А. С. Кондратьев, Распознаваемость групп $E_7(2)$ и $E_7(3)$ по графу простых чисел, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2014, том 20, номер 2, 223–229

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 512.542

РАСПОЗНАВАЕМОСТЬ ГРУПП $E_7(2)$ И $E_7(3)$ ПО ГРАФУ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ[1]

А. С. Кондратьев

Доказано, что группы $E_7(2)$ и $E_7(3)$ распознаются по графу простых чисел. Как следствие, завершено положительное решение проблемы В. Д. Мазурова о том, что любая конечная простая группа, граф простых чисел которой имеет по крайней мере три компоненты связности, либо распознаваема по спектру, либо изоморфна A_6.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, спектр, граф простых чисел, распознавание по спектру или по графу простых чисел.

A. S. Kondrat'ev. Recognizability of groups $E_7(2)$ and $E_7(3)$ by prime graph.

It is proved that the groups $E_7(2)$ and $E_7(3)$ are recognized by prime graph. As corollary, it is completed the positive solution of the Mazurov's problem that every finite group whose the prime graph has at least three connected components is either reconizable by spectrum or isomorphic to A_6.

Keywords: finite group, simple group, spectrum, prime graph, recognition by spectrum or by prime graph.

Введение

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (или *граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$.

Общее строение конечных групп с несвязным графом простых чисел дается теоремой Грюнберга — Кегеля (см. [48, теорема A]). Конечные простые неабелевы группы с несвязным графом простых чисел описаны в работах Уильямса [48] и автора [11]. Результаты о конечных группах с несвязным графом Грюнберга — Кегеля нашли большое применение в теории групп.

В теории конечных групп сложилось и динамично развивается направление исследований распознаваемости конечных групп по спектру (см. обзор В. Д. Мазурова [16]) или по графу простых чисел.

Конечная группа G называется *распознаваемой по спектру* (соответственно *графу простых чисел*), если она определяется с точностью до изоморфизма в классе конечных групп своим спектром (соответственно графом простых чисел). Ясно, что из распознаваемости конечной групп по графу простых чисел следует ее распознаваемость по спектру. Первый необходимый этап решения вопроса распознаваемости конечных простых групп по спектру или графу простых чисел заключается в доказательстве условия квазираспознаваемости (которое было введено автором в [1]), более слабого, чем распознаваемость. Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой* по спектру (соответственно графу простых чисел), если любая конечная группа G с условием $\omega(G) = \omega(P)$ (соответственно $\Gamma(G) = \Gamma(P)$) имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен P.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009) и в рамках проекта повышения конкурентоспособности (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006).

В двух работах О. А. Алексеевой и автора [2; 3] была доказана квазираспознаваемость по спектру конечных простых групп, отличных от группы A_6, граф Грюнберга — Кегеля которых имеет по крайней мере три компоненты связности. Известно, что группа A_6 не квазираспознаваема по спектру. В [16] В. Д. Мазуров поставил следующий вопрос: *верно ли, что любая конечная простая группа G с условием $s(G) \geq 3$, не изоморфная A_6, распознаваема по спектру?*

В работах разных авторов, начиная с 1983 г. (см. [2–5; 9; 10; 12–15; 17; 18; 22–24; 26; 27; 30–46]), был получен положительный ответ на этот вопрос для всех конечных простых групп G с условием $s(G) \geq 3$, кроме исключительных групп $E_7(2)$ и $E_7(3)$.

В данной работе делается завершающий шаг положительного ответа на вопрос В. Д. Мазурова. Этот шаг вытекает из следующего более сильного результата.

Теорема. *Группы $E_7(2)$ и $E_7(3)$ распознаваемы по графу простых чисел.*

1. Обозначения, терминология и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [19; 20; 28]. Если n — натуральное число и p — простое число, то через n_p, $\pi(n)$ и $\tau(n)$ обозначаются соответственно p-часть числа n, множество всех простых делителей числа n и множество всех простых чисел s таких, что $n/2 < s \leq n$.

Пусть G — конечная группа. Ее спектр $\omega(G)$ частично упорядочен относительно делимости и однозначно определяется подмножеством $\mu(G)$ своих максимальных элементов. Обозначим множество связных компонент графа $\Gamma(G)$ через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s(G)\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$. Положим $\pi(G) = \pi(|G|)$ и $\mu_i(G) = \{n \in \mu(G) \mid \pi(n) \subseteq \pi_i(G)\}$ для $1 \leq i \leq s(G)$.

Множество попарно не смежных вершин графа называется его *кокликой*. Обозначим через $t(G)$ наибольшую из мощностей коклик графа $\Gamma(G)$, а через $t(r, G)$ — наибольшую из мощностей коклик графа $\Gamma(G)$, содержащих простое число r.

Рассмотрим некоторые результаты, которые используются в доказательстве теоремы.

Лемма 1 (теорема Грюнберга — Кегеля [48, Theorem A]). *Для группы G с несвязным графом $\Gamma(G)$ верно одно из следующих утверждений*:

(а) *G — группа Фробениуса*;

(б) *G — 2-фробениусова группа, т. е. $G = ABC$, где A, AB — нормальные подгруппы группы G, а AB, BC — группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно*;

(в) *G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$-группы посредством группы A, где $Inn(P) \leq A \leq \mathrm{Aut}(P)$, P — простая неабелева группа с условием $s(G) \leq s(P)$ и $A/Inn(P)$ — $\pi_1(G)$-группа.*

Лемма 2 [11; 48; 13, лемма 4]. *Пусть P — конечная простая группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Тогда*

(а) *$|\mu_i(P)| = 1$ для $i > 1$, ниже $n_i(P)$ обозначает единственный элемент из $\mu_i(P)$ для $i > 1$*;

(б) *P и $n_i(P)$ для $2 \leq i \leq s(P)$ и $s(P) \geq 3$ указаны в приведенной ниже таблице.*

Из лемм 1 и 2 следует

Лемма 3. *Пусть G — конечная группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля, не изоморфная группе Фробениуса или 2-фробениусовой группе, и P — неабелев композиционный фактор в G. Тогда для каждого $i \in \{2, \ldots, s(G)\}$ существует $j \in \{2, \ldots, s(P)\}$ такое, что $n_i(G) = n_j(P)$.*

Лемма 4 (теорема Васильева [6]). *Пусть G — конечная группа, для которой $t(G) \geq 3$ и $t(2, G) \geq 2$. Тогда G является расширением разрешимой группы K посредством группы A*

такой, что $Inn(P) \leq A \leq \mathrm{Aut}(P)$, *где* P — *простая неабелева группа с условием* $t(P) \geq t(G) - 1$. *Кроме того, верно одно из следующих утверждений*:

(а) P *изоморфна* A_7 *или* $L_2(q)$ *для некоторого нечетного числа* q *и* $t(P) = t(2, P) = 3$;

(б) *для каждого простого числа* $r \in \pi(G)$, *не смежного с* 2 *в* $\mathrm{GK}(G)$, *силовская* r-*подгруппа группы* G *изоморфна силовской* r-*подгруппе группы* P *и, в частности,* $t(2, P) \geq t(2, G)$.

Лемма 5 [7; 8]. *Пусть* P — *конечная простая группа с* $s(P) \geq 3$. *Тогда ее параметры* $t(P)$ *и* $t(2, P)$ *такие, как в таблице.*

Лемма 6 (теорема Жигмонди [21; 49]). *Пусть* $q \geq 2$ *и* $n \geq 3$ — *натуральные числа. Если* $(q, n) \neq (2, 6)$, *то существует простое число, делящее* $q^n - 1$ *и не делящее* $q^i - 1$ *при любом натуральном* $i < n$.

Параметры простых групп P с $s(P) \geq 3$

P	Ограничения на P	$t(P)$	$t(2,P)$	$n_2(P), \ldots, n_{s(P)}(P)$
A_n	$n > 6$, n и $n-2$ просты	$\lvert\tau(n)\rvert + 1$	3	$n,\ n-2$
$A_1(q)$	$3 < q \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$, $\varepsilon = \pm$	3	3	$char(GF(q)),\ (q+\varepsilon 1)/2$
$A_1(q)$	$q > 2$, q четно	3	3	$q-1,\ q+1$
${}^2A_5(2)$		3	3	$7,\ 11$
${}^2D_p(3)$	$p = 2^m + 1 \geq 3$, p просто	$[(3p+4)/4]$	2	$(3^{p-1}+1)/2,\ (3^p+1)/4$
$G_2(q)$	$q \equiv 0 \pmod 3$	3	3	$q^2-q+1,\ q^2+q+1$
${}^2G_2(q)$	$q = 3^{2m+1} > 3$	5	3	$q-\sqrt{3q}+1,\ q+\sqrt{3q}+1$
$F_4(2)$		4	3	$13, 17$
$F_4(q)$	$q > 2$ четно	5	3	$q^4-q^2+1,\ q^4+1$
${}^2F_4(8)$		4	4	$37,\ 109$
${}^2F_4(q)$	$q = 2^{2m+1} > 8$	5	4	$q^2-\sqrt{2q^3}+q-\sqrt{2q}+1,$ $q^2+\sqrt{2q^3}+q+\sqrt{2q}+1$
$E_7(2)$		8	5	$73,\ 127$
$E_7(3)$		8	3	$757,\ 1093$
M_{11}		3	3	$5,\ 11$
M_{23}		4	4	$11,\ 23$
M_{24}		4	3	$11,\ 23$
J_3		3	3	$17,\ 19$
HiS		4	3	$7,\ 11$
Suz		4	3	$11,\ 13$
Co_2		4	3	$11,\ 23$
Fi_{23}		5	3	$17,\ 23$
F_3		5	4	$19,\ 31$
F_2		8	3	$31,\ 47$
$A_2(4)$		4	4	$3,\ 5,\ 7$
${}^2B_2(q)$	$q = 2^{2m+1} > 3$	4	4	$q-1,\ q-\sqrt{3q}+1,\ q+\sqrt{3q}+1$
${}^2E_6(2)$		5	4	$13,\ 17,\ 19$
$E_8(q)$	$q \equiv 2, 3 \pmod 4$	12	5	$\frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1},\ q^8-q^4+1,\ \frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1}$
M_{22}		4	4	$5,\ 7,\ 11$
J_1		4	4	$7,\ 11,\ 19$
$O'N$		5	4	$11,\ 19,\ 31$
LyS		6	4	$31,\ 37,\ 67$
Fi'_{24}		6	4	$17,\ 23,\ 29$
F_1		11	5	$41,\ 59,\ 71$
$E_8(q)$	$q \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$	12	5	$\frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1},\ \frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1},\ q^8-q^4+1,\ \frac{q^{10}+1}{q^2+1}$
J_4		12		$23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 43$

В обозначениях леммы 6 простое число, делящее q^n-1 и не делящее q^i-1 при любом натуральном $i<n$, называется *примитивным простым делителем* числа q^n-1, а множество всех примитивных простых делителей числа q^n-1 обозначается через $R_n(q)$. В рассматриваемом нами случае $q\in\{2,3\}$.

Лемма 7 (лемма Мазурова [14, лемма 1]). *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|,|N|)=1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C|\in\omega(G)$ для некоторого $s\in\pi(N)$.*

2. Доказательство теоремы

Пусть $L=E_7(q)$, где $q\in\{2,3\}$. Тогда по [20] множество $\pi(L)$ равно $\{2,3,5,7,11,13,17,19,31,43,73,127\}$ при $q=2$ и $\{2,3,5,7,11,13,17,19,37,41,61,73,547,757,1093\}$ при $q=3$. Ввиду леммы 2 имеем $s(L)=3$ и множество $\{n_2(L),n_3(L)\}$ равно $\{73,127\}$ при $q=2$ и $\{757,1093\}$ при $q=3$. Ввиду леммы 5 имеем $t(L)=8$, $t(2,L)$ равно 5 при $q=2$ и 3 при $q=3$. Ввиду [7, табл. 5, 7] граф $\Gamma(L)$ имеет коклику $\{2,r_7,r_{14},r_9,r_{18}\}$ при $q=2$ и $\{2,r_7,r_9\}$ при $q=3$, где $r_i\in R_i(q)$. Поэтому такой кокликой является множество $\{2,19,43,73,127\}$ при $q=2$ и $\{2,757,1093\}$ при $q=3$.

Докажем сначала квазираспознаваемость группы L по графу простых чисел. Пусть G — конечная группа с условием $\Gamma(G)=\Gamma(L)$ и $N=F(G)$. Положим $\overline{G}=G/N$. В силу лемм 1, 2 и 3 имеем $\mathrm{Inn}(P)\trianglelefteq\overline{G}\leq\mathrm{Aut}(P)$, где P — конечная простая группа с условиями

$$s(P)\geq 3,\quad \pi(N)\cup\pi(\bar{G}/\mathrm{Inn}(P))\subseteq\pi_1(G)\quad\text{и}\quad\{n_2(G),n_3(G)\}\subseteq\{n_i(P)\mid 2\leq i\leq s(P)\}.\qquad(2.1)$$

Поскольку числа $n_2(L)$ и $n_3(L)$ просты, множество $\{n_2(G),n_3(G)\}$ равно $\{73^m,127^n\}$ при $q=2$ и $\{757^m,1093^n\}$ при $q=3$, где m и n — некоторые натуральные числа.

По условию $t(G)=t(L)\geq 3$ и $t(2,G)=t(2,L)\geq 2$, следовательно, ввиду леммы 4 имеем

$$t(P)\geq t(L)-1=7\quad\text{и}\quad t(2,P)\geq t(2,L).\qquad(2.2)$$

Ввиду таблицы и леммы 5 группа P изоморфна одной из следующих групп: A_p, где $p\geq 7$ и $p-2$ — простые числа; ${}^2D_p(3)$, где $p=2^m+1\geq 3$ — простое число; $E_7(2)$; $E_7(3)$; $E_8(t)$, где t — некоторая степень простого числа; F_2; F_1; J_4. Далее рассматриваются все эти возможности для P.

Пусть $P\cong A_p$, где $p\geq 7$ и $p-2$ — простые числа. Если $q=2$, то ввиду условия (2.1) $\{73^m,127^n\}=\{p,p-2\}$, что невозможно. Если $q=3$, то $\{757^m,1093^n\}=\{p,p-2\}$, что невозможно.

Пусть $P\cong{}^2D_p(3)$, где $p=2^m+1\geq 3$ — простое число. Ввиду леммы 5 и условия (2.2) $t(P)=[(3p+4)/4]\geq t(L)-1=7$ и $t(2,P)=3\geq t(2,L)$, следовательно, $p\geq 17$ и $q=3$. Поскольку тогда $|\pi(G)|=|\pi(L)|=15$, имеем $[(3p+4)/4]=t(P)\leq|\pi(G)|=15$ и, следовательно, $p=17$. Поэтому $\{757^m,1093^n\}=\{(3^{16}+1)/2,(3^{17}+1)/4\}=\{21523361,32285041\}$. Но числа 21523361 и 32285041 не делятся на 757 и 1093; противоречие.

Пусть $P\cong E_8(t)$. Ввиду [7; 8] $t(P)=12$ и граф $\Gamma(L)$ имеет коклику $\{r_5,r_7,r_8,r_9,r_{10},r_{12},r_{14},r_{15},r_{18},r_{20},r_{24},r_{30}\}$, где $r_i\in R_i(t)$. Числа из этой коклики взаимно просты с делителем $t(t^3-1)(t^4-1)$ числа $|P|$. Но по лемме 6 число $t(t^3-1)(t^4-1)$ делится по крайней мере на 4 попарно различных простых числа. Поэтому $|\pi(P)|\geq 12+4=16$. Но $\pi(P)\subseteq\pi(G)$ и $|\pi(G)|=|\pi(L)|\leq 15$; противоречие.

Если $P\cong F_2$, то $\{n_2(G),n_3(G)\}\subseteq\{31,47\}$, что невозможно.

Если $P\cong F_1$, то $\{n_2(G),n_3(G)\}\subseteq\{41,59,71\}$, что невозможно.

Если $P\cong J_4$, то $\{n_2(G),n_3(G)\}\subseteq\{23,29,31,37,43\}$, что невозможно.

Итак, группа P изоморфна $E_7(2)$ или $E_7(3)$. Поскольку $\pi(E_7(2))\neq\pi(E_7(3))$, $P\cong L$. Квазираспознаваемость по графу простых чисел группы L доказана.

Предположим, что $N = F(G) \neq 1$. Ввиду леммы 1 достаточно рассматривать случай, когда N — элементарная абелева p-группа для некоторого простого числа p из $\pi_1(G)$ и P действует точно и неприводимо на N.

Предположим, что $p \neq q$.

Пусть $q = 2$. Согласно [20] в P существует параболическая максимальная подгруппа R вида $R = U : S$, где $|U| = 2^{42}$ и $S \cong L_7(2)$. В S существует циклическая подгруппа $\langle x \rangle$ простого порядка 127 (цикл Зингера), образующего компоненту связности в графе $\Gamma(G)$. Поэтому $U : \langle x \rangle$ есть группа Фробениуса. Применяя к группе $NU\langle x \rangle$ лемму 7, получим, что $127p \in \omega(G)$; противоречие.

Пусть $q = 3$. В P существует параболическая максимальная подгруппа R, полученная выбрасыванием последней (концевой) вершины из схемы Дынкина для P. Тогда R имеет вид $R = U : S$, где $|U| = 3^{27}$ и S' — квазипростая группа лиева типа $E_6(3)$. В S' существует циклическая подгруппа $\langle x \rangle$ простого порядка 757, образующего компоненту связности в графе $\Gamma(G)$. Поэтому $U : \langle x \rangle$ есть группа Фробениуса. Применяя к группе $NU\langle x \rangle$ лемму 7, получим, что $757p \in \omega(G)$; противоречие.

Таким образом, $p = q$.

Если $q = 3$, то по [29, теорема 1.3] каждый элемент из P фиксирует некоторый неединичный элемент из N, что противоречит несвязности графа $\Gamma(G)$.

Пусть $q = 2$. Ввиду [20] дополнение Леви параболической максимальной подгруппы группы P, полученной выбрасыванием последней (концевой) вершины из схемы Дынкина для P, изоморфно $E_6(2)$ и поэтому содержит элемент порядка 73. Согласно [47, следствие 5.1] этот элемент фиксирует некоторый неединичный элемент из N. Но это противоречит тому, что вершины 73 и 2 не смежны в графе $\Gamma(G)$.

Итак, $N = 1$ и $G = \overline{G}$.

Предположим, что $\mathrm{Inn}(P) < G$. Тогда ввиду [20, Table 5] $q = 3$ и $G \cong \mathrm{Aut}(E_7(3)) \cong E_7(3) : 2$. Группа G изоморфна группе $C_X(\sigma)$, где X — связная простая присоединенная линейная алгебраическая группа типа E_7 над алгебраически замкнутым полем характеристики 3 и σ — эндоморфизм Стейнберга группы X (см. [28, теорема 6.2.2(g)]). Согласно [25, табл. 3 и разд. 10] в G есть абелева подгруппа (максимальный тор типа $E_7(a_1)$) порядка $3^7 - 1 = 2 \cdot 1093$; противоречие с тем, что вершины 1093 и 2 не смежны в графе $\Gamma(G)$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Квазираспознаваемость некоторых конечных простых групп по множеству порядков элементов // Укр. мат. конгр. 2001. Алгебра і теор. чисел. Секція 1: Тез. доп. Киев, 2001. С. 4.
2. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** О распознаваемости группы $E_8(q)$ по множеству порядков элементов // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 1003–1008.
3. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Квазираспознаваемость одного класса конечных простых групп по множеству порядков элементов // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 241–255.
4. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Распознаваемость по спектру групп ${}^2D_p(3)$ для нечетного простого числа p // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 3–11.
5. **Васильев А.В.** Распознаваемость групп $G_2(3^n)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 130–142.
6. **Васильев А.В.** О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 511–522.
7. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
8. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
9. Распознавание конечных простых групп $F_4(2^m)$ по спектру / А.В. Васильев, М.А. Гречкосеева, В.Д. Мазуров, Х.П. Чао, Г.Ю. Чен, В.Дж. Ши // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1256–1262.

10. **Заварницин А.В.** Распознавание по множеству порядков элементов знакопеременных групп степени $r+1$ и $r+2$ для простого r и группы степени 16 // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 6. С. 648-661.
11. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
12. **Кондратьев А.С.** Распознаваемость по спектру групп $E_8(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 182–184.
13. **Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.** Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 360–371.
14. **Мазуров В.Д.** Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
15. **Мазуров В.Д.** Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 166–198.
16. **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. Т. 36. С. 119–138.
17. **Мазуров В.Д., Су М.Ч., Чао Х.П.** Распознавание конечных простых групп $L_3(2^m)$ и $U_3(2^m)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 567–585.
18. **An J.B., Shi W.J.** The characterization of finite simple groups with no elements of order six // Commun. Algebra. 2000. Vol. 28, no. 7. P. 3351–3358.
19. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
20. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
21. **Bang A.S.** Talteoretiske undersølgelser // Tidsskrift. Math. 1886. Vol. 5, no. 4. P. 70–80, 130–137.
22. **Brandl R., Shi W.J.** Finite groups whose element orders are consecutive integers // J. Algebra. 1991. Vol. 143, no. 2. P. 388–400.
23. **Brandl R., Shi W.J.** A characterization of finite simple groups with abelian Sylow 2-subgroups // Ricerche di Mat. 1993. Vol. 42, no. 1. P. 193–198.
24. **Brandl R., Shi W.J.** The characterization of $PSL(2,q)$ by its element orders // J. Algebra. 1994. Vol. 163, no. 1. P. 109–114.
25. **Carter R.W.** Conjugacy classes in the Weyl group // Compositio Mathematica. 1972. Vol. 25, no. 1. P. 1–59.
26. **Darafsheh M.R., Moghaddamfar A.R.** A characterization of some finite groups by their element orders // Algebra Colloq. 2000. Vol. 7, no. 4. P. 467–476.
27. **Deng H.W., Shi W.J.** The characterization of Ree groups ${}^2F_4(q)$ by their element orders // J. Algebra. 1999. Vol. 217, no. 1. P. 180–187.
28. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. 420 p. (Math. Surveys Monogr. Vol. 40, no. 3).
29. **Guralnik R.M., Tiep P.H.** Finite simple unisingular groups of Lie type // J. Group Theory. 2003. Vol. 6. P. 271–310.
30. **Li H.L., Shi W.J.** A characteristic property of some sporadic simple groups // Chinese Ann. Math. 1993. Vol. 14A, no. 2. P. 144–151 (in Chinese).
31. **Lipschutz S., Shi W.J.** Finite groups whose element orders do not exceed twenty // Progress in Natural Sci. 2000. Vol. 10, no. 1. P. 11–21.
32. **Mazurov V.D., Shi W.J.** A note to the characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. 1998. Vol. 5, no. 3. P. 285–288.
33. **Praeger C. E., Shi W.J.** A characterization of some alternating and symmetric groups // Commun. Algebra. 1994. Vol. 22, no. 5. P. 1507–1530.
34. **Shi W.J.** A new characterization of some projective special linear groups and the finite groups in which every element has prime order or order $2p$ // J. Southwest-China Teachers University (N.S.). 1983. Vol. 8, no. 1. P. 23–28 (in Chinese).
35. **Shi W.J.** A characteristic property of $PSL_2(7)$ // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1984. Vol. 36, no. 3. P. 354–356.
36. **Shi W.J.** A characterization of some $PSL_2(q)$ // J. Southwest-China Teachers University (N.S.). 1985. Vol. 10, no. 2. P. 25–32 (in Chinese).
37. **Shi W.J.** A characteristic property of A_5 // J. Southwest-China Teachers University (N.S.). 1986. Vol. 11, no. 3. P. 11–14 (in Chinese).
38. **Shi W.J.** A characteristic property of A_8 // Acta Mathematica Sinica (N.S.). 1987. Vol. 3, No. 1. P. 92–96.

39. **Shi W.J.** A characteristic property of J_1 and $PSL_2(2^n)$ // Adv. in Math. 1987. Vol. 16. P. 397–401 (in Chinese).
40. **Shi W.J.** A characteristic property of Mathieu groups // Chinese Ann. Math. 1988. Vol. 9A, no. 5. P. 575–580 (in Chinese).
41. **Shi W.J.** A characterization of the Conway simple group Co_2 // J. Math. (PRC). 1989. Vol. 9. P. 171–172.
42. **Shi W.J.** A characterization of the Higman-Sims group // Houston J. Math. 1990. Vol. 16, no. 4. P. 597–602.
43. **Shi W.J.** A characterization of Suzuki simple groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. Vol. 114, no. 3. P. 589–591.
44. **Shi W.J.** The characterization of the sporadic simple groups by their element orders // Algebra Colloq. 1994. Vol. 1, no. 2. P. 159–166.
45. **Shi W.J., Li H.L.** A characteristic property of M_{12} and $PSU(6,2)$ // Acta Math. Sin. 1989. Vol. 32, no. 6. P. 758–764 (in Chinese).
46. **Shi W.J., Yang W.Z.** A new characterization of A_5 and finite groups in which every nonidentity element has prime order // J. Southwest-China Teachers College. Ser. B. 1984. Vol. 1. P. 36–40 (in Chinese).
47. **Suprunenko I.D., Zalesski A.E.** Fixed vectors for elements in modules for algebraic groups // Intern. J. Algebra Comput. 2007. Vol. 17, no. 5-6. P. 1249–1261.
48. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
49. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Vol. 3, no. 1. P. 265–284.

Кондратьев Анатолий Семенович
Поступила 18.02.2014
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru