* 3, $\pi_1(G) = \{2,3,t\}$, $\pi_2(G) = \{u\}$, $F(G) = O_2(G) \neq 1$, 2*-главный фактор группы* G *может быть изоморфен* 4*-мерному неприводимому* $GF(2^m)L_2(2^m)$*-модулю;*

(2) $\overline{G} \cong L_2(3^m)$, *где* m *и* $u := (3^m-1)/2$ *— нечетные простые числа, а* $t^b := (3^m+1)/4$, *где* t *— простое число и* $b = 1$, *кроме случая* $t^b = 11^2$ *при* $m = 5$, $\pi_1(G) = \{2,3,t\}$, $\pi_2(G) = \{u\}$, $F(G) = O_3(G) \neq 1$, 3*-главный фактор группы* G *может быть изоморфен* 4*-мерному неприводимому* $GF(3^m)L_2(3^m)$*-модулю;*

(3) $\overline{G} \cong L_2(r)$, *где* r *— простое число,* $17 \neq r \geq 13$, $r^2 - 1 = 2^a3^bs^c$, $s > 3$ *— простое число,* $s^c = (r+1)/2$, $a, b \in \mathbb{N}$ *и* c *равно либо* 1, *либо* 2 *при* $r \in \{97, 577\}$, $\pi_1(G) = \{2,3\}$, $\pi_2(G) = \{r\}$, $\pi_3(G) = \{s\}$, $F(G) = O_2(G)$, *если* $F(G) \neq 1$, *то* $c = 1$ *и* 2*-главные факторы группы* G *изоморфны* $(r-1)/2$*-мерному неприводимому* $GF(4)L_2(r)$*-модулю;*

(4) $\overline{G} \cong L_2(r)$ *или* $PGL_2(r)$, *где* r *— простое число,* $17 \neq r \geq 11$, $r^2 - 1 = 2^a3^bs^c$, $s > 3$ *— простое число,* $a, b \in \mathbb{N}$ *и* c *равно либо* 1, *либо* 2 *при* $r \in \{97, 577\}$, $\pi_1(G) = \{2,3,s\}$, $\pi_2(G) = \{r\}$, $F(G) = O_{r'}(G) \neq 1$, 2*-главные факторы группы* G *могут быть изоморфны любому неприводимому* $GF(2)L_2(r)$*-модулю,* 3*-главные факторы группы* G *соответствуют классам алгебраической сопряженности* $(r-1)$*-мерных абсолютно неприводимых* $\overline{GF(3)}L_2(r)$*-модулей,* s*-главные факторы группы* G *соответствуют классам алгебраической сопряженности* $(r-1)$*-мерных, а при* $r \equiv -1 \pmod 4$ *еще и* $(r-1)/2$*-мерных абсолютно неприводимых* $\overline{GF(s)}L_2(r)$*-модулей.*

Наши результаты в теоремах 5 и 6, касающиеся четырепримарных спорадических групп M_{11}, M_{12} и J_2, существенно уточняют соответствующие результаты М. Хаги [20]. Результаты для группы J_2 получены совместно с С. М. Логиновым.

Вычисления в доказательствах теорем проводятся с применением компьютерной системы GAP. На языке этой системы составлена программа, которая позволяет вычислять по формуле из леммы 1.5 размерность централизатора в векторном пространстве элемента простого порядка конечной простой группы, неприводимо действующей на этом пространстве.

В [43] показано, что любая конечная четырепримарная простая группа, кроме группы A_{10}, распознаваема по порядку и графу простых чисел. В качестве следствия теорем 1–9 получается следующая

Теорема 9. *Конечная четырепримарная простая группа распознаваема по графу простых чисел тогда и только, когда она изоморфна одной из следующих групп:* A_8, $L_3(4)$ *и* $L_2(q)$, *где* $|\pi(q^2-1)| = 3$, $q > 17$ *и либо* $q = 3^m$ *и* m *— простое нечетное число, либо* q *— простое число и* $q \not\equiv 1 \pmod{12}$, *либо* $q \in \{97, 577\}$.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [7; 12; 14; 15; 24; 25].

Если группа G действует на группе H, то будем говорить, что неединичный элемент $g \in G$ действует на H *свободно* (или *без неподвижных точек*), если $C_H(g) = 1$.

Два линейных (или матричных) представления T_1 и T_2 группы называются *квазиэквивалентными*, если представления $T_1\alpha$ и T_2 эквивалентны для некоторого автоморфизма α этой группы.

Напомним некоторые сведения из теории модулярных представлений конечных групп. Пусть p — простое число, K — алгебраическое замыкание поля $GF(p)$, G — конечная группа экспоненты p^am, где $(p,m) = 1$ и f — наименьшее натуральное число такое, что $p^f \equiv 1 \pmod m$. Пусть $g_1, \ldots, g_r$ — представители классов сопряженных p'-элементов группы G и F — подполе порядка $q = p^f$ в K. Тогда все неприводимые представления группы G над K могут быть реализованы над F (см. [25, теорема VII.2.6]), а число их классов эквивалентности равно r (см. [25, теорема VII.3.9]).

Возьмем порождающий элемент x мультипликативной группы F^* поля F, так что x есть примитивный $(q-1)$-й корень из единицы в поле K. Пусть $\zeta = \exp\left(\dfrac{2\pi i}{q-1}\right)$. Сопоставим каждому элементу x^k группы F^* элемент ζ^k поля $\mathbb{C}$. Обратное отображение для этого сопоставления может быть продолжено до кольцевого гомоморфизма $\mu\colon \mathbb{Z}[\zeta] \to F$.

Пусть $T\colon G \to GL(V)$ — (p-модулярное) неприводимое представление группы G в конечномерном векторном пространстве V над полем F (при этом V называется FG-модулем) с (p-модулярным) характером Брауэра φ. *Полем определения* представления T называется наименьшее подполе из F, над которым T может быть реализовано. Хорошо известно (см. [12, введение]), что поле определения представления T равно $GF(p)(\varphi(g_i)^\mu \mid 1 \le i \le r)$.

Если $T\colon G \to GL_n(F)$ — матричное представление группы G над полем F и $\alpha \in Aut(F)$, то отображение $T^\alpha\colon G \to GL_n(F)$ такое, что $T^\alpha(g) = (a_{ij}^\alpha)$ для $g \in G$ и $T(g) = (a_{ij}) \in GL_n(F)$, также является матричным представлением группы G над полем F. Если V — FG-модуль, соответствующий T, то через V^α обозначается FG-модуль, соответствующий T^α. Представление T^α (соответственно модуль V^α) называется *алгебраически сопряженным* представлению T (соответственно модулю V).

Рассмотрим некоторые результаты, которые используются в доказательстве теорем.

Лемма 1.1 (теорема Грюнберга — Кегеля [41, теорема A]). *Если G — конечная группа с несвязным графом простых чисел, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *G — группа Фробениуса*;

(2) *G — двойная группа Фробениуса*;

(3) *G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$-группы посредством группы A, где $Inn(P) \le A \le Aut(P)$, P — простая неабелева группа с $s(G) \le s(P)$, и $A/Inn(P)$ — $\pi_1(G)$-группа.*

Лемма 1.2 [21]. *Если G — конечная простая трипримарная группа, то G изоморфна одной из следующих групп*: $A_5, L_2(7), A_6, L_2(8), L_2(17), L_3(3), U_3(3), U_4(2)$.

Лемма 1.3 [16; 26; 37]. *Пусть G — конечная простая четырепримарная группа. Тогда G изоморфна одной из следующих групп*:

(1) A_7, A_8, A_9, A_{10}, M_{11}, M_{12}, J_2, $L_2(16)$, $L_2(25)$, $L_2(49)$, $L_2(81)$, $L_3(4)$, $L_3(5)$, $L_3(7)$, $L_3(8)$, $L_3(17)$, $L_4(3)$, $S_4(4)$, $S_4(5)$, $S_4(7)$, $S_4(9)$, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, $G_2(3)$, $U_3(4)$, $U_3(5)$, $U_3(7)$, $U_3(8)$, $U_3(9)$, $U_4(3)$, $U_5(2)$, $Sz(8)$, $Sz(32)$, ${}^3D_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$;

(2) *$L_2(r)$, где r — простое число, $17 \ne r \ge 11$, $r^2 - 1 = 2^a 3^b s^c$, $s > 3$ — простое число, $a, b \in \mathbb{N}$ и c равно либо 1, либо 2 при $r \in \{97, 577\}$*;

(3) *$L_2(2^m)$, где m, $2^m - 1$ и $(2^m + 1)/3$ — простые числа, большие 3*;

(4) *$L_2(3^m)$, где m и $(3^m-1)/2$ — нечетные простые числа, а $(3^m+1)/4$ равно либо простому числу, либо 11^2 (при $m = 5$).*

Лемма 1.4 [8, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.*

Следующий полезный результат хорошо известен (см., например, [2, лемма 4]).

Лемма 1.5. *Пусть G — конечная простая группа, F — поле характеристики $p > 0$, V — абсолютно неприводимый FG-модуль и β — характер Брауэра модуля V. Если g — элемент простого порядка, отличного от p, из G, то*

$$dim\ C_V(g) = (\beta|_{\langle g\rangle}, 1|_{\langle g\rangle}) = \frac{1}{|g|}\sum_{x\in\langle g\rangle}\beta(x).$$

Лемма 1.6 [38, предложение 3.2]. *Пусть G — конечная группа, $H \trianglelefteq G$, $G/H \cong L_2(q)$, где q нечетно, $q > 5$, и $C_H(t) = 1$ для некоторого элемента t порядка 3 из $G \setminus H$. Тогда $H = 1$.*

Лемма 1.7 [22, теорема 8.2; 38, предложение 4.2]. *Пусть G — конечная группа, $1 \neq H \trianglelefteq G$ и $G/H \cong L_2(2^n)$, где $n \geq 2$. Предположим, что $C_H(t) = 1$ для некоторого элемента t порядка 3 из G. Тогда $H = O_2(G)$ и H является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка 2^{2n} в G, каждая из которых как G/H-модуль изоморфна естественному $GF(2^n)SL_2(2^n)$-модулю.*

Лемма 1.8 [34, теорема, замечание 1]. *Пусть G — конечная группа, $1 \neq H \trianglelefteq G$, $G/H \cong Sz(q)$ для $q \in \{8, 32\}$. Предположим, что $C_H(t) = 1$ для некоторого элемента t порядка 5 из G. Тогда $H = O_2(G)$ и H является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка q^4 в G, каждая из которых как G/H-модуль изоморфна естественному 4-мерному $GF(q)Sz(q)$-модулю.*

Лемма 1.9 [25, теорема VII.1.16]. *Пусть G — конечная группа, $F = GF(p^m)$ — поле определения характеристики $p > 0$ для абсолютно неприводимого FG-модуля V, $\langle \sigma \rangle = Aut(F)$, V_0 обозначает модуль V, рассматриваемый как $GF(p)G$-модуль, и $W = V_0 \otimes_{GF(p)} F$. Тогда*

(1) *$W = \bigoplus_{i=1}^{m} V^{\sigma^i}$, где V^{σ^i} — модуль, алгебраически сопряженный с V посредством σ^i;*

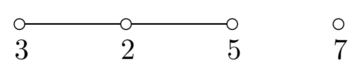
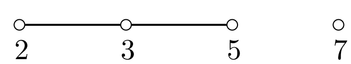
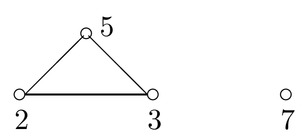
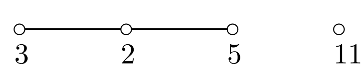
(2) *V_0 является неприводимым $GF(p)G$-модулем и, в частности, W реализуется как неприводимый $GF(p)G$-модуль V_0;*

(3) *с точностью до изоморфизма модулей неприводимые $GF(p)G$-модули находятся во взаимно однозначном соответствии с классами алгебраической сопряженности неприводимых $\overline{GF(p)}G$-модулей.*

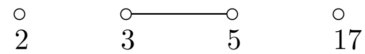
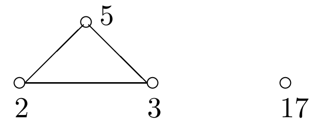
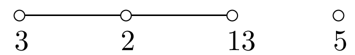
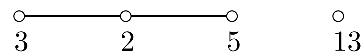
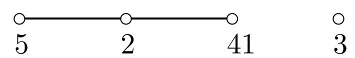
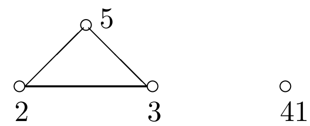
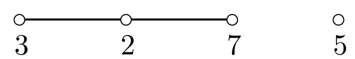
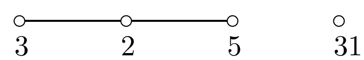
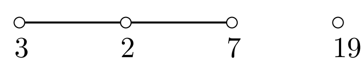
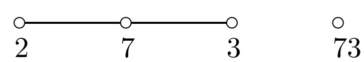
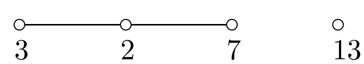
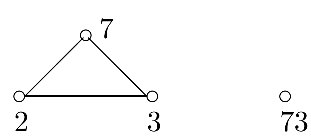
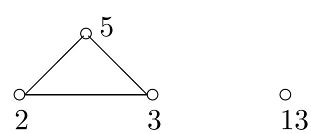
Лемма 1.10. *Почти простые четырепримартные группы с несвязным графом простых чисел перечислены в табл. 1.*

Т а б л и ц а 1

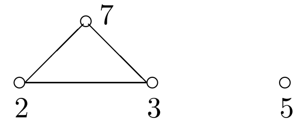
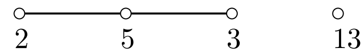
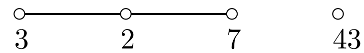
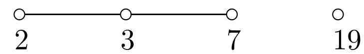
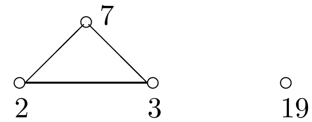
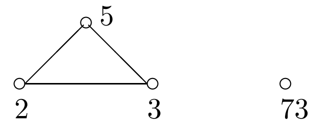
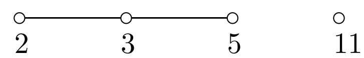
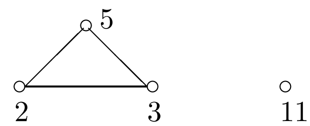
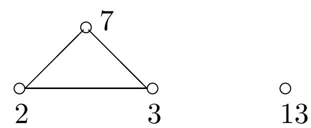
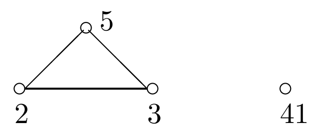
Несвязные графы простых чисел почти простых четырепримарных групп

Группа L	Граф $\Gamma(L)$
A_7, $L_2(49)$, $L_3(4)\colon 2_1$, $U_4(3)$, $L_2(49).2_3$	
S_7, $L_3(4)\colon 2_3$, $U_3(5)$, $U_3(5)\colon 2$, $U_4(3)\colon 2_2$, $U_4(3)\colon 2_3$, $L_2(49)\colon 2_1$	
A_8	
$A_9, S_8, J_2, S_6(2), O_8^+(2)$	
$L_2(11)$, M_{11}	
$M_{12}, M_{12}\colon 2$	

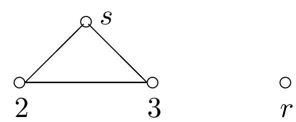
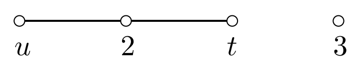
Продолжение табл. 1

Группа L	Граф $\Gamma(L)$
$L_2(16)$	
$L_2(16)\colon 2, L_2(16)\colon 4, S_4(4), S_4(4)\colon 2,$ $S_4(4)\colon 4$	
$L_2(25),\ L_2(25).2_3$	
$L_2(25)\colon 2_1$	
$L_2(25)\colon 2_2,\ L_4(3),\ L_4(3)\colon 2_2,$ $L_4(3)\colon 2_3,\ {}^2F_4(2)',\ Aut({}^2F_4(2)')$	
$L_2(81), L_2(81)\colon 2_3$	
$L_2(81)\colon 2_2 \cong PGL_2(81)$	
$L_2(81)\colon 2_1, L_2(81)\colon 4_1, L_2(81)\colon 4_2$	
$L_3(4)$	
$L_3(4).2_2, L_2(49).2_2$	
$L_3(5),\ L_3(5)\colon 2$	
$L_3(7), L_3(7)\colon 2$	
$L_3(8)$	
$L_2(13),\ G_2(3)$	
$L_2(27)\colon 3,\ G_2(3).2$	
$L_3(8)\colon 2, L_3(8)\colon 3, L_3(8)\colon 6$	
$S_4(5), U_3(4)\colon 2, U_3(4)\colon 4$	

Продолжение табл. 1

Группа L	Граф $\Gamma(L)$
$S_4(7)$	
$U_3(4)$	
$U_3(7), U_3(7).2$	
$U_3(8), U_3(8){:}\ 3_1, U_3(8){:}\ 3_3$	
$U_3(8){:}\ 2, U_3(8){:}\ 6$	
$U_3(9), U_3(9){:}\ 2, U_3(9){:}\ 4$	
$U_5(2)$	
$U_5(2){:}\ 2$	
$Sz(8)$	
$Sz(32)$	
$Sz(32){:}\ 5$	
${}^3D_4(2), {}^3D_4(2){:}\ 3$	
$S_4(9), S_4(9){:}\ 2_1, S_4(9){:}\ 2_3$	
$L_2(r)$, где $r > 17$ — простое число, $r^2 - 1 = 2^a 3^b s^c$, $s > 3$ — простое число, $a, b, c \in \mathbb{N}$, $r \equiv \varepsilon 1 \pmod 4), \varepsilon \in \{+, -\}$:	
1) $r - \varepsilon 1 = 2^{a-1}$	
2) $r - \varepsilon 1 = 2^{a-1} 3^b$	

Продолжение табл. 1

Группа L	Граф $\Gamma(L)$
3) $r-\varepsilon 1=2^{a-1}s^c$	
$PGL_2(r)$, где $r>17$ — простое число, $r^2-1=2^a3^bs^c$, $s>3$ — простое число, $a,b,c\in\mathbb{N}$, $r\equiv\varepsilon 1 \pmod 4), \varepsilon\in\{+,-\}$: 1) $r-\varepsilon 1=2^{a-1}$	
2) $r-\varepsilon 1\neq 2^{a-1}$	
$L_2(2^m)$, где m, $u=2^m-1$ и $t=(2^m+1)/3$ — простые числа, большие 3	
$L_2(3^m)$, где m, $u=(3^m-1)/2$ и $t\in\pi(3^m+1)$ — нечетные простые числа	
$PGL_2(3^m)$, где m, $u=(3^m-1)/2$ и $t\in\pi(3^m+1)$ — нечетные простые числа	

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — почти простая четырепримарная группа с несвязным графом $\Gamma(G)$ и цоколем P. Ввиду леммы 1.2 и [15] P — простая четырепримарная группа.

Лемма 1.3 дает список всех конечных простых четырепримарных групп.

1. Если P — из п. (1) леммы 1.3, то $\Gamma(G)$ легко находится с помощью [15; 40].

2. Пусть P — из п. (2) леммы 1.3. Тогда $P\cong L_2(r)$, где r — простое число, $r>17$, $r^2-1=2^a3^bs^c$, $s>3$ — простое число, $a,b,c\in\mathbb{N}$. Таким образом, $\pi(G)=\{2,3,r,s\}$. Пусть $r=\varepsilon 1 \pmod 4$, где $\varepsilon\in\{+,-\}$. Ввиду [41] граф $\Gamma(P)$ имеет следующие компоненты связности: $\pi_1(P)=\pi(r-\varepsilon 1)$, $\pi_2(P)=\{r\}$, $\pi_3(P)=\pi(r+\varepsilon 1)$. В частности, $|\pi_1(P)|\leq 2$.

Если $|\pi_1(P)|=1$, то $\pi_1(P)=\{2\}$, $\pi_2(P)=\{r\}$ и $\pi_3(P)=\{3,s\}$.

Пусть $|\pi_1(P)|=2$. Если $3\in\pi_1(P)$, то $\pi_1(P)=\{2,3\}$, $\pi_2(P)=\{r\}$ и $\pi_3(P)=\{s\}$. Если $s\in\pi_1(P)$, то $\pi_1(P)=\{2,s\}$, $\pi_2(P)=\{r\}$ и $\pi_3(P)=\{3\}$.

Пусть $G=Aut(P)\cong PGL_2(r)$. Тогда в G есть подгруппы, изоморфные $D_{2(r-1)}$ и $D_{2(r+1)}$, поэтому $\pi_1(G)=\{2,3,s\}$ и $\pi_2(G)=\{r\}$. Если $r-\varepsilon 1=2^{a-1}$, то $\pi_1(G)$ — полный граф. Если $r-\varepsilon 1\neq 2^{a-1}$, то $\pi_1(G)$ — цепь.

3. Пусть P — из п. (3) леммы 1.3. Тогда $P\cong L_2(2^m)$, где m, $u=2^m-1$ и $t=(2^m+1)/3$ — простые числа, большие 3. Поэтому $\pi_1(P)=\{2\}$, $\pi_2(P)=\{u\}$ и $\pi_3(P)=\{3,t\}$.

Предположим, что $Inn(P)<G\leq Aut(P)$. Тогда $G=Inn(P)\leftthreetimes\langle f\rangle$, где f — полевой автоморфизм порядка m группы P. Поскольку $|\pi(G)|=|\pi(P)|=4$, $m\in\{u,t\}$. Можно считать, что f нормализует силовскую u-подгруппу и силовскую t-подгруппу из P. Поэтому f централизует в P элемент порядка u или t — противоречие с тем, что $C_P(f)\cong L_2(2)\cong S_3$.

Пусть P — из п. (4) леммы 1.3. Тогда $P\cong L_2(3^m)$, где m, $u=(3^m-1)/2$ и $t\in\pi(3^m+1)$ — нечетные простые числа. Таким образом, $\pi(P)=\{2,3,u,t\}$.

По [41] граф $\Gamma(P)$ имеет следующие компоненты связности: $\pi_1(P) = \pi(3^m + 1) = \{2, t\}$, $\pi_2(P) = \{3\}$, $\pi_3(P) = \{u\}$.

Пусть $Inn(P) < G \leq Aut(P) \cong PGL_2(3^m) \leftthreetimes \langle f \rangle$, где f — полевой автоморфизм порядка m группы P.

Пусть $G \geq PGL_2(3^m)$. Тогда в G есть подгруппы, изоморфные $D_{2(3^m-1)}$ и $D_{2(3^m+1)}$, поэтому $\Gamma(G)$ имеет компоненты связности $\pi_1(G) = \{2, u, t\}$ и $\pi_2(G) = \{3\}$, причем вершина 2 смежна с u и t.

Допустим, что $G > PGL_2(3^m)$. Тогда G содержит элемент f простого порядка m и $C_P(f) \cong PGL_2(3) \cong S_4$, следовательно, $m \in \{3, u, t\}$. Но тогда граф $\Gamma(G)$ связен; противоречие.

Значит, $G = PGL_2(3^m)$. Вершины u и t не смежны в графе $\Gamma(G)$, так как подгруппы, изоморфные $D_{2(3^m-1)}$ или $D_{2(3^m+1)}$, максимальны в G.

Пусть $G \cap PGL_2(3^m) = P$. Поскольку $Out(P)$ — циклическая группа порядка $2m$ и m нечетно, то $G \cap \langle f \rangle \neq 1$ и граф $\Gamma(G)$, как и выше, связен, что не так.

Лемма доказана.

2. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Теорема следует из лемм 1.1, 1.3 и 1.9.

Доказательство теоремы 2. Пусть выполняются условия теоремы 2. Поскольку группа G четырепримарна, а группа $\overline{G}$ трипримарна, то по лемме 1.2 в $\pi(F(G)) \setminus \pi(\overline{G})$ содержится простое число p, большее 3. По лемме 1.1 $\{2, p\} \subseteq \pi_1(G)$.

Случай 1. $3 \notin \pi_1(G)$. Тогда $3 \notin \pi_1(\overline{G})$ и по [5, таблица] имеем $\overline{G} \in \{A_5, A_6, M_{10}, L_2(7), L_2(8), L_2(17)\}$.

Если $\overline{G} \in \{A_5, L_2(8)\}$, то элемент порядка 3 из G действует свободно на $O_p(G)$, откуда по лемме 1.7 получаем, что $O_p(G) = 1$, а это не так.

Если $\overline{G} \in \{A_6, M_{10}\}$, то $3p \in \omega(G)$, поскольку силовская 3-подгруппа в $\overline{G}$ является элементарной абелевой порядка 9, откуда $3 \in \pi_1(G)$; противоречие с предположением.

Если $G \cong L_2(7)$, то $\overline{G}$ содержит подгруппу Фробениуса порядка 21 и по лемме 1.4 вершина 3 лежит в $\pi_1(G)$; противоречие с предположением.

Если $\overline{G} \cong L_2(17)$, то элемент порядка 3 из G действует свободно на $O_p(G)$, откуда по лемме 1.6 получаем, что $O_p(G) = 1$, а это не так.

Таким образом, случай 1 невозможен.

Случай 2. $3 \in \pi_1(G)$. Тогда $\pi_1(G) = \{2, 3, p\}$ и $\pi_2(G) = \pi_2(\overline{G}) = \{r\}$ для некоторого простого числа r. Так как $\overline{G}$ — почти простая трипримарная группа, то по [5, таблица] имеем $\pi(\overline{G}) = \{2, 3, r\}$ и, следовательно, $r \in \{5, 7, 13, 17\}$.

Если $r = 5$, то по [2], [5, таблица, теорема] и [15] имеем $\overline{G} \in \{A_5, S_5\}$ и выполняется утверждение (1).

Пусть $r = 7$. Тогда по [5, таблица] имеем $\overline{G} \in \{L_2(7), PGL_2(7), L_2(8), {}^2G_2(3), U_3(3), G_2(2)\}$.

Если $\overline{G} \in \{L_2(7), PGL_2(7)\}$, то по [15] и [5, теорема] выполняется утверждение (2).

Если $\overline{G} \in \{L_2(8), {}^2G_2(3)\}$, то по [15] не существует неприводимый $GF(p)\overline{G}$-модуль, на котором элемент порядка 7 из $\overline{G}$ действует свободно, значит, граф $\Gamma(G)$ связен; противоречие.

Если $\overline{G} \in \{U_3(3), G_2(2)\}$, то по [15] существует единственный 6-мерный абсолютно неприводимый $GF(p^m)\overline{G}$-модуль с полем определения $GF(p^m)$. Если $\overline{G} \cong U_3(3)$, то $m = 1$. Если $\overline{G} \cong G_2(2)$, то $m = (GF(p)(\sqrt{-3})\colon GF(p))$. По [31, лемма 4] получаем, что m равно 1 при $p \equiv 1 \pmod 3$ и 2 при $p \equiv -1 \pmod 3$. Поэтому с учетом [5, теорема] выполняется утверждение (3).

Пусть $r = 13$. Тогда по [5, таблица] имеем $\overline{G} \in \{L_3(3), Aut(L_3(3))\}$. По [15] существует единственный 12-мерный абсолютно неприводимый $GF(p^m)\overline{G}$-модуль с полем определения $GF(p^m)$. Если $\overline{G} \cong L_3(3)$, то $m = 1$. Если $\overline{G} \cong Aut(L_3(3))$, то $m = (GF(p)(\sqrt{3})\colon GF(p))$. Ввиду [31, лемма 3] получаем, что m равно 1 при $p \equiv 1 \pmod{12}$ и 2 в противном случае. Поэтому ввиду [5, теорема] выполняется утверждение (4).

Пусть, наконец, $r = 17$. Тогда по [5, таблица] имеем $\overline{G} \in \{L_2(17), Aut(L_2(17))\}$. Ввиду [15] и [31, таблица] выполняется утверждение (5).

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть выполняются условия теоремы 3. Если $O(G) \neq 1$, то по [39, теорема II.1] выполняется утверждение (1).

Пусть $O(G) = 1$. По лемме 1.1 возможен один из трех случаев.

Если выполнен случай (1) леммы 1.1, то G — группа Фробениуса с ядром $F(G) = O_2(G)$ и справедливо утверждение (2).

Если выполнен случай (2) леммы 1.1, то справедливо утверждение (3).

Пусть выполнен случай (3) леммы 1.1. Тогда $F(G) = O_2(G)$ и по [39, теорема III.1] группа $\overline{G}$ изоморфна одной из следующих групп: $L_2(2^n)$ $(n \geq 2)$, $Sz(q)$ $(q = 2^{2n+1} > 2)$, $L_2(q)$ ($q > 5$ — простое число Ферма или Мерсенна), $L_3(4)$.

Если $\overline{G} \cong L_2(q)$, где $q > 5$ — простое число Ферма или Мерсенна, то по лемме 1.6 справедливо утверждение (4).

Если $\overline{G} \cong L_3(4)$, то $O_2(G) = 1$, так как силовская 3-подгруппа в $\overline{G}$ изоморфна элементарной абелевой группе порядка 9, поэтому справедливо утверждение (5).

Если $\overline{G} \cong L_2(2^n)$ $(n \geq 2)$, то ввиду лемм 1.3 и 1.7 справедливо утверждение (6).

Если $\overline{G} \cong Sz(q)$, то ввиду лемм 1.3, 1.8 и 1.10 справедливо утверждение (7).

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть выполняются условия теоремы 4.

Поскольку $3 \notin \pi_1(G)$, то $3 \notin \pi_1(\overline{G})$. Из леммы 1.10 вытекает, что группа $\overline{G}$ изоморфна одной из групп $L_3(4)$, $L_2(81)$, $L_2(81){:}\,2_2$, $L_2(81){:}\,2_3$, $Sz(8)$, $Sz(32)$, $Aut(Sz(32))$, $L_2(2^l)$, $L_2(3^m)$, $PGL_2(3^m)$ или $L_2(r)$, где l, m, r — нечетные простые числа, $|\pi(2^{2l}-1)| = |\pi(3^{2m}-1)| = |\pi(r^2-1)| = 3$ и $17 \neq r \not\equiv \pm 1 (mod\ 12)$.

Если $\overline{G} \cong L_3(4)$, то $F(G) = 1$, так как силовская 3-подгруппа в $L_3(4)$ элементарная абелева порядка 9, и поэтому $\pi_1(G) = \{2\}$, что противоречит условию теоремы.

Если $\overline{G}$ изоморфна $L_2(81)$, $L_2(81){:}\,2_2$, $L_2(81){:}\,2_3$, $L_2(3^m)$, $PGL_2(3^m)$ или $L_2(r)$, то по лемме 1.6 получаем, что $F(G) = 1$, так что ввиду теоремы 3 выполнено утверждение (1).

Пусть $\overline{G} \cong L_2(2^l)$. Поскольку $\pi_1(G) \neq \{2\}$, то из леммы 1.10 вытекает, что $F(G) \neq 1$ и $\pi_1(G) = \{2, u\}$, где $u = 2^l - 1$. Теперь по лемме 1.7 $F(G) = O_2(G)$, и каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен естественному $GF(2^l)SL_2(2^l)$-модулю. Но тогда элемент порядка u из G действует свободно на $O_2(G)$ и, следовательно, $u \notin \pi_1(G)$; противоречие с установленным ранее.

Пусть $\overline{G} \cong Sz(8)$, $Sz(32)$ или $Aut(Sz(32))$. Ясно, что 5 делит $|G|$. Предположим, что $5 \notin \pi_1(G)$. Тогда, используя леммы 1.9 и условие $\pi_1(G) \neq \{2\}$, получаем, что $\overline{G} \cong Sz(q)$, где $q \in \{8, 32\}$, и $F(G) \neq 1$. По лемме 1.8 $F(G) = O_2(G)$ и каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен естественному 4-мерному $GF(q)Sz(q)$-модулю. Применяя лемму 1.5 и таблицы модулярных характеров Брауэра группы $\overline{G}$ из [12], получаем, что все элементы простого нечетного порядка из G действуют свободно на $O_2(G)$ и, следовательно, $\pi_1(G) = \{2\}$; противоречие.

Итак, $5 \in \pi_1(G)$. Пусть $p \in \pi_2(G)$. Применив лемму 1.5 и таблицы модулярных характеров Брауэра группы $\overline{G}$ из [12], получаем, что элемент порядка p из G действует несвободно на $O(F(G))$. Поэтому $F(G) = O_2(G)$. Применяя лемму 1.5 и таблицы 2-модулярных характеров Брауэра группы $\overline{G}'$ из [12], получим, что выполнены утверждения (2) или (3). Вычисления в последних двух абзацах проводятся с применением компьютерной системы GAP [40].

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5. Пусть выполняются условия теоремы 5. Поскольку $5 \in \pi(G) \setminus \pi_1(G)$, $5 \in \pi(\overline{G}) \setminus \pi_1(\overline{G})$. Из леммы 1.10 и условия $3 \in \pi_1(G)$ вытекает, что группа $\overline{G}$ изоморфна одной из групп, определенных в утверждениях (1)–(3) доказываемой теоремы.

Если $\pi_2(G) = \{5\}$, то, применяя [2], лемму 1.5 и таблицу 2-модулярных характеров Брауэра группы A_7 из [12], получаем, что выполнено одно из утверждений (1)–(3).

Поэтому можно считать, что $\pi_1(G) = \{2,3\}$ и $\pi_2(G) = \{5,p\}$, где $p \in \pi(G) \setminus \{2,3,5\}$. Отсюда по лемме 1.1 $\pi(F(G)) \subseteq \{2,3\}$. Ввиду леммы 1.9 $F(G) \neq 1$. Поэтому силовские 5- и p-подгруппы группы $\overline{G}$ циклические, следовательно, группа $\overline{G}$ изоморфна одной из групп A_7, $L_3(4)$, $L_3(4){:}\,2_1$, $L_3(4){:}\,2_2$, $U_4(3)$, M_{11} или $L_2(11)$. Применяя лемму 1.5 и таблицы 2- и 3-модулярных характеров Брауэра группы $\overline{G}'$ из [12], получаем, что элемент порядка 5 или p из G централизует нетривиальный элемент из $F(G)$, что невозможно.

Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 6. Пусть выполняются условия теоремы 6. Применяя леммы 1.5, 1.9 и 1.10, таблицы характеров Брауэра из [12] и вычисляя в GAP [40], получим, что либо выполнено одно из утверждений (1)–(18), либо $p = 41$ и $\overline{G}$ — группа из утверждений (18) или (19).

Пусть G — группа из утверждения (19). Тогда ввиду леммы 1.10 $\overline{G} \cong L_2(81)$, $L_2(81){:}\,2_1$, $L_2(81){:}\,2_3$, $L_2(81){:}\,4_1$ или $L_2(81){:}\,4_2$ и $\pi(F(G)) \subseteq \{2,3,5\}$, причем $F(G) \neq 1$ при $\overline{G} \cong L_2(81)$, $L_2(81){:}\,2_3$ или $L_2(81){:}\,4_2$. Применяя лемму 1.5 и таблицы 2- и 5-модулярных характеров Брауэра из [17] для группы $\overline{G}' \cong L_2(81)$, получим, что $O_5(G) = 1$ и каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен одному из двух квазиэквивалентных 40-мерных неприводимых $GF(2)L_2(81)$-модулей. 3-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль может быть изоморфен 4-мерному $GF(9)L_2(81)$-модулю, поскольку $L_2(81) \cong \Omega_4^-(9)$, а элемент порядка 41 из $\Omega_4^-(9)$ действует свободно на естественном 4-мерном $GF(9)\Omega_4^-(9)$-модуле. Таким образом, утверждение (18) доказано.

Пусть G — группа из утверждения (19). Тогда ввиду леммы 1.9 $\overline{G} \cong S_4(9)$, $S_4(9){:}\,2_1$ или $S_4(9){:}\,2_3$ и $\pi(F(G)) \subseteq \{2,3,5\}$. В $\overline{G}'$ есть подгруппа H, изоморфная $L_2(81)$. Поэтому ввиду утверждения (18) имеем $O_5(G) = 1$. По [42] алгебраически сопряженные неприводимые характеры θ_7 и θ_8 из главного 2-блока группы $\overline{G}'$ имеют степень 40, и их ограничения на множество элементов нечетного порядка группы $\overline{G}'$ являются ее неприводимыми характерами Брауэра. Ввиду утверждения (18) ограничениям этих характеров Брауэра на подгруппу H соответствуют неприводимые $GF(2)H$-модули, на которых элемент порядка 41 из H действует свободно. Отсюда следует справедливость утверждения (19).

Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 7. Пусть выполняются условия теоремы 7. Применяя леммы 1.5, 1.9 и 1.10, таблицы характеров Брауэра из [12] и вычисляя в GAP [40], получим справедливость одного из утверждений (1)–(7) теоремы.

Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 8. Пусть выполняются условия теоремы 8.

Пусть сначала выполнен п. (4) заключения теоремы 1. Тогда по лемме 1.10 $\overline{G} \cong L_2(2^m)$, где m, $u := 2^m - 1$ и $t := (2^m+1)/3$ — простые числа, большие 3, $\pi_1(G) = \{2,3,t\}$, $\pi_2(G) = \{u\}$ и $F(G) \neq 1$. В $\overline{G}$ есть подгруппа, изоморфная группе Фробениуса вида $2^m{:}\,u$. Если $O(F(G)) \neq 1$, то по лемме 1.4 элемент порядка u из G централизует нетривиальный элемент из $O(F(G))$, что не так. Поэтому $F(G) = O_2(G) \neq 1$. Пусть V_1 — естественный 2-мерный неприводимый $GF(2^m)\overline{G}$-модуль с характером Брауэра β_1, V_2 — модуль, алгебраически сопряженный с V посредством автоморфизма Фробениуса поля $GF(2^m)$, с характером Брауэра β_2 и $V = V_1 \otimes V_2$. Положим $z = \exp(2\pi i/u)$ и a — элемент порядка u в $\overline{G}$. Тогда ввиду [17, разд. VII] $\beta_1(a^k) = z^k + z^{-k}$ и $\beta_2(a^k) = z^{2k} + z^{-2k}$ для $0 \le k \le u-1$ и V_2 — неприводимый $GF(2^m)\overline{G}$-модуль с характером Брауэра $\beta = \beta_1\beta_2$. Но $\beta(a^k) = (z^k+z^{-k})+(z^{3k}+z^{-3k})$, поэтому $4+2\sum_{k=0}^{(u-1)/2}\beta(a^k) = 4 + 2\sum_{k=1}^{(u-1)/2}(z^k+z^{-k}) + 2\sum_{k=1}^{(u-1)/2}(z^{3k}+z^{-3k}) = 0$ и, следовательно, по лемме 1.5 элемент a действует на V свободно. Так как m — простое число, и группа $L_2(2^m)$ не изоморфна подгруппе из $L_4(2)$ (см. [15]), то $GF(2^m)$ — поле определения модуля V. Пункт (1) теоремы доказан.

Пусть теперь выполнен п. (5) заключения теоремы 1. Тогда по лемме 1.10 $\overline{G} \cong L_2(3^m)$, где m, $u := (3^m-1)/2$ и $t \in \pi(3^m+1)$ — нечетные простые числа, $\pi_1(G) = \{2,3,t\}$, $\pi_2(G) = \{u\}$ и $F(G) \neq 1$. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, заменив $2^m - 1$ на $(3^m-1)/2$, получим справедливость п. (2) теоремы.

Пусть наконец выполнен п. (6) заключения теоремы 1. Тогда $\overline{G} \cong L_2(r)$ или $PGL_2(r)$, где r — простое число, $17 \neq r \geq 11$, $r^2-1 = 2^a3^bs^c$, $s > 3$ — простое число, $a, b \in \mathbb{N}$ и c равно либо 1, либо 2 при $r \in \{97, 577\}$. Пусть $r \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Ниже в табл. 2 приведена таблица характеров группы $L_2(r)$, где $|a| = (r-1)/2$, $|b| = (r+1)/2$, $|c| = |d| = r$ (см. [17]).

Таблица 2

Таблица характеров группы $L_2(r)$

	1	c	d	a^m $(1 \leq m \leq \frac{r-2+\varepsilon 1}{4})$	b^n $(1 \leq n \leq \frac{r-\varepsilon 1}{4})$
1	1	1	1	1	1
γ_1	$\dfrac{r+1}{2}$	$\dfrac{1+\sqrt{\varepsilon r}}{2}$	$\dfrac{1-\sqrt{\varepsilon r}}{2}$	$(-1)^m$	0
γ_2	$\dfrac{r+1}{2}$	$\dfrac{1-\sqrt{\varepsilon r}}{2}$	$\dfrac{1+\sqrt{\varepsilon r}}{2}$	$(-1)^m$	0
δ_k $(1 \leq k \leq \frac{r-2+\varepsilon 1}{4})$	$q-1$	-1	-1	0	$-2\cos\dfrac{4\pi kn}{r+1}$
α	q	0	0	1	-1
θ_l $(1 \leq l \leq \frac{r-4-\varepsilon 1}{4})$	$q+1$	1	1	$2\cos\dfrac{4\pi lm}{r-1}$	0

Предположим, что $r \in \pi_1(G)$. Тогда по лемме 1.10 $\pi_1(G) = \{2, 3, r\}$, $\pi_2(G) = \{s\}$, $\overline{G} \cong L_2(r)$ и $F(G) \neq 1$. Покажем сначала, что $O_p(G) = 1$. В противном случае можно считать, что $V := O_p(G)$ — неприводимый $GF(r)\overline{G}$-модуль. Ввиду [17, теорема 9.1] размерность n модуля V нечетна и $n \geq 3$. Если s делит $r+1$, то s не делит r^n-1 и, следовательно, элемент порядка s из G действует на V несвободно, что не так. Поэтому s делит $r-1$. В группе G есть подгруппа D, изоморфная диэдральной группе порядка $2s$, причем $C_V(D) = 1$. По теореме Машке V есть прямая сумма неприводимых точных $GF(r)D$-модулей, которые все имеют размерность 2, поэтому n четно; противоречие.

Таким образом, $O_p(G) = 1$. Если s делит $r-1$, то по лемме 1.4 элемент порядка s из G действует на $F(G)$ несвободно. Поэтому $r+1$ равно $2s$ или $2s^2$ и 12 делит $r-1$.

Применяя лемму 1.5, табл. 2 и p-модулярные матрицы разложения группы $L_2(r)$ для $p \in \{2, 3\}$ из [17], получаем, что элемент порядка r из G действует свободно на всех неприводимых $GF(p)L_2(r)$-модулях, на которых элемент порядка s из G действует свободно. Отсюда элемент порядка r из G действует свободно на $F(G)$, что противоречит предположению, так как $r \notin \pi_1(\overline{G})$.

Итак, $r \notin \pi_1(G)$.

Пусть $\pi_1(G) = \{2, 3\}$. Тогда по лемме 1.10 $\pi_2(G) = \{r\}$, $\pi_2(G) = \{s\}$, $\overline{G} \cong L_2(r)$ и $r - \varepsilon 1 = 2^{a-1}3^b$. Если $F(G) = 1$, то выполняется п. (3) теоремы выполняется. Пусть $F(G) \neq 1$.

Если $\varepsilon = -$, то s делит $r-1$ и по лемме 1.4 элемент порядка s из G действует на $F(G)$ несвободно. Поэтому $\varepsilon = +$ и $r+1$ равно $2s$ или $2s^2$. Применяя лемму 1.5, табл. 2 и p-модулярные матрицы разложения группы $L_2(r)$ для $p \in \{2, 3\}$ из [17], получим справедливость п. (3) теоремы.

Пусть $\pi_1(G) = \{2, 3, s\}$. Тогда по лемме 1.10 $\pi_2(G) = \{r\}$. Применяя лемму 1.5, табл. 2 и p-модулярные матрицы разложения группы $L_2(r)$ для $p \in \{2, 3, s\}$ из [17], получим справедливость п. (4) теоремы.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 9. Из леммы 1.10 и теорем 1—8 следует, что для доказательства теоремы осталось доказать нераспознаваемость по графу простых чисел группы $S_4(7)$. Но это действительно так, поскольку ввиду леммы 1.10 легко увидеть, что $\Gamma(S_4(7)) = \Gamma(G)$, где G — группа Фробениуса вида $(2^4 \times 3^4 \times 7^4) : 5$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильев А.В., Гречкосеева М.А., Мазуров В.Д.** Характеризация конечных простых групп спектром и порядком // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 6. С. 658–728.
2. **Дольфи С., Джабара Э., Лючидо М.С.** $C55$-группы // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1285–1298.
3. **Заварницин А.В.** О распознавании конечных простых групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 390–408.
4. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
5. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных трипримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 150–158.
6. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 15-е. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002. 172 с.
7. **Кэртис Ч., Райнер И.** Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 668 с.
8. **Мазуров В.Д.** Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
9. **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36. С. 119–138. (Математика и механика; вып. 7.)
10. **Хосрави А., Хосрави Б.** Квазираспознавание простой группы ${}^2G_2(q)$ по графу простых чисел // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 707–715.
11. **Хосрави А., Хосрави Б.** 2-распознаваемость $PSL(2, p^2)$ по графу простых чисел // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 934–944.
12. An atlas of Brauer characters / C. Jansen [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1995. 327 p.
13. **Arad Z., Herford W.** Classification of finite groups with a CC-subgroup // Comm. Algebra. 2004. Vol. 32, no 6. P. 2087–2098.
14. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
15. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
16. **Bugeaud Y., Cao Z., Mignotte M.** On simple K_4-groups // J. Algebra. 2001. Vol. 241, no. 2. P. 658–668.
17. **Burkhardt R.** Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen $PSL(2, p^f)$-groups // J. Algebra. 1976. Vol. 40, no. 1. P. 75–96.
18. **Fleischmann P., Lempken W., Tiep P.H.** Finite p'-semiregular groups // J. Algebra. 1997. Vol. 188, no. 2. P. 547–579.
19. **Guralnik R.M., Tiep P.H.** Finite simple unisingular groups of Lie type // J. Group Theory. 2003. Vol. 6, no. 3. P. 271–310.
20. **Hagie M.** The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. Vol. 31, no. 9. P. 4405–4424.
21. **Herzog M.** On finite simple groups of order divisible by three primes only // J. Algebra. 1968. Vol. 10, no. 3. P. 383–388.
22. **Higman G.** Odd characterizations of finite simple groups: lecture notes. Michigan: University Michigan, 1968. 77 p.

23. **Holt D.F., Plesken W.** A_5-invariant 2-groups with no trivial sections // Quart. J. Math. Oxford. Ser. 2. 1986. Vol. 37, no. 145. P. 39–47.
24. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967. 793 S.
25. **Huppert B., Blackburn N.** Finite groups II. Berlin: Springer-Verlag, 1982. 531 p.
26. **Huppert B., Lempken W.** Simple groups of order divisible by at most four primes // Proc. F. Scorina. Gomel State University. 2000. no. 3 (16). Problems in Algebra. P. 64–75.
27. **Khosravi B.** n-recognition by prime graph of the simple group $PSL(2,q)$ // J. Algebra Appl. 2008. Vol. 7, no. 6. P. 735–748.
28. **Khosravi B., Amiri S.S.S.** Groups with the same prime graph as $L_2(q)$ where $q = p^\alpha < 100$ // Hadronic J. 2007. Vol. 30, no. 3. P. 343–354.
29. **Khosravi Bahman, Khosravi Behnam, Khosravi Behrooz.** On the prime graph of $PSL(2,p)$ where $p > 3$ is a prime number // Acta Math. Hungar. 2007. Vol. 116, no. 4. P. 295–307.
30. **Khosravi Bahnam, Khosravi Behnam, Khosravi Behrooz.** Groups with the same prime graph as a CIT simple group // Houston J. Math. 2007. Vol. 33, no. 4. P. 967–977 (electronic).
31. **Kondratiev A.S.** Finite linear groups of small degree. II // Commun. Algebra. 2001. Vol. 29, no. 9. P. 4103–4123.
32. **Lucido M.S.** Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1999. Vol. 102. P. 1–22; addendum // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 2002. Vol. 107. P. 189–190.
33. **Martineau P.** On representations of the Suzuki groups over fields of odd characteristic // J. London Math. Soc. (2) 1972. Vol. 6. P. 153–160.
34. **Martineau R.P.** On 2-modular representations of the Suzuki groups // Amer. J. Math. 1972. Vol. 94. P. 55–72.
35. **Prince A.R.** On 2-groups admitting A_5 or A_6 with an element of order 5 acting fixed point freely // J. Algebra. 1977. Vol. 49, no. 2. P. 374–386.
36. **Prince A.R.** An analogue of Maschke's theorem for certain representations of A_6 over $GF(2)$ // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A. 1982. Vol. 91, no. 3–4. P. 175–177.
37. **Shi W.J.** On simple K_4-groups // Chinese Science Bull. 1991. 36 (17). P. 1281–1283.
38. **Stewart W.B.** Groups having strongly self-centralizing 3-centralizers // Proc. London Math. Soc. 1973. Vol. 426, no. 4. P. 653–680.
39. **Suzuki M.** Finite groups with nilpotent centralizer // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 99. P. 425–470.
40. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Ver. 4.4.12. 2008. URL: http://www.gap-system.org .
41. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
42. **White D.L.** The 2-Decomposition numbers of $Sp(4,q)$, q odd // J. Algebra. 1990. Vol. 131, no. 2. P. 703–725.
43. **Zhang L.C., Shi W.J.** OD-Characterization of simple K_4-groups // Algebra Colloquium. 2009. Vol. 16, no. 2. P. 275–282.
44. **Zurek G.** Über A_5-invariante 2-Gruppen // Mitt. Math. Sem. Giessen. 1982. H. 155. 92 S.

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Поступила 30.04.2010

Храмцов Игорь Владимирович
аспирант
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: ihramtsov@gmail.com