А. С. Смирнова, L_p-аппроксимации решений параболических дифференциальных уравнений на многообразиях, *Журнал СВМО*, 2022, том 24, номер 3, 297–303

DOI: 10.15507/2079-6900.24.202203.297-303

DOI 10.15507/2079-6900.24.202203.297-303 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.956.4+517.988.8

L_p-аппроксимации решений параболических дифференциальных уравнений на многообразиях

А. С. Смирнова

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В работе рассматривается задача Коши для параболического уравнения с частными производными в римановом многообразии ограниченной геометрии. Приводится формула, выражающая сколь угодно точные (в L_p-норме) аппроксимации к решению задачи Коши через параметры – коэффициенты уравнения и начальное условие. При этом многообразие не предполагается компактным, что создаёт значительные технические трудности. Например, интегралы по многообразию становятся несобственными в случае, когда многообразие имеет бесконечный объём. Представленный метод аппроксимации основан на теореме Чернова об аппроксимации операторных полугрупп.

Ключевые слова: параболическое уравнение на многообразии, задача Коши, представление решений, аппроксимация решений, многообразие ограниченной геометрии, полугруппа операторов

Для цитирования: Смирнова А. С. L_p-аппроксимации решений параболических дифференциальных уравнений на многообразиях // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 3. С. 297–303. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.297-303

Об авторе:
Смирнова Анна Сергеевна, аспирант кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4172-2811, smirnovaas@hse.ru

Original article

MSC2020 58J35, 47D06, 65M12, 35K15, 35C20, 58D25

L_p-approximations for solutions of parabolic differential equations on manifolds

A. S. Smirnova

Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. The paper considers the Cauchy problem for a parabolic partial differential equation in a Riemannian manifold of bounded geometry. A formula is given that expresses arbitrarily accurate (in the L_p-norm) approximations to the solution of the Cauchy problem in terms of parameters - the coefficients of the equation and the initial condition. The manifold is not assumed to be compact, which creates significant technical difficulties – for example, integrals over the manifold become improper in the case when the manifold has an infinite volume. The presented approximation method is based on Chernoff theorem on approximation of operator semigroups.

Keywords: parabolic equation on manifold, Cauchy problem, representation of solutions, approximation of solutions, manifold of bounded geometry, semigroup of operators

For citation: *A. S. Smirnova.* L_p-approximations for solutions of parabolic differential equations on manifolds. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:3(2022), 297–303. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202203.297-303

About the author:

Anna S. Smirnova, Postgraduate Student, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4172-2811, smirnovaas@hse.ru

1. Введение

Дифференциальные уравнения на многообразиях находят все больше приложений в современной науке и технике, как в прикладных аспектах, так и в теоретических. Например, в термодинамике (жидкие кристаллы [1]) и механике (гранулярный поток [2]), биофизике (биомембраны [3]) и компьютерной графике (визуализация мозга [4], восстановление поврежденных структур [5]) и других прикладных науках требуется найти решение уравнения в частных производных на многообразии или на поверхности. Уравнения на многообразиях естественным образом возникают в современной математической физике, см., например, [6] и ссылки в данной работе. Именно поэтому теоретические работы, посвященные численному и аналитическому решению уравнений в частных производных на многообразиях, привлекают все больше внимания [7–8].

В настоящей работе рассматривается задача Коши для параболического уравнения (типа диффузии) второго порядка в римановом многообразии M ограниченной геометрии, допуская в т. ч. и то, что многообразие может не быть компактным. Условие ограниченной геометрии многообразия необходимо для того, чтобы гарантировать полноту любого гладкого ограниченного векторного поля на таком многообразии. Это свойство важно для техники сдвига вдоль интегральных кривых векторного поля, которую мы используем: векторные поля являются коэффициентами уравнения, затем мы используем их для создания операторнозначной функции (называемой функцией Чернова), которая определена на $[0,+\infty)$ — вот почему нам нужно, чтобы интегральные кривые векторных полей существовали для всех положительных значений времени $t > 0$ (на компактных многообразиях это выполняется автоматически). После этого мы используем функцию Чернова и начальное условие для создания аппроксимаций Чернова $u_n(t,x)$, которые сходятся к решению $u(t,x)$ задачи Коши в L_p-норме: $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n(t,\cdot)-u(t,\cdot)\|_{L_p(M)}=0$. Таким образом, решение выражается в виде явной формулы, содержащей в качестве параметров коэффициенты уравнения и начальное условие. Этот результат можно рассматривать как следующий логический шаг после статьи [9], где такого рода формулы были опубликованы впервые, но в пространстве непрерывных функций, обращающихся в нуль на бесконечности. В настоящей работе область применимости формул расширяется на пространство L_p: решения принадлежат $L_p(M)$, а аппроксимации сходятся в $L_p(M)$. Представленный метод аппроксимации основан на теореме Чернова [10–11].

Определение 1.1. *Символом $\gamma_{x,A_j}\colon [0,+\infty)\to M$ обозначим интегральную кривую векторного поля A_j, берущую начало при времени 0 в точке $x\in M$ и являющуюся решением начальной задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\gamma_{x,A_j}(t) = A_j(\gamma_{x,A_j}(t)),\\ \gamma_{x,A_j}(0)=x. \end{cases} \tag{1.1}$$

2. Постановка задачи

Пусть (M,g) — риманово многообразие ограниченной геометрии размерности d. Предположим, что дано число $r=1,2,3,\ldots$ и заданы $r+1$ гладких и C^2-ограниченных векторных полей A_j на M, где $j=0,1,2,\ldots,r$. Также задано ограниченное измеримое скалярное поле $c\colon M\to\mathbb{R}$. Рассмотрим следующую задачу Коши для эволюционного уравнения относительно неизвестной функции $u\colon[0,+\infty)\times M\to\mathbb{R}$

$$\begin{cases} u'_t(t,x)=Lu(t,x), \quad x\in M, \quad t\in\mathbb{R},\\ u(0,x)=u_0(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

где L — дифференциальный оператор второго порядка, значение Lf которого на каждой гладкой функции $f\colon M\to\mathbb{R}$ задаётся следующим образом:

$$(Lf)(x)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}(A_jA_jf)(x)+A_0f(x)+c(x)f(x), \quad x\in M. \tag{2.2}$$

Приведем формулу, выражающую решение задачи (2.1) через параметры A_0, $A_1,\ldots,A_r$, c, u_0, причём в эту формулу будут входить интегральные кривые векторных полей A_j. Поэтому разумно предположить, что эти интегральные кривые также известны, в противном случае нам нужно найти их, решив задачу (1.1) каким-либо способом.

3. Построение аппроксимаций к решению параболического уравнения на многообразии

Справедлива следующая

Т е о р е м а 3.1. *Пусть функция* $c\colon M \to \mathbb{R}$ *измерима и ограничена. Пусть даны числа* $p \in [1, +\infty)$ *и* $r = 1, 2, 3, \ldots$ *Пусть также заданы* $r+1$ *гладких и* C^2*-ограниченных векторных полей* A_j *на* M, $j = 0, 1, \ldots, r$, *и для всех* j *выполняется* $divA_j(\alpha_s^*(x)) = 0$. *По определению для всех* $f \in L_p(M)$, $x \in M$ *и* $t \geq 0$ *положим*

$$(S(t)f)(x) = \frac{1}{4r}\sum_{j=1}^{r}\left(f\left(\gamma_{x,A_j}(\sqrt{2rt})\right) + f\left(\gamma_{x,-A_j}(\sqrt{2rt})\right)\right) + \\ + \frac{1}{2}f(\gamma_{x,A_0}(2t)) + tc(x)f(x), \quad (3.1)$$

где $\gamma_{x,A_j}\colon [0, +\infty) \to M$ *это интегральная кривая (определенная в (1.1)) векторного поля* A_j, *берущая начало при времени, равном* 0 *в точке* $x \in M$. *Также предполагаем, что оператор* L *является генератором* C_0*-полугруппы* $(e^{tL})_{t\geq 0}$ *в пространстве* $L_p(M)$ *с его естественной нормой* $\|f\| = \left(\int\limits_M |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$.

Тогда:

1) решение задачи Коши (2.1) с оператором L, *заданным в (2.2), существует и даётся равенством* $u(t,x) = (e^{tL}u_0)(x)$;

2) решение при всех $t \geq 0$ *и почти всех* $x \in M$ *представимо в виде*

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} u_n(t,x),$$

где предел существует в $L_p(M)$, *а* $u_n(t,x)$ *– черновские аппроксимации, задаваемые следующим образом:*

$$u_n(t,x) = \left(S\left(\frac{t}{n}\right)^n u_0\right)(x),$$

где $S\left(\frac{t}{n}\right)$ *получается из (3.1) заменой* t *на* t/n, *а* $S\left(\frac{t}{n}\right)^n = \underbrace{S\left(\frac{t}{n}\right)\ldots S\left(\frac{t}{n}\right)}_{n}$ *– композиция* n *копий линейного ограниченного оператора* $S\left(\frac{t}{n}\right)$.

3. Сходимость в $L_p(M)$ *локально равномерная по* t, *т.е. для каждого* $T > 0$ *верно, что*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\int_M |u_n(t,x) - u(t,x)|^p dx = 0.$$

Схема доказательства. Пункт 1 теоремы и равенство $u(t,x) = \left(e^{tL}u_0\right)(x)$ следуют из общей теории линейных эволюционных уравнений и сделанного предположения о том, что оператор L является генератором полугруппы.

Чтобы доказать пункт 2, для всех $x \in M$, $t \geq 0$, $f \in L_p(M)$ обозначим

$$\begin{aligned}(P_j(t)f)(x) &= f\left(\gamma_{x,A_j}(\sqrt{2rt})\right), \\ (Q_j(t)f)(x) &= f\left(\gamma_{x,-A_j}(\sqrt{2rt})\right), \\ (W(t)f)(x) &= f\left(\gamma_{x,A_0}(2t)\right), \\ (R(t)f)(x) &= tc(x)f(x).\end{aligned}$$

Тогда мы можем переписать $S(t)$ следующим образом:

$$S(t) = \frac{1}{4r}\sum_{j=1}^{r}(P_j(t) + Q_j(t)) + \frac{1}{2}W(t) + R(t). \tag{3.2}$$

Оценивая по отдельности нормы операторов $P_j(t), Q_j(t), W(t), R(t)$, с учётом (3.2) получаем, что $\|S(t)\| \leq 1 + t\sup_{x\in M}|c(x)|$ при всех $t \geq 0$. Непрерывность операторов $P_j(t), Q_j(t), W(t), R(t)$ по t в сильной операторной топологии проверяется с помощью теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, что в силу (3.2) даёт непрерывность $S(t)$ в том же смысле. Раскладывая $P_j(t), Q_j(t), W(t), R(t)$ по формуле Тейлора при $t \to 0$, с учётом (3.2) получаем, что $S(t) = I + tL + o(t)$ на плотном в $L_p(M)$ подпространстве бесконечногладких функций с компактным носителем. Следовательно, все условия теоремы Чернова об аппроксимации операторных полугрупп выполнены, в силу чего $e^{tL} = \lim_{n\to\infty} S(t/n)^n$ в сильной операторной топологии. Следовательно, $u(t,x) = (\lim_{n\to\infty} S(t/n)^n u_0)(x)$.

Пункт 3 также напрямую следует из теоремы Чернова. Теорема доказана.

4. Заключение

Таким образом, используя средства дифференциальной геометрии и теории C_0-полугрупп (в т. ч. теорему Чернова), мы нашли решение задачи Коши для параболического уравнения второго порядка на многообразии, не предполагая, что многообразие компактно, но при условии, что оно имеет ограниченную геометрию. Использовалась функция Чернова, предложенная в [9], поэтому найденные аппроксимации Чернова совпадают с приведенными в [9]. Однако решения, их приближения и сходимость в [9] рассматривались в пространстве непрерывных функций, обращающихся в нуль на бесконечности (с равномерной нормой). Между тем выше мы доказали, что такая же ситуация имеет место, если решения, их приближения и сходимость рассматриваются в L_p. Это позволяет рассматривать решения в более широком смысле (например, начальное условие и решение могут быть разрывными). Также мы разработали несколько лемм, которые могут быть полезны при изучении подобных уравнений в пространстве $L_p(M)$ на некомпактных многообразиях M. Эти леммы будут опубликованы в более подробной работе позже.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Минобрнауки России соглашение № 075-15-2022-1101. Автор благодарит И. Д. Ремизова за постановку задачи и внимание к работе, и Е. И. Яковлева за плодотворные обсуждения.

Список литературы

1. Virga E. G. Variational theories for liquid crystals. CRC Press. 2018.

2. Rauter M., Tuković Ž. A finite area scheme for shallow granular flows on three-dimensional surfaces // Computers and Fluids. 2018. Vol. 166. pp. 184–199. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1802.05229

3. Elliott C. M., Stinner B. Modeling and computation of two phase geometric biomembranes using surface finite elements // Journal of Computational Physics. 2010. Vol. 229, No. 18. pp. 6585–6612. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.05.014

4. Mémoli F., Sapiro G., Thompson P. Implicit brain imaging // NeuroImage. 2004. Vol. 23. pp. S179–S188. DOI: https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2004.07.072

5. Macdonald C. B., Ruuth S. J. The implicit closest point method for the numerical solution of partial differential equations on surfaces // SIAM Journal on Scientific Computing. 2010. Vol. 31, No. 6.pp. 4330–4350. DOI: https://doi.org/10.1137/080740003

6. Volkov B. O. Levy Laplacians and instantons on manifolds // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2020. Vol. 23, No. 2. 17 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2107.11215

7. Zhang QI. S. Blow-up results for nonlinear parabolic equations on manifolds // Duke Mathematical Journal. 1999. Vol. 97, No. 3. pp. 515–539. DOI: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-99-09719-3

8. Yan Q., Jiang S. W., Harlim J. Kernel-based methods for solving time-dependent advection-diffusion equations on manifolds. 2021. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.13835

9. Mazzucchi S., Moretti V., Remizov I., Smolyanov O. Feynman type formulas for Feller semigroups in Riemannian manifolds. 2020. 36 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.06606

10. Chernoff P. R. Note on product formulas for operator semigroups // J. Functional Analysis. 1968. Vol. 2, No. 2. pp. 238–242. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7

11. Butko Ya. A. The method of Chernoff approximation // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2020. Vol. 325. pp. 19–46.

Поступила 01.07.2022; доработана после рецензирования 10.08.2022; принята к публикации 24.08.2022

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. E. G. Virga, *Variational theories for liquid crystals*, CRC Press, 2018.

2. M. Rauter, Ž. Tuković, “A finite area scheme for shallow granular flows on three-dimensional surfaces”, *Computers and Fluids*, **166** (2018), 184–199. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1802.05229

3. C. M. Elliott, B. Stinner, “Modeling and computation of two phase geometric biomembranes using surface finite elements”, *Journal of Computational Physics*, **229**:18 (2010), 6585–6612. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.05.014

4. F. Mémoli, G. Sapiro, P. Thompson, “Implicit brain imaging”, *NeuroImage*, **23** (2004), S179–S188. DOI: https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2004.07.072

5. C. B. Macdonald, S. J. Ruuth, “The implicit closest point method for the numerical solution of partial differential equations on surfaces”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **31**:6 (2010), 4330–4350. DOI: https://doi.org/10.1137/080740003

6. B. O. Volkov, “Levy Laplacians and instantons on manifolds”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **23:**:2 (2020), 17 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2107.11215

7. QI S. Zhang, “Blow-up results for nonlinear parabolic equations on manifolds”, *Duke Mathematical Journal*, **97**:3 (1999), 515–539. DOI: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-99-09719-3

8. Q. Yan, S. W. Jiang, J. Harlim, “Kernel-based methods for solving time-dependent advection-diffusion equations on manifolds”, 2021. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.13835

9. S. Mazzucchi, V. Moretti, I. Remizov, O. Smolyanov, “Feynman type formulas for Feller semigroups in Riemannian manifolds”, 2020, 36 p. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.06606

10. P. R. Chernoff, “Note on product formulas for operator semigroups”, *J. Functional Analysis*, **2**:2 (1968), 238–242. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-1236(68)90020-7

11. Ya. A. Butko, “The method of Chernoff approximation”, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, **325** (2020), 19–46.

Submitted 01.07.2022; Revised 10.08.2022; Accepted 24.08.2022

The author has read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declares no conflict of interest.