В. Б. Малютин, Вычисление математического ожидания функционалов от решения линейных стохастических уравнений, *Тр. Ин-та матем.*, 2014, том 22, номер 1, 107–114

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2014. Том 22. № 1. С. 107–114

УДК 517.987.4+519.6

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. Б. Малютин

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: malyutin@im.bas-net.by
Поступила 00.00.2014

Посвящается 80-летию члена-корреспондента
Леонида Александровича Яновича

Рассмотрен метод нахождения математического ожидания функционалов от решения системы линейных стохастических дифференциальных уравнений с помощью последовательности Штурма для нахождения собственных значений трехдиагональной матрицы. Рассмотрено применение предложенного метода к вычислению характеристик систем изинговского типа со случайным взаимодействием, описываемым случайным процессом типа белого шума.

1. Введение. Линейные стохастические системы широко используются как в теории стохастических систем, так и в их приложениях в механике, электротехнике и других областях. Линейные системы применяются для математического описания малых отклонений поведения реальных систем от режимов их функционирования.

Решения систем линейных стохастических дифференциальных уравнений рассматривались многими авторами [1–4]. В работах Клоедена и Платена [1], Пугачева и Синицина [4] для систем линейных стохастических дифференциальных уравнений дано интегральное представление решения через фундаментальную матрицу решений, а также аналитически решены некоторые простейшие системы линейных стохастических дифференциальных уравнений. Довольно часто используется подход к численному решению стохастических дифференциальных уравнений, который основывается на конечной дискретизации временного интервала и численном моделировании решения стохастического дифференциального уравнения в дискретные моменты времени [1, 2]. Проблема вычисления математического ожидания функционалов от решения системы линейных стохастических дифференциальных уравнений остается малоизученной и актуальной задачей. Для решения этой задачи можно использовать уравнения Фоккера–Планка и численные методы решения этих уравнений [5]. Но численное решение уравнения Фоккера–Планка приводит к значительным вычислительным затратам. В работах [6, 7] для вычисления математического ожидания используется подход, основанный на аппроксимационно точных приближенных формулах для функциональных интегралов.

В данной работе предложен метод нахождения математического ожидания функционалов от решения системы линейных стохастических дифференциальных уравнений с помощью последовательности Штурма для нахождения собственных значений трехдиагональной матрицы. Рассмотрено применение предложенного метода к вычислению характеристик систем изинговского типа со случайным взаимодействием, описываемым случайным процессом типа белого шума.

2. Метод нахождения математического ожидания функционалов от решения системы стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
d\xi_1(s) = (a_{11}\xi_1(s) + a_{12}\xi_2(s))ds + \sigma_1\xi_1(s)dw(s) \\
d\xi_2(s) = (a_{21}\xi_1(s) + a_{22}\xi_2(s))ds + \sigma_2\xi_2(s)dw(s) \\
t \le s \le T, \quad \xi_1(t) = x_1, \quad \xi_2(t) = x_2,
\end{gathered} \tag{1}
$$

где $a_{ij},\ \sigma_j,\ \ i,j = 1,2$ — неслучайные вещественные коэффициенты уравнения, (Ω, F, P) — вероятностное пространство, $F_s,\ \ s \in [t,T]$ — неубывающая совокупность σ-алгебр, $w(s)$ — F_s-измеримый винеровский процесс, $\xi_j(s) \in \mathbb{R},\ \ j = 1,2$ — случайные процессы, являющиеся решением уравнения (1), то есть $\xi_j(s)$ F_s-измеримы, дифференциалы $d\xi_j(s) = \bar{a}_j ds + \bar{\sigma}_j dw(s)$ и с вероятностью 1 выполняются соотношения $\bar{a}_j = a_{j1}\xi_1(s) + a_{j2}\xi_2(s),\ \ \bar{\sigma}_j = \sigma_j\xi_j(s)$.

Рассмотрим задачу нахождения математического ожидания функционала от решения системы уравнений (1), то есть $u(t,x_1,x_2) = Mf(\xi_1(s),\xi_2(s))$. Из обратного уравнения А.Н. Колмогорова следует [8], что $u(t,x_1,x_2)$ удовлетворяет уравнению в частных производных второго порядка

$$
-\frac{\partial u}{\partial t} = Lu = \sum_{j=1}^{2}(a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\sigma_j x_j \sigma_k x_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \tag{2}
$$

$$
\lim_{t \to s} u(t,x_1,x_2) = f(x_1,x_2).
$$

В качестве функции $f(x_1,x_2)$ будем рассматривать однородные многочлены, то есть

$$
f(x_1,x_2) = \sum_{j=0}^{n-1} h_j x_1^{n-1-j} x_2^j.
$$

Функцию $u(t,x_1,x_2)$ будем искать в виде

$$
u(t,x_1,x_2) = \sum_{j=0}^{\infty}(s-t)^j p_j(x_1,x_2). \tag{3}
$$

Из уравнения (2) следует, что $jp_j(x_1,x_2) = Lp_{j-1}(x_1,x_2)$. Тогда

$$
p_j(x_1,x_2) = \frac{1}{j}Lp_{j-1}(x_1,x_2) = \frac{1}{j!}L^j p_0(x_1,x_2).
$$

Подставляя это выражение в (3), получаем

$$
u(t,x_1,x_2) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(s-t)^j}{j!}L^j p_0(x_1,x_2) = \exp\{(s-t)L\}p_0(x_1,x_2), \quad p_0(x_1,x_2) = f(x_1,x_2).
$$

Функцию

$$
f(x_1,x_2) = \sum_{j=0}^{n-1} h_j x_1^{n-1-j} x_2^j
$$

можно задавать с помощью вектора $\vec{h} = (h_0,\ldots,h_{n-1})^T$.

Тогда оператор $x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ задается матрицей $\begin{pmatrix} n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

оператор $x_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ определяется матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{pmatrix}$,

оператор $x_1\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ представляется матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

оператор $x_2\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ задается матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

оператор $x_1^2\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}$ представляется матрицей $\begin{pmatrix} (n-1)(n-2) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (n-2)(n-3) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2\cdot 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

оператор $x_2^2\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ определяется матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\cdot 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-2)(n-3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (n-1)(n-2) \end{pmatrix}$,

оператор $x_1x_2\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}$ задается матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (n-2)\cdot 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (n-3)\cdot 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\cdot(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, оператор L представляется в виде трехдиагональной матрицы $\bar{L}=\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$,

где

$$b_j = a_{11}(n-j) + a_{22}(j-1) + \frac{\sigma_1^2}{2}(n-j)(n-j-1) + \frac{\sigma_2^2}{2}(j-1)(j-2) + \sigma_1\sigma_2(n-j)(j-1),$$

$$1 \le j \le n, \quad c_j = a_{21}j, \quad a_j = a_{12}(n-j), \quad 1 \le j \le n-1.$$

Все матрицы имеют размерность $n \times n$.

Теперь функцию $u(t,x_1,x_2)$ можно записать в виде

$$u(t,x_1,x_2) = \sum_{j=0}^{n-1} u_j x_1^{n-1-j} x_2^j,$$

где $\vec{u} = (u_0,\dots,u_{n-1})^T = \exp\{(s-t)\bar{L}\}\vec{h}$.

Собственные значения трехдиагональной матрицы можно вычислить с использованием свойств последовательности Штурма [9]. Рассмотрим следующую последовательность полиномов, известную как последовательность Штурма

$$D_0(\lambda) = 1, \quad D_1(\lambda) = b_1 - \lambda, \quad D_j(\lambda) = (b_j - \lambda)D_{j-1}(\lambda) - a_{j-1}c_{j-1}D_{j-2}(\lambda), \quad 2 \le j \le n.$$

Для произвольного λ определим функцию $s(\lambda)$ как число совпадений знаков у следующих друг за другом членов последовательности $D_0(\lambda), D_1(\lambda), D_2(\lambda), \dots, D_n(\lambda)$, причем, если $D_j(\lambda) = 0$, то в качестве знака этого члена будем брать знак $D_{j-1}(\lambda)$. Тогда значение функции $s(\lambda)$ равно числу собственных значений матрицы $\bar{L}$ больших или равных λ.

Вычислив максимальное собственное значение λ, матрицы $\bar{L}$ можно найти

$$\lim_{s-t\to\infty} \frac{1}{s-t} \ln(u(t,x_1,x_2)) = \lambda,$$

то есть найти асимптотическое поведение функции $u(t,x_1,x_2)$ при $s-t\to\infty$.

Если все собственные значения матрицы $\bar{L}$ различны, то

$$u(t,x_1,x_2) = \sum_{j=0}^{n-1} u_j x_1^{n-1-j} x_2^j, \quad \vec{u} = (u_0,\dots,u_{n-1})^T = \sum_{k=1}^{n} \exp\{(s-t)\lambda_k\} \prod_{i\ne k} \frac{\bar{L}-\lambda_i}{\lambda_k-\lambda_i}\vec{h}.$$

3. Система изинговского типа со случайным взаимодействием, описываемым случайным процессом типа белого шума. Предложенный метод можно использовать для вычисления характеристик систем изинговского типа со случайным взаимодействием, описываемым случайным процессом типа белого шума, так как характеристики выражаются через математическое ожидание функционала от

$$\int \exp\Big\{ \int_0^s \sigma(\tau)\, dw(\tau) \Big\}\, d\nu(\sigma). \tag{4}$$

Здесь интеграл рассматривается на пространстве функций $\sigma(\tau) = \pm 1$, $0 \le \tau \le s$ и определяется равенством

$$\int F(\sigma(\cdot))\,d\nu(\sigma) = \lim_{\max\limits_j \Delta t_j \to 0} \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_n=\pm 1} F\biggl(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \chi_{]t_{j-1},t_j]}(\cdot)\biggr) \prod_{j=1}^{n} S(\Delta t_j, \sigma_{j-1}, \sigma_j), \qquad (5)$$

если предел в правой части равенства (5) существует для любого разбиения отрезка $[0, s]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = s$.

Здесь $\sigma_j = \sigma(t_j)$, $\sigma_0 = 1$, $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$, $\chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau)$ — характеристическая функция интервала $]t_{j-1}, t_j]$; $S(\Delta t_j, \sigma_{j-1}, \sigma_j) = \dfrac{1}{2}(\exp\{A_1 \Delta t_j\} + \exp\{A_2 \Delta t_j\} \sigma_{j-1} \sigma_j)$ — переходная функция; $\int_0^s \sigma(\tau)\,dw(\tau)$ — стохастический интеграл по винеровскому процессу $w(\tau)$ [8]. Этот стохастический интеграл определен, так как $\sigma(\tau)$ детерминированная функция, для которой $\int_0^s \sigma^2(\tau)\,d\tau = s$.

Похожие задачи рассматриваются в теории неупорядоченных систем с беспорядком типа случайное магнитное поле [10]. Интеграл (5) можно записать [11] в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp\biggl\{\frac{t}{2}(A_1 + A_2)\biggr\} \biggl(\frac{1}{2}(A_1 - A_2)\biggr)^n \int\limits_0^s \overset{(n)}{\cdots} \int\limits_0^{t_2} \exp\biggl\{\int\limits_0^s \sigma_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(\tau)\,dw(\tau)\biggr\} dt_1 \ldots dt_n, \qquad (6)$$

где $\sigma_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(\tau)$ — траектория, меняющая значения в точках $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < s$.

Обозначим

$$I_+ = \sum_{\text{четные } n=0}^{\infty} \biggl(\frac{1}{2}(A_1 - A_2)\biggr)^n \int\limits_0^s \overset{(n)}{\cdots} \int\limits_0^{t_2} \exp\biggl\{\int\limits_0^s \sigma_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(\tau)\,dw(\tau)\biggr\} dt_1 \ldots dt_n,$$

$$I_- = \sum_{\text{нечетные } n=0}^{\infty} \biggl(\frac{1}{2}(A_1 - A_2)\biggr)^n \int\limits_0^s \overset{(n)}{\cdots} \int\limits_0^{t_2} \exp\biggl\{\int\limits_0^s \sigma_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(\tau)\,dw(\tau)\biggr\} dt_1 \ldots dt_n.$$

Тогда

$$Mf\biggl(\int \exp\biggl\{\int\limits_0^s \sigma(\tau)\,dw(\tau)\biggr\} d\nu(\sigma)\biggr) = Mf\biggl(\exp\biggl\{\frac{s}{2}(A_1 + A_2)\biggr\}(I_+ + I_-)\biggr). \qquad (7)$$

Так как $\sigma_{t_n}(\tau)$ — ступенчатая функция, то

$$\exp\biggl\{\int\limits_0^s \sigma_{t_n}(\tau)\,dw(\tau)\biggr\} = \exp\{-w(0) - w(s)\} \exp\{2w(t_n)\}.$$

Обозначим

$$\xi_1(s) = \exp\{-w(0) - w(s)\}, \quad \xi_2(s) = \int\limits_0^s \exp\{2w(t_n)\}\,dt_n.$$

Тогда, используя обобщенную формулу Ито, получаем равенство

$$d(\xi_1(s)\xi_2(s)) = \exp\{-w(0) - w(s)\}\exp\{2w(s)\}\,ds +$$

$$+\int\limits_0^s \exp\{2w(t_n)\}\,dt_n\left(\frac{1}{2}\exp\{-w(0)-w(s)\}\,ds - \exp\{-w(0)-w(s)\}\,dw(s)\right).$$

Отсюда следует, что справедливо равенство

$$d\left(\int\limits_0^s \exp\left\{\int\limits_0^s \sigma_{t_n}(\tau)\,dw(\tau)\right\}dt_n\right) = \int\limits_0^s d\exp\left\{\int\limits_0^s \sigma_{t_n}(\tau)\,dw(\tau)\right\}dt_n + \exp\left\{\int\limits_0^s \sigma_s(\tau)\,dw(\tau)\right\}ds.$$

Аналогичное равенство верно для функции $\sigma_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(\tau)$. С помощью указанного равенства получаем, что

$$dI_+ = \sum_{\text{четные }n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(A_1-A_2)\right)^n \int\limits_0^s \overset{(n-1)}{\cdots}\int\limits_0^{t_2} \exp\left\{\int\limits_0^s \sigma_{t_1,t_2,\ldots,t_{n-1},s}(\tau)\,dw(\tau)\right\}dt_1\ldots dt_{n-1} +$$

$$+\sum_{\text{четные }n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(A_1-A_2)\right)^n \int\limits_0^s \overset{(n)}{\cdots}\int\limits_0^{t_2} \exp\left\{\int\limits_0^s \sigma_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(\tau)\,dw(\tau)\right\}\times$$

$$\times\left[\sigma_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(s)\,dw(s) + \frac{1}{2}\sigma^2_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(s)\,ds\right]dt_1\ldots dt_n =$$

$$= \frac{1}{2}(A_1-A_2)I_-ds + \frac{1}{2}I_+ds + I_+dw(s). \tag{8}$$

Аналогично

$$dI_- = \frac{1}{2}(A_1-A_2)I_+ds + \frac{1}{2}I_-ds - I_-dw(s), \tag{9}$$

$$I_+(0) = 1, \quad I_-(0) = 0.$$

В данной работе рассматриваются функции $f(x) = x^{n-1}$, для которых

$$Mf\left(\int \exp\left\{\int\limits_0^s \sigma(\tau)\,dw(\tau)\right\}d\nu(\sigma)\right) = \exp\left\{\frac{(n-1)s}{2}(A_1+A_2)\right\}M(I_+ + I_-)^{n-1}. \tag{10}$$

Используя для вычисления $u(t,x_1,x_2) = M(I_+ + I_-)^{n-1}$ метод, предложенный выше, получаем

$$u(t,1,0) = \sum_{j=0}^{n-1} u_j x_1^{n-1-j}x_2^j = u_0,$$

так как

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0; \quad \vec{u} = (u_0,\ldots,u_{n-1})^T = \exp\{(s-t)\bar{L}\}\vec{h}, \quad \vec{h} = (h_0,\ldots,h_{n-1})^T.$$

Так как

$$f(x_1,x_2) = (x_1+x_2)^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!}x_1^{n-1-j}x_2^j,$$

то

$$h_j = \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!}, \quad 0 \le j \le n-1;$$

$$
\bar{L} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix},
$$

где

$$
b_j = \frac{1}{2}(n-j) + \frac{1}{2}(j-1) + \frac{1}{2}(n-j)(n-j-1) + \frac{1}{2}(j-1)(j-2) - (n-j)(j-1), \quad 1 \le j \le n,
$$

$$
c_j = \frac{1}{2}(A_1 - A_2)j, \quad a_j = \frac{1}{2}(A_1 - A_2)(n-j), \quad 1 \le j \le n-1.
$$

Вычислив максимальное собственное значение λ матрицы $\bar{L}$, можно найти

$$
\lim_{s-t\to\infty} \frac{1}{s-t} \ln(u(t)) = \lambda,
$$

то есть найти асимптотическое поведение функции $u(t)$ при $s-t \to \infty$ и тем самым с помощью (10) найти асимптотическое поведение

$$
Mf\biggl(\int \exp\biggl\{ \int_0^s \sigma(\tau)\, dw(\tau) \biggr\} d\nu(\sigma) \biggr).
$$

Таблица 1. Значения максимального собственного значения и функции u при $A_1 = -A_2 = 1$

n	2	3	4	10	20
λ	1.50	3.23	5.50	41.07	181.03
u	1.50	3.23	5.50	41.07	181.03

Таблица 2. Значения максимального собственного значения и функции u при $A_1 = 1.5; A_2 = 0.5$

n	2	3	4	10	20
λ	1.00	2.41	4.73	40.64	180.63
u	2.00	4.41	7.73	49.64	199.63

В табл. 1, 2 приведены результаты асимптотического поведения функции

$$
u = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \ln\biggl(M\biggl(\int \exp\biggl\{ \int_0^s \sigma(\tau)\, dw(\tau) \biggr\} d\nu(\sigma) \biggr)^{n-1} \biggr), \tag{11}
$$

полученные с помощью метода вычисления собственных значений трехдиагональной матрицы $\bar{L}$. В первой строке таблиц указаны значения параметра n, во второй — значения максимального собственного значения, в третьей строке указаны значения функции u.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф12-016).

Литература

1. *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Springer-Verlag, 1992.
2. *Кузнецов Д.Ф.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. СПб., 2001.
3. *Arato M.* Linear stochastic systems with constant coefficients. A Statistical approach. Springer-Verlag, 1982.
4. *Pugachev V.S., Sinitsyn I.N.* Stochastic differential systems: Analisis and filtering. New York: Wiley, 1987.
5. *Risken H.* The Fokker–Planck equation. Methods of solution and applications. Springer-Verlag, 1984.
6. *Егоров А.Д., Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю.* Введение в теорию и приложения функционального интегрирования. М.: Физматлит, 2006.
7. *Egorov A.D., Sabelfeld K.* Approximate formulas for expectations of functionals of solutions to stochastic differential equations // Monte Carlo Methods and Applications. 2009. V. 18. P. 95–127.
8. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, 1968.
9. *Wilkinson J.H.* The algebraic eigenvalue problem. Oxford, 1965.
10. *Paladin G., Serva M.* Analytic solution of the random Ising model in one dimension // Physical Review Letters. 1992. V. 69. № 5.
11. *Малютин В.Б.* Об одном методе вычисления функциональных интегралов по спиновым переменным // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2012. № 3. С. 18–25.

V. B. Malyutin

Evaluation of expectation of a functionals depending on the solution of linear stochastic equations

Summary

The method for evaluation of expectation of a functionals depending on the solution of linear stochastic differential equations is proposed. This method is based on evaluation of the eigenvalues of a three-diagonal matrix using the Sturm sequences. It is considered the application of this method to evaluation of characteristics of Ising systems with random effect in the form of a random white noise process.