А. В. Калинин, А. А. Тюхтина, О. А. Изосимова, Модифицированные калибровочные соотношения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении, *Журнал СВМО*, 2017, том 19, номер 4, 55–67

DOI: 10.15507/2079-6900.19.201704.55-67

Математическое моделирование и информатика

DOI 10.15507/2079-6900.19.201704.55-67

УДК 517.95

Модифицированные калибровочные соотношения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении

© **А. В. Калинин** [1] **А. А. Тюхтина** [2] **О. А. Изосимова** [3]

Аннотация. Изучается начально-краевая задача для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении при краевом условии магнитного типа. Рассматривается случай неоднородных сред, содержащих проводящие и непроводящие включения. Приводится постановка задачи в терминах векторного магнитного и скалярного электрического потенциалов. Используются специальные калибровочные соотношения (модифицированные калибровочные соотношения Кулона и Лоренца), позволяющие сформулировать задачи независимого определения векторного магнитного потенциала. Доказывается корректность поставленных задач при общих условиях на коэффициенты. Возможность применения при этом теоремы Лионса обосновывается с помощью оценок для скалярных произведений векторных полей. Изучается соотношение между решениями задач при разных калибровочных соотношениях. Рассматривается связь между постановками задач для векторного магнитного потенциала и исходной задачей для векторного магнитного потенциала и скалярного электрического потенциала.

Ключевые слова: система уравнений Максвелла, квазистационарное магнитное приближение, неоднородные среды, векторный потенциал, калибровочные соотношения.

1. Введение

Система уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении находит применение при решении различных практических задач [1]. Основные задачи для этой системы допускают разнообразные формулировки в терминах полей ($\vec{H}$ и $\vec{E}$ -формулировки [2], [3]) и в терминах потенциалов ($\vec{A}-\phi$ -формулировки при различных калибровочных соотношениях [4], [5], $\vec{T}-\psi$ -формулировки [6]).

[1] **Калинин Алексей Вячеславович**, доцент кафедры математической физики и оптимального управления, Институт информационных технологий, математики и механики, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, ГСП-20, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д.23, корп.6), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8558-0451, avk@mm.unn.ru

[2] **Тюхтина Алла Александровна**, доцент кафедры математического моделирования экономических процессов, Институт экономики и предпринимательства, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, ГСП-20, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д.23, корп.6), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5723-9256, kalinmm@yandex.ru

[3] **Изосимова Ольга Алексеевна**, аспирант, Институт информационных технологий, математики и механики, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, ГСП-20, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д.23, корп.6), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3865-8281, izosimova93@yandex.ru

При исследовании задач для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении в реальных физически неоднородных средах типичной является ситуация, когда рассматриваемая пространственная область содержит проводящие и непроводящие включения [1-3]. В этом случае сформулированные начально-краевые задачи относятся к эллиптико-параболическому типу [3] . Рассмотрение таких задач требует изучения свойств функциональных пространств, в которых ищется решение. В частности, важную роль играют неравенства, позволяющие при доказательстве корректности обобщённых постановок обосновывать коэрцитивность соответствующих билинейных форм.

В настоящей работе рассматриваются формулировки задач для квазистационарной системы Максвелла в терминах потенциалов (векторного магнитного потенциала $\vec{A}$ и скалярного электрического потенциала ϕ) для неоднородных областей, содержащих проводящие и непроводящие включения. При этом используются модифицированные калибровочные соотношения Кулона и Лоренца, приводящие к обобщенным постановкам задач независимого определения векторного магнитного потенциала. Для периодических по времени решений квазистационарных задач модифицированные калибровочные соотношения Лоренца обсуждались, в частности, в работах [5], [7]. В работах [8], [9] исследовались прямые и обратные задачи для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении с использованием модифицированных калибровочных соотношений Кулона и Лоренца в проводящих областях.

Целью настоящей статьи является распространение результатов работ [7]–[9] на случай ограниченных областей, содержащих проводящие и непроводящие включения.

Все получаемые в работе результаты справедливы при достаточно общих условиях на коэффициенты системы и опираются на оценки скалярных произведений векторных полей, доказанные в [10], [11].

2. Постановка задач и основные результаты

В терминах векторного магнитного потенциала $\vec{A}$ и скалярного электрического потенциала ϕ система уравнений Маквелла в квазистационарном магнитном приближении [12] сводится к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma\vec{A}(x,t) + \mathrm{rot}\mu^{-1}\mathrm{rot}\vec{A}(x,t) = -\sigma\mathrm{grad}\phi(x,t) + \vec{J}^{\text{ст}}(x,t), \tag{2.1}$$

где $(x,t)\in Q = \Omega\times(0,T)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, $T>0$.

В работе предполагается, что Ω – открытая ограниченная область, гомеоморфная шару, с липшицевой границей Γ, $\vec{\nu}(x)$ – единичный вектор внешней нормали в точке $x\in\Gamma$. Для функций $\vec{u}:\bar{\Omega}\to\mathbb{R}^3$ через $\vec{u}_\nu$, $\vec{u}_\tau$ обозначаются нормальная и касательная компоненты функции на границе области. Через $\|\cdot\|_{2,\Omega}$ и $(\cdot,\cdot)_{2,\Omega}$ обозначаются норма и скалярное произведение в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Уравнение (2.1) дополняется граничным условием, соответствующим однородному условию магнитного типа [1]

$$(\mu^{-1}\mathrm{rot}\vec{A})_\tau(x,t) = 0,\ x\in\Gamma,\ t\in(0,T), \tag{2.2}$$

и начальным условием

$$\vec{A}(x,0) = \vec{a}(x),\ x\in\Omega_C, \tag{2.3}$$

где $\vec{a}\in\{L_2(\Omega_C)\}^3$ – заданная функция.

Рассматриваемая область состоит из проводника, занимающего подобласть Ω_C и окруженного диэлектриком (непроводящим слоем) $\Omega_I = \Omega \setminus \bar{\Omega}_C$. Предполагается, Ω_C – открытая ограниченная область, гомеоморфная шару, с липшицевой границей Γ_C, $\bar{\Omega}_C \subset \Omega$, так что $\partial\Omega_I = \Gamma \cup \Gamma_C$. Через $\vec{\nu}_C(x)$, $\vec{\nu}_I(x)$ обозначаются единичные вектора внешней нормали в точке $\vec{x} \in \Gamma_C$ к областям Ω_C и Ω_I соответственно, $\vec{\nu}_C + \vec{\nu}_I = 0$. Для функций $\vec{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $u : \Omega \to \mathbb{R}^1$ через $\vec{u}_C$, u_C обозначаются их сужения на область Ω_C, через $\vec{u}_I$, u_I – сужения на Ω_I.

Предполагается, что μ, ϵ, σ – симметричные (3×3) матрицы измеримых на Ω функций, удовлетворяющие условиям

$$\epsilon_1|\xi|^2 \leq (\epsilon(x)\xi, \xi) \leq \epsilon_2|\xi|^2,\ \mu_1|\xi|^2 \leq (\mu(x)\xi, \xi) \leq \mu_2|\xi|^2$$

при почти всех $x \in \Omega$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^3$,

$$\sigma_{ij}(x) = 0,\ i, j = 1, 2, 3,\ \text{при почти всех}\ x \in \Omega_I,$$

$$\sigma_1|\xi|^2 \leq (\sigma(x)\xi, \xi) \leq \sigma_2|\xi|^2\ \text{при почти всех}\ x \in \Omega_C\ \text{и всех}\ \xi \in \mathbb{R}^3,$$

где μ_i, σ_i, ϵ_i, ($i = 1, 2$) – заданные положительные числа.

$\vec{J}^{\text{ст}} : Q \to \mathbb{R}^3$ – заданная суммируемая с квадратом функция,

$$\mathrm{div}\vec{J}^{\text{ст}}(x,t) = 0,\ (x,t) \in \Omega_I \times (0,T),\ (\vec{J}^{\text{ст}})_\nu(x,t) = 0,\ (x,t) \in \Gamma \times (0,T). \tag{2.4}$$

Определяются следующие гильбертовы пространства вектор-функций с соответствующими скалярными произведениями [13], [14]:

$$H(\mathrm{div}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 \colon \mathrm{div}\,\vec{u} \in L_2(\Omega)\},\ K(\mathrm{div}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 \colon \mathrm{div}\,\vec{u} = 0\},$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_{div,\Omega} = \int_\Omega (\vec{u} \cdot \vec{v}) dx + \int_\Omega (\mathrm{div}\,\vec{u}\,\mathrm{div}\,\vec{v}) dx,$$

$$H(\mathrm{rot}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 \colon \mathrm{rot}\,\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3\},\ K(\mathrm{rot}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 \colon \mathrm{rot}\,\vec{u} = \vec{0}\},$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_{rot,\Omega} = \int_\Omega (\vec{u} \cdot \vec{v}) dx + \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\vec{u} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v}) dx.$$

Через $H_0(\mathrm{rot}; \Omega)$, $H_0(\mathrm{div}; \Omega)$ обозначается замыкание множества пробных вектор-функций $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ в $H(\mathrm{rot}; \Omega)$ и $H(\mathrm{div}; \Omega)$ соответственно, $K_0(\mathrm{div}; \Omega) = K(\mathrm{div}; \Omega) \cap H_0(\mathrm{div}; \Omega)$.

Решением задачи (2.1)–(2.3) называются функции $\vec{A} \in L_2(0, T, H(\mathrm{rot}; \Omega))$, $\phi \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$ такие, что $\mu^{-1}\mathrm{rot}\vec{A} \in L_2(0, T, H_0(\mathrm{rot}; \Omega))$ и справедливы равенства (2.1) и (2.3).

Предположим, в решении задачи (2.1)–(2.3) $\vec{A} \in C^1(0, T, H(\mathrm{rot}; \Omega))$. Тогда из (2.1) получаем, что для всех $\vec{v} \in H(\mathrm{rot}; \Omega)$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_C} (\sigma\vec{A} \cdot \vec{v}) dx + \int_\Omega (\mu^{-1}\mathrm{rot}\vec{A} \cdot \mathrm{rot}\vec{v}) dx = -\int_{\Omega_C} (\sigma \mathrm{grad}\phi \cdot \vec{v}) dx + \int_\Omega (\vec{J}^{\text{ст}} \cdot \vec{v}) dx. \tag{2.5}$$

Для обеспечения единственности решения задач в терминах потенциалов $\vec{A}$, φ уравнение (2.1) традиционно дополняется калибровочными соотношениями (например, соотношением Кулона $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ или Лоренца $\mathrm{div}\,\vec{A} + \partial\phi/\partial t = 0$). В этом случае для $\vec{A}$ и ϕ приходится решать связную систему уравнений [3], [4].

В работе предлагается использовать модифицированные калибровочные соотношения

$$\operatorname{div}\sigma\vec{A}(x,t)=0,\ (x,t)\in\Omega_C\times(0,T),\ (\sigma\vec{A})_{\nu_C}(x,t)=0,\ (x,t)\in\Gamma_C\times(0,T), \tag{2.6}$$

$$\operatorname{div}\vec{A}(x,t)=0,\ (x,t)\in\Omega_I\times(0,T),\ \vec{A}_\nu(x,t)=0,\ (x,t)\in\Gamma\times(0,T).$$

и

$$\varphi(x,t)=-\varkappa\operatorname{div}\sigma\vec{A}(x,t),\ (x,t)\in\Omega_C\times(0,T),\ (\sigma\vec{A})_{\nu_C}(x,t)=0,\ (x,t)\in\Gamma_C\times(0,T), \tag{2.7}$$

$$\operatorname{div}\vec{A}(x,t)=0,\ (x,t)\in\Omega_I\times(0,T),\ \vec{A}_\nu(x,t)=0,\ (x,t)\in\Gamma\times(0,T),$$

которые, как будет показано далее, приводят к возможности независимого определения векторного магнитного потенциала. Подобные подходы для гармонических задач обсуждались в работе [5].

Введем в $\{L_2(\Omega_C)\}^3$ скалярное произведение соотношением $(\vec{u},\vec{v})_\sigma=\int_{\Omega_C}(\sigma\vec{u}\cdot\vec{v})dx$. Получившееся гильбертово пространство обозначается $\{L_2(\sigma;\Omega_C)\}^3$. Для постановки начально-краевой задачи в виде интегрального тождества определяются также следующие гильбертовы пространства

$$H_0(\operatorname{div}\sigma;\Omega_C)=\{\vec{u}\in\{L(\sigma;\Omega_C)\}^3:\sigma\vec{u}\in H_0(\operatorname{div};\Omega_C)\},$$

$$K_0(\operatorname{div}\sigma;\Omega_C)=\{\vec{u}\in H_0(\operatorname{div}\sigma;\Omega_C)\colon \operatorname{div}\sigma\,\vec{u}=0\},$$

$$(\vec{u},\vec{v})_{H(\operatorname{div}\sigma;\Omega)}=(\vec{u},\vec{v})_\sigma+(\operatorname{div}\sigma\,\vec{u},\operatorname{div}\sigma\,\vec{v})_{2,\Omega_C},$$

$$W(\sigma;\Omega_C)=H(\operatorname{rot};\Omega_C)\cap H_0(\operatorname{div}\sigma;\Omega_C),\ V(\sigma;\Omega_C)=H(\operatorname{rot};\Omega_C)\cap K_0(\operatorname{div}\sigma;\Omega_C),$$

$$(\vec{u},\vec{v})_{W(\sigma;\Omega_C)}=\int_{\Omega_C}(\vec{u}\cdot\vec{v})dx+\int_{\Omega_C}(\operatorname{rot}\vec{u}\cdot\operatorname{rot}\vec{v})dx+\int_{\Omega_C}\operatorname{div}\sigma\,\vec{u}\operatorname{div}\sigma\,\vec{v}\,dx,$$

$$W=\{\vec{u}\in H(\operatorname{rot};\Omega):\vec{u}_C\in H_0(\operatorname{div}\sigma;\Omega_C),\operatorname{div}\vec{u}_I=0,(u_I)_\nu(x)=0,x\in\Gamma\},$$

$$V=\{\vec{u}\in W:\operatorname{div}\sigma\,\vec{u}_C=0\},$$

$$(\vec{u},\vec{v})_W=\int_\Omega(\vec{u}\cdot\vec{v})dx+\int_\Omega(\operatorname{rot}\vec{u}\cdot\operatorname{rot}\vec{v})dx+\int_{\Omega_C}(\operatorname{div}\sigma\,\vec{u}\operatorname{div}\sigma\,\vec{v})dx.$$

Пространство $W(\sigma;\Omega_C)$ непрерывно и плотно вложено в $\{L_2(\sigma;\Omega_C)\}^3$, пространство $V(\sigma;\Omega_C)$ непрерывно и плотно вложено в $K(\operatorname{div}\sigma;\Omega_C)$ [8].

Задача (2.1)–(2.3), (2.6) сводится к определению такой функции $\vec{A}\in L_2(0,T,V)$, удовлетворяющей начальному условию (2.3), что для всех $\vec{v}\in V$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_C}(\sigma\vec{A}\cdot\vec{v})dx+\int_\Omega(\mu^{-1}\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{v})dx=\int_\Omega(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{v})dx. \tag{2.8}$$

Задача при использовании калибровочных соотношений (2.7) сводится к определению такой функции $\vec{A}\in L_2(0,T,W)$, удовлетворяющей начальному условию (2.3), что для всех $\vec{v}\in W$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_C}(\sigma\vec{A}\cdot\vec{v})dx+\int_\Omega(\mu^{-1}\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{v})dx+\varkappa\int_{\Omega_C}\operatorname{div}\sigma\,\vec{A}\operatorname{div}\sigma\,\vec{v}\,dx=\int_\Omega(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{v})dx. \tag{2.9}$$

Основными результатами работы являются следующие утверждения.

Теорема 2.1. *Для любых $\vec{a}\in K_0(\operatorname{div}\sigma;\Omega_C)$ и $\vec{J}^{cm}\in\{L_2(Q)\}^3$, удовлетворяющей (2.4), существует единственное решение $\vec{A}\in L_2(0,T,V)$ задачи (2.8), (2.3). При этом $\vec{A}_C\in C(0,T,K_0(\operatorname{div}\sigma;\Omega_C))$. Если $\vec{a}\in V(\sigma;\Omega_C)$, то $\vec{A}'_C\in L_2(0,T,K_0(\operatorname{div}\sigma;\Omega_C))$.*

Т е о р е м а 2.2. *Для любых* $\vec{a} \in \{L_2(\sigma;\Omega_C)\}^3$ *и* $\vec{J}^{cm} \in \{L_2(Q)\}^3$, *удовлетворяющей* (2.4), *существует единственное решение* $\vec{A} \in L_2(0,T,W)$ *задачи* (2.9), (2.3). *При этом* $\vec{A}_C \in C(0,T,\{L(\sigma;\Omega_C)\}^3)$. *Если* $\vec{a} \in W(\sigma;\Omega_C)$, *то* $\vec{A}'_C \in L_2(0,T,\{L_2(\sigma;\Omega_C)\}^3)$.

Т е о р е м а 2.3. *Пусть* $\vec{A}$ *– решение задачи* (2.8), (2.3), $\vec{A}_\varkappa$ *– решение задачи* (2.9) *с начальным условием* $\vec{A}_{\varkappa C}(0) = \vec{a} + \vec{q}$, *где* $\vec{q} \in K(\mathrm{rot};\Omega_C)$. *Тогда* $\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{rot}\,\vec{A}_\varkappa$. *При* $\varkappa \to \infty$ $\vec{A}_\varkappa \to \vec{A}$ *в* $L_2(0,T,W)$. *Если* $\vec{q} = 0$, $(\vec{A}_\varkappa)_C \to \vec{A}_C$ *в* $C(0,T,\{L_2(\sigma;\Omega_C)\}^3)$.

Т е о р е м а 2.4. *Пусть* $\vec{A} \in L_2(0,T,V)$ *– решение задачи* (2.8), (2.3), *где* $\vec{a} \in V(\sigma;\Omega_C)$. *Тогда найдется функция* $\phi \in L_2(0,T,H^1(\Omega))$ *такая, что* $\vec{A}$, ϕ *– решение задачи* (2.1)–(2.3).

Т е о р е м а 2.5. *Пусть* $\vec{A} \in L_2(0,T,W)$ *– решение задачи* (2.7), (2.3), *где* $\vec{a} \in W(\sigma;\Omega_C)$. *Тогда найдется функция* $\phi \in L_2(0,T,H^1(\Omega))$ *такая, что* $\vec{A}$, ϕ *– решение задачи* (2.1)–(2.3), *причём* $\phi_C = -\varkappa\,\mathrm{div}\,\sigma\,\vec{A}_C$.

3. Предварительные утверждения

Результаты работы опираются на следующие оценки, установленные в [11].

Т е о р е м а 3.1. *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^3$ *– открытое ограниченное множество с липшицевой границей, гомеоморфное шару. Существует постоянная* $C(G) > 0$, *зависящая только от области* G *такая, что неравенство*

$$|(\vec{u},\vec{v})_{2,G}| \le C(G)\left(\|\vec{u}\|_{2,G}\|\mathrm{div}\,\vec{v}\|_{2,G} + \|\vec{v}\|_{2,G}\|\mathrm{rot}\,\vec{u}\|_{2,G} + \|\mathrm{rot}\,\vec{u}\|_{2,G}\|\mathrm{div}\,\vec{v}\|_{2,G}\right) \tag{3.10}$$

выполняется для любых $\vec{u} \in H_0(\mathrm{rot};G)$, $\vec{v} \in H(\mathrm{div};G)$, *а также для любых* $\vec{u} \in H(\mathrm{rot};G)$, $\vec{v} \in H_0(\mathrm{div};G)$.

Далее в этой главе считаем, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет уловиям, сформулированным при постановке начально-краевых задач.

Л е м м а 3.1. *Пусть* $K_{0,I}(\mathrm{div};\Omega_I) = \{\vec{w} \in K(\mathrm{div};\Omega_I) : \langle \vec{w}_\nu, 1\rangle_{\Gamma_C} = 0\}$. *Существует линейный непрерывный оператор продолжения* $E_{div} : K_{0,I}(\mathrm{div};\Omega_I) \to K(\mathrm{div};\Omega)$. *Если при этом* $\vec{w}_\nu(x) = 0$, $x \in \Gamma$, *то* $E_{div}\vec{w} \in K_0(\mathrm{div};\Omega)$.

Доказательство леммы приводится, например, в [11].

Л е м м а 3.2. *Найдётся такая положительная постоянная* $C(\Omega_C,\Omega)$, *что для всех* $\vec{u} \in W$ *справедливо неравенство*

$$\|\vec{u}\|_{2,\Omega} \le C(\Omega_C,\Omega)\left(\|\mathrm{rot}\vec{u}\|_{2,\Omega} + \|\mathrm{div}\sigma\vec{u}\|_{2,\Omega_C}\right). \tag{3.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{u} \in W$. Применяя неравенство (3.10) к функциям $\vec{u}_C \in H(\mathrm{rot};\Omega_C)$, $\sigma\vec{u}_C \in K_0(\mathrm{div};\Omega_C)$, получаем

$$\|\vec{u}\|_{2,\Omega_C} \le C_1(\|\mathrm{rot}\vec{u}\|_{2,\Omega_C} + \|\mathrm{div}\sigma\vec{u}\|_{2,\Omega_C}),$$

где $C_1 = \sigma_1^{-1}(C(\Omega_C)\max\{1,\sigma_2\} + 1/4)$.

Согласно лемме 3.1., найдётся функция $\vec{v} \in K_0(\mathrm{div};\Omega)$ такая, что $\vec{v}_I = \vec{u}_I$, $\|\vec{v}\|_{2,\Omega} \leq C\|\vec{u}_I\|_{2,\Omega_I}$, где постоянная $C > 0$ зависит только от области Ω_C.

Применяя (3.10) к функциям $\vec{u}$, $\vec{v}$, получаем

$$|(\vec{u},\vec{v})_{2,\Omega}| \leq C(\Omega)\|\vec{v}\|_{2,\Omega}\|\mathrm{rot}\,\vec{u}\|_{2,\Omega} \leq C(\Omega)C\|\vec{u}\|_{2,\Omega_I}\|\mathrm{rot}\,\vec{u}\|_{2,\Omega}.$$

Так как $(\vec{u},\vec{v})_{2,\Omega} = \|\vec{u}_I\|^2_{2,\Omega_I} + (\vec{u}_C,\vec{v})_{2,\Omega_C}$,

$$\|\vec{u}\|_{2,\Omega_I} \leq C\|\vec{u}\|_{2,\Omega_C} + C(\Omega)C\|\mathrm{rot}\,\vec{u}\|_{2,\Omega} \leq C(C(\Omega)+C_1)\|\mathrm{rot}\,\vec{u}\|_{2,\Omega} + C_1C\|\mathrm{div}\,\sigma\,\vec{u}\|_{2,\Omega_C}.$$

Таким образом, справедлива оценка (3.11), где $C(\Omega_C,\Omega) = (C_1^2 + C^2(C(\Omega)+C_1)^2)^{1/2}$.
Доказательство закончено.

Введём в пространстве W замкнутые подпространства

$$W_0 = \{\vec{u} \in W : \mathrm{rot}\,\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u}_I = 0, (\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u})_\tau(x) = 0, x \in \Gamma\},\ W_1 = \{\vec{u} \in W : \vec{u}_C = 0\}.$$

Обозначим $V_0 = W_0 \cap V$. Пусть

$$H_I = \{\xi \in H^1(\Omega_I) : \xi(x) = 0, x \in \Gamma\},\ H_C = \{\xi \in H^1(\Omega_I) : \xi(x) = 0, x \in \Gamma_C\}.$$

Лемма 3.3. *Для любого элемента $\vec{w} \in W$ однозначно определяются элементы $\vec{w}_0 \in W_0$, $\vec{w}_1 \in W_1$ такие, что $\vec{w} = \vec{w}_0 + \vec{w}_1$.*

Доказательство. Для $\vec{u} \in W_1$ неравенство (3.11) принимает вид $\|\vec{u}_I\|_{2,\Omega_I} \leq C(\Omega_C,\Omega)\|\mathrm{rot}\,\vec{u}_I\|_{2,\Omega_I}$. Из леммы Лакса-Мильграма следует, что найдётся единственная функция $\vec{w}_1 \in W_1$ такая, что при всех $\vec{v} \in W_1$

$$\int_{\Omega_I}(\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{w}_1 \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v})dx = \int_{\Omega_I}(\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{w} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v})dx.$$

Положим $\vec{w}_0 = \vec{w} - \vec{w}_1$.

Пусть $\vec{\psi} \in H^3_C$. Согласно неравенству Фридрихса [15], найдётся единственная функция $p \in H_C$ такая, что для всех $\xi \in H_C$

$$\int_{\Omega_I}(\mathrm{grad}\,p \cdot \mathrm{grad}\,\xi)dx = \int_{\Omega_I}(\vec{\psi} \cdot \mathrm{grad}\,\xi)dx.$$

Продолжим функции $\vec{\psi}$, p нулём в Ω_C и положим $\vec{v} = \vec{\psi} - \mathrm{grad}\,p$. Тогда $\vec{v} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$, $\vec{v}_C = 0$, $\mathrm{div}\,\vec{v}_I = 0$ и $\vec{v}_\nu = 0$. Таким образом, $\vec{v} \in W_1$, $\mathrm{rot}\,\vec{v} = \mathrm{rot}\,\vec{\psi}$, поэтому $\int_{\Omega_I}(\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{w}_0 \cdot \mathrm{rot}\,\vec{\psi})dx = 0$. Следовательно, $\mathrm{rot}\,\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\vec{w}_{0I} = 0$, $(\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{w}_0)_\tau(x) = 0$, $x \in \Gamma$, то есть $\vec{w}_0 \in W_0$.

Для всех $\vec{u} \in W_0$, $\vec{v} \in W_1$ $\int_\Omega(\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v})dx = 0$. Следовательно, ввиду оценки (3.11), $W_0 \cap W_1 = \{0\}$. Отсюда вытекает единственность представления.
Доказательство закончено.

Лемма 3.4. *Для любой функции $\vec{v} \in W(\sigma;\Omega_C)$ найдётся единственная функция $\vec{w} \in W_0$ такая, что $\vec{w}_C = \vec{v}$. При этом $\|\vec{w}\|_W \leq C\|\vec{v}\|_{W(\sigma;\Omega_C)}$, где постоянная $C > 0$ не зависит от $\vec{v}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства Фридрихса вытекает, что найдётся единственная функция $p \in H_I$, при всех $\xi \in H_I$ удовлеворяющая равенству

$$\int_{\Omega_I} (\mu \operatorname{grad} p \cdot \operatorname{grad} \xi) dx = -\langle (\operatorname{rot} \vec{v})_{\nu_C}, \xi \rangle_{\Gamma_C},$$

$$\operatorname{div} \mu \operatorname{grad} p = 0,\ (\mu \operatorname{grad} p)_{\nu_I}(x) = -(\operatorname{rot} \vec{v})_{\nu_C}(x),\ x \in \Gamma_C,\ \|\operatorname{grad} p\|_{2,\Omega_I} \le C_1 \|\operatorname{rot} \vec{v}\|_{2,\Omega_C}.$$

Определим функцию $\vec{F} \in K(\operatorname{div}; \Omega)$: $\vec{F}_C = \operatorname{rot} \vec{v}$, $\vec{F}_I = \mu \operatorname{grad} p$. По построению,

$$\operatorname{rot} \mu^{-1} \vec{F}_I = 0,\ (\mu^{-1} \vec{F})_\tau(x) = 0,\ x \in \Gamma,\ \|\vec{F}\|_{2,\Omega} \le C_2 \|\operatorname{rot} \vec{v}\|_{2,\Omega_C},$$

где $C_2 = (\mu_2^2 C_1^2 + 1)^{1/2}$.

Найдётся единственная функция $\vec{u} \in K_0(\operatorname{div}; \Omega) \cap H(\operatorname{rot}; \Omega)$ такая, что $\operatorname{rot} \vec{u} = \vec{F}$. Тогда $\vec{v} - \vec{u}_C = \operatorname{grad} q$, $q \in H^1(\Omega_C)$, $\int_{\Omega_C} q\, dx = 0$.

Пусть $q_1 \in H^1(\Omega_I)$ – решение задачи

$$\Delta q_1 = 0,\ q_1(x) = q(x),\ x \in \Gamma_C,\ q_1(x) = 0,\ x \in \Gamma,$$

функция $q_2 \in H_C$ удовлетворяет при всех $\xi \in H_C$ равенству

$$\int_{\Omega_I} (\operatorname{grad} q_2 \cdot \operatorname{grad} \xi) dx = -\langle (\operatorname{grad} q_1)_\nu, \xi \rangle_\Gamma.$$

Определим функцию $\vec{w} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$ соотношениями

$$\vec{w}_C = \vec{u}_C + \operatorname{grad} q = \vec{v},\ \vec{w}_I = \vec{u}_I + \operatorname{grad}(q_1 + q_2).$$

По построению, $\vec{w} \in W_0$,

$$\|\vec{w}\|_W \le C(\Omega_C, \Omega) \left(\|\vec{F}\|_{2,\Omega} + \|\operatorname{div} \sigma\, \vec{v}\,\|_{,\Omega_C} \right) \le C \|\vec{v}\|_{W(\sigma;\Omega_C)},$$

где можно взять $C = C(\Omega_C, \Omega)(C_2 + 1)$.

Предположим, найдутся функции $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2 \in W_0$ такие, что $\vec{w}_{iC} = \vec{v}$, $i = 1, 2$. Тогда $\vec{w}_2 - \vec{w}_1 \in W_0 \cap W_1$, и единственность продолжения доказана.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Л е м м а 3.5. *Для любой функции $\vec{w} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$ найдётся единственная функция $\vec{v} \in V$ такая, что $\vec{w} - \vec{v} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\|\vec{v}\|_{rot,\Omega} + \|\vec{w} - \vec{v}\|_{2,\Omega} \le C \|\vec{w}\|_{rot,\Omega}$, где постоянная $C > 0$ не зависит от $\vec{w}$. При этом, если $\vec{w} \in W$, $\vec{w} - \vec{v} \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{w} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$. Тогда [10] $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{g}$, где $\vec{w}_1 \in K_0(\operatorname{div}; \Omega)$, $\vec{g} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$, $(\vec{w}_1)_C = \vec{v}^c + \operatorname{grad} p$, где $\sigma \vec{v}^c \in K_0(\operatorname{div}; \Omega_C)$, $p \in H^1(\Omega_C)$, $\int_{\Omega_C} p\, dx = 0$,

$$\|\vec{w}\|_{2,\Omega}^2 = \|\vec{w}_1\|_{2,\Omega}^2 + \|\vec{g}\|_{2,\Omega}^2,\ \|\vec{w}_1\|_\sigma^2 = \|\vec{v}^c\|_\sigma^2 + \|\vec{g}\|_\sigma^2.$$

Пусть $p_1 \in H^1(\Omega_I)$ – решение задачи

$$\Delta p_1 = 0,\ p_1(x) = p(x),\ x \in \Gamma_1,\ p_1(x) = 0,\ x \in \Gamma.$$

Обозначим $f = -(\operatorname{grad} p_1)_\nu \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Пусть функция $p_2 \in H_C$ удовлетворяет при всех $q \in H_C$ равенству

$$\int_\Omega (\operatorname{grad} p_2 \cdot \operatorname{grad} q) dx = \langle f, q \rangle_\Gamma.$$

Определим функцию $\psi \in H^1(\Omega)$: $\psi_C = p$, $\psi_I = p_1 + p_2$. Положим $\vec{v} = \vec{w}_1 - \operatorname{grad} \psi = \vec{w} - \vec{g} - \operatorname{grad} \psi$. По построению, $\vec{v}_C = \vec{w}_1 - \operatorname{grad} p = \vec{v}^c \in K_0(\operatorname{div} \sigma; \Omega_C)$, $\vec{v}_\nu = 0$, $\operatorname{div} \vec{v}_I = \operatorname{div} \vec{w}_I = 0$. Единственность представления вытекает из оценки (3.11).
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

4. Доказательство основных результатов

Доказательство теорем 2.1., 2.2.

Для почти всех $t \in (0,T)$ найдётся единственная функция $\vec{A}_1(t) \in W_1$, при всех $\vec{v} \in W_1$ удовлетворяющая равенству

$$\int_{\Omega_I} (\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{A}_1(t)\cdot \mathrm{rot}\,\vec{v})dx = \int_{\Omega_I} (\vec{J}^{\text{ст}}(t)\cdot\vec{v})dx.$$

Из оценки (3.11) следует, что $\|\mathrm{rot}\,\vec{A}_1(t)\|_{2,\Omega_I} \leq \mu_2 C(\Omega_C;\Omega)\|\vec{J}^{\text{ст}}\|_{2,\Omega}$, то есть $\vec{A}_1 \in L_2(0,T,W_1)$.

Решение задачи (2.9), (2.3) будем искать в виде $\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_1$, где функция $\vec{A}_0 \in L_2(0,T,W_0)$ при всех $\vec{v} \in W_0$ удовлетворяет равенству

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_C} (\sigma\vec{A}_0\cdot\vec{v})dx + \int_{\Omega}(\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{A}_0\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v})dx + \varkappa\int_{\Omega_C}\mathrm{div}\,\sigma\,\vec{A}_0\,\mathrm{div}\,\sigma\,\vec{v}dx = \int_{\Omega}(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{v})dx. \quad (4.1)$$

Пусть $F : W(\sigma;\Omega_C) \to W_0$ – оператор продолжения, определённый в лемме 3.4.. Оператор $G : W(\sigma;\Omega_C) \to W^*(\sigma;\Omega_C)$ ставит в соответствие $\vec{u} \in W(\sigma;\Omega_C)$ элемент пространства $W^*(\sigma;\Omega_C)$ такой, что для всех $\vec{v} \in W(\sigma;\Omega_C)$

$$\langle G\vec{u},\vec{v}\rangle = \int_{\Omega}(\mu^{-1}\mathrm{rot}\,F\,\vec{u}\cdot\mathrm{rot}\,F\,\vec{v})dx + \varkappa\int_{\Omega_C}\mathrm{div}\,\sigma\,\vec{u}\,\mathrm{div}\,\sigma\,\vec{v}\,dx.$$

Билинейная форма $\langle G\vec{u},\vec{v}\rangle$, очевидно, симметрична, непрерывна и коэрцитивна на $W(\sigma;\Omega_C)$ и $G\vec{u} \in L_2(0,T,W^*(\sigma;\Omega_C))$ для $\vec{u} \in L_2(0,T,W(\sigma;\Omega_C))$.

Определим элемент $l \in L_2(0,T,W^*(\sigma;\Omega_C))$ такой, что для $\vec{v} \in W(\sigma;\Omega_C)$ $\langle l,\vec{v}\rangle = \int_\Omega(\vec{J}^{\text{ст}}(t)\cdot F\vec{v})dx$. Таким образом, для $\vec{v} \in W(\sigma;\Omega_C)$ из (4.1) следует равенство

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{A}_{0C},\vec{v}\rangle + \langle G\vec{A}_{0C},\vec{v}\rangle = l(\vec{v}). \quad (4.2)$$

Из теоремы Лионса [15] вытекает, что существует единственная функция $\vec{A}_{0C} \in L_2(0,T,W(\sigma;\Omega_C))$, удовлетворяющая равенству (4.2) при всех $\vec{v} \in W(\sigma;\Omega_C)$ и начальному условию $\vec{A}_{0C}(0) = \vec{a}$. При этом $\vec{A}_{0C} \in C(0,T,\{L_2(\sigma;\Omega_C)\}^3)$, и если $\vec{a} \in W(\sigma;\Omega_C)$, то $\vec{A}'_{0C} \in L_2(0,T,\{L_2(\sigma;\Omega_C)\}^3)$.

Полагаем $\vec{A}_0 = F\vec{A}_{0C}$, $\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_1$, $\vec{A}_C = \vec{A}_{0C}$.

Пусть $\vec{A}$ – разность двух решений задачи (2.9), (2.3), $\vec{A}_C(0) = 0$. Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_C}(\sigma\vec{A}\cdot\vec{A})dx + \int_\Omega(\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A})dx + \varkappa\int_{\Omega_C}(\mathrm{div}\,\sigma\,\vec{A})^2dx = 0,$$

откуда следует, что $\vec{A} = 0$, то есть решение единственное.

Теорема 2.1. доказывается аналогично.

Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 2.3. Пусть $\vec{A} \in L_2(0,T,V)$ – решение задачи (2.8), (2.3), $\vec{A}_\varkappa \in L_2(0,T,W)$ – решение задачи (2.9), $\vec{A}_{\varkappa C}(0) = \vec{A}_C(0) + \vec{q}$, $\vec{q} \in K(\mathrm{rot};\Omega_C)$. Положим $\vec{u} = \vec{A}_\varkappa - \vec{A}$, $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, где $\vec{u}_1 \in L_2(0,T,V)$, $\vec{u}_2 \in L_2(0,T,K(\mathrm{rot};\Omega)\cap W)$. При этом $\mathrm{div}\,\sigma\,\vec{u}_C = \mathrm{div}(\sigma\vec{u}_2)_C = \mathrm{div}(\sigma\vec{A}_\varkappa)_C$ и для всех $\vec{g} \in K(\mathrm{rot};\Omega)\cap W$ $(\sigma\vec{u}_C,\vec{g}_C)_{2,\Omega_C} = ((\sigma\vec{u}_2)_C,\vec{g}_C)_{2,\Omega_C} = ((\sigma\vec{A}_\varkappa)_C,\vec{g}_C)_{2,\Omega_C}$, $\mathrm{rot}\,\vec{u} = \mathrm{rot}\,\vec{u}_1$ и $(\sigma\vec{u}_C,\vec{v}_C)_{2,\Omega_C} = ((\sigma\vec{u}_1)_C,\vec{v}_C)_{2,\Omega_C}$ для всех $\vec{v} \in V$, $\vec{u}_{1C}(0) = 0$.

Из (2.8), (2.9) вытекает, что для всех $\vec{v} \in V$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_C}(\sigma\vec{u}_1\cdot\vec{v})dx + \int_{\Omega}(\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{u}_1\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v})dx = 0,$$

$\vec{u} = \vec{u}_2 \in L_2(0,T,K(\mathrm{rot};\Omega)\cap W)$, то есть $\mathrm{rot}\vec{A}_{\varkappa} = \mathrm{rot}\vec{A}$.

Для всех $\vec{g} \in K(\mathrm{rot};\Omega)\cap W$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_C}(\sigma\vec{u}\cdot\vec{g})dx + \varkappa\int_{\Omega_C}\mathrm{div}\,\sigma\,\vec{u}\,\mathrm{div}\,\sigma\,\vec{g}\,dx = \int_{\Omega}(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{g})dx.$$

Получаем [15], что $\vec{u}_C \in C(0,T,K(\mathrm{rot};\Omega_C))$ и

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_C}(\sigma\vec{u}\cdot\vec{u})dx + \varkappa\int_{\Omega_C}(\mathrm{div}\,\sigma\,\vec{u})^2dx = \int_{\Omega}(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{u})dx.$$

Интегрируя от 0 до $t \le T$ и применяя оценку (3.11), получаем

$$\|\vec{u}(t)\|_{\sigma}^2 + \varkappa\|\mathrm{div}\,\sigma\,\vec{u}\|^2_{2,\Omega_C\times(0,t)} \le C^2(\Omega_C,\Omega)\varkappa^{-1}\|\vec{J}^{\text{ст}}\|^2_{2,Q} + \|\vec{q}\|^2_{\sigma}.$$

Таким образом,

$$\|\vec{A}_{\varkappa} - \vec{A}\|_W \le (C^2(\Omega_C;\Omega)+1)^{1/2}\|\mathrm{div}\,\sigma\,\vec{u}\|_{2,Q} \le$$

$$\le (C^2(\Omega_C;\Omega)+1)^{1/2}\varkappa^{-1/2}(C^2(\Omega_C,\Omega)\varkappa^{-1}\|\vec{J}^{\text{ст}}\|^2_{2,Q} + \|\vec{q}\|^2_{\sigma})^{1/2}.$$

Если $\vec{q} = 0$, для $t \in (0,T)$

$$\|\vec{A}_{\varkappa}(t) - \vec{A}(t)\|_{\sigma} \le C(\Omega_C,\Omega)\varkappa^{-1/2}\|\vec{J}^{\text{ст}}\|_{2,Q}.$$

Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 2.4.

Пусть $\vec{A} \in L_2(0,T,V)$ – решение задачи (2.8), (2.3), где $\vec{a} \in V(\sigma;\Omega_C)$, $\vec{w} \in H(\mathrm{rot};\Omega)$ – произвольная функция. Согласно лемме 3.5., $\vec{w} = \vec{v} + \vec{g}$, где $\vec{v} \in V$, $\vec{g} \in K(\mathrm{rot};\Omega)$. Из (2.8) вытекает, что для почти всех $t \in (0,T)$

$$\int_{\Omega}(\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{w})dx = \int_{\Omega}(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{w})dx - \int_{\Omega}(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{g})dx - \frac{d}{dt}\int_{\Omega_C}(\sigma\vec{A}\cdot\vec{w})dx.$$

Положим, в соответствии с леммой 3.1., $\vec{J}_1 = E_{div}\vec{J}_I^{\text{ст}} \in L_2(0,T,K_0(\mathrm{div};\Omega))$, $\vec{J}_2 = \vec{J}^{\text{ст}} - \vec{J}_1$. Тогда $\vec{J}_{2I} = 0$,

$$\int_{\Omega}(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{g})dx = \int_{\Omega_C}(\vec{J}_2\cdot\vec{g})dx.$$

Получаем $\sigma^{-1}\vec{J}_{2C} = \vec{v}_1 + \mathrm{grad}\,\phi_0$, где $\vec{v}_1 \in L_2(0,T,K_0(\mathrm{div}\,\sigma;\Omega_C))$, $\phi_0 \in L_2(0,T,H^1(\Omega_C))$, $\int_{\Omega_C}\phi_0 dx = 0$. Таким образом,

$$\int_{\Omega_C}(\vec{J}_2\cdot\vec{g})dx = \int_{\Omega_C}(\sigma(\vec{v}_1 + \mathrm{grad}\,\phi_0)\cdot\vec{g})dx = \int_{\Omega_C}(\sigma\,\mathrm{grad}\,\phi_0\cdot\vec{g})dx,$$

$$\int_{\Omega}(\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{w})dx = \int_{\Omega}(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{w})dx - \int_{\Omega_C}(\sigma\,\mathrm{grad}\,\phi_0\cdot\vec{w})dx - \frac{d}{dt}\int_{\Omega_C}(\sigma\vec{A}\cdot\vec{w})dx.$$

Продолжим функции $\sigma\,\mathrm{grad}\,\phi_0$, $\sigma\,\partial\vec{A}/\partial t$ нулём в Ω_I. Тогда $\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{A}\in H_0(\mathrm{rot};\Omega)$, то есть выполнено условие (2.2), причём

$$\mathrm{rot}\,\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}_C=\vec{J}^{\text{ст}}_C-\sigma\,\mathrm{grad}\,\phi_0-\frac{\partial}{\partial t}\sigma\vec{A}_C,\ \mathrm{rot}\,\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}_I=\vec{J}^{\text{ст}}_I.$$

Пусть при почти всех $t\in(0,T)$ функция $\phi_1(t)\in H^1(\Omega_I)$ – решение задачи

$$\mathrm{div}\,\epsilon\,\mathrm{grad}\,\phi_1(t)=0,\ \phi_1(t)|_{\Gamma_C}=\phi_0(t)|_{\Gamma_C},\ \phi_1(t)|_{\Gamma}=0.$$

Тогда $\phi_1\in L_2(0,T,H^1(\Omega_I))$. Определим функцию $\phi\in L_2(0,T,H^1(\Omega))$ соотношениями $\phi_C=\phi_0$, $\phi_I=\phi_1$. По построению, справедливо равенство (2.1), то есть $\vec{A}$, ϕ – решение задачи (2.1)–(2.3).
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.5.

Пусть $\vec{A}\in L_2(0,T,W)$ – решение задачи (2.9), (2.3). Ввиду теоремы 2.3., из доказательства теоремы 2.4. вытекает, что

$$\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}\in H_0(\mathrm{rot};\Omega),\ \mathrm{rot}\,\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}_I=\vec{J}^{\text{ст}}_I.$$

Определим функцию $\phi_0\in L_2(0,T,L_2(\Omega_C))$ соотношением

$$\phi_0=-\varkappa\,\mathrm{div}\,\sigma\vec{A}_C.$$

Пусть $\vec{\psi}\in\{\mathcal{D}(\Omega_C)\}^3$. Тогда $\sigma^{-1}\vec{\psi}=\vec{v}+\vec{g}$, где $\vec{v}\in K_0(\mathrm{div}\sigma;\Omega_C)$, $\vec{g}\in K(\mathrm{rot};\Omega_C)$. Так как $\mathrm{div}\,\vec{\psi}=\mathrm{div}\,\sigma\,\vec{g}$, $\vec{g}\in K_0(\mathrm{div}\,\sigma;\Omega_C)$, то есть $\vec{g}\in W(\sigma;\Omega_C)$.

Пусть $F:W(\sigma;\Omega_C)\to W$ – оператор продолжения, определённый леммой 3.3. Тогда $F\vec{g}\in K(\mathrm{rot};\Omega)\cap W$ и из равенства (2.9) получаем

$$\int_{\Omega_C}\phi_0\,\mathrm{div}\,\vec{\psi}\,dx=\int_{\Omega_C}\phi_0\,\mathrm{div}\,\sigma\,\vec{g}\,dx=-\int_{\Omega}(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot F\vec{g})dx+\frac{d}{dt}\int_{\Omega_C}(\sigma\vec{A}\cdot\vec{g})dx.$$

Для всех $\vec{v}\in V(\sigma;\Omega_C)$ из (2.9) получаем

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_C}(\sigma\vec{A}\cdot\vec{v})dx=\int_{\Omega_C}(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{v})dx-\int_{\Omega_C}(\mathrm{rot}\,\mu^{-1}\mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\vec{v})dx.$$

Пусть, как при доказательстве теоремы 2.4., $\vec{J}^{\text{ст}}=\vec{J}_1+\vec{J}_2$, где $\vec{J}_1\in L_2(0,T,K_0(\mathrm{div};\Omega))$ и $\vec{J}_{2I}=0$. Ввиду плотности $V(\sigma;\Omega_C)$ в $K_0(\mathrm{div}\,\sigma;\Omega_C)$ имеем

$$\int_{\Omega_C}\phi_0\,\mathrm{div}\,\vec{\psi}\,dx=-\int_{\Omega_C}(\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{g})dx-\int_{\Omega_I}(\vec{J}_1\cdot F\vec{g})dx+\frac{d}{dt}\int_{\Omega_C}(\vec{A}\cdot\vec{\psi})dx-\frac{d}{dt}\int_{\Omega_C}(\sigma\vec{A}\cdot\vec{v})dx=$$

$$=-\int_{\Omega_C}(\sigma^{-1}\vec{J}^{\text{ст}}\cdot\vec{\psi})dx+\frac{d}{dt}\int_{\Omega_C}(\vec{A}\cdot\vec{\psi})dx+\int_{\Omega_C}(\sigma^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\vec{\psi})dx.$$

Таким образом,

$$\mathrm{grad}\phi_0=\sigma^{-1}\vec{J}^{\text{ст}}_C-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}_C-\sigma^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}_C.$$

Продолжая ϕ_0 до функции $\phi\in L_2(0,T,H^1(\Omega))$ так же, как при доказательстве теоремы 2.4., получаем утверждение теоремы.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Список литературы

1. A. Alonso Rodriguez, A. Valli, *Eddy current approximation of Maxwell equations*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2010, 347 p.

2. S. Meddahi, V. Selgas, "An H-based FEM-BEM formulation for a time dependent eddy current problem", *App. Num. Math.*, **58** (2008), 1061–1083.

3. L. Arnold, B. Harrach, "A unified variational formulation for the parabolic-elliptic eddy current equations", *SIAM J. Appl. Math.*, **72** (2012), 558–576.

4. O. Biro, A. Valli, "The Coulimb gauged vector potential formulation for the eddy-current problem in general geometry: Well-posedness and numerical approximation", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **196** (2007), 890–904.

5. A. Bossavit, "On the Lorenz gauge", *COMPEL*, **18** (1999), 323–336.

6. T. Chen, T. Kang, G. Lu, L. Wu, "A $(T, \psi) - \psi_e$ decoupled scheme for a time-dependent multiply-connected eddy current problem", *Math. Meth. Appl. Sci.*, **37** (2014), 343–359.

7. A. V. Kalinin, A. A. Tiukhtina, S. R. Lavrova, "Modified Coulomb and Lorenz gauges in the modeling of low-frequency electromagnetic processes", *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, **158** (2016), 012046.

8. А. В. Калинин, А. А. Калинкина, "Квазистационарные начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла", *Вестник Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление*, 2003, № 1, 21–38.

9. A. V. Kalinin, M. I. Sumin, A. A. Tyukhtina, "On the inverse problems of final observation for the system of Maxwell equations in the quasistationary magnetic approximation and stable sequential Lagrange principles of its solution", *Comput. Math. Math. Phys.*, **57**:2 (2017), 18–40.

10. А. В. Калинин, А. А. Калинкина, "Lp-оценки векторных полей", *Известия Вузов. Математика*, 2004, № 3, 26–35.

11. А. В. Калинин, А. А. Тюхтина, "Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями", *Журнал СВМО*, **18**:4 (2016), 119–133.

12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика.* Т. 8: *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1982, 621 с.

13. V. Girault, P. Raviart, *Finite element methods for Navier–Stokes equations*, Springler-Verlag, N.Y., 1986, 374 p.

14. M. Cessenat, *Mathematical methods in electromagnetism: linear theory and applications*, World Scientific, Singapore, 1996, 396 p.

15. R. Dautray, J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technoogy.* V. 5: *Evolution Problems I*, Springer-Verlag, Berlin, 2000, 739 p.

Поступила 8.09.2017

MSC2010 35Q61

Modified gauge conditions for Maxwell equations in quasi-stationary magnetic approximation

© **A. B. Kalinin**[4], **A. A. Tyukhtina**[5], **O. A. Izosimova**[6]

Abstract. The initial-boundary value problem for the Maxwell equations in the quasi-stationary magnetic approximation with magnetic boundary conditions is studied. The case of heterogeneous media containing conductive and non-conductive inclusions is considered. The problem is formulated in terms of vector magnetic and scalar electric potentials. The special gauge conditions (modified Coulomb and Lorenz gauges) that allow to formulate problems of independent determination of vector magnetic potential are proposed. The correctness of the problem statement under general conditions on coefficients is proved. The possibility of Lions' theorem application is proved using estimates for scalar products of vector fields. The relation between solutions of the problems with different gauges is studied. The correspondence between the problem formulation for magnetic vector potential and the initial problem formulation for the vector magnetic potential and scalar electric potential is considered.

Key Words: Maxwell equations, quasi-stationary magnetic approximation, heterogeneous media, vector potential, gauge conditions

References

1. A. Alonso Rodriguez, A. Valli, *Eddy current approximation of Maxwell equations*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2010, 347 p.

2. S. Meddahi, V. Selgas, "An H-based FEM-BEM formulation for a time dependent eddy current problem", *App. Num. Math.*, **58** (2008), 1061–1083.

3. L. Arnold, B. Harrach, "A unified variational formulation for the parabolic-elliptic eddy current equations", *SIAM J. Appl. Math.*, **72** (2012), 558–576.

4. O. Biro, A. Valli, "The Coulimb gauged vector potential formulation for the eddy-current problem in general geometry: Well-posedness and numerical approximation", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **196** (2007), 890–904.

5. A. Bossavit, "On the Lorenz gauge", *COMPEL*, **18** (1999), 323–336.

6. T. Chen, T. Kang, G. Lu, L. Wu, "A $(T, \psi) - \psi_e$ decoupled scheme for a time-dependent multiply-connected eddy current problem", *Math. Meth. Appl. Sci.*, **37** (2014), 343–359.

7. A. V. Kalinin, A. A. Tiukhtina, S. R. Lavrova, "Modified Coulomb and Lorenz gauges in the modeling of low-frequency electromagnetic processes", *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, **158** (2016), 012046.

[4] **Aleksey V. Kalinin**, Associate Professor of the Chair of Mathematical Phisics and Optimal Control, Institute of Informational Technology, Mathematics and Mechanics, N.I. Lobachevsky State University (23 Gagarin Av., Nizny Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8558-0451, avk@mm.unn.ru

[5] **Alla A. Tyukhtina**, Associate Professor of the Chair of Mathematical Modelling of Economical Processes, Institute of Economics and Entrepreneurship, N.I. Lobachevsky State University (23 Gagarin Av., Nizny Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID:http://orcid.org/0000-0001-5723-9256, kalinmm@yandex.ru

[6] **Olga A. Izosimova**, Graduate student, Institute of Informational Technology, Mathematics and Mechanics, N.I. Lobachevsky State University (23 Gagarin Av., Nizny Novgorod 603950, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3865-8281, izosimova93@yandex.ru

8. A. V. Kalinin, A. A. Kalinkina, “[Quasistationary initial–boundary value problems for the system of Maxwell equations]”, *Vestnik Nizhegorod. Gos. Univ. Mat. Model. Optim. Upravl.*, **1** (2003), 21–38 (In Russ.).

9. A. V. Kalinin, M. I. Sumin, A. A. Tyukhtina, “On the inverse problems of final observation for the system of Maxwell equations in the quasistationary magnetic approximation and stable sequential Lagrange principles of its solution”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **57**:2 (2017), 18–40.

10. A. V. Kalinin, A. A. Kalinkina, “Lp-estimates for vector fields”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, **3** (2004), 26–35 (In Russ.).

11. A. V. Kalinin, A. A. Tyukhtina, “[Quasistationary electromagnetic fields in inhomogeneous media with non-conductive and low conductive inclusions]”, *Journal SVMO*, **18**:4 (2016), 119–133 (In Russ.).

12. L. D. Landau, E. M. Lifshits, *Teoreticheskaya fizika [Theoretical Physics]*. V. 8: *Elektrodinamika sploshnykh sred [Electrodynamics of continuous media]*, Nauka, Moscow, 1982 (In Russ.), 621 p.

13. V. Girault, P. Raviart P., *Finite element methods for Navier–Stokes equations*, Springer-Verlag, N.Y., 1986, 374 p.

14. M. Cessenat, *Mathematical methods in electromagnetism: linear theory and applications*, World Scientific, Singapore, 1996, 396 p.

15. R. Dautray, J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technoogy.* V. 5: *Evolution Problems I*, Springer-Verlag, Berlin, 2000, 739 p.

Submitted 8.09.2017