П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба, О рациональных аппроксимациях функции Маркова на отрезке суммами Фейера с фиксированным количеством полюсов, *Тр. Ин-та матем.*, 2022, том 30, номер 1, 63–83

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2022. Том 30. № 1-2. С. 63–83

УДК 517.5

О РАЦИОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ ФУНКЦИИ МАРКОВА НА ОТРЕЗКЕ СУММАМИ ФЕЙЕРА С ФИКСИРОВАННЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ПОЛЮСОВ

П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
e-mail: pahamatby@gmail.com, rovba.ea@gmail.com
Поступила 06.06.2022

Исследуются приближения функций Маркова на отрезке $[-1,\ 1]$ суммами Фейера рационального интегрального оператора Фурье–Чебышёва с ограничениями на количество геометрически различных полюсов. Получено интегральное представление приближений и оценка равномерных приближений. В случае, когда мера μ удовлетворяет следующим условиям: $\operatorname{supp}\mu = [1,a]$, $a > 1$, $d\mu(t) = \varphi(t)\,dt$ и $\varphi(t) \asymp (t-1)^{\alpha}$ на $[1,a]$, устанавливаются оценки поточечных и равномерных приближений, асимптотическое выражение при $n \to \infty$ мажоранты равномерных приближений. Найдены оптимальные значения параметров, обеспечивающие наибольшую скорость убывания этой мажоранты. В качестве следствия получены оценки соответствующих равномерных приближений некоторых элементарных функций.

Из полученных результатов следует, что рациональные аппроксимации суммами Фейера функции Маркова с "невысокой гладкостью" меры $\mu(t)$ лучше в смысле порядка, чем соответствующие полиномиальные.

Введение. Метод приближений средними арифметическими рядов Фурье 2π- периодических функций имеет богатую историю, связанную с именами Л. Фейера [1], А. Лебега [2], С. Н. Бернштейна [3], С. М. Никольского [4], А. Зигмунда [5] и других известных математиков. К настоящему времени метод Фейера суммирования тригонометрических рядов Фурье достаточно хорошо изучен и нашёл широкое применение в решении задач полиномиальной аппроксимации (см., напр., [6]).

В 1956 г. М. М. Джрбашян [7] ввел рациональные ряды Фурье, обобщающие соответствующие классические тригонометрические ряды. Одним из основных результатов этой работы было компактное представление ядра Дирихле рациональных рядов Фурье. Основываясь на этом представлении, В. Н. Русак [8, 9] ввёл рациональные интегральные операторы типа Фейера, Джексона, Валле Пуссена.

Рациональные операторы Джексона и Валле Пуссена нашли широкое применение не только в теории рациональных приближений с фиксированными полюсами, но и в теории рациональных приближений со свободными полюсами. С их помощью были найдены новые классы функций, на которых рациональные аппроксимации оказывались лучше в смысле порядка соответствующих полиномиальных [10–12]. Подобные задачи с помощью рациональных операторов Фейера не решались.

В 1996 г. Е. А. Ровба [13] ввел в рассмотрение рациональные интегральные операторы типа Фейера на отрезке $[-1,\ 1]$ на основании ортогональных систем рациональных функций, введённых М. М. Джрбашяном и А. А. Китбаляном [14], и исследовал их аппроксимационные свойства в приближениях функций, удовлетворяющих условию Липшица степени $0 < \gamma \leq 1$ с константой M. Изучение аппроксимационных свойств рациональных интегральных операторов типа Фейера на отрезке $[-1,\ 1]$ были продолжены К. А. Смотрицким [15, 16] на классах выпуклых функций.

Пусть μ положительная борелевская мера с компактным носителем $F = \operatorname{supp}\mu \subset \mathbb{R}$. Преобразование Коши меры μ

$$\hat{\mu}(z) = \int\limits_F \frac{d\mu(t)}{z-t}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \backslash F,$$

называется функцией Маркова [17].

Функции Маркова голоморфны в $\overline{\mathbb{C}} \backslash F$ и их рациональная аппроксимация является хорошо известной классической задачей. Данной тематике посвятили свои статьи А. А. Гончар [18], Т. Ганелиус [19], Дж.-Е. Андерссон [20], А. А. Пекарский [21]. Отметим работу Н. С. Вячеславова и Е. П. Мочалиной [22], в которой изучаются аппроксимации функций Маркова в пространствах Харди H_p, $p \in (0,\ +\infty)$, при определенных условиях на меру μ, а также работу А. П. Старовойтова и Ю. А. Лабыч [23], где для функции Маркова, порожденной положительными борелевскими мерами степенного типа, установлена асимптотика поведения строчных последовательностей ее таблицы Паде. Последнее позволило найти точные порядки убывания наилучших приближений функций Маркова рациональными функциями с фиксированным числом полюсов. В. А. Прохоров [24] изучил вопросы, относящиеся к рациональным аппроксимациям функции Маркова на конечном множестве точек действительной оси, и получил ряд соотношений для соответствующих наилучших рациональных приближений. А. А. Пекарским и Е. А. Ровбой [25] исследованы рациональные аппроксимации функций Маркова частичными суммами рядов Фурье по системам функций, введенных С. Такенакой [26] и Ф. Мальмквистом [27] в единичном круге и системам, введенным М. М. Джрбашяном и А. А. Китбаляном [14] на отрезке $[-1,\ 1]$. Е. А. Ровбой и Е. Г. Микуличем [28] найдены асимптотические оценки равномерных приближений указанными методами при фиксированном числе геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции.

Заметим, что приближения непрерывных функций с характерными особенностями рациональными функциями с фиксированным числом геометрически различных полюсов впервые рассматривались в работах К. Н. Лунгу [29, 30].

В 1979 г. Е. А. Ровба [31] ввел рациональный оператор, ассоциированный с системой рациональных функций Чебышёва–Маркова, который является естественным обобщением частичных сумм полиномиальных рядов Фурье–Чебышёва.

Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$, где a_k либо являются действительными и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке $[-1,\ 1]$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор типа Фурье–Чебышёва порядка не выше n, (см. [31]):

$$s_n(f,\ x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v) \frac{\sin \lambda_n(u,\ v)}{\sin \dfrac{v-u}{2}}\, dv, \quad x = \cos u, \tag{1}$$

где

$$\lambda_n(u,\ v) = \int\limits_u^v \lambda_n(y)\, dy,$$

$$\lambda_n(y) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\alpha_k^2}{1+2\alpha_k \cos y + \alpha_k^2}, \quad \alpha_k = \frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}}, \ |\alpha_k| < 1.$$

Оператор $s_n : f \to \mathbb{R}_n(A),$ где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида:

$$\frac{p_n(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k x)},$$

A – множество параметров $(a_1, \ldots, a_n),$ $p_n(x)$ – некоторый многочлен степени не выше $n,$ коэффициенты которого зависят от $a_k,$ является точным на константах. В частности, если положить $a_k = 0,$ $k = 1, \ldots, n, ,$ то $s_n(f, \ x)$ – есть частичная сумма ряда Фурье по многочленам Чебышева.

Рациональные аппроксимации функции Маркова на отрезке $[-1, \ 1]$ интегральными операторами (1) с фиксированным количеством геометрически различных полюсов изучены в [32]. В частности, когда мера μ удовлетворяет условиям: $\operatorname{supp} \mu = [1, a],$ $a > 1,$ $d\mu(t) = \varphi(t)\, dt$ и $\varphi(t) \asymp (t-1)^{\alpha}$ на $[1, a],$ получены асимптотические оценки наилучших равномерных приближений в случае четной кратности полюсов аппроксимирующей функции.

В настоящей работе вводятся суммы Фейера рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышёва (1) с фиксированным количеством геометрически различных полюсов и изучаются аппроксимации функции Маркова на отрезке $[-1, \ 1].$ Представляет интерес получить соответствующие оценки равномерных приближений этим методом и установить, что суммы Фейера также доставляют определенным классам функций равномерные приближения лучшие в смысле порядка, чем соответствующие полиномиальные.

1. Суммы Фейера рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышёва. Пусть q – произвольное натуральное число. A – есть множество параметров таких, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n,$ ровно q различных и кратность каждого параметра равна $m,$ $n = mq,$ $n > q.$

Составим среднее арифметическое:

$$\sigma_{n, \ q}(f, \ x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} s_{kq}(f, \ x), \quad x \in [-1, \ 1], \ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{2}$$

Выражение (2) естественно назвать суммами Фейера рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышева с q геометрически различными полюсами. Очевидно, что оператор $\sigma_{n,q}$: $f \to \mathbb{R}_n(A),$ где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида:

$$\frac{p_n(x)}{\left(\prod\limits_{k=1}^{q}(1+a_k x)\right)^m}, \quad \alpha_k = \frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}}, \ k = 1, 2, \ldots, q,$$

$p_n(x) \in \mathbb{P}_n$ и является точным на константах.

Таким образом, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с q геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости.

Введём следующие обозначения:

$$\varepsilon_{n, \ q}(x, \ A) = \hat{\mu}(x) - \sigma_{n, \ q}(\hat{\mu}, \ x), \quad x \in [-1, 1], \tag{3}$$

$$\varepsilon_{n, \ q}(A) = \|\hat{\mu}(x) - \sigma_{n, \ q}(\hat{\mu}, \ x)\|_{C[-1, \ 1]}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Будем полагать, что $\operatorname{supp}\mu \subset [1, +\infty)$ и

$$\int \frac{d\mu(t)}{t-1} < \infty. \tag{4}$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть мера μ удовлетворяет условию (4), а мера ν определяется соотношением*

$$d\nu(y) = \frac{4y^2}{1-y^2} d\mu(\eta(y)), \quad y \in (0, 1], \tag{5}$$

где

$$\eta(y) = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right).$$

Тогда для приближений функций Маркова $\hat{\mu}(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ суммами Фейера (2) имеет место:

1) интегральное представление

$$\varepsilon_{n,q}(x, A) = \frac{1}{m+1} \int \sum_{k=0}^{m} \cos\psi_{kq}(u, y)\omega_q^k(y) \frac{d\nu(y)}{\sqrt{1 - 2y\cos u + y^2}}; \tag{6}$$

2) оценка равномерных приближений

$$\varepsilon_{n,q}(A) \le \frac{1}{m+1} \max_{x\in[-1,1]} \int \frac{1 - |\omega_q^{m+1}(y)|}{1 - |\omega_q(y)|} \frac{|d\nu(y)|}{\sqrt{1 - 2y\cos u + y^2}}, \quad x = \cos u,$$

где

$$\psi_{kq}(u,\ y) = \arg\frac{1 - \xi y}{\xi\omega_q^k(\xi)}, \quad \omega_q(y) = \prod_{j=1}^{q} \frac{y + \alpha_j}{1 + \alpha_j y},\ x = \cos u,\ \xi = \mathrm{e}^{iu}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть

$$\delta_{kq}(x,\ A) = \hat{\mu}(x) - s_{kq}(\hat{\mu},\ x), \quad x \in [-1,\ 1],\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m,\ n = mq,$$

приближения функции Маркова на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышёва (1) в случае q геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции. Просуммируем правую и левую части последнего равенства по k от 0 до m и разделим их на $m+1$. Тогда

$$\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} \delta_{kq}(x,\ A) = \hat{\mu}(x) - \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} s_{kq}(\hat{\mu},\ x) = \varepsilon_{n,\ q}(x,\ A), \quad x \in [-1,\ 1], \tag{8}$$

где $\varepsilon_{n,\ q}(x,\ A)$ – приближения функции Маркова, определенные в (3).

С другой стороны, известно [32], что в рассматриваемом нами случае имеет место интегральное представление

$$\delta_{kq}(x,\ A) = \int \frac{\cos\psi_{kq}(u,\ y)}{\sqrt{1 - 2y\cos u + y^2}} \omega_q^k(y)\, d\nu(y), \quad x = \cos u,\ k = 0, 1, \ldots, m,$$

где величина $\psi_{kq}(u,\ y)$ определена в (7). Подставив последнее соотношение в (8), получим (6).

Для доказательства второго утверждения настоящей теоремы, достаточно воспользоваться оценкой $|\cos\psi_{kq}(u,\ y)| \le 1$. Теорема 1 доказана.

2. Оценки приближений функций Маркова в случае меры специального вида. При исследовании приближений функций Маркова рассматривается случай, когда производная меры $\mu(t)$ слабо эквивалентна некоторой степенной функции [20, 21]. Такой случай изучается нами далее. Будем полагать также, что $a_k \in [0,\ 1)$ и для большей наглядности сделаем замену $\alpha_k \mapsto -\alpha_k,\ k = 1,\ 2,\ \ldots, q,$ где зависимость между a_k и α_k указана в (1).

Теорема 2. *Пусть* $supp\,\nu \in [d, 1],\ 0 < d < 1,\ d\mu(t) = \varphi(t)dt$ *и* $\varphi(t) \asymp (t-1)^{\gamma}, \gamma > 0.$ *Тогда в условиях теоремы 1 для приближений функции* $\hat{\mu}(x)$ *на отрезке* $[-1,\ 1]$ *суммами Фейера справедливы:*

1) оценка поточечных приближений:

$$|\varepsilon_{n,\ q}(x,\ A)| \leq \frac{2^{1-\gamma}}{m+1} \int\limits_d^1 \frac{(1-y)^{2\gamma} y^{-\gamma}}{\sqrt{1-2y\cos u + y^2}} \frac{1-|\omega_q^{m+1}(y)|}{1-|\omega_q(y)|}\, dy, \quad x = \cos u, \tag{9}$$

2) оценка равномерных приближений:

$$\varepsilon_{n,\ q}(A) \leq \varepsilon^*_{n,\ q}(A), \quad \alpha_k \in [0,\ 1),\ n \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

где

$$\varepsilon^*_{n,\ q}(A) = \frac{2^{1-\gamma}}{m+1} \int\limits_d^1 (1-y)^{2\gamma-1} y^{-\gamma} \frac{1-|\omega_q^{m+1}(y)|}{1-|\omega_q(y)|}\, dy,$$

$\omega_q(y)$ *из (7),* $\alpha_k \mapsto -\alpha_k,\ k = 1, \ldots, q.$

Доказательство. Из (5) и (6) следует, что в случае $d\mu(t) = \varphi(t)dt$ и $\varphi(t) \asymp (t-1)^{\gamma}$, естественно рассматривать приближения (3) в виде

$$\varepsilon_{n,\ q}(x,\ A) = \frac{2^{1-\gamma}}{m+1} \int\limits_d^1 \frac{(1-y)^{2\gamma} y^{-\gamma}}{\sqrt{1-2y\cos u + y^2}} \sum_{k=0}^{m} \cos\psi_{kq}(u,\ y)\omega_q^k(y) dy,$$

где $d \in [0, 1),\ x = \cos u,\ \omega_q(y), \psi_{kq}(u,\ y)$ из (7). Чтобы из последнего соотношения прийти к оценке (9) достаточно воспользоваться неравенством $|\cos\psi_{kq}(u, y)| \leq 1$ и применить формулу суммы геометрической прогрессии.

Замечая, что

$$\sqrt{1-2y\cos u + y^2} \geq 1 - y^2, \quad y \in [0, 1],$$

из (9) получим неравенство (10). Доказательство теоремы 2 завершено.

В соотношениях (9) и (10) положим значения параметров $\alpha_k = 0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ q.$ Тогда $\varepsilon_n(x, O) = \varepsilon_n^{(0)}(x),\ \ \varepsilon_n(O) = \varepsilon_n^{(0)},\ O = (0, \ldots, 0),$ – соответственно поточечные и равномерные приближения функции Маркова $\hat{\mu}(x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$ суммами Фейера рядов Фурье по системе многочленов Чебышёва первого рода при условии, что мера $\mu(t)$ удовлетворяет условиям в формулировке теоремы 2. В этом случае справедливо

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 для приближений функций Маркова* $\hat{\mu}(x)$ *на отрезке* $[-1, 1]$ *средними Фейера рядов Фурье по системе многочленов Чебышёва первого рода справедливы соотношения*

$$|\varepsilon_n^{(0)}(x)| \leq \frac{2^{1-\gamma}}{n+1} \int\limits_d^1 \frac{(1-y)^{2\gamma} y^{-\gamma}}{\sqrt{1-2y\cos u + y^2}} \frac{1-y^{n+1}}{1-y}\, dy, \quad x = \cos u,\ x \in [-1,\ 1],$$

$$\varepsilon_n^{(0)} = \frac{2^{1-\gamma}}{n+1}\int\limits_d^1 (1-y)^{2\gamma-1}y^{-\gamma}\frac{1-y^{n+1}}{1-y}\,dy, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Отметим, что допустив возможность параметра d принимать нулевое значение, интегралы в последних соотношениях существуют при выполнении условия $\gamma\in(0,\ 1)$.

3. Асимптотика мажоранты равномерных приближений. Найдем асимптотическое выражение правой части оценки (10) при $n\to\infty$. Для решения поставленной задачи в интеграле выполним замену переменного по формуле $y=(1-u)/(1+u)$, $dy=-2du/(1+u)^2$. Тогда

$$\varepsilon^*_{n,\ q}(A) = \frac{2^{\gamma+1}}{m+1}\int\limits_0^D f_\gamma(u)\frac{1-|\pi_q(u)|^{m+1}}{1-|\pi_q(u)|}du, \quad D=\frac{1-d}{1+d},\ D\in(0,1),\ n\in\mathbb{N}, \tag{11}$$

где

$$f_\gamma(u)=\frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}, \quad \beta_j=\frac{1-\alpha_j}{1+\alpha_j},\ \beta_j\in(0,1],\ \pi_q(u)=\prod_{j=1}^q\frac{\beta_j-u}{\beta_j+u}. \tag{12}$$

Отметим, что в рассматриваемом нами случае для каждого значения $n\in\mathbb{N}$ может выбираться соответствующее множество точек $A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\alpha_n)$ и $\alpha_k=\alpha_k(m)\to1$ при $m\to\infty$, $k=1,\ 2,\ \ldots,q$. При этом будем полагать, что выполняются следующие условия:

$$\lim_{m\to\infty} m(1-\alpha_k)=\infty, \quad k=1,2,\ldots,q.$$

Из сказанного следует, что для любого значения $d=a-\sqrt{a^2-1}$ существует такое m_0, $m_0=1,\ 2,\ \ldots,$ что при $m\to\infty$ будут $\alpha_k\in[d,\ 1)$, $k=1,\ 2,\ \ldots,q$. Эти ограничения будем учитывать в дальнейших рассуждениях. В этом случае без нарушения общности можно полагать параметры упорядоченными следующим образом

$$0<\beta_q<\ldots<\beta_1<D\le1.$$

Справедлива

Теорема 3. *Для величины $\varepsilon^*_{n,q}(A)$ при $m\to\infty$ имеют место асимптотические равенства*

$$\varepsilon^*_{n,q}(A)\sim\begin{cases}\dfrac{2^{1-\gamma}\Gamma(2\gamma)}{(1-2\gamma)\left((m+1)\sum\limits_{j=1}^q\dfrac{1}{\beta_j}\right)^{2\gamma}}+\Phi^{(\gamma)}_{m+1}(q,A), & \gamma\in\left(0,\dfrac12\right),\\ \dfrac{\sqrt2\ln(m+1)}{(m+1)\sum\limits_{j=1}^q\dfrac{1}{\beta_j}}+\Phi^{(\frac12)}_{m+1}(q,A), & \gamma=\dfrac12,\\ \dfrac{2^{\gamma+1}}{m+1}\int\limits_0^{\beta_q}\dfrac{f_\gamma(u)\,du}{1-\pi_q(u)}+\Phi^{(\gamma)}_{m+1}(q,A), & \gamma>\dfrac12,\end{cases} \tag{13}$$

где

$$\Phi^{(\gamma)}_{m+1}(q,A)=\frac{2^{\gamma+1}}{m+1}\left[\sum_{k=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{k+1}}^{\beta_k} f_\gamma(u)\frac{du}{1-\pi_{q,k}(u)}+\int\limits_{\beta_1}^{D} f_\gamma(u)\frac{du}{1-|\pi_q(u)|}\right], \tag{14}$$

$$\pi_{q,\ k}(u)=\prod_{j=1}^k\frac{\beta_j-u}{\beta_j+u}\prod_{j=k+1}^q\frac{u-\beta_j}{u+\beta_j}. \tag{15}$$

$\Gamma(2\gamma)$ – *гамма-функция Эйлера,* $n = mq$.

Доказательство. Представим интеграл в (11) в виде

$$\varepsilon^*_{n,\ q}(A) = \frac{2^{\gamma+1}}{m+1}\left[I_1(m,\ A) + I_2(m,\ A) + I_3(m,\ A)\right], \tag{16}$$

где

$$I_1(m, A) = \int\limits_0^{\beta_q} f_\gamma(u)\frac{1-\pi_q^{m+1}(u)}{1-\pi_q(u)}du\,du,$$

$$I_2(m, A) = \sum_{k=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{k+1}}^{\beta_k} f_\gamma(u)\frac{1-\pi_{q,k}^{m+1}(u)}{1-\pi_{q,k}(u)}\,du,$$

$$I_3(m, A) = \int\limits_{\beta_1}^{D} f_\gamma(u)\frac{1-|\pi_q(u)|^{m+1}}{1-|\pi_q(u)|}\,du,$$

функция $f_\gamma(u)$ определена в (12).

Изучим асимптотическое поведение при $m \to \infty$ каждого из трех интегралов по отдельности. Дальнейшему доказательству теоремы предпошлём три леммы, которые, по существу, являются его этапами.

Лемма 1. *При* $m \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$I_1(m,\ A) \sim \begin{cases} \dfrac{\Gamma(2\gamma)(m+1)^{1-2\gamma}}{(1-2\gamma)\left(2\displaystyle\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{\beta_j}\right)^{2\gamma}}, & \gamma \in \left(0,\ \dfrac{1}{2}\right), \\ \dfrac{\ln(m+1)}{2\displaystyle\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{\beta_j}}, & \gamma = \dfrac{1}{2}, \\ \displaystyle\int\limits_0^{\beta_q} f_\gamma(u)\frac{du}{1-\pi_q(u)}, & \gamma > \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{17}$$

где $\Gamma(2\gamma)$ *– гамма-функция Эйлера,* $\pi_q(u)$ *из (12).*

Доказательство. Воспользуемся методами, предложенными в [33]. Пусть значение параметра $\gamma \in (0, 1/2]$. Продифференцируем интеграл $I_1(m,\ A)$ по параметру m. Тогда

$$\frac{\partial I_1(m,\ A)}{\partial m} = -\int\limits_0^{\beta_q} f_\gamma(u)\frac{\ln\pi_q(u)}{1-\pi_q(u)}\mathrm{e}^{(m+1)S(u)}du, \quad S(u) = \sum_{j=1}^{q}\ln\frac{\beta_j - u}{\beta_j + u}.$$

Исследуем асимптотическое поведение последнего интеграла при $m \to \infty$. Воспользуемся методом Лапласа [34, 35]. Функция $S(u)$ убывает на отрезке $[0, \beta_q]$, следовательно, достигает своего максимального значения при $u = 0$. Раскладывая функцию $S(u)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $u = 0$, а также учитывая, что

$$f_\gamma(u)\frac{\ln\pi_q(u)}{1-\pi_q(u)} \sim -u^{2\gamma-1}, \quad u \to 0,$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $m \to \infty$ находим

$$\frac{\partial I_1(m, A)}{\partial m} \sim \int\limits_0^{\varepsilon} u^{2\gamma-1} \exp\left[-2(m+1)\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{\beta_j}u\right] du.$$

Выполнив в последнем интеграле замену переменного $2(m+1)(\sum_{j=1}^{q} 1/\beta_j)u \mapsto t,$ получим

$$\frac{\partial I_1(m, A)}{\partial m} \sim \frac{\Gamma(2\gamma)}{\left(2(m+1)\sum\limits_{j=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_j}\right)^{2\gamma}}, \quad m \to \infty.$$

Чтобы прийти к асимптотике первоначального интеграла, проинтегрируем правую и левую части последнего асимптотического равенства по параметру. Тогда

$$I_1(m,\ A) \sim \begin{cases} \dfrac{\Gamma(2\gamma)(m+1)^{1-2\gamma}}{(1-2\gamma)\left(2\sum\limits_{j=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_j}\right)^{2\gamma}}, & \gamma \in \left(0,\ \dfrac{1}{2}\right), \\ \dfrac{\ln(m+1)}{2\sum\limits_{j=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_j}}, & \gamma = \dfrac{1}{2}, \quad m \to \infty. \end{cases} \tag{18}$$

Если $\gamma > 1/2,$ то

$$I_1(m,\ A) = \int\limits_0^{\beta_q} f_\gamma(u)\frac{du}{1-\pi_q(u)} - \int\limits_0^{\beta_q} f_\gamma(u)\frac{\pi_q^{m+1}(u)}{1-\pi_q(u)}\, du,$$

где $\pi_q(u)$ из (12). Первый интеграл не зависит от $m.$ Исследовав асимптотическое поведение второго интеграла, найдем, что при $\gamma > 1/2$

$$I_1(m,\ A) \sim \int\limits_0^{\beta_q} f_\gamma(u)\frac{du}{1-\pi_q(u)} - \frac{\Gamma(2\gamma-1)}{(m+1)^{2\gamma-1}\left(2\sum\limits_{j=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_j}\right)^{2\gamma}}, \quad m \to \infty.$$

Из (18) и последнего асимптотического равенства получим (17).

Отметим, что при $\gamma > 1/2$ справедливо асимптотическое равенство

$$\frac{\Gamma(2\gamma-1)}{(m+1)^{2\gamma}\left(2\sum\limits_{j=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_j}\right)^{2\gamma}} = o\left(\frac{1}{m+1}\int\limits_0^{\beta_q} f_\gamma(u)\frac{du}{1-\pi_q(u)}\right), \quad m \to \infty. \tag{19}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При* $m \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$I_2(m,\ A) \sim \sum_{k=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{k+1}}^{\beta_k} f_\gamma(u)\frac{du}{1-\pi_{q,k}(u)} + \delta_{m+1}(q, A), \tag{20}$$

где

$$\delta_{m+1}(q,A) \sim -\sqrt{\frac{\pi}{2(m+1)}} \sum_{k=1}^{q-1} f_\gamma(b_k) \frac{\pi_{q,k}^{m+1}(b_k)}{(1-\pi_{q,k}(b_k))\sqrt{b_k \sum\limits_{j=1}^{q} \frac{\beta_j}{(\beta_j^2-b_k^2)^2}}}, \tag{21}$$

$\pi_{q,\ k}(u)$ *из (15), * $b_k \in (\beta_{k+1}, \beta_k),\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1,$ *– единственный корень уравнения*

$$-\sum_{j=1}^{k} \frac{\beta_j}{\beta_j^2 - u^2} + \sum_{j=k+1}^{q} \frac{\beta_j}{u^2 - \beta_j^2} = 0. \tag{22}$$

Доказательство. Разобьем каждый из $q-1$ интегралов, которые входят в определение $I_2(m,\ A)$ (см. (16)) на два интеграла

$$I_2(m,A) = \sum_{k=1}^{q-1} \int\limits_{\beta_{k+1}}^{\beta_k} f_\gamma(u) \frac{du}{1-\pi_{q,k}(u)} + \delta_{m+1}(q,A), \tag{23}$$

где

$$\delta_{m+1}(q,A) = -\sum_{k=1}^{q-1} \int\limits_{\beta_{k+1}}^{\beta_k} f_\gamma(u) \frac{\pi_{q,k}^{m+1}(u)}{1-\pi_{q,k}(u)} du.$$

Первый интеграл существует при $\beta_k \in (0,\ D),\ k = 1, \ldots, q,$ и не зависит от m. Для исследования второго интеграла применим метод Лапласа [34, 35]. Представим его в виде

$$\delta_{m+1}(q,\ A) = -\sum_{k=1}^{q-1} \int\limits_{\beta_{k+1}}^{\beta_k} f_\gamma(u) \frac{\mathrm{e}^{(m+1)S(u)}}{1-\pi_{q,k}(u)} du, \quad S(u) = \sum_{j=1}^{k} \ln \frac{\beta_j - u}{\beta_j + u} + \sum_{j=k+1}^{q} \ln \frac{u-\beta_j}{u+\beta_j}.$$

Поскольку

$$S^{'}(u) = \sum_{j=1}^{k} \frac{-2\beta_j}{\beta_j^2 - u^2} + \sum_{j=k+1}^{q} \frac{2\beta_j}{u^2-\beta_j^2},\ S^{''}(u) = \sum_{j=1}^{k} \frac{-4\beta_j u}{(\beta_j^2-u^2)^2} + \sum_{j=k+1}^{q} \frac{-4\beta_j u}{(u^2-\beta_j^2)^2} < 0,$$

причем $\lim_{u\to\beta_{j+1}} S^{'}(u) = +\infty,\ \lim_{u\to\beta_j} S^{'}(\beta_u) = -\infty,$ то заключаем, что существует внутренняя точка $b_k \in (\beta_{k+1}, \beta_k),$ являющаяся при каждом фиксированном k решением уравнения (22), в которой функция $S(u)$ достигает на данном интервале максимума. Причем $S^{'}(b_k) = 0.$ Используя разложения

$$S(u) = \sum_{j=1}^{k} \ln \frac{\beta_j - b_k}{\beta_j + b_k} + \sum_{j=k+1}^{q} \ln \frac{b_k - \beta_j}{b_k + \beta_j} -$$

$$-2b_k \left[\sum_{j=1}^{k} \frac{\beta_j}{(\beta_j^2 - b_k^2)^2} + \sum_{j=k+1}^{q} \frac{\beta_j}{(b_k^2 - \beta_j^2)^2} \right] (u-b_k)^2 + o((u-b_k)^2),$$

$$\frac{f_\gamma(u)}{1-\pi_{q,k}(u)} = \frac{f_\gamma(b_k)}{1-\pi_{q,k}(b_k)} + o(1),$$

справедливые при $u \to b_k$, и достаточно малом $\varepsilon > 0$, $m \to \infty$, находим, что

$$\delta_{m+1}(q,\ A) \sim -\sum_{k=1}^{q-1} f_\gamma(b_k) \frac{\pi_{q,k}^{m+1}(b_k)}{1-\pi_{q,k}(b_k)} \times$$

$$\times \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left[-2(m+1)b_k\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\beta_j}{(\beta_j^2-b_k^2)^2}+\sum_{j=k+1}^{q}\frac{\beta_j}{(b_k^2-\beta_j^2)^2}\right)u^2\right]du.$$

Выполнив под знаком интеграла замену переменного по формуле

$$2(m+1)b_k\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\beta_j}{(\beta_j^2-b_k^2)^2}+\sum_{j=k+1}^{q}\frac{\beta_j}{(b_k^2-\beta_j^2)^2}\right)u^2 \mapsto u^2,$$

и учитывая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi},$$

получим для величины $\delta_{m+1}(q,\ A)$ асимптотическое выражение (21). Из (23) и последнего асимптотического равенства придем к (21), чем и завершим доказательство леммы 2.

Лемма 3. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$I_3(m,\ A) \sim \int\limits_{\beta_1}^{D} f_\gamma(u)\frac{du}{1-|\pi_q(u)|} + \rho_{m+1}(q,\ A), \quad m\to\infty, \tag{24}$$

где

$$\rho_{m+1}(q,\ A) \sim \begin{cases} \dfrac{-D^{2\gamma-1}\,|\pi_q(D)|^{m+1}}{(1+D)(1-D^2)^\gamma\,(1-|\pi_q(D)|)\,(m+1)\displaystyle\sum_{j=1}^{q}\frac{2\beta_j}{D^2-\beta_j^2}}, & D\neq 1,\\ \dfrac{1}{4}\dfrac{-\Gamma(1-\gamma)\,|\pi_q(1)|^{m+1}}{(1-|\pi_q(1)|)\left((m+1)\displaystyle\sum_{j=1}^{q}\frac{2\beta_j}{1-\beta_j^2}\right)^{1-\gamma}}, & D=1,\end{cases}$$

$\pi_q(u)$ *из (12),* $\Gamma(1-\gamma)$ *– гамма-функция Эйлера.*

Доказательство сформулированной леммы проводится совершенно аналогично доказательству леммы 2.

Теперь вернемся к доказательству теоремы 3. Очевидно, при $m\to\infty$ порядок убывания величин $\delta_{m+1}(q,\ A)$ и $\rho_{m+1}(q,\ A)$ является экспоненциальным. Следовательно, из асимптотических равенств (20) и (24) заключаем, что

$$\delta_{m+1}(q,A) = o\left(\sum_{k=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{k+1}}^{\beta_k} f_\gamma(u)\frac{du}{1-\pi_{q,k}(u)}\right), \quad m\to\infty,$$

и

$$\rho_{m+1}(q,A) = o\left(\int\limits_{\beta_1}^{D} f_\gamma(u)\frac{du}{1-|\pi_q(u)|}\right), \quad m\to\infty,$$

соответственно $\pi_q(u)$ из (12), $\pi_{q,\ k}(u)$ из (15). С учетом последних асимптотических соотношений и (19), подставив (17), (20) и (24) в (16), придем к (13). Теорема 3 доказана.

Положив в теореме 3 значения параметров $\alpha_j = 0,\ \ j = 1,\ 2,\ \ldots, q,$ где $\beta_j = (1-\alpha_j)/(1-\alpha_j)$, величина $\varepsilon^*_{n,1}(O) = \varepsilon^{(0)}_n$ есть асимптотическая оценка равномерных приближений в условиях теоремы 2 функций Маркова суммами Фейера рядов Фурье по системе полиномов Чебышёва первого рода.

Следствие 2. *Справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon^{(0)}_n \sim \begin{cases} \dfrac{\Gamma(2\gamma)}{2^{\gamma-1}(1-2\gamma)(n+1)^{2\gamma}}, \quad \gamma \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right), \\ \sqrt{2}\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}, \quad \gamma = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{c(\gamma, d)}{n+1}, \quad \gamma > \dfrac{1}{2}, \quad n \to \infty, \end{cases} \tag{25}$$

где

$$c(\gamma, d) = \int\limits_d^1 \frac{(1-y)^{2\gamma-2}}{y^\gamma}\, dy,$$

$\Gamma(2\gamma)$ *– гамма-функция Эйлера.*

Заметим, что параметр $d = 0$ в формулировке теоремы 3 может принимать и нулевое значение. В этом случае $\gamma \in (0,\ 1)$.

4. Наилучшая мажоранта равномерных приближений. Представляет интерес минимизировать правую часть соотношения (13) посредством выбора оптимального для этой задачи набора $A^* = \left\{\alpha^* : \alpha^* = (\alpha^*_1, \ldots, \alpha^*_q)\right\}$. Другими словами, будем искать оценку наилучшего равномерного приближения функций Маркова в условиях теоремы 2 рациональным интегральным оператором (2). Положим

$$\varepsilon_{n,\ q} = \inf_A \varepsilon_{n,\ q}(A), \quad \varepsilon^*_{n,\ q} = \inf_A \varepsilon^*_{n,\ q}(A),$$

где $\varepsilon_{n,\ q}(A)$ – равномерные приближения функции Маркова суммами (2). Отметим очевидное неравенство, следующее из (10)

$$\varepsilon_{n,\ q} \le \varepsilon^*_{n,\ q}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4. *При* $n \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon^*_{n,q} \sim \begin{cases} \dfrac{\mu(q,\gamma)}{(n+1)^{1-\frac{(1-2\gamma)^q}{1+2\gamma}}}, \quad \gamma \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right), \\ 2q\sqrt{2c\left(\dfrac{1}{2}\right)}\dfrac{\sqrt{\ln_q(n+1)}}{n+1}, \quad \gamma = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2^{\gamma+1}q}{n+1}\inf\limits_A F_\gamma(A), \quad \gamma > \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

где

$$\mu(q,\gamma) = q^{1-\frac{(1-2\gamma)^q}{1+2\gamma}}(1+2\gamma)\frac{2^{(1-\gamma)\left(2\frac{(1-2\gamma)^{q-1}}{1+2\gamma}-1\right)}}{(1-2\gamma)^{\frac{1-(1-2\gamma)^q}{2\gamma(1+2\gamma)}}}\gamma^{1-\frac{(1-2\gamma)^{q-1}}{1+2\gamma}}[c(\gamma)]^{\frac{2\gamma}{1+2\gamma}}[\Gamma(2\gamma)]^{\frac{(1-2\gamma)(q-1)}{1+2\gamma}},$$

$$c(\gamma) = \begin{cases} \int\limits_0^D \dfrac{u^{2\gamma}\,du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}, & \gamma > 0,\ d \in (0,1),\ D = \dfrac{1-d}{1+d}, \\ \int\limits_0^1 \dfrac{u^{2\gamma}\,du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}, & \gamma \in (0,1),\ d = 0, \end{cases} \tag{26}$$

$$\ln_q(n+1) = \underbrace{1 + \ln(1 + \ln(1 + \ldots + \ln\ln(n+1)))}_{q\ \text{раз}}, \tag{27}$$

$$F_\gamma(A) = \int\limits_0^{\beta_q} f_\gamma(u)\frac{du}{1-\pi_q(u)} + \sum_{k=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{k+1}}^{\beta_k} f_\gamma(u)\frac{du}{1-\pi_{q,k}(u)} + \int\limits_{\beta_1}^{D} f_\gamma(u)\frac{du}{1-|\pi_q(u)|}, \tag{28}$$

$\pi_q(u)$ и $f_\gamma(u)$ из (12), $\pi_{q,\,k}(u)$ из (15).

Доказательство. Исследуем асимптотическое равенство (13). При постоянных β_j, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ q$, порядок в указанном соотношении, очевидно, не отличается от полиномиального.

Пусть $\gamma \in (0,\ 1/2]$. В этом случае будем полагать, что $\beta_j = \beta_j(m) \to 0$, $m \to \infty$. При этом из (14) находим, что

$$\Phi_{m+1}^{(\gamma)}(q, A) \sim \frac{2^\gamma}{m+1} \begin{cases} \dfrac{1}{1-2\gamma}\displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} \frac{\beta_k}{\beta_{k+1}^{1-2\gamma}} + \frac{c(\gamma)}{\beta_1},\ \gamma \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right), \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} \beta_k \ln\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} + \frac{c(\frac{1}{2})}{\beta_1},\ \gamma = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

где $c(\gamma)$ определена в (26). С учетом сказанного асимптотические равенства (13) при $m \to \infty$ примут вид:

$$\varepsilon_{n,q}^*(A) \sim \frac{2^\gamma}{(1-2\gamma)(m+1)}\left[2^{1-2\gamma}\Gamma(2\gamma)\beta_q^{2\gamma}(m+1)^{1-2\gamma} + \sum_{k=1}^{q-1}\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}^{1-2\gamma}} + \frac{(1-2\gamma)c(\gamma)}{\beta_1}\right], \tag{29}$$

если $\gamma \in (0,\ 1/2)$ и

$$\varepsilon_{n,q}^*(A) \sim \frac{\sqrt{2}}{m+1}\left[\ln(m+1)\beta_q + \sum_{k=1}^{q-1}\beta_k \ln\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} + \frac{c(\frac{1}{2})}{\beta_1}\right], \quad \gamma = \frac{1}{2}. \tag{30}$$

При каждом фиксированном $\gamma \in (0,\ 1/2]$ правые части асимптотических равенств (29) и (30) представляют собой функции переменных $(\beta_1, \ldots, \beta_q)$, непрерывные в каждой точке q-мерного куба $[\delta, 1]^q$, $\delta = \delta(n) > 0$. Из сказанного заключаем, что они имеют строгий минимум при некотором $\beta^* = (\beta_1^*, \ldots, \beta_q^*)$. Причем поскольку $\beta_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, q$, соответствует полиномиальному случаю, то можно предположить, что β^* – внутренняя точка куба $[\delta, 1]^q$. Для того чтобы найти оптимальный набор β^* для соответствующего асимптотического равенства, решим экстремальную задачу

$$\varepsilon_{n,q}^*(A) \underset{A}{\longrightarrow} \inf.$$

Рассмотрим каждый случай по отдельности. Так, в квадратной скобке равенства (29) приходим к задаче

$$\Psi^{(\gamma)}(A) = c_q\beta_q^{2\gamma} + \frac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{1-2\gamma}} + \frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}^{1-2\gamma}} + \cdots + \frac{\beta_2}{\beta_3^{1-2\gamma}} + \frac{\beta_1}{\beta_2^{1-2\gamma}} + \frac{c_1}{\beta_1} \underset{A}{\longrightarrow} \inf,$$

где для краткости положено

$$c_q = 2^{1-2\gamma}\Gamma(2\gamma)(m+1)^{1-2\gamma}, \quad c_1 = (1-2\gamma)c(\gamma).$$

Функция $\Psi^{(\gamma)}(A)$ переменных $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$ непрерывно дифференцируема в кубе $(0,1)^q$. Естественно искать точку минимума этой функции там, где выполняется необходимое условие экстремума: $\partial\Psi^{(\gamma)}(A)/\partial\beta_j = 0, \ \ j = 1, 2, \dots, q$. Несложные вычисления приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} 2\gamma c_q \beta_q^{2\gamma-1} - (1-2\gamma)\dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{2-2\gamma}} = 0, \\[2ex] \dfrac{1}{\beta_q^{1-2\gamma}} - (1-2\gamma)\dfrac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}^{2-2\gamma}} = 0, \\[2ex] \dfrac{1}{\beta_{q-1}^{1-2\gamma}} - (1-2\gamma)\dfrac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}^{2-2\gamma}} = 0, \\[2ex] \qquad \dots \\[2ex] \dfrac{1}{\beta_3^{1-2\gamma}} - (1-2\gamma)\dfrac{\beta_1}{\beta_2^{2-2\gamma}} = 0, \\[2ex] \dfrac{1}{\beta_2^{1-2\gamma}} - \dfrac{c_1}{\beta_1^2} = 0, \end{cases} \tag{31}$$

из которой последовательно находим:

$$\frac{\beta_1}{\beta_2^{1-2\gamma}} = \frac{c_1}{\beta_1}, \quad \frac{\beta_k}{\beta_{k+1}^{1-2\gamma}} = (1-2\gamma)^{k-1}\frac{c_1}{\beta_1}, \quad k = 2, 3, \dots, q-1.$$

С другой стороны, из первого уравнения системы получаем

$$2\gamma c_q \beta_q^{2\gamma} = (1-2\gamma)\frac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{1-2\gamma}} = (1-2\gamma)^{q-1}\frac{c_1}{\beta_1}.$$

Таким образом, с оптимальным набором параметров функция $\Psi^{(\gamma)}(A)$ имеет вид

$$\Psi^{(\gamma)}(A^*) = \frac{(1-2\gamma)^{q-1}}{2\gamma}\frac{c_1}{\beta_1^*} + (1-2\gamma)^{q-2}\frac{c_1}{\beta_1^*} + (1-2\gamma)^{q-3}\frac{c_1}{\beta_1^*} + \dots + \frac{c_1}{\beta_1^*} + \frac{c_1}{\beta_1^*} = \frac{1+2\gamma}{2\gamma}\frac{c_1}{\beta_1^*}. \tag{32}$$

Осталось найти параметр β_1^*. С этой целью снова обратимся к системе (31). Последовательно находим

$$\begin{cases} \dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q} = \dfrac{2\gamma C_q}{1-2\gamma}, \\[2ex] \dfrac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} = \dfrac{1}{1-2\gamma}\left(\dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q}\right)^{1-2\gamma} = \dfrac{1}{1-2\gamma}\left(\dfrac{2\gamma C_q}{1-2\gamma}\right)^{1-2\gamma}, \\[2ex] \dfrac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}} = \dfrac{1}{1-2\gamma}\left(\dfrac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}}\right)^{1-2\gamma} = \dfrac{(2\gamma C_q)^{(1-2\gamma)^2}}{(1-2\gamma)(1-2\gamma)^{1-2\gamma}(1-2\gamma)^{(1-2\gamma)^2}}, \\[2ex] \ldots \\[2ex] \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = \dfrac{(2\gamma c_q)^{(1-2\gamma)^{(q-2)}}}{(1-2\gamma)^{[1+(1-2\gamma)+(1-2\gamma)^2+\ldots+(1-2\gamma)^{(q-2)}]}} = \dfrac{(2\gamma c_q)^{(1-2\gamma)^{(q-2)}}}{(1-2\gamma)^{\frac{1-(1-2\gamma)^{(q-1)}}{2\gamma}}}. \end{cases} \tag{33}$$

С другой стороны, из последнего уравнения в (31) получим

$$\beta_2 = \frac{\beta_1^{\frac{2}{1-2\gamma}}}{c_1^{\frac{1}{1-2\gamma}}}.$$

Подставив β_2 в последнее равенство системы (33), после необходимых преобразований будем иметь

$$\beta_1^* = c_1^{\frac{1}{1+2\gamma}}\left(\frac{(1-2\gamma)^{\frac{1-(1-2\gamma)^{(q-1)}}{2\gamma}}}{(2\gamma c_q)^{(1-2\gamma)^{(q-2)}}}\right)^{\frac{1-2\gamma}{1+2\gamma}}, \quad \gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

При найденном β_1^* в (32) получим

$$\Psi^{(\gamma)}(A^*) = \frac{1+2\gamma}{2\gamma} c_1^{\frac{2\gamma}{1+2\gamma}}\left(\frac{(2\gamma c_q)^{(1-2\gamma)^{(q-2)}}}{(1-2\gamma)^{\frac{1-(1-2\gamma)^{(q-1)}}{2\gamma}}}\right)^{\frac{1-2\gamma}{1+2\gamma}}, \quad \gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Возвращаясь к первоначальным значениям параметров c_1 и c_q, из последнего соотношения и (29) находим, что при $m \to \infty$

$$\varepsilon_{n,q}^* \sim (1+2\gamma)\frac{2^{(1-\gamma)\left(2^{\frac{(1-2\gamma)^{q-1}}{1+2\gamma}}-1\right)}}{(1-2\gamma)^{\frac{1-(1-2\gamma)^q}{2\gamma(1+2\gamma)}}} \frac{\gamma^{1-\frac{(1-2\gamma)^{q-1}}{1+2\gamma}}[c(\gamma)]^{\frac{2\gamma}{1+2\gamma}}[\Gamma(2\gamma)]^{\frac{(1-2\gamma)^{(q-1)}}{1+2\gamma}}}{(m+1)^{1-\frac{(1-2\gamma)^q}{1+2\gamma}}}, \quad \gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{34}$$

Займемся теперь равенством (30). В его квадратной скобке приходим к задаче оптимизации

$$\Psi^{(\frac{1}{2})}(A) = \ln(m+1)\beta_q + \beta_{q-1}\ln\frac{\beta_{q-1}}{\beta_q} + \beta_{q-2}\ln\frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} + \ldots + \beta_1\ln\frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{c(\frac{1}{2})}{\beta_1} \xrightarrow[A]{} \inf, \tag{35}$$

где $c(\frac{1}{2})$ определено в (26). Рассуждая аналогичным образом, приходим к системе уравнений, которым удовлетворяет оптимальный набор $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_q^*)$

$$\begin{cases} \ln(m+1) - \dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q} = 0, \\ \ln\dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q} + 1 - \dfrac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} = 0, \\ \ln\dfrac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} + 1 - \dfrac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}} = 0, \\ \ldots \\ \ln\dfrac{\beta_2}{\beta_3} + 1 - \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = 0, \\ \ln\dfrac{\beta_1}{\beta_2} + 1 - \dfrac{c(\frac{1}{2})}{\beta_1^2} = 0. \end{cases} \tag{36}$$

При этом из последней системы в (35) находим, что с оптимальным набором параметров функция $\Psi^{(\frac{1}{2})}(A^*)$ имеет вид

$$\Psi^{(\frac{1}{2})}(A^*) = \ln(m+1)\beta_q^* + \beta_{q-1}^*\left(\frac{\beta_{q-2}^*}{\beta_{q-1}^*} - 1\right) + \beta_{q-2}^*\left(\frac{\beta_{q-3}^*}{\beta_{q-2}^*} - 1\right) + \ldots$$

$$+ \ldots \beta_2^*\left(\frac{\beta_1^*}{\beta_2^*} - 1\right) + \beta_1^*\left(\frac{c(\frac{1}{2})}{\beta_1^{*2}} - 1\right) + \frac{c(\frac{1}{2})}{\beta_1^*} = \frac{2c(\frac{1}{2})}{\beta_1^*}. \tag{37}$$

Осталось найти значение параметра β_1. С этой целью снова обратимся к системе (36). Последовательно находим

$$\begin{cases} \dfrac{\beta_{q-1}}{\beta_q} = \ln(m+1), \\ \dfrac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} = 1 + \ln\ln(m+1), \\ \dfrac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}} = 1 + \ln(1 + \ln\ln(m+1)), \\ \ldots \\ \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = \underbrace{1 + \ln(1 + \ln(1 + \ldots + \ln\ln(m+1)))}_{\text{q-1 раз}}, \\ \dfrac{c(\frac{1}{2})}{\beta_1^2} = \underbrace{1 + \ln(1 + \ln(1 + \ldots + \ln\ln(m+1)))}_{\text{q раз}}. \end{cases}$$

Из последнего равенства системы будем иметь

$$\beta_1^* = \frac{\sqrt{c(\frac{1}{2})}}{\sqrt{\ln_q(m+1)}},$$

где $\ln_q(m+1)$ определено в (27). Для оптимального β_1^* в (37) получим

$$\Psi^{(\frac{1}{2})}(A^*) = 2\sqrt{c\left(\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\ln_q(m+1)}.$$

Подставив последнее соотношение в (30), придем к асимптотическому равенству

$$\varepsilon_{n,\ q}^* \sim 2\sqrt{2c\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{\sqrt{\ln_q(m+1)}}{m+1}, \quad \gamma = \frac{1}{2},\ n \to \infty. \tag{38}$$

Пусть $\gamma > 1/2$. В этом случае из (13) и (14) находим

$$\varepsilon_{n,q}^*(A) \sim \frac{2^{\gamma+1}F_\gamma(A)}{m+1}, \quad m \to \infty.$$

где $F_\gamma(A)$ определена в (28). На основании этого представления заключаем, что в данном случае оптимальный набор параметров $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_q^*)$ не зависит от m и не влияет на порядок убывания наилучших приближений. Следовательно,

$$\varepsilon_{n,q}^* \sim \frac{2^{\gamma+1}}{m+1}\inf_A F_\gamma(A), \quad \gamma > \frac{1}{2},\ m \to \infty. \tag{39}$$

Из асимптотических равенств (34), (38) и (39) с учетом равенства $n = mq$ приходим к утверждению теоремы 4.

Замечание 1. Обратим внимание, что при решении задач о наилучших приближениях функций со степенной особенностью суммами Фейера рядов Фурье по системе алгебраических дробей Чебышёва–Маркова [36] возникает функция, схожая с (28). Однако, поскольку рассматриваемый там метод рациональной аппроксимации имеет два геометрически различных полюса, то соответствующая функция приобретает более простой вид.

Замечание 2. Сравнивая результаты теоремы 4 и асимптотических равенств (25), приходим к выводу, что при $\gamma \in (0, \frac{1}{2}]$ рациональные средние Фейера доставляют более высокую скорость равномерных приближений функции Маркова в условиях теоремы 2 в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами. В случае же $\gamma > \frac{1}{2}$ ситуация иная. Скорость убывания мажоранты имеет тот же порядок малости, что и в полиномиальном случае, а набор параметров является оптимальным в том смысле, что он минимизирует константу.

Пусть $q = 1$, $n = m$. Другими словами, аппроксимирующая функция имеет один геометрически различный полюс в открытой комплексной плоскости. В этом случае из теоремы 4 получим

Следствие 3. *Для любого $\gamma > 0$ при $n \to \infty$ справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon_{n,\ 1}^* \sim \begin{cases} \dfrac{1+2\gamma}{2\gamma}\left[\dfrac{2^{1-\gamma}[c(\gamma)]^{2\gamma}\Gamma(1+2\gamma)}{1-2\gamma}\right]^{\frac{1}{1+2\gamma}}\dfrac{1}{(n+1)^{\frac{4\gamma}{1+2\gamma}}}, & \gamma \in (0, \dfrac{1}{2}), \\ 2\sqrt{2c\left(\dfrac{1}{2}\right)}\dfrac{\sqrt{\ln(n+1)}}{n+1}, & \gamma = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2^\gamma}{n+1}\inf\limits_{\beta\in(0,1]}\left[\displaystyle\int_0^\beta \dfrac{u^{2\gamma-2}(\beta+u)\,du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma} + \dfrac{1}{\beta}\int_\beta^D \dfrac{u^{2\gamma-1}\,du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}\right], & \gamma > \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

где $c(\gamma)$ определена в формулировке теоремы 4.

Отметим, что при $\gamma \in (0, \frac{1}{2}]$ даже в случае одного геометрически различного полюса в открытой комплексной плоскости порядок стремления к нулю равномерных приближений функции Маркова суммами Фейера (2) выше соответствующих полиномиальных аппроксимаций.

5. Аппроксимация некоторых элементарных функций. Известно, что многие элементарные функции можно представить в виде комбинаций функций Маркова.

Рассмотрим функцию $f(z) = (z-1)^\gamma$, $\gamma \in (0, +\infty)\backslash\mathbb{N}$. Она является голоморфной в области $\mathbb{C}\backslash(1, +\infty)$. Стандартное применение интегральной формулы Коши приводит к соотношению

$$(z-1)^\gamma = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{(\xi-1)^\gamma}{\xi - z}\, d\xi, \quad z \in D,$$

где D – круг радиуса $a > 1$ с центром в начале координат и разрезом по отрезку $[1, a]$. Из последней формулы легко получить (см. [20, 21]), что при $|z| < a$, $z \overline{\in} (1, a)$, справедливо равенство

$$(1-x)^\gamma = \hat{\mu}_1(x) + g(x), \tag{40}$$

где

$$\hat{\mu}_1(x) = -\frac{\sin \pi\gamma}{\pi} \int\limits_1^a \frac{(t-1)^\gamma}{t-x}\, dt, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=a} \frac{(1-\xi)^\gamma}{\xi - x}\, d\xi.$$

Функция $\hat{\mu}_1(x)$, $x \in [0, 1]$ удовлетворяет условию теоремы 4. Из (26) находим, что

$$c(\gamma) = \int\limits_0^1 \frac{u^{2\gamma}\, du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma} = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{2\gamma\sqrt{\pi}} \left[\sqrt{\pi}\Gamma(1+\gamma) - \Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)\right], \quad \gamma \in (0, 1).$$

Следовательно,

$$\varepsilon^*_{n,q}(\hat{\mu}_1(x)) \sim \frac{|\sin \pi\gamma|}{\pi} \begin{cases} \dfrac{\mu(q,\gamma)}{(n+1)^{1-\frac{(1-2\gamma)^q}{1+2\gamma}}}, & \gamma \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right), \\ 2q\sqrt{\pi - 2}\dfrac{\sqrt{\ln_q(n+1)}}{n+1}, & \gamma = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2^{\gamma+1} q c_3(q,\gamma)}{n+1}, & \gamma \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right), \quad n \to \infty. \end{cases}$$

где $\mu(q, \gamma)$ определена в формулировке теоремы 4,

$$c_3(q, \gamma) = \inf_A F_\gamma(A), \quad \gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Исследуем приближения функции $g(x)$ суммами Фейера (2). В обозначениях (3) имеем

$$\varepsilon_{n,\ q}(g,\ x,\ A) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \delta_{kq}(g,\ x,\ A), \quad x \in [-1,\ 1], \tag{41}$$

где

$$\delta_{kq}(g,\ x,\ A) = g(x) - s_{kq}(g,\ x) = \frac{1}{(2\pi)^2 i} \int\limits_{|z|=a} \frac{(1-z)^\gamma}{z-x} I_k(x,\ z)\, dz,$$

– приближения функции $g(x)$ интегральным рациональным оператором Фурье–Чебышёва (1) с набором параметров A_q ,

$$I_k(x,\ z)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos u-\cos v}{z-\cos v}\left(\zeta\frac{\omega_q^k(\zeta)}{\omega_q^k(\xi)}-\xi\frac{\omega_q^k(\xi)}{\omega_q^k(\zeta)}\right)\frac{dv}{\zeta-\xi},\quad \zeta=\mathrm{e}^{iv},\xi=\mathrm{e}^{iu},x=\cos u,$$

$\omega_q(\xi)$ определена в (7). Известно [37], что для величины $\delta_{kq}(g,\ x,\ A)$ справедлива оценка

$$|\delta_{kq}(g,\ x,\ A)|\leq\frac{2a(1+a)^{\gamma}\left(1+a+\sqrt{1+a^2}\right)}{(a-1)\sqrt{a^2-1}}\lambda^k,\quad \lambda\in(0,\ 1),\ a>1,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

При этом в (41) получим

$$|\varepsilon_{n,\ q}(g,\ x,\ A)|\leq\frac{c_4(a,\ \gamma)}{m+1},\quad x\in[-1,\ 1],a>1,\ \gamma\in(0,\ 1).$$

Другими словами, для любого набора параметров A, справедлива оценка

$$\|\varepsilon_{n,\ q}(g,\ x,\ A)\|_{C[-1,\ 1]}=O\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Из представления (40) и последнего асимптотического равенства мы получаем

Следствие 4 (Аппроксимация функции $(1-x)^{\gamma},\gamma\in(0,\ 1)$). *Для любого натурального $q, 0<q<n$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\varepsilon^*_{n,\ q}((1-x)^{\gamma},\ [0,\ 1])\sim\frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\begin{cases}\dfrac{\mu(q,\ \gamma)}{(n+1)^{1-\frac{(1-2\gamma)q}{1+2\gamma}}},\quad \gamma\in\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right),\\ 2q\sqrt{\pi-2}\dfrac{\sqrt{\ln_q(n+1)}}{n+1},\quad \gamma=\dfrac{1}{2},\\ O\left(\dfrac{1}{n+1}\right),\quad \gamma\in\left(\dfrac{1}{2},1\right),\quad n\to\infty.\end{cases}\tag{42}$$

Следствие 5. *Для наилучших приближений функции $(1-x)^{\gamma},\gamma\in(0,\ 1)$, на отрезке $[0,\ 1]$ средними Фейера полиномиальных рядов Фурье–Чебышёва справедливо асимптотическое равенство*

$$\varepsilon_n^{(0)}((1-x)^{\gamma},\ [0,\ 1])\sim\frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\begin{cases}\dfrac{2^{1-\gamma}\Gamma(2\gamma)}{(1-2\gamma)(n+1)^{2\gamma}},\quad \gamma\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\\ \sqrt{2}\dfrac{\ln(n+1)}{n+1},\quad \gamma=\dfrac{1}{2},\\ O\left(\dfrac{1}{n+1}\right),\quad \gamma\in\left(\dfrac{1}{2},1\right),\end{cases}$$

$\Gamma(2\gamma)$ *– гамма-функция Эйлера.*

Обратим внимание, что в полиномиальном случае имеем асимптотическую оценку равномерных приближений.

Известно [38, с. 96], что наилучшие равномерные полиномиальные приближения исследуемой функции обладают следующим свойством:

$$E_{2n}(|x|^{2\gamma};[-1,1])=\frac{1}{2^{\gamma}}E_n((1-x)^{\gamma};[0,1]).$$

Используя аналогичные рассуждения, из (42) находим, что

$$\varepsilon^*_{2n,2q}(|x|^s,[-1,1]) \sim \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\begin{cases}\dfrac{c_5(s,q)}{(n+1)^{1-\frac{(1-s)^q}{1+s}}}, & s\in(0,\ 1),\\ q\sqrt{\pi-2}\dfrac{\sqrt{\ln_q(n+1)}}{n+1}, & s=1,\\ O\left(\dfrac{1}{n+1}\right), & s\in(1,\ 2), \quad n\to\infty,\end{cases}$$

где

$$c_5(s,\ q)=q^{1-\frac{(1-s)^q}{1+s}}(1+s)\frac{2^{\left(1-\frac{s}{2}\right)\left(2\frac{(1-s)^{q-1}}{1+s}-1\right)}}{(1-s)^{\frac{1-(1-s)^q}{s(1+s)}}}\left(\frac{s}{2}\right)^{1-\frac{(1-s)^{q-1}}{1+s}}[c(s)]^{\frac{s}{1+s}}[\Gamma(s)]^{\frac{(1-s)(q-1)}{1+s}},$$

В последнем асимптотическом равенстве положим $q=1$. Тогда

$$\varepsilon^*_{2n,2}(|x|^s,[-1,1]) \sim \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\begin{cases}\left[\dfrac{2^{\frac{2(1-s)-s^2}{2}}[c(s/2)]^s\Gamma(1+s)}{1-s}\right]^{\frac{1}{1+s}}\dfrac{1+s}{s(n+1)^{\frac{2s}{1+s}}}, & s<1,\\ \sqrt{\pi-2}\dfrac{\sqrt{\ln(n+1)}}{n+1}, & s=1,\\ O\left(\dfrac{1}{n+1}\right), & s\in(1,\ 2), \quad n\to\infty.\end{cases}$$

Полученная оценка совпадает по порядку с оценкой равномерных приближений функции $|x|^s,\ s\in(0,\ 2),$ суммами Фейера рядов Фурье по системе алгебраических дробей Чебышёва–Маркова в случае двух геометрически различных полюсов у аппроксимирующей функции, которая содержится в [36].

Заключение. В работе изучены аппроксимации функции Маркова суммами Фейера рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышёва в случае фиксированного числа геометрически различных полюсов у аппроксимирующей функции. Найдено интегральное представление приближений и оценка равномерных приближений. В случае, когда мера μ удовлетворяет следующим условиям: $d\mu(t)=\varphi(t)dt$ и $\varphi(t)\asymp(t-1)^\gamma,\gamma>0,$ получены оценки поточечных и равномерных приближений и асимптотическое выражение для мажоранты равномерных приближений при определенном выборе полюсов. Найдены значения параметров аппроксимирующей функции, при которых обеспечивается наилучшая мажоранта равномерных приближений.

На основании проведенных исследований можно заключить, что суммы Фейера рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышёва при специальном выборе параметров обеспечивают аппроксимации функции Маркова в условиях теоремы 2 с плотностью невысокой гладкости ($\gamma\in(0,\ 1/2]$) более высоких порядков малости в сравнении с аналогичными методами суммирования в полиномиальном случае.

В качестве следствия полученных результатов найдены наилучшие оценки равномерных приближений некоторых элементарных функций со степенной особенностью изучаемым методом.

Литература

1. *Fejér L.* Untersuchungen über Fouriersche Reihen // Mathematische Annalen. 1904. Vol. 58. P. 51–69.
2. *Lebesgue H.* Sur les intégrales singuliéres // Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série. 1909. T. 1. P. 25–117.
3. *Bernstein S.* Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomés de degré donné. Bruxelles : Hayez, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, 1912.
4. *Никольский С.М.* Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Известия АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4, № 6. С. 501–508.
5. *Zygmund A.* On the degree of approximation of functions by Fejér means // Bulletin of the American Mathematical Society. 1945. Vol. 51, iss. 4. P. 274–278.
6. *Новиков О.А., Ровенская О.Г.* Приближение классов интегралов Пуассона суммами Фейера // Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Т. 7, № 4. С. 813–819.
7. *Джрбашян М.М.* К теории рядов Фурье по рациональным функциям // Известия АН Армянской ССР. Сер. математика. 1956. Т. 9, № 7. С. 1–27.
8. *Русак В.Н.* Рациональные функции как аппарат приближения. Минск : Издательство БГУ, 1979.
9. *Petrushev P.P., Popov V.A.* Rational approximation of real functions. Cambridge : Cambridge university press, 1987.
10. *Русак В.Н.* Точные порядки наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свёртки // Доклады АН СССР. 1984. Т. 279, № 4. С. 810–812.
11. *Русак В.Н.* Точные порядковые оценки для наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свертки // Математический сборник. 1985. Т. 128, № 4. С. 492–515.
12. *Пекарский А.А.* Чебышёвские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке // Математический сборник. 1987. Т. 133(175), № 1(5). С. 86–102.
13. *Ровба Е.А.* Рациональные интегральные операторы на отрезке // Вестник БГУ. 1996. Т. 1, № 1. С. 34–39.
14. *Джрбашян М.М., Китбалян А.А.* Об одном обобщении полиномов Чебышёва // Доклады АН Армянской ССР. 1964. Т. 38, № 5. С. 263–270.
15. *Смотрицкий К.А.* Аппроксимация рациональными операторами Валле Пуссена на отрезке // Труды Института математики НАН Беларуси. 2001. Т. 9. С. 136–139.
16. *Смотрицкий К.А.* О приближении выпуклых функций рациональными интегральными операторами на отрезке // Вестник БГУ. 2005. Т. 1, № 3. С. 64–70.
17. *Марков А.А.* Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М. : Гостехиздат, 1948.
18. *Гончар А.А.* О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций // Математический сборник. 1978. Т. 105(147), № 2. С. 147–163.
19. *Ganelius T.* Ortogonal polynomials and rational approximation of holomorphic function // Studies in Pure Mathematics. (To the Memory of Paul Turan), ed. P. Erdos, Birkhauser Verlag, Basel, 1978. P. 237–243.
20. *Andersson J.-E.* Best Rational Approximation to Markov Functions // Journal of approximation theory. 1994. Vol. 76. P. 219–232.
21. *Пекарский А.А.* Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, вып. 2. С. 121–132.
22. *Vyacheslavov N.S., Mochalina E.P.* Rational approximations of functions of Markov–Stieltjes type in Hardy spaces // Moscow University Mathematics Bulletin. 2008. Vol. 63, iss. 4. P. 125–134.
23. *Старовойтов А.П., Лабыч Ю.А.* Рациональная аппроксимация функций Маркова, порожденных борелевскими мерами степенного типа // Проблемы физики, математики и техники. 2009. Т. 1, № 1. С. 69–73.
24. *Prokhorov V.A.* On rational approximation of Markov functions on finite sets // Journal of Approximation Theory. 2015. Vol. 191. P. 94–117.
25. *Пекарский А.А., Ровба Е.А.* Равномерные приближения функций Стилтьеса посредством ортопроекции на множество рациональных функций // Математические заметки. 1999. Т. 65, № 3. С. 362–368.

26. *Takenaka S.* On the orthogonal functions and a new formula of interpolations // Japanese Journal of Mathematics. 1925. Vol. 2. P. 129–145.
27. *Malmquist F.* Sur la determination d'une classe functions analytiques par leurs dans un ensemble donne de points // Compute Rendus Six. Cong. math. scand. Kopenhagen, Denmark, 1925. P. 253–259.
28. *Rovba E.A., Mikulich E.G.* Constants in rational approximation of Markov–Stieltjes functions with fixed number of poles // Vesnik of Y. Kupala State University. 2013. Vol. 1(148). P. 12–20.
29. *Лунгу К.Н.* О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов // Математический сборник. 1971. Т. 86(128), № 2(10). С. 314–324.
30. *Лунгу К.Н.* О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов // Сибирский математический журнал. 1984. Т. 15, № 2. С. 151–160.
31. *Ровба, Е. А.* Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Доклады АН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968–971.
32. *Patseika P.G., Rouba Y.A., Smatrytski K.A.* On one rational integral operator of Fourier–Chebyshev type and approximation of Markov functions // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2020. Vol. 2. P. 6–27.
33. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1989.
34. *Евграфов М.А.* Асимптотические оценки и целые функции. М. : Наука, 1979.
35. *Федорюк М.В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. М. : Наука, 1987.
36. *Поцейко П.Г., Ровба Е.А.* Суммы Фейера рационального ряда Фурье–Чебышёва и аппроксимации функции $|x|^s$ // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2019. № 3. С. 18–34.
37. *Поцейко, П.Г., Ровба Е.А.* О рациональных суммах Абеля–Пуассона на отрезке и аппроксимациях функций Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2021. Т. 3. С. 6–24.
38. *Бернштейн С.Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Ч. 1. М.; Л. : Главная редакция общетехнической литературы, 1937.

P. G. Patseika, Y. A. Rouba

On rational approximations of the Markov function on the segment by the Fejer sums with a fixed number of poles

Summary

Approximations of Markov functions on the segment $[-1,\ 1]$ by Fejer sums of the rational integral Fourier operator–Chebyshev with restrictions on the number of geometrically different poles are investigated. An integral representation of approximations and an estimate of uniform approximations are obtained. In the case when the measure μ satisfies the following conditions $\operatorname{supp}\mu = [1,a],\ a > 1,\ \ d\mu(t) = \varphi(t)\,dt$ and $\varphi(t) \asymp (t-1)^\alpha$ on $[1,a]$, estimates of pointwise and uniform approximations are established, the asymptotic expression for $n \to \infty$ majorants of uniform approximations. The optimal values of the parameters providing the highest rate of decrease of this majorant are found. As a consequence, estimates of the corresponding uniform approximations of some elementary functions are established.

It follows from the results obtained that rational approximations by Fejer sums of the Markov function with measures $\mu(t)$ with "low smoothness are better in terms of order than the corresponding polynomial ones.