В. С. Монахов, Е. В. Зубей, О перестановочности силовской подгруппы с подгруппами Шмидта из некоторого ее добавления, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2018, том 24, номер 3, 145–154

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-145-154

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 512.542

О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ СИЛОВСКОЙ ПОДГРУППЫ С ПОДГРУППАМИ ШМИДТА ИЗ НЕКОТОРОГО ЕЕ ДОБАВЛЕНИЯ

В. С. Монахов, Е. В. Зубей

Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Добавлением к подгруппе A в группе G называется подгруппа B такая, что $G = AB$. Конечные группы, в которых силовская подгруппа перестановочна с некоторыми подгруппами Шмидта, исследовались в работах Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика (Сиб. мат. журнал. 1967. Т. 8, № 4. С. 741–753), В. Н. Княгиной и В. С. Монахова (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3, С. 130–139). В этой ситуации группа может быть неразрешимой. Например, в группах $Sz(8)$, $PSU(5,4)$, $PSU(4,2)$, $PSp(4,4)$ вообще нет подгрупп Шмидта нечетного порядка, поэтому в этих группах любая силовская подгруппа перестановочна с любой подгруппой Шмидта нечетного порядка. В данной работе устанавливается r-разрешимость конечной группы G при условии, что нечетное r не является числом Ферма и силовская r-подгруппа R перестановочна с 2-нильпотентными (или 2-замкнутыми) подгруппами Шмидта четного порядка из некоторого добавления к R в G. Приведены примеры, показывающие, что ограничения на r не являются лишними.

Ключевые слова: конечная группа, группа Шмидта, r-разрешимая группа, силовская r-подгруппа.

V. S. Monakhov, E. V. Zubei. On the permutability of a Sylow subgroup with Schmidt subgroups from a supplement.

A Schmidt group is a finite nonnilpotent group each of whose proper subgroups is nilpotent. A supplement of a subgroup A in a group G is a subgroup B of G such that $G = AB$. Finite groups in which a Sylow subgroup is permutable with some Schmidt subgroups were studied by Ya. G. Berkovich and E. M. Pal'chik (Sib. Mat. Zh. **8** (4), 741–753 (1967)) and by V. N. Knyagina and V. S. Monakhov (Proc. Steklov Inst. Math. **272** (Suppl. 1), S55–S64 (2011)). In this situation, the group may be nonsolvable. For example, in the group PSL(2,7) a Sylow 2-subgroup is permutable with all Shmidt subgroups of odd order. In the group SL(2,8) a Sylow 3-subgroup is permutable with all 2-closed Shmidt subgroups of even order. In the group SL(2,4) a Sylow 5-subgroup is permutable with every 2-closed Shmidt subgroup of even order. Since the groups $\mathrm{Sz}(2^{2k+1})$ for $k \geq 1$, PSU(5,4), PSU(4,2), and $\mathrm{PSp}(4, 2^n)$ do not contain Shmidt subgroups of odd order, in these groups any Sylow subgroup is permutable with any Shmidt subgroup of odd order. We establish the r-solvability a finite group G such that r is odd and is not a Fermat prime and a Sylow r-subgroup R is permutable with 2-nilpotent (or 2-closed) Schmidt subgroups of even order from some supplement of R in G. We give examples showing that the constraints on r are not superfluous.

Keywords: finite group, Schmidt group, r-solvable group, Sylow r-subgroup.

MSC: MSC20D10, MSC20D20, MSC20D25, MSC20D40

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-145-154

Введение

Рассматриваются только конечные группы. *Группой Шмидта* называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Начало изучения таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [1], в которой доказано, что группа Шмидта бипримарна (т. е. ее порядок делится точно на два различных простых числа), одна из силовских подгрупп нормальна, другая циклическая, и указана система индексов главного ряда группы Шмидта. Обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп приведен в [2].

Одной из первых работ, посвященных перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта, является статья Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [3]. В ней устанавливались признаки разрешимости группы, в которой некоторые подгруппы Шмидта четного порядка перестановочны с отдельными силовскими подгруппами.

В общем случае существуют простые группы, в которых для некоторого простого r силовская r-подгруппа перестановочна с r'-подгруппами Шмидта. Например, в группе $PSL(2,7)$ силовская 2-подгруппа перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка. В группе $SL(2,8)$ силовская 3-подгруппа перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка. В группе $SL(2,4)$ силовская 5-подгруппа перестановочна с каждой 2-замкнутой подгруппой Шмидта четного порядка. В следующих группах вообще нет подгрупп Шмидта нечетного порядка: $PSL(2,p)$, где p — простое число Ферма, $PSL(2,9)$, $Sz(8)$, $PSU(5,4)$, $PSU(4,2)$, $PSp(4,4)$. Поэтому в этих группах любая силовская подгруппа перестановочна с любой подгруппой Шмидта нечетного порядка.

Тем не менее при некотором выборе подгрупп Шмидта для нечетного простого r можно получать r-разрешимость группы G. В случае подгрупп Шмидта четного порядка в [4] получены следующие признаки r-разрешимости группы:

— если силовская r-подгруппа группы G перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка, то группа G r-разрешима [4, теорема 1 (1)];

— если силовская r-подгруппа группы G перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка и $r \notin \{3,5\}$, то группа G r-разрешима [4, теорема 1 (2)].

Ограничение $r \notin \{3,5\}$ отбросить нельзя. Примерами служат группы $SL(2,8)$ и $SL(2,4)$.

В настоящей работе получены новые признаки r-разрешимости группы G, а именно, доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть R — силовская r-подгруппа группы G, где $r > 2$ и r не является простым числом Ферма. Если существует в группе G подгруппа B такая, что $G = RB$ и R перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка из B, то группа G r-разрешима.*

Теорема 2. *Пусть R — силовская r-подгруппа группы G, где $r > 5$. Если существует подгруппа B такая, что $G = RB$ и R перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка из B, то группа G r-разрешима.*

Следствие. *Пусть R — силовская r-подгруппа группы G, где $r > 5$. Если существует подгруппа B такая, что $G = RB$ и R перестановочна со всеми подгруппами Шмидта четного порядка из B, то группа G r-разрешима.*

1. Используемые обозначения и результаты

Все обозначения и используемые определения соответствуют [5; 6].

Пусть r — простое число. Группа с нормальной силовской r-подгруппой называется *r-замкнутой.* Группа, содержащая нормальную подгруппу, индекс который совпадает с порядком силовской r-подгруппы, называется *r-нильпотентной.* Через $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются центр, подгруппа Фиттинга и подгруппа Фраттини группы G соответственно, а H^G — наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащая подгруппу H. Симметрическая и знакопеременная группы степени n обозначаются через S_n и A_n; циклическая и элементарная абелева группы порядков m и p^t обозначаются через Z_m и E_{p^t} соответственно, $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G. Если $|\pi(G)| = 1$, то группа G называется *примарной*, при $|\pi(G)| = 2$ — *бипримарной.* Если $\pi \subseteq \pi(G)$, то $\pi' = \pi(G) \setminus \pi$. Запись $N \lhd G$ ($N \cdot\!\lhd G$) означает, что N — нормальная (минимальная нормальная) в G подгруппа. Полупрямое произведение нормальной в G подгруппы A и подгруппы B записывается так: $G = [A]B$.

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \le G_1 \le \ldots \le G_m = G, \tag{1}$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех $i = 0, 1, \ldots, m$. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются *факторами* этого ряда. Группа называется *r-разрешимой*, если существует ряд (1) такой, что порядки факторов этого ряда либо являются степенями r, либо не делятся на r. Ряд (1) называется *главным*, если G_{i+1}/G_i — минимальная нормальная подгруппа группы G/G_i для каждого i, а числа $|G_{i+1}/G_i|$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, — индексами главного ряда.

В следующей лемме приведены свойства групп Шмидта, полученные самим О. Ю. Шмидтом в 1924 г.

Лемма 1 [1]. *Пусть S — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $S = [P]Q$, *где P — нормальная силовская p-подгруппа, Q — ненормальная силовская q-подгруппа, p и q — различные простые числа*;

(2) $Q = \langle y \rangle$ — *циклическая подгруппа и* $y^q \in Z(S)$;

(3) $|P/P'| = p^m$, *где m — показатель числа p по модулю q*;

(4) *главный ряд группы S имеет систему индексов*:

$$p, p, \ldots, p, p^m, q, \ldots, q,$$

число индексов, равных p, совпадает с n, где $p^n = |P'|$; число индексов, равных q, совпадает с b, где $q^b = |Q|$.

Условимся $S_{\langle p,q \rangle}$-*группой* называть группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой.

Лемма 2 [7, лемма 1]. *Если K и D — подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и K/D — $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами*:

(1) L — *p-замкнутая $\{p, q\}$-подгруппа*;

(2) *все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны*;

(3) *L содержит $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в D и*

$$L = ([P]Q)^L = Q^L.$$

Определение. Подгруппа A группы G называется $OS_{\langle p,q \rangle}$-*полунормальной в* G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и A перестановочна со всеми $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппами из B. В этой ситуации подгруппу B будем называть $OS_{\langle p,q \rangle}$-*добавлением* к подгруппе A в группе G. Если подгруппа A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B, то будем называть подгруппу A OS-полунормальной в G. (Обозначение OS связано с Отто Юльевичем Шмидтом.)

Понятие OS-полунормальной подгруппы является обобщением понятия полунормальной подгруппы. Напомним, что подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AB_1 — собственная в G подгруппа для каждой собственной подгруппы B_1 из B. Отдельные свойства полунормальных подгрупп получены в [8–11]. В работе [7] изучены группы с полунормальными подгруппами Шмидта.

Пример 1. Если A — подгруппа группы G и существует нильпотентная подгруппа B такая, что $G = AB$, то A будет OS-полунормальной подгруппой группы G. В частности, любая подгруппа примарного индекса является OS-полунормальной подгруппой.

Пример 2. В группе $PSL(2,7)$ силовская 2-подгруппа Q будет $OS_{\langle 7,3 \rangle}$-полунормальной, поскольку существует нециклическая подгруппа B порядка 21 и $G = QB$. Подгруппа B является группой Шмидта.

Пример 3. В группе $SL(2,8)$ силовская 3-подгруппа R будет $OS_{\langle 2,7 \rangle}$-полунормальной, поскольку существует подгруппа Шмидта $B = [E_{2^3}]Z_7$ такая, что $G = RB$.

Пример 4. В группе $PSL(2,5)$ силовская 5-подгруппа P будет $OS_{\langle 2,3 \rangle}$-полунормальной, поскольку существует подгруппа $B \cong A_4$ такая, что $PSL(2,5) = PB$. Здесь A_4 — знакопеременная группа, она является группой Шмидта.

Отметим, что в примерах 2–4 силовская r-подгруппа, $r \in \{2, 3, 5\}$, OS-полунормальна, но не полунормальна.

Лемма 3. *Пусть A — $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа группы G и B — ее некоторое $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление.*

(1) *Для любого элемента $g \in G$ подгруппа B^g будет $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлением к подгруппе A в группе G.*

(2) *Для любого элемента $g \in G$ подгруппа A^g будет $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальной в группе G, а подгруппы B и B^g — ее $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлениями.*

(3) *Если X — непустое множество элементов из группы G, то подгруппа $A^X = \langle A^x \mid x \in X\rangle$ будет $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальной в группе G, а подгруппы B и B^g, $g \in G$, будут $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлениями к A^X в G.*

Доказательство. 1. Пусть $g = ba$ — произвольный элемент из группы G, где $b \in B, a \in A$. Ввиду изоморфизма $B \cong B^g$ можно считать, что $S^g = S^{ba}$ — произвольная $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из B^g, где S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа в B. Поскольку $S^b \leq B$, то

$$AS^b = S^bA, \quad AS^g = AS^{ba} = (AS^b)^a = (S^bA)^a = S^{ba}A = S^gA.$$

Это означает, что B^g — $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление к A в группе G.

2. Если T — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа в B^g, то $T = S^g$ для некоторой $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппы S из B. По условию $AS = SA$, поэтому

$$A^gT = A^gS^g = (AS)^g = (SA)^g = S^gA^g = TA^g.$$

Так как $A^gB^g = (AB)^g = G$, то A^g — $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа в G и B^g — ее $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление. Из утверждения (1) следует, что $(B^g)^{g^{-1}} = B$ будет $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлением к A^g в группе G.

3. Хорошо известно, что подгруппа, перестановочная с несколькими подгруппами, перестановочна с их порождением. Пусть S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из B. Подгруппа S перестановочна с A согласно определению $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальной подгруппы и S перестановочна с A^x по утверждению (2) для любого $x \in X$. Поэтому S перестановочна с A^X. Следовательно, A^X — $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа группы G и B — ее $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление. По утверждению (2) подгруппа B^g, $g \in G$, будет $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлением к A^X. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть A — $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа группы G и B — ее некоторое $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление.*

(1) *Если $A \leq U \leq G$, то A $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальна в U и $U \cap B$ — $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление к A в группе U.*

(2) *Если $N \lhd G$, то AN $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальна в G и B является $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлением к AN в G.*

(3) *Если $N \lhd G$, $N \leq B$, то AN/N — $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальна в G/N и B/N является $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлением к AN/N в G/N.*

(4) *Если $N \lhd G$, $(|N|, |B|) = 1$, то A/N $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальна в G/N и BN/N является $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлением к A/N в G/N.*

Доказательство. (1) Поскольку A — $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа группы G и B — ее $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление, то $G = AB$ и A перестановочна со всеми $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппами из B. По тождеству Дедекинда $U = A(B \cap U)$. Поскольку A перестановочна со всеми $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппами из $B \cap U \leq B$, то A — $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа в U и $B \cap U$ — ее $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление.

(2) Нормальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой. Поскольку $G = (AN)B$ и AN перестановочна с любой $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой из B, то AN — $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальная подгруппа группы G и B ее $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление.

(3) Ясно, что $G/N = (AN/N)(B/N)$. Пусть D/N — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из B/N и L — минимальное добавление к N в D. По лемме 2 подгруппа L содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу S такую,

что $S^L = L$. Так как $S \leq L \leq D \leq B$, то A перестановочна с S. Из леммы 3 (1) следует, что A перестановочна с S^x для любого $x \in G$. Поэтому A перестановочна с $S^L = L$ и с $LN = D$. Следовательно, AN/N перестановочна с D/N, т. е. AN/N $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальна в G/N и B/N будет $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавлением к AN/N в G/N.

(4) Так как $G = AB$ и $(|N|, |B|) = 1$, то $N \leq A$ и $G/N = (A/N)(BN/N)$. Поскольку $N \cap B = 1$, то $BN = B[N]$. Пусть D/N — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из BN/N. Тогда $D = (B \cap D)[N]$. По лемме 2 существует $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа S в $B \cap D$ такая, что $S^{B\cap D} = B \cap D$. Так как $S \cong SN/N \leq D/N$, то $S = B \cap D$. Теперь A перестановочна с $B \cap D$ по условию, поэтому A/N перестановочна с $(B \cap D)N/N$, т. е. A/N $OS_{\langle p,q\rangle}$-полунормальна в G/N и BN/N ее $OS_{\langle p,q\rangle}$-добавление. Лемма доказана.

Лемма 5. (1) *Каждая не p-нильпотентная группа G содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу для некоторого $q \in \pi(G)$,* [5, IV.5.4].

(2) *Каждая не 2-замкнутая группа G содержит $S_{\langle q,2\rangle}$-подгруппу для некоторого $q \in \pi(G)$,* [12, с. 34; 13, следствие 3.1.1].

П р и м е р 5. Аналог утверждения 2 леммы 5 при замене числа 2 на нечетное простое p неверен. Для $p = 3$ контрпримером служит простая группа $SL(2, 2^n)$ при любом нечетном $n > 2$, а для $p \geq 5$ — группа $PSL(2, p)$.

Лемма 6 [5, VI.4.10]. *Пусть A и B — подгруппы группы G такие, что $G \neq AB$ и $AB^g = B^g A$ для всех $g \in G$. Тогда либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$.*

2. Группы с разрешимой r'-холловой подгруппой

Факторизации групп $PSL(2, q)$ получены в [14], они выписаны также в [15, теорема 0.8]. Приведем формулировку этого результата. Будут использоваться следующие обозначения: Z_m, E_m и D_m — циклическая, элементарная абелева и диэдральная группы порядка m.

Лемма 7. *Простая группа $PSL(2, p^n)$ обладает только следующими нетривиальными факторизациями.*

(1) *$PSL(2, 2^n) = AB$, $A \cong [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$, $B \cong D_{2(2^n+1)}$ или $B \cong Z_{2^n+1}$.*

(2) *Если $p > 2$ и $(p^n - 1)/2$ — нечетное число, то $PSL(2, p^n) = AB$, $A \cong [E_{p^n}]Z_{(p^n-1)/2}$, $B \cong D_{p^n+1}$.*

(3) *$PSL(2, 7) = AB$, либо $A \cong [Z_7]Z_3$, $B \cong D_8$ или $B \cong S_4$, либо $A \cong Z_7$, $B \cong S_4$.*

(4) *$PSL(2, 9) = AB$, либо $A \cong [E_9]Z_4$, $B \cong A_5$, либо $A \cong A_4$, $B \cong A_5$, либо $A \cong S_4$, $B \cong A_5$, либо $A \cong B \cong A_5$.*

(5) *$PSL(2, 11) = AB$, либо $A \cong [Z_{11}]Z_5$, $B \cong D_{12}, A_4, A_5$, либо $A \cong Z_{11}$, $B \cong A_5$.*

(6) *$PSL(2, 19) = AB$, $A \cong [Z_{19}]Z_9$, $B \cong D_{20}$ или $B \cong A_5$.*

(7) *$PSL(2, 29) = AB$, либо $A \cong [Z_{29}]Z_{14}$, $B \cong A_5$, либо $A \cong [Z_{29}]Z_7$, $B \cong A_5$.*

(8) *$PSL(2, 59) = AB$, $A \cong [Z_{59}]Z_{29}$, $B \cong D_{60}$ или $B \cong A_5$.*

Лемма 8 [16, Theorem 1.1]. *Пусть A и B — разрешимые подгруппы группы G и пусть $(|A|, |B|) = 1$. Если $G = AB$, то композиционные факторы группы G являются группами одного из следующих видов*:

(1) *группа простого порядка*;

(2) *$PSL(2, 2^n)$, где $n \geq 2$*;

(3) *$PSL(2, q)$, где $q \equiv -1 \pmod 4$*;

(4) *$PSL(3, 3)$*;

(5) *M_{11}*.

Отметим, что без требования $(|A|, |B|) = 1$ композиционные факторы группы $G = AB$ с разрешимыми подгруппами A и B перечислил Л. С. Казарин [17].

Из леммы 8 с помощью леммы 7 и списка максимальных подгрупп в $PSL(3,3)$ и M_{11} [18] получается следующий результат.

Лемма 9. *Пусть в простой группе G существует разрешимая p'-холлова подгруппа, $p \in \pi(G)$.*

(1) *Если $p = 2$, то $G \cong PSL(2,r) = AB$, $A \cong [Z_r]Z_{(r-1)/2}$, $B \cong D_{2^n}$, где $r = 2^n - 1 \geq 7$.*

(2) *Если $p = 3$, то $G \cong PSL(2,2^3) = AB$, $A \cong [E_8]Z_7$, $B \cong Z_9$.*

(3) *Если $p = 5$, то $G \cong A_5 = AB$, $A \cong A_4$, $B \cong Z_5$.*

(4) *Если $p = 7$, то $G \cong PSL(2,7) = AB$, $A \cong S_4$, $B \cong Z_7$.*

(5) *Если $p = 17$, то $G \cong PSL(2,2^4) = AB$, $A \cong [E_{2^4}]Z_{15}$, $B \cong Z_{17}$ или $G \cong PSL(3,3) = AB$, $A \cong [E_9]GL(2,3)$, $B \cong Z_{17}$ (имеется два класса сопряженных подгрупп, изоморфных $[E_9]GL(2,3)$).*

(6) *Если $p > 7$, $p \neq 17$, то $p = 2^n + 1$ — простое число Ферма и $G \cong PSL(2,2^n) = AB$, $A \cong [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$, $B \cong Z_p$.*

Лемма 10. *Пусть p — нечетное простое число и p не является числом Ферма. Если в группе G существует 2-замкнутая p'-холлова подгруппа, то G разрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Пусть P — силовская p-подгруппа, H — p'-холлова подгруппа группы G. Тогда $G = PH$ и по условию $H = [Q]K$ — 2-замкнута, где Q — силовская 2-подгруппа, K — $\{2,p\}'$-холлова подгруппа группы G. Пусть N — минимальная нормальная в G подгруппа. Так как $(|P|, |H|) = 1$, по [19, лемма 5] $N = (N \cap P)(N \cap H)$, подгруппа N удовлетворяет условиям доказываемой леммы. Если $N < G$, то по индукции N разрешима. Так как фактор-группа G/N тоже удовлетворяет условиям доказываемой леммы, то G/N разрешима по индукции. Значит, G разрешима. Теперь считаем, что $G = N$ — простая группа. Поскольку p'-холлова подгруппа H разрешима, то применима лемма 9, по которой p — простое число Ферма. Противоречие. Лемма доказана.

3. Достаточные условия r-разрешимости группы

Теорема 1. *Пусть R — силовская r-подгруппа группы G, где $r > 2$ и r не является простым числом Ферма. Если существует в группе G подгруппа B такая, что $G = RB$ и R перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка из B, то группа G r-разрешима.*

Доказательство. Пусть в группе G существует подгруппа B такая, что $G = RB$ и R перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка из B. Подгруппа R становится $OS_{\langle p,2\rangle}$-полунормальной для каждого нечетного $p \in \pi(B)$, и она обладает свойствами, перечисленными в лемме 4.

Воспользуемся индукцией по $|G| + |B|$. Проверим, что

(1) B — собственная подгруппа группы G.

По условию R перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка из B. Если $B = G$, то G r-разрешима по [4, теорема 1(1)]. Поэтому считаем, что $B < G$.

(2) Порядок B не делится на r.

Рассмотрим силовскую r-подгруппу B_r из B. По лемме 3 (2) можно считать, что $B_r \leq R$. Пусть S — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из B. По условию $RS = SR$. По тождеству Дедекинда

$$B \cap RS = (B \cap R)S = B_rS = S(B \cap R) = SB_r.$$

По [4, теорема 1(1)] B r-разрешима. Теперь $G = RB_{r'}$ и B — r'-холлова подгруппа группы G.

(3) Подгруппа B не 2-замкнута по лемме 10.

(4) Группа G непростая.

Предположим, что G — простая группа. Так как B — не 2-замкнутая группа, то по лемме 5 (2) в ней существует 2-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта четного порядка $S = [Q]T$, T — силовская 2-подгруппа в S. Если $S = B$, то $T = G_2$ — циклическая и G разрешима. Значит, $S < B$. Рассмотрим произвольный элемент $g = ba$ из G, где $b \in B$, $a \in R$. Ввиду изоморфизма $B^g \cong B$ можно считать, что $S^g = S^{ba}$ — произвольная 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из B^g. Поскольку $S^b \leq B$, то

$$RS^b = S^bR, \quad RS^g = RS^{ba} = (RS^b)^a = (S^bR)^a = S^{ba}R = S^gR$$

для любого $g \in G$. Так как G — простая группа, то $R^G = S^G = G$ и $B = S$ по лемме 6. Противоречие.

(5) Если $N \cdot\!\lhd G$, то либо $N \leq R$, либо $N \leq B$.

Согласно (2) и [19, лемма 5] $N = (N \cap R)(N \cap B)$. Пусть S — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из $N \cap B$. Тогда $S \leq B$ и $RS = SR$ по условию. По тождеству Дедекинда

$$N \cap RS = (N \cap R)S = S(N \cap R).$$

Так как $N \cap R$ — силовская r-подгруппа в N и она удовлетворяет условию теоремы, то по индукции N r-разрешима. Теперь N — либо r-подгруппа, либо r'-подгруппа. Если N — r-подгруппа, то $N \leq R$. Если N — r'-подгруппа, то $N \leq B$.

(6) Окончание доказательства.

Если $N \leq R$, то

$$G/N = R/N(BN/N), \quad (|N|, |B|) = 1.$$

Поскольку $N \cap B = 1$, то $BN = B[N]$. Пусть S/N — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из BN/N. Тогда $S = (B \cap S)[N]$, т. е. $B \cap S$ будет минимальным дополнением к N в S. По лемме 2 существует подгруппа Шмидта L в $B \cap S$ такая, что $L^{B \cap S} = B \cap S$. Так как $LN/N \leq S/N$, то $L = B \cap S$. Теперь R перестановочна с $B \cap S$ по условию, следовательно, R/N перестановочна с $(B \cap S)N/N = S/N$ и по индукции G/N r-разрешима.

Если $N \leq B$, то $G/N = (RN/N)B/N$. Пусть S/N — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из B/N и L — минимальное добавление к N в S. По лемме 2 подгруппа L содержит 2-нильпотентную подгруппу Шмидта четного порядка D такую, что $D^L = L$. Так как $D \leq L \leq S \leq B$, то R перестановочна с D. Из леммы 3 (2) следует, что R перестановочна с D^x для любого $x \in G$. Поэтому R перестановочна с $D^L = L$ и с $LN = S$. Следовательно, RN/N перестановочна с S/N. По индукции G/N r-разрешима.

Получаем, что в любом случае G/N r-разрешима. Из (5) следует, что G r-разрешима. Теорема доказана.

Заметим, что в формулировке теоремы 1 требования “$r > 2$ и r не является простым числом Ферма” убрать нельзя. Для $r = 2$ примером служит группа $PSL(2,7)$, для $r = 3$ — группа $SL(2,8)$, для $r = 2^n + 1 > 3$ — группа $SL(2,2^n)$.

Теорема 2. *Пусть R — силовская r-подгруппа группы G, где $r > 5$. Если существует подгруппа B такая, что $G = RB$ и R перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка из B, то группа G r-разрешима.*

Доказательство. Пусть R — силовская r-подгруппа группы G. Предположим, что существует подгруппа B такая, что $G = RB$ и подгруппа R перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта из B. Подгруппа R становится $OS_{\langle 2,p\rangle}$-полунормальной для каждого нечетного $p \in \pi(B)$, и она обладает свойствами, перечисленными в лемме 4.

Если $B = G$, то G r-разрешима [4, теорема 1(2)]. Поэтому считаем, что $B < G$, и используем индукцию по $|G|+|B|$. Используя [4, теорема 1(2)] и повторяя доказательство утверждаения (2) теоремы 1, получаем, что

(1) B — r'-подгруппа;

(2) B не 2-нильпотентна по [9, теорема A];

(3) группа G непростая.

Предположим, что G — простая группа. Так как B не 2-нильпотентная группа, то по лемме 5 (1) в ней существует 2-замкнутая $2d$-подгруппа Шмидта S четного порядка. Рассмотрим произвольный элемент $g = ba$ из G, где $b \in B$, $a \in R$. Ввиду изоморфизма $B^g \cong B$ можно считать, что $S^g = S^{ba}$ — произвольная 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка из B^g. Поскольку $S^b \leq B$, то

$$RS^b = S^bR, \quad RS^g = RS^{ba} = (RS^b)^a = (S^bR)^a = S^{ba}R = S^gR$$

для любого $g \in G$. Так как G — простая группа, то $R^G = S^G = G$ и $B = S$ по лемме 6. По [4, лемма 11] $G \cong PSL(2,5)$ или $SL(2,8)$, где $3 \leq r \leq 5$, противоречие. Следовательно, G — непростая группа.

(4) Если $N \cdot\!\lhd G$, то либо $N \leq R$, либо $N \leq B$.

Согласно [19, лемма 5] $N = (N \cap R)(N \cap B)$. Пусть S — 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка из $N \cap B$. Тогда $S \leq B$ и $RS = SR$ по условию. По тождеству Дедекинда

$$N \cap RS = (N \cap R)S = S(N \cap R).$$

Так как $N \cap R$ — силовская r-подгруппа в N и она удовлетворяет условию теоремы, то по индукции N r-разрешима. Теперь N — либо r-подгруппа, либо r'-подгруппа. Если N — r-подгруппа, то $N \leq R$. Если N — r'-подгруппа, то $N \leq B$.

(5) Окончание доказательства.

Если $N \leq R$, то $G/N = R/N(BN/N)$ и $(|N|, |B|) = 1$. Поскольку $N \cap B = 1$, то $BN = B[N]$. Пусть S/N — 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка из BN/N. Тогда $S = (B \cap S)[N]$, т. е. $B \cap S$ будет минимальным дополнением к N в S. По лемме 2 существует подгруппа Шмидта L в $B \cap S$ такая, что $L^{B\cap S} = B \cap S$. Так как $LN/N \leq S/N$, то $L = B \cap S$. Теперь R перестановочна с $B \cap S$ по условию, следовательно, R/N перестановочна с $(B \cap S)N/N = S/N$ и по индукции G/N r-разрешима.

Если $N \leq B$, то $G/N = (RN/N)B/N$. Пусть S/N — 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка из B/N и L — минимальное добавление к N в S. По лемме 2 подгруппа L содержит 2-замкнутую подгруппу Шмидта D такую, что $D^L = L$. Так как $D \leq L \leq S \leq B$, то R перестановочна с D. Из леммы 3 (1) следует, что R перестановочна с D^x для любого $x \in G$. Поэтому R перестановочна с $D^L = L$ и с $LN = S$. Следовательно, RN/N перестановочна с S/N. По индукции G/N r-разрешима.

Получаем, что в любом случае G/N r-разрешима. Из (4) следует, что G r-разрешима. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть R — силовская r-подгруппа группы G, где $r > 5$. Если существует подгруппа B такая, что $G = RB$ и R перестановочна со всеми подгруппами Шмидта четного порядка из B, то группа G r разрешима.*

Заметим, что в формулировке теоремы 2 требования “$r > 5$” убрать нельзя. Для $r = 2$ примером служит группа $PSL(2,7)$, для $r = 3$ — группа $SL(2,8)$, для $r = 5$ — группа $SL(2,4)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шмидт О. Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.
2. **Монахов В. С.** Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Тр. Укр. мат. конгресса (2001) / Ин-т математики НАНУ. Киев, 2002. Сек. 1. С. 81–90.

3. **Беркович Я. Г., Пальчик Э. М.** О перестановочности подгрупп конечной группы // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 4. С. 741–753.
4. **Княгина В. Н., Монахов В. С.** О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3, С. 130–139.
5. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer, 1967. 793 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3 .
6. **Монахов В. С.** Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
7. **Княгина В. Н., Монахов В. С.** Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 4. С. 448–458.
8. **Su X.** On seminormal subgroups of finite group // J. Math. (Wuhan). 1988. Vol. 8, no. 1. P. 7–9.
9. **Carocca A., Matos H.** Some solvability criteria for finite groups // Hokkaido Math. J. 1997. Vol. 26, no. 1. P. 157–161. doi: 10.14492/hokmj/1351257811 .
10. **Подгорная В. В.** Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.–матэм. навук. 2000. № 4. С. 22–25.
11. **Монахов В. С.** Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой // Мат. зам. 2006. Т. 80, № 4. С. 573–581.
12. **Беркович Я. Г.** Теорема о ненильпотентных разрешимых подгруппах конечной группы // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1966. С. 24–39. ISBN: 978-5-458-54866-3 .
13. **Монахов В. С.** О подгруппах Шмидта конечных групп // Вопросы алгебры. 1998. Вып. 13. С. 153–171.
14. **Ito N.** On the faktorisations of the linear fractional group $LF(2, p^n)$ // Acta Sci. Math. 1953. No. 15. P. 79–84.
15. **Монахов В. С.** Произведение конечных групп, близких к нильпотентным // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975. С. 70–100.
16. **Fisman E.** On the product of two finite solvable groups // J. Algebra. 1983. Vol. 80. P. 517–536.
17. **Казарин Л. С.** О группах, представимых в виде произведения двух разрешимых подгрупп // Commun. Algebra. 1986. Т. 14, no. 6. С. 1001–1066.
18. Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p. ISBN-10: 0198531990 .
19. **Княгина В. Н., Монахов В. С.** О π'-свойствах конечной группы, обладающей π-холловой подгруппой // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 2. С. 297–309.

Монахов Виктор Степанович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры алгебры и геометрии
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, г. Минск
e-mail: victor.monakhov@gmail.com

Поступила 27.04.2018

Зубей Екатерина Владимировна
аспирант
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, г. Минск
e-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru

REFERENCES

1. Schmidt O. Groups, all subgroups of which are special *Mat. Sb.*, 1924, vol. 31, no. 3-4, pp. 366–372 (in Russian).
2. Monakhov V.S. The Schmidt subgroups, their existence and some applications. *Proc. Ukr. Math. Congr., 2001*, Kiev, 2002, sec. 1, pp. 81–90 (in Russian).
3. Berkovich Ya.G., Pal'chik, E.M. On the commutability of subgroups of a finite group. *Sib. Math. J.*, 1967, vol. 8, no. 4, pp. 560–568. doi: 10.1007/BF02196475 .
4. Knyagina V.N., Monakhov V.S. On the permutability of Sylow subgroups with Schmidt subgroups. *Proc. Steklov Institute Math.*, 2011, vol. 272, suppl. 1, pp. 55–64. doi: 10.1134/S0081543811020052 .

5. Huppert B. *Endliche Gruppen I.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer, 1967, 793 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3 .
6. Monakhov V.S. *Vvedenie v teoriyu konechnykh grupp i ikh klassov* [Introduction to the theory of finite groups and their classes]. Minsk: Vysheishaya Shkola, 2006, 207 p. (in Russian). ISBN: 985-06-1114-6 .
7. Knyagina V.N., Monakhov V.S. Finite groups with seminormal Schmidt subgroups. *Algebra and Logic*, 2007, vol. 46, no. 4, pp. 244–249. doi: 10.1007/s10469-007-0023-1 .
8. Su X. On seminormal subgroups of finite group. *J. Math. (Wuhan)*, 1988, vol. 8, no. 1, pp. 7–9.
9. Carocca A., Matos H. Some solvability criteria for finite groups. *Hokkaido Math. J.*, 1997, vol. 26, no. 1, pp. 157–161. doi: 10.14492/hokmj/1351257811 .
10. Podgornaya V.V. Seminormal subgroups and supersolvability of finite groups. *Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk*, 2000, no. 4, pp. 22–25.
11. Monakhov V.S. Finite groups with a seminormal Hall subgroup. *Math. Notes.*, 2006, vol. 80, no. 4, pp. 542–549. doi: 10.4213/mzm2850 .
12. Berkovich Ya.G. A theorem on non-nilpotent solvable subgroups of a finite group. In: *Konechnye gruppy*, Berkovich Ya.G. (ed.), Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1966, 195 p., ISBN: 978-5-458-54866-3 , pp. 24–39 (in Russian).
13. Monakhov V.S. The Schmidt subgroups of finite groups. *Voprosy Algebry*, 1998, no. 13, pp. 153–171 (in Russian).
14. Ito N. On the faktorisations of the linear fractional group $LF(2, p^n)$. *Acta Sci. Math.*, 1953, no. 15, pp. 79–84.
15. Monakhov V.S. The product of finite groups close to nilpotent. In: *Finite Groups*, Shemetkov L.A. (ed.). Minsk: Nauka i Tekhnika Publ., 1975, pp. 70–100 (in Russian).
16. Fisman E. On the product of two finite solvable groups. *J. Algebra*, 1983, vol. 80, pp. 517–536.
17. Kazarin L.S. On groups which are the product of two solvable subgroups. *Commun. Algebra*, 1986, vol. 14, no. 6, pp. 1001–1066. doi: 10.1080/00927878608823352 .
18. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.. *Atlas of finite groups*, Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN-10: 0198531990 .
19. Knyagina V.N., Monakhov V.S. On the π'-properties of a finite group possessing a hall π-subgroup. *Sib. Math. J.*, 2011, vol. 52, no. 2, pp. 234–243. doi: 10.1134/S0037446611020066 .

The paper was received by the Editorial Office on April 27, 2018.

Viktor Stepanovich Monakhov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246019, Republic of Belarus, e-mail: victor.monakhov@gmail.com .

Ekaterina Vladimirovna Zubei, doctoral student, Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246019, Republic of Belarus, e-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru .