Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов, Об одном методе решения систем нелинейных уравнений в частных производных, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2014, том 20, номер 1, 238–246

Том 20 № 1 2014

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ[1]

Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов

Предлагается метод сведения систем уравненний в частных производных к соответствующим системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Исследуется система уравнений, описывающая плоские, цилиндрические и сферические течения политропного газа, система безразмерных уравнений Стокса динамики вязкой несжимаемой жидкости, система уравнений Максвелла для вакуума и система уравнений газовой динамики в цилиндрических координатах. Показано, как данный подход можно использовать для решения некоторых задач (безударное сжатие, турбулентность и т.п.)

Ключевые слова: системы нелинейных уравнений в частных производных, метод исследования нелинейных уравнений в частных производных, точные решения.

L. I. Rubina, O. N. Ul'yanov. One method for solving systems of nonlinear partial differential equations.

A method for reducing systems of partial differential equations to corresponding systems of ordinary differential equations is proposed. We study a system of equations describing two-dimensional, cylindrical, and spherical flows of a polytropic gas, a system of dimensionless Stokes equations for the dynamics of a viscous incompressible fluid, a system of Maxwell equations for vacuum, and a system of gas dynamics equations in cylindrical coordinates. We show how this approach can be used for solving certain problems (shockless compression, turbulence, etc.).

Keywords: systems of nonlinear partial differential equations, investigation method for nonlinear partial differential equations, exact solutions.

Введение

Ранее в ряде работ авторы данной статьи, рассматривая направление наиболее интенсивного развития процесса, описываемого нелинейным дифференциальным уравнениием в частных производных, развивали геометрический метод, позволивший получать некоторые классы решений таких уравнений путем сведения их к ОДУ или системе ОДУ и исследовать характер процесса [1–3].

В данной работе этот метод применяется для получения некоторых решений систем нелинейных дифференциальных уравнений: системы уравнений, описывающей плоские, цилиндрические и сферические течения политропного газа, системы безразмерных уравнений Стокса динамики вязкой несжимаемой жидкости, системы уравнений Максвелла для вакуума и системы уравнений газовой динамики в цилиндрических координатах. Решения перечисленных систем получены после сведения их к системам ОДУ.

1. Рассматривается система, описывающая сферические, цилиндрические и плоские волны при постоянной энтропии [4; 5]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2}{k-1}c\frac{\partial c}{\partial r}=0, \quad \frac{\partial c}{\partial t}+u\frac{\partial c}{\partial r}+\frac{k-1}{2}\Big(c\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{Nuc}{r}\Big)=0. \tag{0.1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках проекта 12-С-1-1001 “Обратные задачи математической физики и их приложение к синтезированию гидролокационных апертур на борту подводных роботов”, проекта 12-П-1-1009 “Разработка и применение новых аналитических, численных и асимптотических методов в нелинейных задачах математической физики” и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.А03.21.0006 от 27.08.2013).

Здесь r — пространственная координата, u — скорость движения газа, c — скорость звука в газе, $c^2 = dp/d\rho$, p — давление, ρ — плотность, $p = p(\rho)$ — уравнение состояния, $k = \text{const}$ — показатель адиабаты, $N = \text{const}$. Если $N = 0$ — имеем плоскую волну, если $N = 1$ — волна цилиндрическая, если $N = 2$ — волна сферическая.

2. Получены некоторые решения системы уравнений Стокса, описывающей динамику вязкой несжимаемой жидкости в безразмерном виде [6]:

$$
\begin{aligned}
&S\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + E\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{R}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big) = 0,\\
&S\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + E\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{R}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\Big) = 0,\\
&S\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + E\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{R}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big) = \frac{1}{F},\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.
\end{aligned}
\tag{0.2}
$$

Здесь S — число Струхаля, E — число Эйлера, R — число Рейнольдса, F — число Фруда. $\{u, v, w\}$ — компоненты вектора скорости, p — давление.

3. Отмеченный выше подход применен для получения некоторых решений системы уравнений Максвелла в вакууме [7]:

$$
\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - rot\mathbf{H} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + rot\mathbf{E} = 0. \tag{0.3}
$$

Здесь $\mathbf{E} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор электрического поля, $\mathbf{H} = (u_4, u_5, u_6)$ — вектор магнитного поля.

4. Геометрическим методом получена система ОДУ для уравнений газовой динамики, записанных в цилиндрических координатах [8]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\varrho}{dt} + \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) = -\frac{1}{r}\varrho v, \quad \frac{du}{dt} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{w^2}{r},\\
&\frac{dw}{dt} + \frac{1}{r\varrho}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\frac{vw}{r}, \quad \frac{dp}{dt} + c^2\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) = -c^2\varrho\frac{v}{r},\\
&\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial r} + \frac{w}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} - \text{субстациональная производная}, \quad c^2 = \kappa\frac{p}{\varrho}.
\end{aligned}
\tag{0.4}
$$

Здесь $\{x, r, \varphi\}$ — цилиндрические координаты, $\{u, v, w\}$ — компоненты вектора скорости, p — давление, ϱ — плотность газа, κ — показатель адиабаты.

На примере системы (0.1) показано, как в частном случае описанный в работе подход приводит к получению хорошо известных в газовой динамике особых решений [4] — простых волн Римана [9].

1. О системе одномерного нестационарного движения политропного газа

Рассмотрим систему (0.1).

Утверждение 1. *Систему* (0.1) *геометрическим методом при выполнении некоторых условий можно свести к системе* ОДУ.

Доказательство. Будем считать, что существует такая система координат, в которой $u = u(\psi(r,t))$, $c = c(\psi(r,t))$. Тогда поверхность $\psi = \psi(r,t)$ — поверхность уровня указанных функций — и систему (0.1) можно представить в виде

$$u'\psi_t + \Big[uu' + \frac{(c^2)'}{k-1}\Big]\psi_r = 0, \quad (c^2)'r\psi_t + [u(c^2)' + (k-1)c^2u']r\psi_r + (k-1)Nuc^2 = 0. \tag{1.1}$$

Здесь штрих ($'$) обозначает дифференцирование по переменной ψ. Нижние индексы у функции $\psi(r,t)$ обозначают дифференцирование по соответствующей переменной.

Положим, что в первом уравнении системы (1.1) $\psi_t \neq 0$ и $\psi_r/\psi_t = f(\psi)$, где $f(\psi)$ — некоторая функция. Тогда $\psi_r = f(\psi)\psi_t$. Подставив это выражение ψ_r во второе уравнение системы, получим, что $r\psi_t = (1-k)Nuc^2/\{(c^2)' + f[u(c^2)' + (k-1)c^2u']\}$. Правая часть полученного выражения зависит только от ψ. Обозначим ее через $g_1(\psi)$, тогда будем иметь $r\psi_t = g_1(\psi)$, $r\psi_r = r\psi_t f = g_1(\psi)f(\psi) = g_2(\psi)$ (введено обозначение $g_2(\psi) = f(\psi)g_1(\psi)$). Вычислив производную ψ_{tr}, получим $\psi_{tr} = (g_2g_1' - g_1)/r^2$. Вычислив ψ_{rt}, получим $\psi_{rt} = g_2'g_1/r^2$ Потребовав равенства смешанных производных, получим зависимость $g_2g_1' - g_1g_2' = g_1$. Отсюда, полагая, что $g_1 \neq 0$, получаем

$$g_2 = g_1f(\psi), \quad f = C - w, \quad w = \int \frac{d\psi}{g_1}. \tag{1.2}$$

Так как $\psi_r = \psi_t f(\psi)$, то решение этого квазилинейного уравнения первого порядка представимо в виде [7] $\psi = \psi(t + fr)$ или $t = -f(\psi)r + G(\psi)$. Дифференцируем последнее соотношение по t, получаем $1 = G'\psi_t - rf'\psi_t$. Отсюда $\psi_t = 1/(G' - f'r)$. С другой стороны, $\psi_t = g_1/r$. Приравнивая эти соотношения и подставляя в полученное выражение значение $f' = -1/g_1$ из (1.2), получаем, что равенство возможно только тогда, когда $G(\psi) = \mathrm{const}$. Положим $G = t_0$. Тогда из соотношения $t = G - fr$ имеем $f(\psi) = -(t-t_0)/r$. Отсюда $\psi = \psi(y)$, $y = (t-t_0)/r$. Но тогда $u = u(y)$, $c = c(y)$. Подставляя такие функции $u(y)$ и $c(y)$ в систему (0.1), приходим к системе ОДУ

$$\frac{du}{dy} = \frac{Nc^2uy}{c^2y^2 - (1-uy)^2}, \quad \frac{dc^2}{dy} = \frac{(k-1)(1-uy)Nc^2u}{c^2y^2 - (1-uy)^2}$$

или, переходя к независимой переменной $z = 1/y$, получаем систему

$$\frac{du}{dz} = -\frac{Nc^2u}{z[c^2 - (u-z)^2]}, \quad \frac{dc^2}{dz} = \frac{(k-1)(u-z)Nc^2u}{z[c^2 - (u-z)^2]}, \tag{1.3}$$

что и требовалось доказать. □

Таким образом, выделен некоторый класс решений системы уравнений в частных производных (0.1), задаваемый системой ОДУ (1.3). Нетрудно заметить, что система (1.3) имеет решение вида $u = az$, $c = bz$, где $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$. Подставив в систему решение такого вида, получаем

$$u = \frac{2z}{(k+1) + N(k-1)}, \quad c^2 = \frac{(N+1)(k-1)^2z^2}{[(k+1) + N(k-1)]^2}.$$

Для системы (1.3) численно решена следующая задача: при $z = z_0 = 4.5$ заданы начальные $u = u_0 = 25$, $c = c_0 = 1$ и изучается поведение $c(z)$ при $z < z_0$. Так как система описывает процессы в политропном газе, то при $c \longmapsto \infty$ имеем $\rho \longmapsto \infty$, где ρ — плотность. В этой задаче для некоторых значений $z^* < z < z_0$ будет происходить безударное сжатие газа, а при $z = z^*$ в точке смены знака у знаменателей $[c^2 - (u-z)^2]$ системы (1.3) скорость звука имеет разрыв.

Утверждение 2. *В частном случае, если* $\psi = c$, *система* (0.1) *сводится к* ОДУ

$$\frac{2}{k-1}Ncuu'' - (N+1)uu'^{\,3} - \frac{2}{k-1}cu'^{\,2} + \frac{2}{k-1}uu'\Big(\frac{2}{k-1} - N\Big) + \frac{8}{(k-1)^3} = 0. \tag{1.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для системы (0.1) рассмотрим частный случай, приводящий к простой волне. Положим, что независимая переменная $\psi = c$ и, следовательно, $u = u(c)$, Тогда система (0.1) сведется к системе

$$u'\frac{\partial c}{\partial t} + \Big(uu' + \frac{2}{k-1}c\Big)\frac{\partial c}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \Big(u + \frac{k-1}{2}cu'\Big)\frac{\partial c}{\partial r} = -\frac{k-1}{2}\frac{Nuc}{r}.$$

Здесь штрих ($'$) обозначает дифференцирование по c. Определяя из выписанной системы производные от c по t и по r и требуя равенства смешанных производных, приходим к уравнению для определения $u = u(c)$:

$$\frac{2}{k-1}Ncuu'' - (N+1)uu'^{\,3} - \frac{2}{k-1}cu'^{\,2} + \frac{2}{k-1}uu'\Big(\frac{2}{k-1} - N\Big) + \frac{8}{(k-1)^3} = 0,$$

что и требовалось доказать. □

Выпишем частное решение уравнения (1.4)

$$u = \pm\frac{1}{k-1}\sqrt{\frac{2[(3-k) - N(k-1)]}{N+1}}\Big[c - \frac{2(N+1)}{3-k-N(k-1)}\Big].$$

Отсюда u — действительная функция в случае $N = 0$, если $k < 3$, в случае $N = 1$, если $k < 2$, в случае $N = 2$, если $k < 5/3$.

2. О системе уравнений Стокса

Рассмотрим систему (0.2).

Утверждение 3. *Система* (0.2) *геометрическим методом при выполнении некоторых условий может быть сведена к системе* ОДУ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $u = u(\psi(x, y.z, t))$, $v = v(\psi(x, y.z, t))$, $w = w(\psi(x, y.z, t))$, $p = p(\psi(x, y.z, t))$, тогда $\psi(x, y, z, t) = \mathrm{const}$ — поверхность уровня для u, v, w, p. При таком предположении система (0.2) может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
&Su'\psi_t + uu'\psi_x + vu'\psi_y + wu'\psi_z - \frac{1}{R}[u''(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2) + u'(\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz})] = 0,\\
&Sv'\psi_t + uv'\psi_x + vv'\psi_y + wv'\psi_z - \frac{1}{R}[v''(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2) + v'(\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz})] = 0,\\
&Sw'\psi_t + uw'\psi_x + vw'\psi_y + ww'\psi_z - \frac{1}{R}[w''(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2) + w'(\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz})] = \frac{1}{F},\\
&u'\psi_x + v'\psi_y + w'\psi_z = 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

В системе (2.1) штрих ($'$) обозначает дифференцирование по ψ, нижние индексы — дифференцирование функции ψ по соответствующим переменным. Пусть $\psi_t \neq 0$. Положим, что $\psi_x/\psi_t = f_1(\psi)$, $\psi_y/\psi_t = f_2(\psi)$, $\psi_z/\psi_t = f_3(\psi)$, $(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2)/\psi_t = f_4(\psi)$, где $f_i(\psi)$ — некоторые произвольные функции ($i = 1, 2, 3, 4$). Тогда $\psi_t = f_4/(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) = g(\psi)$ Из равенства смешанных производных получим, что $\psi_x = ag(\psi)$, $\psi_y = bg(\psi)$, $\psi_z = cg(\psi)$, $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$,

$c = \text{const}$ и, как следствие, $\psi = \psi(l)$, $l = t + ax + by + cz$. Тогда имеем, что $u = u(l)$, $v = v(l)$, $w = w(l)$, $p = p(l)$ и система уравнений (0.2) сводится к системе ОДУ

$$\begin{aligned}
&(S + au + bv + cw)u_l + Eap_l - \frac{1}{R}u_{ll}(a^2 + b^2 + c^2) = 0,\\
&(S + au + bv + cw)v_l + Ebp_l - \frac{1}{R}v_{ll}(a^2 + b^2 + c^2) = 0,\\
&(S + au + bv + cw)w_l + Ecp_l - \frac{1}{R}w_{ll}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{F},\\
&au_l + bv_l + cw_l = 0,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

что и требовалось доказать. □

Дифференциальные следствия последнего уравнения системы (2.2) приводят к соотношениям $au_{ll} + bv_{ll} + cw_{ll} = 0$, $au + bv + cw = A$, $A = \text{const}$. Если первое уравнение системы (2.2) умножить на a, второе уравнение системы — на b, а третье уравнение системы — на c и сложить, то получим $p_l = c/[FE(a^2 + b^2 + c^2)]$. Тогда первые три уравнения системы (2.2) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2 + b^2 + c^2}{R}u_{ll} - (S + A)u_l - \frac{ca}{F(a^2 + b^2 + c^2)} = 0,\\
&\frac{a^2 + b^2 + c^2}{R}v_{ll} - (S + A)v_l - \frac{cb}{F(a^2 + b^2 + c^2)} = 0,\\
&\frac{a^2 + b^2 + c^2}{R}w_{ll} - (S + A)w_l + \frac{a^2 + b^2}{F(a^2 + b^2 + c^2)} = 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Нетрудно выписать общее решение линейной системы с постоянными коэффициентами (2.3). Если $A \neq (-S)$, то

$$\begin{aligned}
&u = \frac{U_0}{\alpha}\exp(\alpha l) - \frac{\beta}{\alpha}l + U_1, \quad \alpha = \frac{R(S + A)}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \beta = -\frac{caR}{F(a^2 + b^2 + c^2)^2},\\
&\qquad U_0 = \text{const}, \quad U_1 = \text{const};\\
&v = \frac{V_0}{\alpha}\exp(\alpha l) - \frac{b\beta}{a\alpha}l + V_1, \quad V_0 = \text{const}, \quad V_1 = \text{const};\\
&w = -\frac{aU_0 + bV_0}{c\alpha}\exp(\alpha l) + \frac{\beta(a^2 + b^2)}{ac\alpha}l + \frac{A - aU_1 - bV_1}{c};\\
&p = \frac{c}{FE(a^2 + b^2 + c^2)}l + p_0, \quad p_0 = \text{const}, \quad l = t + ax + by + cz.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Если $A = -S$, то

$$\begin{aligned}
&u = -0.5\beta l^2 + U_2 l + U_3, \quad U_2 = \text{const}, \quad U_3 = \text{const};\\
&v = -0.5\beta l^2 + V_2 l + V_3, \quad V_2 = \text{const}, \quad V_3 = \text{const};\\
&w = \frac{0.5\beta(a + b)}{c}l^2 - \frac{aU_2 + bV_2}{c}l - \frac{aU_3 + bV_3 + S}{c}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Как следует из формул (2.4) , эти законы описывают режимы с обострением, что приводит к турбулентности и подтверждает гипотезу, выдвинутую Жаном Лере в 1933 г. Чем больше число Рейнольдса, тем быстрее скорость стремится к бесконечности. Если число Рейнольдса невелико, обострение тоже наступает, но позднее. В случае, когда $A = -S$ (см. формулы (2.5)), картина другая при тех же числах Рейнольдса: возрастание скорости звука незначительное в сравнении с тем, что имеет место при $A \neq -S$, и сдвинуто по времени.

3. О системе уравнений Максвелла

Рассмотрим систему (0.3).

Утверждение 4. *Система* (0.3) *геометрическим методом при выполнении некоторых условий может быть сведена к системе* ОДУ.

Доказательство. Полагаем, что $u_i = u_i(\psi(t, x, y, z))$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, тогда система (0.3) приводится к виду

$$\begin{gathered} u_1'\psi_t + u_5'\psi_z - u_6'\psi_y = 0, \quad u_2'\psi_t + u_6'\psi_x - u_4'\psi_z = 0, \quad u_3'\psi_t + u_4'\psi_y - u_5'\psi_x = 0, \\ u_4'\psi_t - u_2'\psi_z + u_3'\psi_y = 0, \quad u_5'\psi_t - u_3'\psi_x + u_1'\psi_z = 0, \quad u_6'\psi_t - u_1'\psi_y + u_2'\psi_x = 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь штрих ($'$) обозначает дифференцирование по ψ, нижние индексы у функции $\psi(t, x, y, z)$ обозначают производную по соответствующей переменной. Рассмотрим случай, когда $\psi_t \neq 0$. Будем считать, что

$$\frac{\psi_z}{\psi_t} = f_1(\psi), \quad \frac{\psi_y}{\psi_t} = f_2(\psi), \quad \frac{\psi_x}{\psi_t} = f_3(\psi), \tag{3.2}$$

где $f_j(\psi)$ $(j = 1, 2, 3)$ — пока произвольные функции. Нетрудно проверить, что решение системы (3.2) имеет вид

$$\psi = \psi(t + zf_1(\psi) + yf_2(\psi) + xf_3(\psi)). \tag{3.3}$$

Чтобы система (3.1) имела нетривиальное решение, соответствующий определитель должен быть равен нулю. Это имеет место, если $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1$. Отсюда, полагая, что $f_3 = \pm\sqrt{1 - f_1^2 - f_2^2}$, получим систему соотношений

$$\begin{aligned} u_1' &= \mp\left(\frac{f_2}{\sqrt{1 - f_1^2 - f_2^2}} u_2' + \frac{f_1}{\sqrt{1 - f_1^2 - f_2^2}} u_3'\right), \\ u_4' &= f_1 u_2' - f_2 u_3', \\ u_5' &= \pm\left(\frac{f_1 f_2}{\sqrt{1 - f_1^2 - f_2^2}} u_2' + \frac{1 - f_2^2}{\sqrt{1 - f_1^2 - f_2^2}} u_3'\right), \\ u_6' &= \mp\left(\frac{1 - f_1^2}{\sqrt{1 - f_1^2 - f_2^2}} u_2' + \frac{f_1 f_2}{\sqrt{1 - f_1^2 - f_2^2}} u_3'\right), \end{aligned} \tag{3.4}$$

что и требовалось доказать. □

В соотношениях (3.4) функции $f_1(\psi)$, $f_2(\psi)$, $u_2(\psi)$, $u_3(\psi)$ — произвольные. Положим, например, что $f_1 = f_2 = \psi$ и что в соотношении (3.3), $\psi = t + zf_1 + yf_2 + x\sqrt{1 - f_1^2 - f_2^2}$. Пусть также $u_2 = a\psi + c_2$, $u_3 = b\psi + c_3$, $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $c_2 = \text{const}$, $c_3 = \text{const}$. Тогда решение системы (3.4) имеет вид

$$\begin{gathered} u_1 = 0.5(a + b)\sqrt{1 - 2\psi^2} + c_1, \quad u_4 = 0.5(a - b)\psi^2 + c_2, \\ u_5 = 0.25(b - a)\psi\sqrt{1 - 2\psi^2} + \frac{a + 3b}{4\sqrt{2}} \arcsin(\psi\sqrt{2}) + c_5, \\ u_6 = 0.25(a - b)\psi\sqrt{1 - 2\psi^2} + \frac{3a + b}{4\sqrt{2}} \arcsin(\psi\sqrt{2}) + c_6, \\ c_1 = \text{const}, \quad c_4 = \text{const}, \quad c_5 = \text{const}, \quad c_6 = \text{const}, \end{gathered}$$

где

$$\psi = \frac{t(1 - y - z) \pm \sqrt{t^2(1 - y - z)^2 - (t^2 - x^2)[(1 - y - z)^2 + 2x^2]}}{(1 - y - z)^2 + 2x^2}.$$

4. Определение напряженностей магнитного и электрического поля, обеспечивающих движение заряженных частиц с заданной постоянной скоростью

Г. А. Лоренцом установлено [10], что направление дрейфа центра заряженной частицы совпадает с векторным произведением векторов электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей.

Решим для системы (0.3) следующую задачу. Пусть задан вектор скорости дрейфа центра заряда $\mathbf{U} = (u, v, w)$, причем $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$, $w = \mathrm{const}$. Тогда [10] выполняются зависимости: $u = u_2u_6 - u_3u_5$, $v = u_3u_4 - u_1u_6$, $w = u_1u_5 - u_2u_4$. Отсюда $uu_1 + vu_2 + wu_3 = 0$ и $uu_4 + vu_5 + wu_6 = 0$, и из системы (3.4) получаем

$$\begin{aligned} &\Big(f_1 \pm \frac{vf_1f_2}{u\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}} \mp \frac{w(1-f_1^2)}{u\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}}\Big)u_2' \\ &+\Big(-f_2 \pm \frac{v(1-f_2^2)}{u\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}} \mp \frac{wf_1f_2}{u\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}}\Big)u_3' = 0, \\ &\Big(\pm\frac{f_2}{\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}} - \frac{v}{u}\Big)u_2' + \Big(\pm\frac{f_1}{\sqrt{1-f_1^2-f_2^2}} - \frac{w}{u}\Big)u_3' = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Система (4.1) имеет нетривиальное решение, если $(vf_2 + wf_1 \pm u\sqrt{1-f_1^2-f_2^2})^2 = u^2+v^2+w^2$. Выражая отсюда f_2, приходим к выводу, что функция f_2 — действительная, если дискриминант полученного квадратного уравнения равен нулю. Следовательно, получаем

$$f_1 = \pm\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \qquad f_2 = \pm\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}.$$

Подставив полученные значения f_1 и f_2 в систему (3.4), будем иметь

$$\begin{aligned} &u_1 = \mp\Big(\frac{v}{u}u_2 + \frac{w}{u}u_3\Big) + a_1, \quad u_4 = \pm\Big(\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}u_2 - \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}u_3\Big) + a_2, \\ &u_5 = \pm\Big(\frac{vw}{u\sqrt{u^2+v^2+w^2}}u_2 + \frac{u^2+w^2}{u\sqrt{u^2+v^2+w^2}}u_3\Big) + a_3, \\ &u_6 = \mp\Big(\frac{u^2+v^2}{u\sqrt{u^2+v^2+w^2}}u_2 + \frac{vw}{u\sqrt{u^2+v^2+w^2}}u_3\Big) + a_4, \quad a_i = \mathrm{const}, \quad (\mathrm{i} = 1,2,3,4). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Еще раз отметим, что $\mathbf{U} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$, следовательно, $u = u_2u_6 - u_3u_5$, $v = u_3u_4 - u_1u_6$, $w = u_1u_5 - u_2u_4$. Подставляя в эти выражения значения компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ из (4.2), получаем, что $u_2 = u_2(u, v, w, a_1, a_2, a_3) = \mathrm{const}$, $u_3 = u_3(u, v, w, a_1, a_2, a_3) = \mathrm{const}$, $a_4 = a_4(u, v, w, a_1, a_2, a_3) = \mathrm{const}$. Таким образом, определяем все постоянные компоненты векторов электрического и магнитного поля, которые обеспечивают дрейф заряженной частицы в определенном направлении с заданной постоянной скоростью. Если заданный дрейф переменный, аналогично можно получать электрическое и магнитное поле, обеспечивающее заданный дрейф.

5. О системе уравнений газовой динамики в цилиндрических координатах

Рассмотрим систему (0.4).

Утверждение 5. *Система* (0.4) *геометрическим методом при выполнении некоторых условий может быть сведена к системе* ОДУ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в ранее рассмотренных системах, полагаем, что $u = u(\psi)$, $v = v(\psi)$, $w = w(\psi)$, $p = p(\psi)$, $\varrho = \varrho(\psi)$. Тогда система (0.4) сводится к системе ОДУ

$$\begin{aligned}
&r\varrho'(\psi_t + u\psi_x + v\psi_r) + \varrho' w\psi_\varphi + \varrho(u' r\psi_x + v' r\psi_r + w'\psi_\varphi) = -\varrho v,\\
&r\varrho u'(\psi_t + u\psi_x + v\psi_r) + w\varrho u'\psi_\varphi + rp'\psi_x = 0,\\
&r\varrho v'(\psi_t + u\psi_x + v\psi_r) + w\varrho v'\psi_\varphi + rp'\psi_r = w^2\varrho,\\
&r\varrho w'(\psi_t + u\psi_x + v\psi_r) + w\varrho w'\psi_\varphi + p'\psi_\varphi = -wv\varrho,\\
&rp'(\psi_t + u\psi_x + v\psi_r) + p' w\psi_\varphi + \kappa p(u' r\psi_x + v' r\psi_r + w'\psi_\varphi) = -\kappa pv.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь, как и ранее, штрих ($'$) обозначает дифференцирование по ψ, а нижние индексы обозначают производные функции ψ по соответствующим переменным.

Положим, что в системе (5.1) $r\psi_t = f_1(\psi)$, $r\psi_x = f_2(\psi)$, $\psi_\varphi = f_3(\psi)$, $r\psi_r = f_4(\psi)$. Тогда, требуя равенства смешанных производных, придем к зависимостям $f_2 = c_2 f_1$, $f_3 = c_3 f_1$,

$$f_4 = f_1 g(\psi), \quad g(\psi) = c_4 - \int \frac{d\psi}{f_1}, \quad \psi_r = g(\psi)\psi_t, \quad c_2 = \text{const} \neq 0, \quad c_3 = \text{const} \neq 0, \quad c_4 = \text{const}.$$

Учитывая все зависимости между первыми производными функции ψ и требуя равенства всех смешанных производных, получаем, что $f_3 = 0$ и $(t + c_2 x + g(\psi) r) = \text{const}$ (полное доказательство см. в разд. 1). Отсюда следует, что $g(\psi) = (t_0 - t - c_2 x)/r$. Пусть $g(\psi) = -\psi$, тогда $\psi = (t - t_0 + c_2 x)/r$. Так как $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\psi)$, $\mathbf{U} = \{p, \varrho, u, v, w\}$, то в результате подстановки таких функций в систему (0.4) приходим к системе ОДУ

$$\begin{aligned}
&(q/\varrho)\varrho' + c_2 u' - \psi v' = -v, \quad qu' + (c_2/\varrho)p' = 0, \quad qv' - (\psi/\varrho)p' = w^2, \quad qw' = -vw,\\
&[q/(\kappa p)]p' + c_2 u' - \psi v' = -v, \quad \text{где} \quad q = 1 + c_2 u - \psi v,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

что и требовалось доказать. □

Сравнивая первое и последнее уравнения системы (5.2), получаем зависимость $p = a\varrho^\kappa$, где $a = \text{const} > 0$. Так как из первого уравнения системы (5.2) имеем $c_2 u' - \psi v' = -v - q(\varrho'/\varrho) = q(w'/w - \varrho'/\varrho)$, то $q' = c_2 u' - \psi v' - v = -2v - q(\varrho'/\varrho) = q(2w'/w - \varrho'/\varrho)$. Отсюда $q'/q = 2w'/w - \varrho'/\varrho$ и $q\varrho/w^2 = c_0$, где $c_0 = \text{const} > 0$, если $w \neq 0$, $\varrho \neq 0$, $q > 0$.

Перепишем полученную систему (5.2) в виде, разрешенном относительно производных, учитывая полученные первые интегралы и полагая, что $[a\kappa\varrho^{\kappa-1}(c_2^2 + \psi^2) - q^2] \neq 0$:

$$\begin{aligned}
&u' = \frac{\kappa a c_2 \varrho^{\kappa-1}(\psi\varrho - vc_0)}{c_0[a\kappa\varrho^{\kappa-1}(c_2^2 + \psi^2) - q^2]}, \qquad v' = \frac{\kappa a\varrho^{\kappa-1}(c_2^2\varrho + \psi vc_0) - q^2\varrho}{c_0[a\kappa\varrho^{\kappa-1}(c_2^2 + \psi^2) - q^2]},\\
&\varrho' = \frac{q\varrho(vc_0 - \psi\varrho)}{c_0[a\kappa\varrho^{\kappa-1}(c_2^2 + \psi^2) - q^2]}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Система уравнений (5.3) содержит три произвольные постоянные: $a > 0$, $c_2 > 0$, $c_0 > 0$, и если, например, $c_0 = c_0(c_2, a)$, то решение системы зависит от произвольной функции.

Выпишем точные решения системы (0.4):

$$\varrho = \varrho_0 = \text{const}, \quad p = a\varrho_0^\kappa = \text{const}, \quad u = u_0 = \text{const}, \quad v = \varrho_0\psi/c_0,$$
$$w = \sqrt{(1 + c_2 u_0 - \varrho_0\psi^2/c_0)\varrho_0/c_0}.$$

$$\varrho = \varrho_0 = \text{const}, \quad p = a\varrho_0^\kappa = \text{const}, \quad u = \psi^2\varrho_0/c_0 - 1 + \sqrt{a\kappa\varrho_0^{(\kappa-1)}(c_2^2 + \psi^2)}, \quad v = \psi\varrho_0/c_0,$$
$$w = \pm(\varrho_0/c_0)^{1/2}[a\kappa\varrho_0^{(\kappa-1)}(c_2^2 + \psi^2)]^{1/4}.$$

6. Заключение

Геометрический метод, который ранее применялся для исследования и решения нелинейных уравнений в частных производных, может применяться для нелинейных и линейных систем уравнений в частных производных. При этом системы уравнений в частных производных сводятся к системам ОДУ, решение которых позволяет в ряде случаев находить точные решения исходных систем уравнений (см. системы (0.2),(0.4)) и решать некоторые другие задачи (системы (0.1)–(0.3)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** О решении уравнения потенциала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 130–145.
2. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Один геометрический метод решения нелинейных уравнений в частных производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 209–225.
3. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Решение нелинейных уравнений в частных производных геометрическим методом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 209–225.
4. **Станюкович К.П.** Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Гос. изд-во тех.-теорет. лит., 1955. 804 с.
5. **Сидоров А.Ф.** Избранные труды: Математика/ Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
6. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. М: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1957. 784 с.
7. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1964. 830 с.
8. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов [и др.]. М: Наука, 1976. 400 с.
9. **Риман Б.** Сочинения. М.: Гостехиздат, 1948. 543 с.
10. **Лоренц Г.А.** Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1953. 472 с.

Рубина Людмила Ильинична
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: rli@imm.uran.ru

Поступила 4.12.2013

Ульянов Олег Николаевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
ученый секретарь института
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: secretary@imm.uran.ru